

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
ННІ "Фізико-технічний факультет"
Кафедра фізики ядра та високих енергій імені О.І. Ахієзера

Пояснювальна записка

до дипломного проекту (роботи)

МАГІСТРА

на тему

укр. Аналогія адіабатичної імпульсної моделі і
методу квантової обробки сигналу.

англ. Analogy of quantum signal processing and the adiabatic-impulse model.

Виконала: студентка 2-го курсу

магістратури, групи ТЯ-61

спеціальності 105 прикладна фізика та
наноматеріали

освітня програма: Експериментальна
ядерна фізика та фізика плазми

Шендрик Д. О. _____
(особистий підпис)

Керівник к.ф.-м.н. доц.

Кузнецов П. Е. _____
(особистий підпис)

Консультант PhD

Івахненко О. В. _____
(особистий підпис)

Рецензент к.т.н.

Гордієнко Е. Ю. _____
(особистий підпис)

м. Харків — 2024

ЗМІСТ

ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1 Дворівнева система і методи її описання	7
1.1 Формалізм	10
1.2 Знаходження вірогідності переходу методом К. Зенера .	12
1.3 Метод перехідних матриць і адіабатично-імпульсна модель	14
1.4 Однократне і двократне проходження точки квазіперетину	18
РОЗДІЛ 2 Квантові обчислення	20
2.1 Квантові вентиля	21
2.2 Сингулярне представлення матриці	23
2.3 Алгоритм квантової обробки сигналу	26
РОЗДІЛ 3 Результати	32
3.1 Алгоритм визначення параметрів	32
3.2 Реалізація алгоритму і результати	35
3.3 Симуляція на квантовому комп'ютері	37
ВИСНОВКИ	42
ДОДАТОК А	43
ДОДАТОК Б	45
ДОДАТОК В	46
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	48

АНОТАЦІЯ

Метою цієї роботи було показати аналогію між квантовою обробкою сигналу та адіабатично-імпульсною моделлю, та розробити алгоритм, згідно з яким параметри для методу квантової обробки сигналу визначаються в термінах параметрів адіабатично-імпульсної моделі, застосованої до довільної дворівневої системи, а саме: частота сигналу, амплітуда, фаза Штукельберга, час між імпульсами сигналу. В результаті роботи було створено такий алгоритм, що для цільового набору різниці фаз методу квантової обробки сигналу та амплітуди сигналу розраховує необхідні частоту, кількість Ландау-Зенер-Штукельберг-Майорана (ЛЗШМ) переходів, вірогідність ЛЗШМ переходу залежно від повороту на певний кут навколо осі X, кількості цих поворотів, та кутів повороту навколо осі Z між поворотами навколо осі X. Окрім цього алгоритм був протестований на класичному комп'ютері й трьох різних квантових процесорах з використанням ресурсів хмарних квантових обчислень IBM Quantum. Були отримані профілі флуктуацій для двох наборів фаз і підтверджено, що помилка, що з'являється від шумів, не є достатньо суттєвою для того, щоб вплинути на результат. У цьому дослідженні також було проаналізовано сучасні кубітні системи і їх параметри, що є ключовими для квантових обчислень. Результати цієї роботи можуть бути використані для експериментальних цілей, а саме, параметри збудження дворівневої системи, такі як амплітуда, частота та час початку збуджуючого сигналу виражені саме таким шляхом і пов'язані з дворівневою системою, забезпечують більший ступінь їх розуміння та практичного використання.

ABSTRACT

The aim of this research was to demonstrate an analogy between quantum signal processing and the adiabatic-impulse model and to develop an algorithm whereby parameters for the quantum signal processing method are determined in terms of parameters of the adiabatic-impulse model applied to an arbitrary two-level system, namely: signal frequency, amplitude, Stückelberg phase, and time between signal pulses. As a result, an algorithm was developed, that calculates the required frequency, number of Landau-Zener-Stückelberg-Majorana (LZSM) transitions, LZSM transition probability depending on rotation by a certain angle around the X-axis, number of such rotations, and rotation angles around the Z-axis between X-axis rotations for a target set of phase differences of the quantum signal processing method and signal amplitude. Additionally, the algorithm was tested on a classical computer and three different quantum processors using IBM Quantum cloud quantum computing resources. Fluctuation profiles were obtained for two sets of phases, confirming that the error introduced by noise is not significant enough to affect the results. Furthermore, this study analyzed contemporary qubit systems and their parameters essential for quantum computing. The results of this study can be used for experimental purposes, particularly in expressing excitation parameters of two-level systems, such as amplitude, frequency, and start time of the excitation signal, in a manner closely associated with the two-level system, thereby enhancing their understanding and practical application.

ВСТУП

Квантовий комп'ютер - це новітній тип обчислювального пристрою, який використовує принципи квантової механіки для обробки та зберігання інформації. Концепцію квантового комп'ютера вперше було згадано Річардом Фейнманом у 1981 році [1], де він зазначив, що моделювання навіть простих квантових фізичних систем на звичайному класичному комп'ютері вимагає неймовірного обсягу обчислювальних ресурсів, що робить задачу нерозв'язною, в той час пропонуючи можливе розв'язання цієї проблеми - проведення фізичного експерименту з квантово-механічною системою. Для певних проблем, залежно від типу задачі, квантові комп'ютери вже показують експоненційне прискорення розрахунків з ростом складності в порівнянні з класичними комп'ютерами.

В той час як класичні комп'ютери використовують біти як основні одиниці інформації, квантові комп'ютери використовують кубіти (qubits). Кубіт - це дворівнева квантово-механічна система, яка, відповідно, описується законами квантової механіки. Простими прикладами кубіта є спін електрона в магнітному полі, де двома рівнями слугують протилежні конфігурації спінів; поляризація одного фотона, що може бути горизонтальною або вертикальною.

Основні дві переваги кубітів перед класичними бітами полягають у тому, що перші можуть існувати в кількох станах одночасно, тобто стані суперпозиції, більше того вони можуть бути заплутаними між собою. Перша властивість дозволяє робити більш складні паралельні обчислення, що прискорює вирішення певних типів складних задач порівняно з класичними комп'ютерами, які обробляють інформацію послідовно. Другий ключовий елемент - це квантова заплутаність, що означає, що стан одного кубіта внутрішньо пов'язаний зі станом іншого, навіть коли вони розділені великою відстанню. Це знайшло застосування в контексті квантової телепортації [2].

Ці аспекти дозволяють квантовим комп'ютерам проявляти квантову перевагу над класичними, як було показано на прикладах відомих проблем, таких як факторизація чисел за алгоритмом Шора [3] чи оптимізація різних задач [4, 5]. Це також має великі наслідки для сучасного світу: наприклад, оптимізація алгоритму Шора призведе до відмови від шифрування RSA в міру збільшення можливостей квантових комп'ютерів та створення потреби до нових квантово-стійких методів шифрування, що є невразливими до алгоритмів, що легко розшифровуються квантовими комп'ютерами.

У першому розділі ми наведемо визначення дворівневої системи, загальні відомості щодо таких систем, типи кубітів і вимоги до них, формалізм в якому вони описуються (включаючи підхід Зенера й адіабатично-імпульсну модель).

У другому розділі розглядаються квантові обчислення та їх ключові завдання, проводиться аналіз історичних аспектів у цій галузі та ключові алгоритми які показують перевагу на задачах пошуку, факторизації й симуляції гамільтоніана. Для методу квантової обробки даних приведена проблема знаходження фаз для описання певних многочленів, взаємозв'язок із відомими поліномами та обернена задача.

У третьому розділі, описано алгоритм знаходження фаз для методу квантової обробки даних за допомогою параметрів адіабатично-імпульсної моделі, а також буде показано як розроблені квантові схеми були реалізовані на трьох реальних квантових процесорах та протестовані на квантовому симуляторі, що базуються на ресурсах IBM Quantum. Отримані результати підтвердили, що профілі шумів майже не впливають на правильність сигналів у їх чутливих зонах.

РОЗДІЛ 1

Дворівнева система і методи її описання

Квантова дворівнева система - це система, що описується двовимірним гільбертовим простором і може існувати в суперпозиції двох незалежних квантових станів, які можна фізично розрізнити. Така модель вважається "найпростішою складною квантово-механічною задачею"[6] через те що вона є аналітично вирішувана лише для випадку лінійного збудження і водночас неймовірно важливою, через те, що такі двовимірні системи досить поширені в природі. Загалом, будь-яка послідовна пара рівнів у спектрі утворює ефективну дворівневу систему. Різні типи нейтрино, ізоспіни, стани тунелювання в потенціалі подвійної ями - це приклади як точних, так і добре ізольованих систем з кінцево-вимірним гільбертовим простором. Окрім того, кубіт - це інший термін для дворівневої системи, який є фундаментальним будівельним блоком для квантових обчислень та науки про квантову інформацію, що зараз стрімко розвивається. Вимоги до дворівневих систем що можуть слугувати кубітом були описані Девідом Ді Вінченцо в 1996 і загально відомі як "критерії Ді Вінченцо"[7]:

1. Проста масштабованість і чітке визначення того, що ідентифікується як кубітна одиниця.
2. Здатність ініціалізувати стан кубітів як простий стан у вигляді $|000 \dots\rangle$.
3. Існування "універсального" набору квантових вентилів що підходить до кубіта.
4. Довгі часи декогеренції, що значно довші за характерний час операцій у квантовій схемі.
5. Можливість виміряти стан кубіта.

У таблиці 1.1 ми наведемо декілька актуальних і перспективних систем, які можуть ефективно слугувати кубітом.

Таблиця 1.1

Назва	кубіт	типові розміри	температура
Іонна пастка	енергетичні рівні електронів	~ мкм	млК
Дефекти в діаманті	NV-центр в діаманті	~ від 2 до 10 нм	млК
Надпровідні (джозефсоновські) системи	фазові, потокові, заряджені, трансмон кубіти	~ нм - мм	50 мК
Квантові точки	спін квантової точки	~ 10 нм - 1 мкм	50 мК
Атомні кубіти	ядерний спін	~ 1 Å- 1 мкм	50 мК - 10 К
Графен	валентна зона і зона провідності	~ 1 мкм	кімнатна
Ультрахолодні молекули (мК)	молекулярні стани	~ 1 Å- 40 мкм	0.01 - 100 мК
Класичний резонатор	моди коливань	~ 50 мкм	кімнатна

Іони або заряджені атомні частинки у квантовому комп'ютері на пастках іонів можуть бути зафіксовані за допомогою електромагнітного поля. Кубітами виступають стійкі електронні стани кожного іону, і квантову інформацію можна передавати через спільний квантований рух іонів у спільній пастці. Для стимулювання зв'язку між станами кубітів (для однокубітних операцій) або між внутрішніми станами кубітів та зовнішніми станами руху(для заплутовування між кубітами) використовуються лазери.

У структурах, що використовують дефекти в діаманті атом вуглецю у кристалічній структурі замінюють атомом азоту. Поряд з атомом азоту утворюється вакансія – "дірка" в кристалі – яку займають електрони. За допомогою взаємодії спіну цих електронів з ядерними спінами навколишніх атомів вуглецю та азоту, спін азот-вакансійного (NV) центру та спіни навколишніх ядер можуть бути використані як кубіти. Шляхом маніпулювання цими спінами за допомогою мікрохвиль і радіохвиль можуть бути реалізовані операції квантових вентилів для обчислень.

Джозефсоновські кубіти - це пристрої на основі надпровідного кільця, що складається з декількох джозефсонівських з'єднань. Основна відмін-

ність між типами цих кубітів (фазовий, потоковий, зарядовий) полягає в співвідношенні енергії Джозефсона та енергії заряду (необхідної енергії для заряду всієї ємності в ланцюжку).

Квантова точка - це напівпровідниковий пристрій, який може утримувати один електрон. Коли електрон утримується в квантовій точці, його рівні енергії квантуються, тобто він може мати лише певні дискретні значення енергії. Ці рівні енергії можуть бути контрольовані за допомогою застосування електричного поля до квантової точки.

Атоми є досить натуральним середовищем для кодування кубітів. Хоча зазвичай вони мають в собі більше, ніж два рівні енергії, можливо підготувати, виміряти й контролювати дворівневий підпростір атомних станів за допомогою оптичних технік, які були розроблені протягом останніх 50 років. Оптичний атомний годинник використовує властивості виняткової координати атомів. Наявність добре розроблених технік охолодження та утримання як нейтральних атомів, так і іонів за допомогою електромагнітних пасток, разом з наявністю тривалих часів когерентності, мотивує їх використання як кубітів для квантових обчислень.

Кубіти, базовані на графені використовують джозефсонівські з'єднання, що є тимчасово квантово когерентними.

Збільшення магнітного поля ультрахолодних молекул, що знаходяться в лазерній пастці, призводить до переходу між молекулярними станами, що дозволяє їм бути кубітами.

Електричні класичні резонатори широко використовуються у квантовій обробці інформації, за допомогою створення електромагнітної взаємодії з кубітами на основі реального або віртуального обміну мікрохвильовими фотонами. Ця взаємодія ґрунтується на сильному зв'язку між перехідними моментами диполя кубітів та вакуумними флуктуаціями резонатора, так само як у квантовій електродинаміці відкритих порожнин, і, відповідно, це отримало назву "контурна квантова електродинаміка" (cQED).

1.1 Формалізм

Дворівнева система описується гамільтоніаном у спіновій репрезентації й залежить від двох параметрів ε і Δ

$$\hat{H} = \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_x + \frac{\varepsilon}{2}\hat{\sigma}_z \quad (1.1)$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon/2 & \Delta/2 \\ \Delta/2 & -\varepsilon/2 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

У випадку відсутності Δ потенціал подвійної ями, що є характерним для таких систем буде симетричний відносно локального максимуму, в той час, як присутність цього параметру призведе до асинхронізації рівнів мінімумів і їх розділення на основний (рівень з мінімальною енергією, абсолютний мінімум) і збуджений стани.

Записуючи секулярне рівняння, ми можемо отримати власні значення E_1 та E_2 енергії для гамільтоніана (1.1):

$$E_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}. \quad (1.3)$$

Згідно з Л. Д. Ландау [8], розщеплення енергії, при якому можливо пройти через бар'єр, визначається наступним рівнянням, з якого явно видно як цей параметр залежить від таких первинних параметрів системи як ефективна маса і кругова частота частинки

$$\Delta = \frac{\hbar\omega}{\pi} \exp \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \sqrt{2M(U - U_{min})}, \quad (1.4)$$

де ϕ_1 і ϕ_2 точки повороту в комплексному просторі.

Тепер ми можемо інтерпретувати значення параметрів ε і Δ на графіці 1.1. Параметр Δ відображає енергетичний розрив між двома рівнями

системи. Параметр ε відповідає енергетичному зміщенню. Енергетичний розрив найменший при $\varepsilon = 0$.

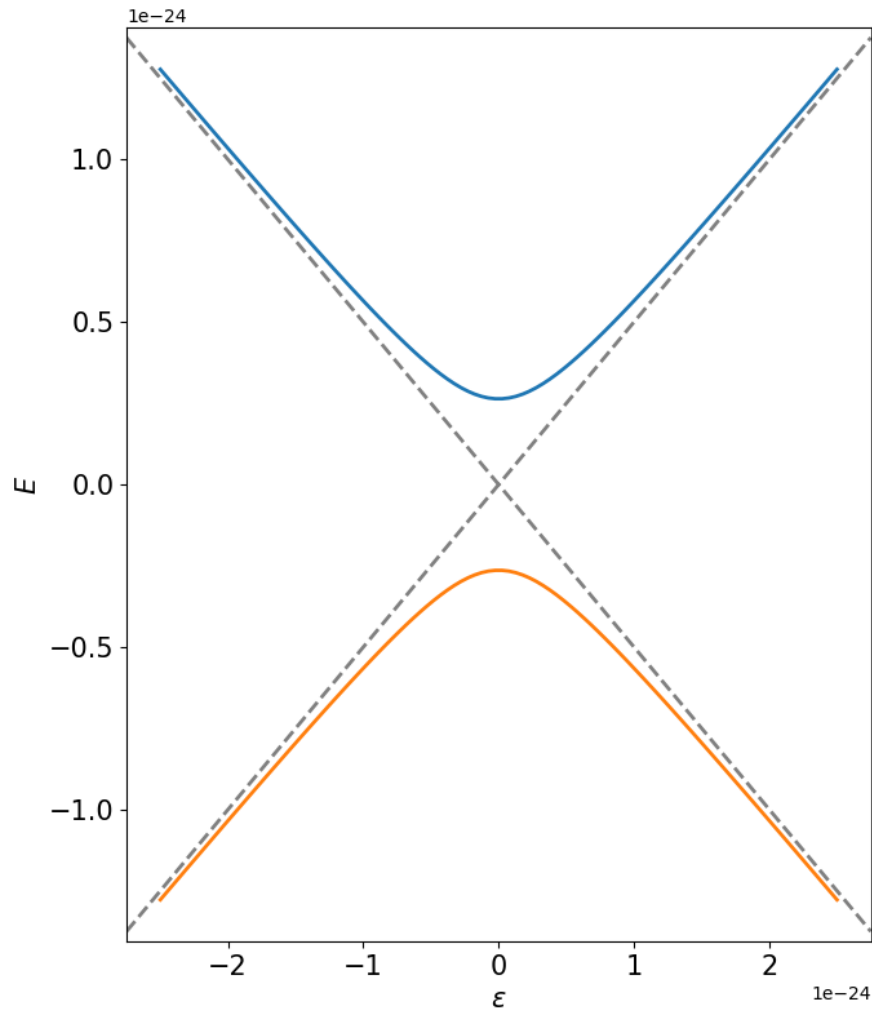


Рис. 1.1: Графік представляє два сусідніх енергетичних рівня, відстань між якими змінюється з часом залежно від параметра відстройки ε . Вони розділені областю, яка називається областю квазіперетину. Верхня суцільна крива відповідає E_+ , а нижня - E_- . Пунктирні лінії представляють $E_{\pm}$ для $\Delta = 0$.

В 1932 Лев Ландау [9, 10], Кларенс Зенер [11], Ернст Штюкельберг [12], і Еttore Майорана [13] незалежно опублікували різні розв'язання задачі про вірогідність знаходження дворівневої системи у збудженому стані з більшою енергією після проходження області квазіперетину, якщо система починає з основного рівня енергії. Вони, використовуючи квазікласичне наближення, рішення диференційного рівняння в термінах спец. функцій, ВКБ наближення і перетворення Лапласа відповідно, і прийшли до насту-

пного результату:

$$P = \exp(-2\pi\delta), \delta = \frac{\Delta^2}{4\hbar\varepsilon}. \quad (1.5)$$

Далі ми детально обговоримо метод, який використовував Кларенс Зенер.

1.2 Знаходження вірогідності переходу методом К. Зенера

У цьому пункті нашою метою є відтворення результатів, спочатку представлених Зенером [11], і, зокрема, тих, що розкриті в статтях [14, 15].

Будемо вважати відстань між енергетичними рівнями Δ постійною в часі, а $\varepsilon = \beta t$ лінійним від часу, де β в цьому випадку - параметр, пов'язаний зі швидкістю частинки, а гамільтоніан системи має стандартний вигляд 1.1.

Хвильова функція в загальному вигляді відображає суперпозицію двох станів і має форму рівняння (1.6), де c_1 та c_2 відповідають ймовірнісним амплітудам

$$|\psi\rangle = c_1|0\rangle + c_2|1\rangle. \quad (1.6)$$

Підставляючи це у нестационарне рівняння Шредінгера, ми отримаємо систему з двох рівнянь:

$$\begin{cases} i\hbar\dot{c}_1 = \frac{\varepsilon}{2}c_1 + \frac{\Delta}{2}c_2, \\ i\hbar\dot{c}_2 = \frac{\Delta}{2}c_1 - \frac{\varepsilon}{2}c_2. \end{cases} \quad (1.7)$$

З цієї системи ми можемо отримати рівняння для ймовірнісних амплітуд c_1 та c_2 , вводячи заміну:

$$c_{1,2}'' + c_{1,2} \left[\frac{\tau^2}{4} + \frac{\omega^2}{2} \mp \frac{i}{2} \right] = 0, \quad (1.8)$$

$$\tau = t \sqrt{\frac{\beta}{\hbar}}, \quad \omega = \frac{\Delta}{\sqrt{2\hbar\beta}}. \quad (1.9)$$

Це звичайне диференціальне рівняння другого рангу, яке можна вирішити в термінах спеціальних функцій, а саме функцій параболічного циліндра D_ν [16, 17]. Процедура знаходження коефіцієнтів c_1 та c_2 показана в Додатку 3.3. Загалом ми використовували асимптотичний розклад [16, 17] та початкові умови відповідно до яких частинка до ЛЗШМ переходу знаходиться у нижньому енергетичному стані, допускаючи, що параметр ε наближається до $-T_0$, де $T_0 \gg 1$ - характерний час системи

$$c_1(-T_0) = 1, \quad c_2(-T_0) = 0. \quad (1.10)$$

Зрештою, як розширенням до підходу Зенера [14, 15], ми можемо знайти ймовірність ЛЗШМ переходу в верхній стан у загальній формі як функцію часу:

$$P(\tau) = \frac{\omega^2}{2} e^{-\pi\omega^2/4} \left| D_{-i\omega^2-1}^2(\tau e^{-3i\pi/4}) \right|. \quad (1.11)$$

Асимптотика при τ , що прямує до T_0 (див. Додаток Б), перетворює цей вираз у відому формулу Ландау-Зенера-Штукельберга-Майорани

$$|c_1(T_0)|^2 = e^{-\pi\omega^2}, \quad |c_2(T_0)|^2 = 1 - e^{-\pi\omega^2}. \quad (1.12)$$

Тут ймовірність $|c_1|^2$ - це ймовірність знаходження частинки у збудже-

ному стані після проходження точки квазіперетину, а $|c_2|^2$ відповідає частинці, знайдений в основному стані. У роботах Зенера у 1932 році було отримано лише ймовірність далеко від точки квазіперетину.

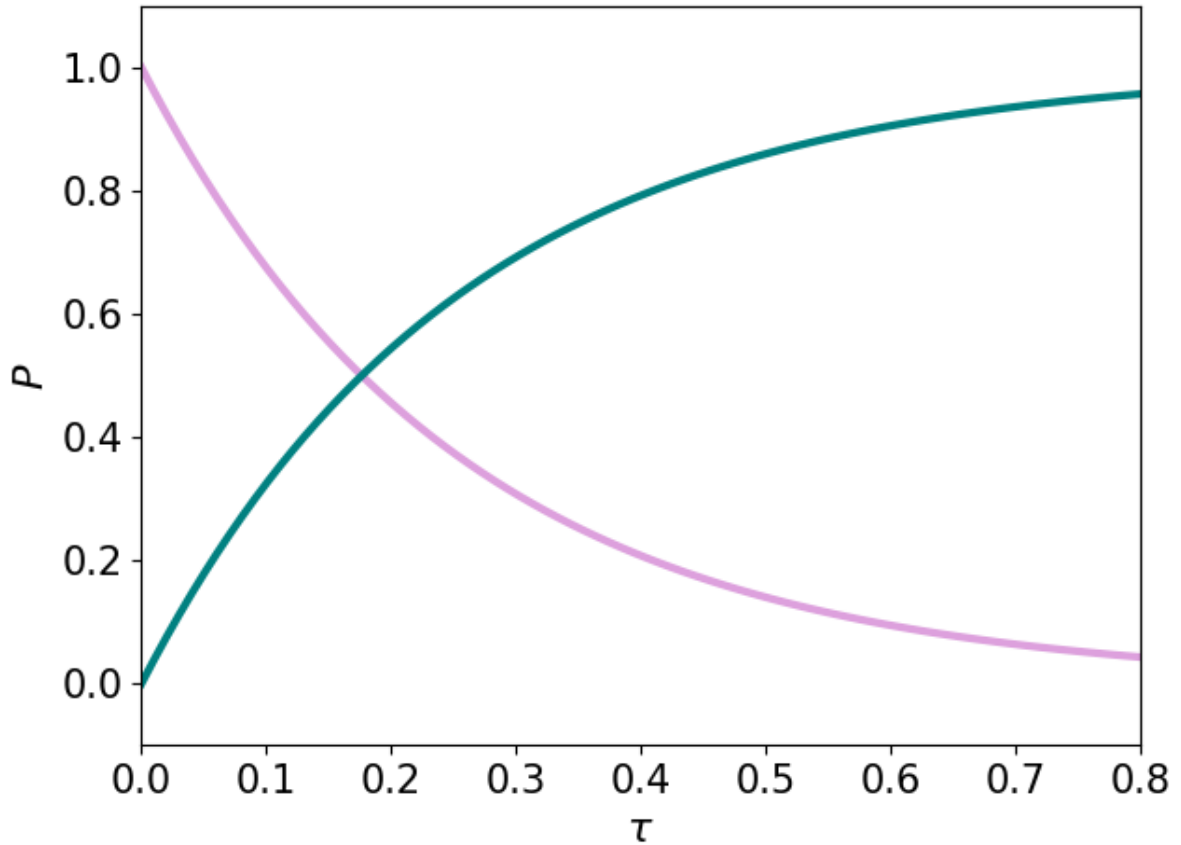


Рис. 1.2: Зелена крива показує ймовірність знаходження частинки в нижньому енергетичному стані, а фіолетова крива представляє ймовірність того, що частинка опиниться у збудженому стані. Були використані типові експериментальні параметри, такі як $\Delta/\hbar \sim 5\text{ГГц}$, і $\varepsilon/\hbar \sim 10\text{ГГц}$ [18].

Для повільних змін параметр адіабатичності $\omega \ll 1$, оскільки $\omega \sim (\varepsilon)^{-1} \sim \tau$, система еволюціонує адіабатично і в основному знаходиться в нижньому енергетичному стані (зелена крива на графіку 1.2). Для швидких змін, $\omega \gg 1$, що відповідає діабатычній еволюції, частинка переважно знаходиться в збудженому стані.

1.3 Метод перехідних матриць і адіабатично-імпульсна модель

Адіабатично-імпульсна модель - це відомий метод апроксимації у квантовій механіці що активно використовується в галузі квантових адіабати-

чних обчислень [19], що використовується для повільно еволюціонуючих систем і каже наступне: поступові зміни умов дозволяють системі адаптувати свою конфігурацію, тому ймовірнісна щільність не змінюється під час процесу; якщо система починає еволюцію у власному стані початкового гамільтоніана, вона закінчує еволюцію у відповідному власному стані кінцевого гамільтоніана. Якщо гамільтоніан змінюється, але не достатньо повільно, адіабатичне наближення перестає бути застосовним, і відбуваються переходи між миттєвими власними станами. Такі переходи називаються діабатичними ЛЗШМ переходами. Модель Ландау-Зенера-Штукельберга-Майорани вважається найпростішою і корисною моделлю діабатичного переходу в нестационарній дворівневій системі. Динаміка таких діабатичних ЛЗШМ переходів привернула значну увагу в різних галузях та фізичних системах.

Загалом розв'язання рівняння Шредінгера для нестационарної багаторівневої системи породжує системи диференціальних рівнянь, що є складно розв'язувати аналітично, в той час, як аналіз динаміки з використанням адіабатично-імпульсної моделі, дозволяє аналізувати динаміку аналітично [18, 20]. Це наближення передбачає, що система еволюціонує адіабатично, за винятком випадків, коли енергетичний розрив стає невеликим, і діабатичний перехід відбувається миттєво.

Відповідне рівняння Шредінгера, де $E_{\pm}$ - це власні функції гамільтоніана:

$$H(t) |\psi_{\pm}(t)\rangle = E_{\pm}(t) |\psi_{\pm}(t)\rangle. \quad (1.13)$$

Використовуючи нестационарне рівняння Шредінгера і початкові умови у вигляді $|\psi_{\pm}(t = t_i)\rangle = |\psi_{i\pm}\rangle$ ми отримуємо рівняння еволюції хвильових функцій верхнього та нижнього енергетичних рівнів:

$$|\psi_{\pm}(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^t E_{\pm}(t') dt'\right) |\psi_{i\pm}\rangle = \exp(\mp i\zeta) |\psi_{i\pm}\rangle. \quad (1.14)$$

Звідси видно, що під час еволюції дворівневої системи, хвильова функція накопичує фазу $\exp(\mp i\zeta)$.

Використовуючи умову повноти $|\psi(t)\rangle = \sum_{\pm} a_{\pm}(t) |\psi_{\pm}(0)\rangle$, знайдемо оператор адіабатичної еволюції на проміжку часу $t_i - t_f$:

$$\zeta(t_f) = \zeta(t_f) - \zeta(t_i) + \zeta(t_i) = \zeta(\Delta t) + \zeta(t_i) \rightarrow |\psi(t_f)_{\pm}\rangle = e^{\mp i\Delta\zeta} |\psi(t_i)_{\pm}\rangle. \quad (1.15)$$

В результаті цих підстановок отримуємо оператор адіабатичної еволюції дворівневої системи - нестационарну матрицю, де фаза $\zeta(t_i, t_j)$ накопичується під час адіабатичної еволюції системи

$$|\psi(t_f)\rangle = U(t_f, t_i) |\psi(t_i)\rangle, \quad (1.16)$$

$$|\psi(t)\rangle \equiv \begin{pmatrix} |\psi_+(t)\rangle \\ |\psi_-(t)\rangle \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

$$\zeta(t_i, t_j) = \frac{1}{2\hbar} \int_{t_i}^{t_j} \Delta E(t) dt, \Delta E(t) = \sqrt{\varepsilon(t)^2 + \Delta^2} \quad (1.18)$$

$$U(t_i, t_j) = \begin{pmatrix} e^{-i\zeta(t_i, t_j)} & 0 \\ 0 & e^{i\zeta(t_i, t_j)} \end{pmatrix} = e^{-i\zeta\sigma_z} = R_z(2\zeta). \quad (1.19)$$

Тут $R_z(\phi)$ - це квантовий вентиль, що асоціюється з фазою і описує обертання навколо осі z , а σ_z - одна з трьох матриць Паулі.

Діабатичний перехід описується наступною матрицею, де T і R коефіцієнт переходу і відбиття відповідно, ϕ_s - фаза Стокса:

$$N = \begin{pmatrix} Re^{-i\phi_s} & -T \\ T & Re^{-i\phi_s} \end{pmatrix} = R_z(\phi_s)R_x(\theta)R_z(\phi_s), \quad (1.20)$$

де θ - кут повороту відносно осі X. Згідно адіабатично-імпульсної моделі, еволюція системи є адіабатичною до і після ЛЗШМ переходу, в той час, коли сам перехід відбувається швидко й еволюція буде описуватися діабаатично. В такому разі, повна еволюція системи зі стану 1 до стану 2 виглядає наступним чином:

$$U_{LZSM} = U_2 N U_1 = \begin{pmatrix} U'_{11} & U'_{12} \\ -U'^*_{12} & U'^*_{11} \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

$$U'_{11} = R_1 e^{-i(\phi_{st} + \zeta_1 + \zeta_2)} \quad (1.22)$$

$$U'_{12} = -T_1 e^{i(\zeta_1 - \zeta_2)}. \quad (1.23)$$

Для випадку, коли адіабатична еволюція відбувається симетрично до і після ЛЗШМ переходу, еволюція системи може бути представлена як:

$$U_{LZSM} = U N U = \begin{pmatrix} Re^{-i(\phi_{st} + 2\zeta)} & -T \\ T & Re^{i(\phi_{st} + 2\zeta)} \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

Аналогічно, вона може бути переписана у вигляді добутку квантових вентилів повороту, докладніше які будуть описані у наступному розділі

$$U_{LZ} = R_z(\phi_s + 2\zeta_1)R_x(\theta)R_z(\phi_s + 2\zeta_1). \quad (1.25)$$

Метод описаний вище називається методом перехідних матриць. Він слугує основою для описання системи в рамках адіабатично імпульсної мо-

делі. В рамках цього опису були введені матриці U , що описують адіабатичну еволюцію і матриці N , що відповідно описують діабатичну еволюцію. Маючи це, можливо зробити опис еволюції дворівневої системи. Далі ми продемонструємо як використовувати метод перехідних матриць в рамках адіабатично імпульсної моделі на прикладах дворівневої системи з одним проходженням точки квазіперетину, двома і n -проходженнями.

1.4 Однократне і двократне проходження точки квазіперетину

Незалежно від кількості точок квазіперетину, які перетинаються в результаті еволюції дворівневої системи, розрізняють два типи опису таких переходів, а саме: опис еволюції починається в точці квазіперетину або далеко від неї. В цій роботі буде використовуватися опис відповідно до другого варіанту, де еволюція буде починатися далеко від точки квазіперетину, і, відповідно, закінчуватися так само на великій відстані в регіоні адіабатичної еволюції.

Для таких умов матриці еволюції однократне і двократне проходження відповідно будуть мати наступний вигляд:

$$U_{single} = \sqrt{U_2} N \sqrt{U_1}, \quad (1.26)$$

$$U_{double} = \sqrt{U_3} N^{inv} U_2 N \sqrt{U_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12}^* & a_{11}^* \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

де елементи матриці для подвійного проходження представлені наступним чином:

$$a_{11} = (R_1 R_2 e^{-i(\phi_{st1} + \phi_{st2} + 2\zeta_2)} + T_1 T_2) e^{i(\zeta_2 - \zeta_1 - \zeta_3)}, \quad (1.28)$$

$$a_{12} = (R_1 T_2 - T_1 R_2 e^{-i(\phi_{st1} + \phi_{st2} + 2\zeta_2)}) e^{i(\phi_{st1} + \zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3)}. \quad (1.29)$$

Для симетричної еволюції остання матриця спрощується до наступної:

$$\sqrt{U_2} N^{inv} U_1 N \sqrt{U_2} = \begin{pmatrix} -R^2 e^{-2i(\phi_{st} + 2\zeta)} - T^2 & -2iRT \sin(\phi_{st} + \zeta) \\ -2iRT \sin(\phi_{st} + \zeta) & -R^2 e^{2i(\phi_{st} + 2\zeta)} - T^2 \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

Тут збільшення індексу матриці U відповідає еволюції системи в часі, де U_1 - це матриця адіабатичної еволюції на початку еволюції і U_3 в її кінці, відповідно. Крайні матриці записані під коренем, що означає, що для крайніх точок буде взята тільки половина від часу між відповідними точками квазіперетину, для того, щоб адитивність таких ЛЗШМ переходів могла бути коректна описана. N^{inv} відповідає тому, що відповідність діабатычних та адіабатичних рівнів енергії змінюється на протилежну, тому в описі з n -проходженнями чергуються N і N^{inv} , а між ними завжди є оператор U .

РОЗДІЛ 2

Квантові обчислення

У квантових обчисленнях виділяють три важливі концептуальні сфери, де квантові комп'ютери демонструють значні переваги над традиційними обчислювальними системами: **факторизація**, **симуляція** та **пошук** (задача аналогічна задачі оптимізації) тощо. Ці напрямки розвитку ґрунтуються на внеску відомих піонерів, серед яких виділяються імена Девіда Дойча, Річарда Йोजе [21], Ітана Бернштейна і Умеша Вазирані [22] та багатьох інших. Так само і сучасні моделі квантових обчислень базуються на працях групи відомих вчених і розвивають їх, а саме, алгоритм факторизації, запропонований Пітером Шором [3], є ключовим в криптографії. Квантові симуляції, ідеї яких виникли від Сета Ллойда [23] та перші озвучені Річардом Фейнманом [1], дозволяють моделювати складні квантові системи. Квантовий пошук, на основі алгоритму Лова Ґровера [24], може значно прискорити процес знаходження оптимальних рішень в обширних обсягах даних. Далі ми наведемо формулювання цих проблем.

1. Проблема пошуку й алгоритм Ґровера:

$$\text{Дано } a \in [0, 2^n - 1] \text{ і } U|a\rangle = \begin{cases} -|a\rangle, & \text{якщо } a = a_0 \\ |a\rangle, & \text{інше} \end{cases}, \text{ задача знайти } a_0. \quad (2.1)$$

Є неструктурований список або база даних a , де треба знайти елемент a_0 . Оракул U змінює фазу елемента a_0 .

2. Проблема симуляції:

$$\text{Дано } H = \sum_k H_k, \text{ задача апроксимувати } U = \exp(-iHt). \quad (2.2)$$

Дано гамільтоніан і треба просимулювати або апроксимувати оператор часової еволюції, де H - ермітовий оператор.

3. Проблемам факторизації:

Дано U , таке що $U|x\rangle = |a \cdot x \bmod N\rangle = e^{i\lambda}|x\rangle$, задача знайти λ . (2.3)

Задано унітарний оператор U , який здійснює операцію множення за модулем n , де n - ціле число, що являє собою добуток двох простих чисел, і де A - інше число, яке взаємно просте з n . Мета: знайти множники n , тобто цілі числа p і q , такі, що $n = pq$. Якщо можливо високою ймовірністю знайти власне значення оператора U , то це дозволить знайти множники n .

Ці три фундаментальні проблеми виглядають дуже різними: проблема пошуку - це поодинокі обертання кубіта у багатовимірному просторі; симуляція полягає у відображенні ермітового оператора в унітарний оператор; проблема факторизації містить знаходження фаз власних значень, але далі будемо показано, що їх може бути об'єднано в рамках одного описання.

2.1 Квантові вентиля

Квантовий венти́ль - це елементарна квантова схема, яка робить певну операцію з одним чи декількома кубітами. Вони є аналогами класичних логічних операцій для квантових комп'ютерів. Квантові логічні вентиля є оборотними, на відміну від багатьох класичних логічних венти́лів. Так всі квантові вентиля задаються унітарними матрицями.

Нижче, ми обговоримо квантові вентиля, що будуть згадуватися в роботі.

Три вентиля повороту Паулі, R_x , R_y та R_z , повертають вектор стану на довільний кут навколо відповідної вісі на сфері Блоха. Сфера Блоха - варіант представлення гільбертового простору дворівневої системи де полюси

відповідають базисним станам 0 та 1, а кут відповідає різниці фаз між станами кубіту. Вісь Z відповідає за заселеність відповідних станів кубіту. Екватор являє собою максимальну суперпозицію коли заселеність обох рівнів еквівалентна.

Вентилі повороту генеруються шляхом взяття експонент від матриць Паулі, ураховуючи їх унітарність:

$$\begin{aligned} \exp(i\theta\sigma_i) &= \mathbb{I} + i\theta\sigma_i - \frac{\theta^2}{2!}\mathbb{I} - i\frac{\theta^3}{3!}\sigma_i - \frac{\theta^4}{4!}\mathbb{I} - i\frac{\theta^5}{5!}\sigma_i + \dots \\ &= \cos\theta\mathbb{I} + i\sin\theta\sigma_i := R_i(2\theta), \quad i \in x, y, z. \end{aligned} \quad (2.4)$$

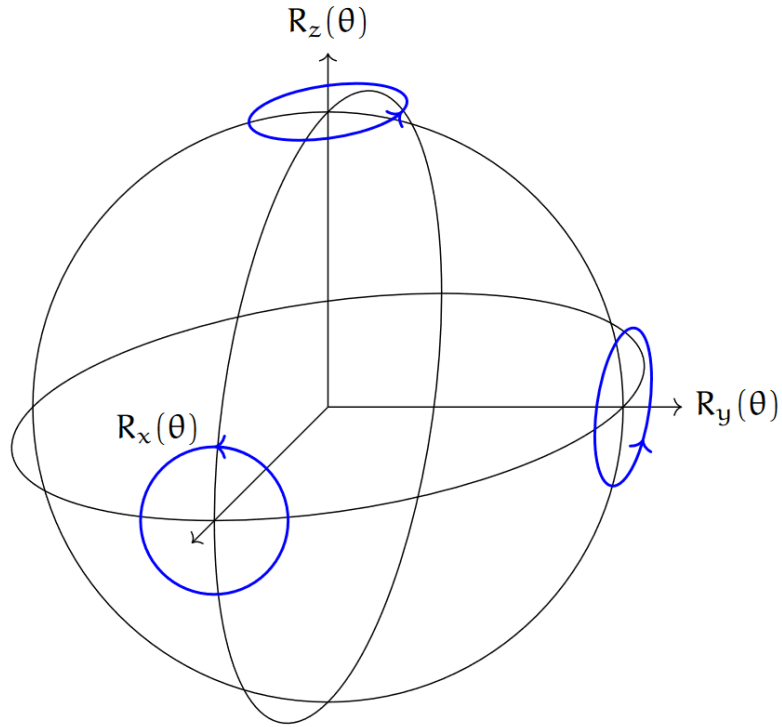


Рис. 2.1: Дія вентилів R_x , R_y та R_z на сфері Блоха.

R_x **вентиль** відповідає за поворот на θ радіан проти годинникової стрілки відносно осі x на сфері Блоха:

$$R_x(2\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -i \sin \theta \\ -i \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

R_y **вентиль** відповідає за поворот на θ радіан проти годинникової стрілки відносно осі y на сфері Блоха:

$$R_y(2\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

R_z **вентиль** відповідає за поворот на θ радіан проти годинникової стрілки відносно осі z на сфері Блоха:

$$R_z(2\theta) = \begin{bmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2i\theta} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Матриці Паулі можна отримати використанням відповідного до індексу матриці R вентиля з аргументом π .

2.2 Сингулярне представлення матриці

Сингулярне представлення матриці (СПМ) - це розклад довільної матриці A розмірності $m \times n$ у вигляді добутку трьох матриць

$$A = U' \Sigma V^\dagger, \quad (2.8)$$

де U' і $V^\dagger$ квадратні унітарні матриці, а Σ - діагональна матриця. Таким чином, трансформація одного векторного простору за допомогою матриці A в інший векторний простір може бути розділений на три етапи (див. рис 2.2). Нехай існує певний векторний простір: перший етап відповідає

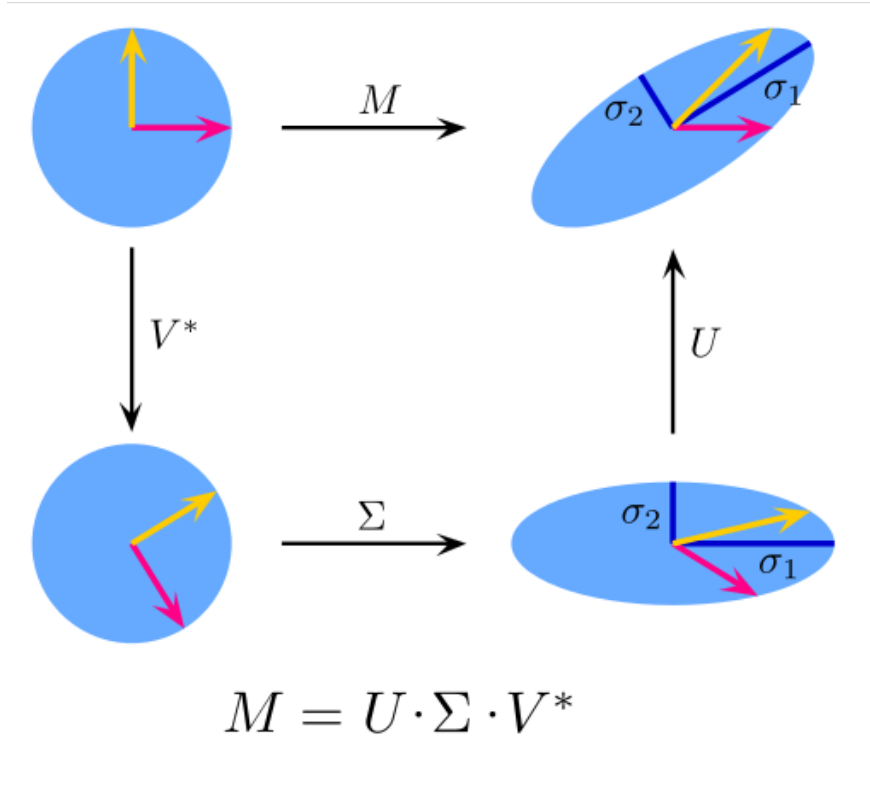


Рис. 2.2: Візуалізація СПМ двовимірної, дійсної матриці M [25].

повороту за допомогою матриці $V^\dagger$. Наступний етап це стискання цього простору матрицею Σ , оскільки це діагональна матриця. Фінальний етап - це ще один поворот за допомогою дії матриці W . Діагональні елементи матриці Σ відомі як сингулярні значення матриці M . Стовпчики U' та V називаються ліво-сингулярними векторами та право-сингулярними векторами матриці M , відповідно. Такий концепт сингулярних значень і розкладів сингулярних значень надзвичайно корисний для різноманітних галузей (машинне навчання, колаборативна фільтрація і т.д..) В реалізації квантових процесів сингулярні значення та розклади сингулярних значень можуть мати вирішальне значення. Одна з ключових причин полягає в тому, що метод сингулярного розкладу працює з будь-якими матрицями, а не лише з унітарними або квадратними. Важливим аспектом є те, що діагональні елементи, які містять сингулярні значення, лежать в діапазоні від 0 до 1 та є позитивними числами, не перевищуючи одиниці. Це дозволяє асоціювати їх з ймовірностями вимірювань квантово-механічних схем.

Особливу увагу приділяється теоремі, що пов'язана з СПМ [26]:

Кожна площина, визначена спільною парою лівого та правого сингулярних векторів, може керуватися незалежно, як окремі кубіти та без рахування СПМ.

Основна перевага тут в тому, що розрахунки пов'язані з СПМ для великих матриць стають занадто складними.

Інша важлива пов'язана з цим теорема звучить наступним чином:

Кожне сингулярне значення може бути представлене довільним поліномом.

У випадках де розрахунки сингулярних значень необхідні, це дозволяє незалежно для кожного сингулярного значення підбирання відповідного многочлена, що також набагато спрощує їх обрахунок.

З використанням двох теорем приведених вище, проблем пошуку, симуляції і факторизації можуть бути переформульовані наступним чином:

1. Проблема пошуку. Нехай дано початковий стан $|s\rangle$ і цільовий стан $|t\rangle$, що в контексті СПМ будуть сингулярними значеннями. Тоді сингулярним значенням буде певне $c = \langle s|t\rangle$. Таким чином цільовою трансформацією за допомогою многочлена буде така, що перетворює значення c в одиницю.

2. У проблемі симуляції, для ермітової матриці H сингулярні значення збігаються з власними значеннями. Отже, сингулярні вектори є власними станами енергії, а сингулярні значення - власними значеннями енергії. Для отримання оператора еволюції необхідно обчислити косинус та синус H , а потім перевести в експоненційну форму.

3. Факторизація передбачає отримання матриці, для якої треба знайти власні значення λ . Сингулярні значення матриці - це квадратний корінь з квадратів власних значень матриці. Отже, один спосіб перейти від власних значень до сингулярних значень, які надасть вам цей алгоритм, полягає в обчисленні $(I + U'^{\dagger})(I + U')$ в суперпозиції. Тоді сингулярні значення будуть косинусом фаз власних значень, і знаючи це, можливо визначити, що таке

лямбда.

Цей метод є надзвичайно важливим завдяки його універсальності описання більшості стандартних проблем у квантових обчисленнях.

2.3 Алгоритм квантової обробки сигналу

Квантова обробка сигналу - це квантовий алгоритм, що використовується для підвищення чутливості сигналу до специфічних входних параметрів методу [27]. Як приклад, алгоритм може бути використаний для підсилення слабких сигналів за межами статистики повторення та пригнічення шумів без прямого вимірювання. Ця методика широко використовується в ядерно-магнітному резонансі [28].

Алгоритм полягає в використанні послідовності одиничних поворотів стану кубіта на сфері Блоха навколо осей X та Z .

Традиційно, квантовий вентиль який відповідає за обертання навколо осі X позначається W і називається оператор оберту сигналу, а вентиль відповідаючий за обертання навколо осі Z - оператор оберту обробки сигналу. Таким чином, для числа $a = \cos \theta \in [-1; 1]$ оператори виглядають наступним чином:

$$W(a) = e^{i\theta X} = \begin{pmatrix} a & i\sqrt{1-a^2} \\ i\sqrt{1-a^2} & a \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$$S(\phi) = e^{i\phi Z}, \quad \Phi := (\phi_0, \dots, \phi_d) \in \mathbb{R}^{1+d}. \quad (2.10)$$

Таким чином, для набору фаз $\Phi = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$ оператор U , який зображає еволюцію в алгоритмі квантової обробки сигналу визначено як послідовне використання двох вентилів вище:

$$U_{\phi,a} = e^{i\phi_0 Z} \prod_{k=1}^n W(a) e^{i\phi_k Z} \in SU(2). \quad (2.11)$$

Наразі відомо, що в сучасних квантових схемах всі операції (вентилі) повинні бути унітарними, що стало проблемою, оскільки більшість фізичних явищ описуються в термінах поліноміальних функцій $f(a)$, які в загальному не є унітарними. Особливістю алгоритму квантової обробки сигналу є те, що маючи певний цільовий поліном розмірності d , який не є унітарним і який відповідає певним властивостям (теорема 2.3.1.), можна виразити через оператор $U_{\phi,a}$, який своєю чергою вже є унітарним і може використовуватися у квантових симуляціях для розв'язання певних задач:

$$Re[U_{\phi,a}] = f(a), \quad a \in [-1; 1]. \quad (2.12)$$

В загальному випадку змінюючи кількість фаз і їх вигляд за допомогою методу КОС можна отримати будь-яку симетричну форму сигналу, чутливу до необхідних комбінацій кутів повороту.

Теорема 2.3.1. Gilyen-Su-Low-Wiebe про властивості полінома $f(a)$ [26] :

Якщо $\|f(a)\|_{\infty} = \max_{a \in [-1; 1]} |f(a)| \leq 1$ і $f(a) \in \mathbb{R}_d[a]$ має парність $d \bmod 2$, то існує фазовий множник $\Phi \in \mathbb{R}^{1+d}$.

Так алгоритм Гровера в проблемі пошуку може бути реалізовано через метод обробки сигналу. Припустимо, що ми розпочинаємо зі стану суперпозиції між усіма елементами в масиві даних, де $\theta = \arcsin \langle \psi_0 | a_0 \rangle =$

$\arcsin 1/\sqrt{N}$, де необхідно знайти a_0 .

$$|\psi_0\rangle = \sin \theta |a_0\rangle + \cos \theta |a_\perp\rangle \quad (2.13)$$

Наступним кроком, відповідно до алгоритму, буде дія оракула U' , що поді-
явши на шуканий стан змінить його фазу. Геометрично це відповідає від-
ображенню стану $|\psi_0\rangle$ відносно $|a_\perp\rangle$.

$$U|\psi_0\rangle = -\sin \theta |a_0\rangle + \cos \theta |a_\perp\rangle \quad (2.14)$$

Нарешті, використовується додаткове відображення відносно стану $|\psi_0\rangle$:
 $U'_s = |\psi_0\rangle\langle\psi_0| - \mathbf{I}$. Трансформація $U'_s U$ повертає початковий стан ближче
до шуканого, а дію цього відображення можна розуміти як відображення
відносно середньої амплітуди. Оскільки середня амплітуда була знижена
при першому відображенні, це перетворення збільшує негативну ампліту-
ду $a_\perp$ приблизно в три рази більше її початкового значення, в той час,
як інші амплітуди зменшуються. Потім повторюється крок 2. Цю проце-
дуру буде повторено кілька разів для точного визначення шуканого стану.
Виявляється, що алгоритм Гровера можна переписати в термінах методу
квантової обробки даних, а саме $W(\theta)$ виявляється еквівалентним операції
оракула U , а $R_{(\pi)} = Z$ еквівалентна дії оператора U'_s . В роботі [29] було
показано, що якщо для фаз використовувати поліноми Чебишова, це зна-
чно пришвидшує алгоритм Гровера. Цей результат підкреслює значущість
та ефективність алгоритму КОС у розв'язанні проблем пошуку, ілюстру-
ючи його ключову роль у вдосконаленні процесів інформаційного пошуку
та аналізу.

Далі буде продемонстровано декілька прикладів щодо того, як за допо-
могою умови 2.12 можуть бути знайдені фази, що задовільняють цільовим
поліномам.

Приклад 1. Поліном Чебишова першого роду

Розглянемо задачу, де цільовим поліномом буде поліном Чебишова першого роду, тобто

$$f(a) = T_d(a) = \cos(d \arccos(a)). \quad (2.15)$$

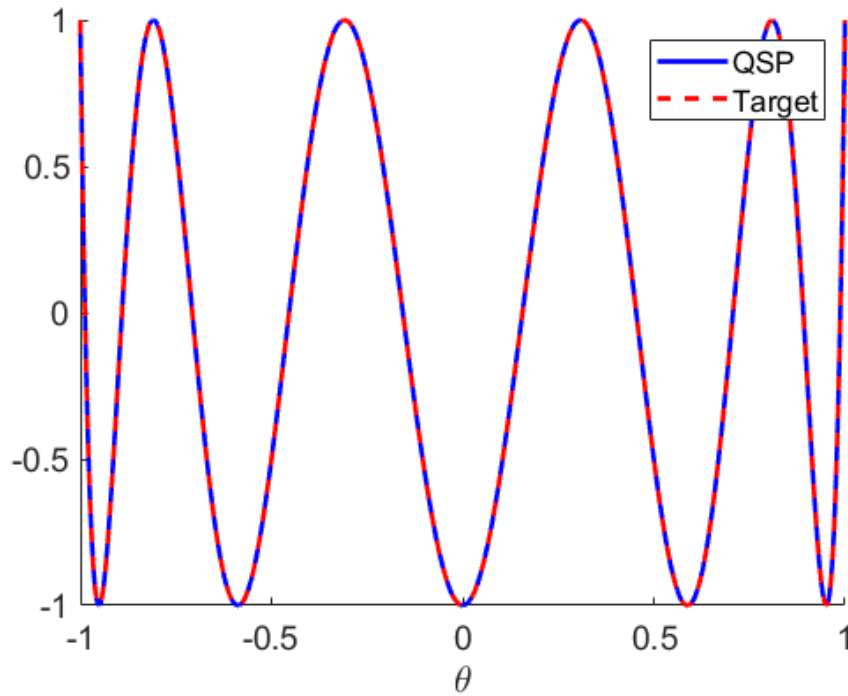


Рис. 2.3: Повний збіг полінома Чебишова першого роду (помилка пропорційна 10^{-14}) і його квантового аналога.

Тоді вибір $\Phi := (\phi_0, \dots, \phi_d) = (0, \dots, 0)$ з підстановкою в формулу 2.11 задовільняє поліноміальну умову 2.12 і за допомогою алгоритму квантової обробки сигналу можливо створити вентиль, який точно відображає поліном Чебишова першого роду (рис. 2.3).

Приклад 2. Нульовий вектор

Наступним прикладом ми розглянемо задачу з найпростішим цільовим поліномом $f(a) = 0$, але симуляція такого полінома на квантовому комп'ютері теж нетривіальна задача, оскільки він працює тільки з унітарними елементами.

Для цього поліному умова 2.12 буде задовольнятися з $\Phi := (\pi/4, 0, \dots, 0, \pi/4)$, перетворюючи 2.11 в $U_{\phi,a} = i \cos d\theta$.

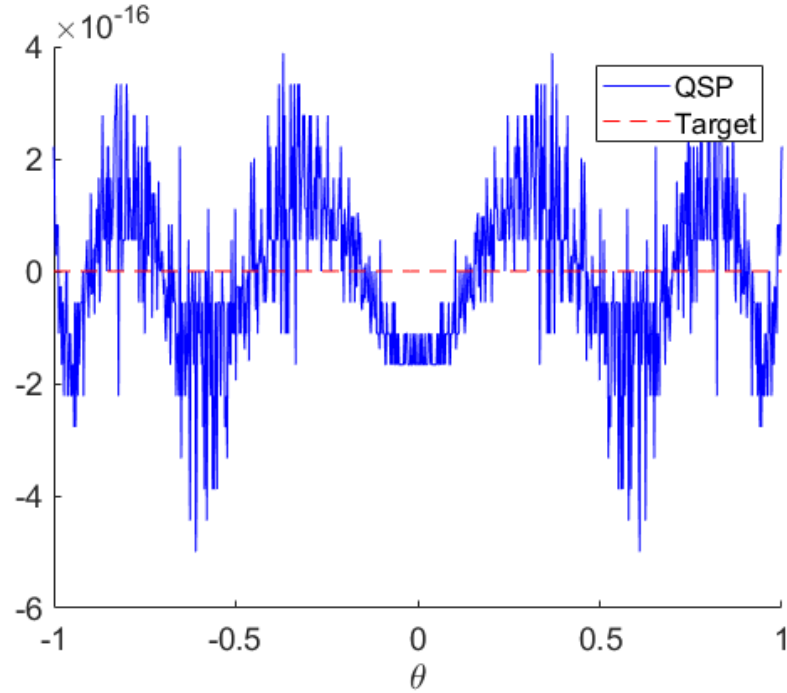


Рис. 2.4: Малі флуктуації сигналу, отриманого за допомогою алгоритму, біля нуля, що пропорційні порядку 10^{-16} .

Приклад 3. Поліном Чебишова третього роду

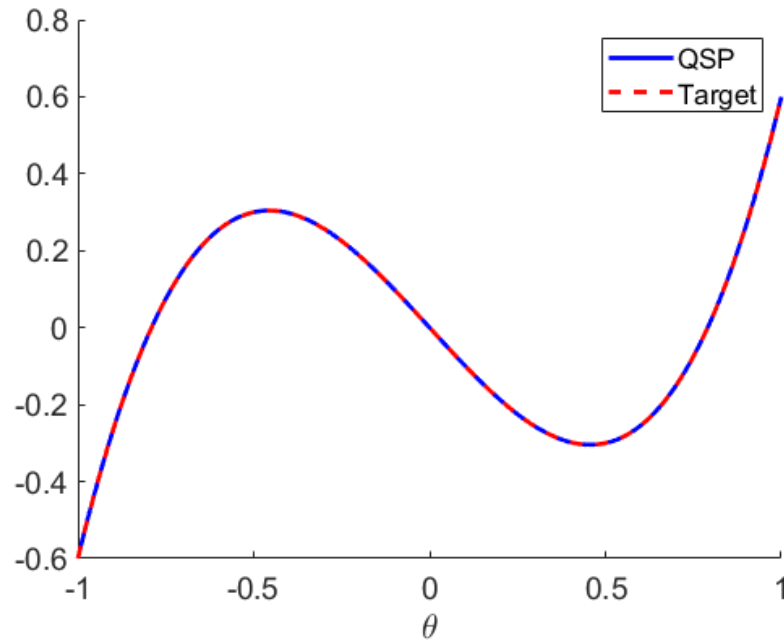


Рис. 2.5: Повний збіг лінійної комбінації полінома Чебишова (помилка пропорційна 10^{-14}) і її квантового аналога.

Для лінійної комбінації поліномів Чебишова $f(\theta) = 0.2T_1(\theta) + 0.4T_3(\theta)$, фази, отримані ітеративним методом Ньютона за допомогою чисельного алгоритму [30], будуть мати наступний вигляд

$$\Phi := (0.5768, -0.1132, -0.1132, 0.5768).$$

Таким чином, задача зі створення квантового вентиля, що буде відповідати певному процесу, що характеризується відомим поліномом зводиться до задачі зі знаходження необхідних фазових множників. Протягом минулих 5 років було досягнуто великого прогресу у розв'язанні цієї задачі, а саме

- В роботах [26, 31] було розроблено метод по знаходження фазових множників за допомогою розрахунку коренів з поліномів високих степенів з високою точністю;
- "Capitalization"[32];
- "Prony's method"[33];
- ітеративний метод Ньютона [34];

РОЗДІЛ 3

Результати

Наша мета визначити набір фаз, що характеризують довільну дворівневу систему і визначити, як методом квантової обробки сигналу можуть бути отримані важливі для експериментальних цілей реальні параметри, такі як частота, амплітуда, та час між сигналами.

3.1 Алгоритм визначення параметрів

Нехай сигнал буде задано гармонічним правилом (див. рис.3.1):

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} -A, 0 < t < t_1, \\ -A \cos \omega(t - t_1), t_1 < t < t_1 + \pi k / \omega, \\ A, t_1 + \pi k / \omega < t < t_1 + \pi k / \omega + t_2, \end{cases} \quad (3.1)$$

де $t \in [t_1, t_2]$ - тривалість сигналу, $k \in \mathbb{Z}$, A і ω відповідно амплітуда і частота сигналу.

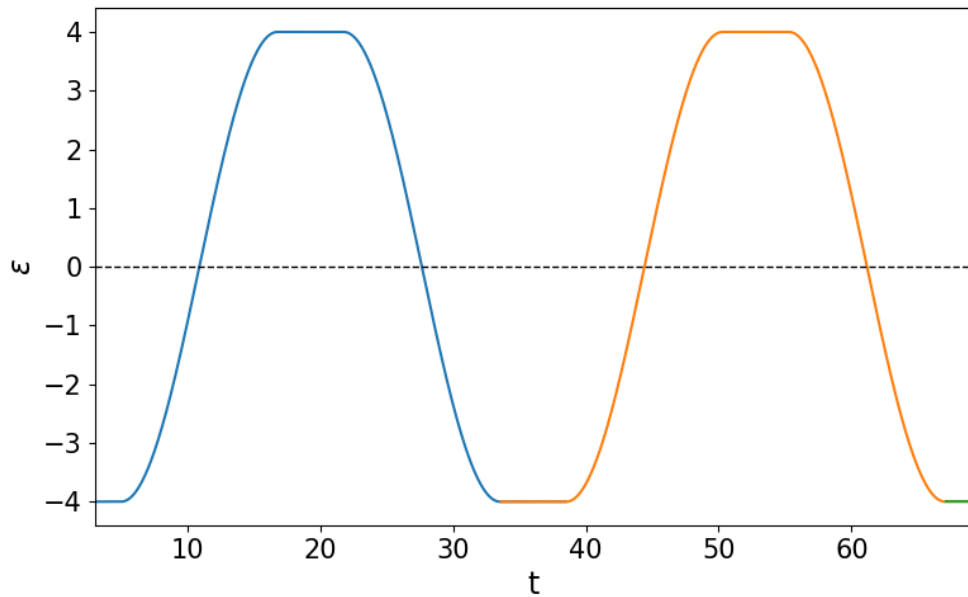


Рис. 3.1: Синім, оранжевим і зеленим кольорами позначено відповідні послідовні сигнали що відповідають подвійному проходженню точки квазіперетину.

Такий сигнал буде лінійним в області квазіперетину, тобто йому будуть відповідати аналітичні розв'язки вірогідності ЛЗШМ (1.12)

$$\left. \frac{d\varepsilon}{dt} \right|_{\varepsilon=0} = A\omega = \text{const.} \quad (3.2)$$

Для такого сигналу ЛЗМШ вірогідність буде мати наступний вид:

$$P = \exp \left[\frac{-\pi \Delta^2}{2A\omega \hbar} \right]. \quad (3.3)$$

Загальна фаза виражається як сума фази Штукельберга і фази, що накопичується під час адіабатичної еволюції системи (1.18):

$$\begin{aligned} \phi_{total} = \phi_{St} + \zeta(t_i, t_j) &= \frac{\pi}{4} + \delta(\ln \delta - 1) + \arg [\Gamma(1 - i\delta)], \\ &+ \frac{1}{2\hbar} \int_{t_i}^{t_j} \Delta E(t) dt, \Delta E(t) = \sqrt{\varepsilon(t)^2 + \Delta^2}, \delta = -\frac{\ln P}{2\pi}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Далі будуть описані кроки з знаходження цих параметрів для одного ЛЗШМ переходу відповідно до статті [20].

1. Вірогідність системи опинитися у верхньому стані після одного ЛЗШМ переходу може бути знайдена з наступного рівняння, яке зв'яже її з кутом повороту сигналу відносно осі X:

$$P = \sin^2(\theta/2). \quad (3.5)$$

Далі закріплюється один з параметрів - A або ω , та інший розраховується за формулою вірогідності ЛЗШМ 3.3 і попереднім результатом:

$$\omega = \frac{-\pi \Delta^2}{2A\hbar \ln P}. \quad (3.6)$$

Також на цьому етапі визначаються значення коефіцієнтів проходження і відображення $T = \sqrt{P}$, $R = \sqrt{1 - P}$.

2. Умова на фази може бути знайдена з порівняння матриць еволюції для дворівневої системи і тієї, що слугує параметром в алгоритмі квантової обробки сигналу.

$$U_{\phi,a} = e^{i\phi_0 Z} \prod_{k=1}^n W(a) e^{i\phi_k Z} = R_z(-2\phi_0) \prod_{k=1}^n R_x(\theta) R_z(-2\phi_k). \quad (3.7)$$

Відповідно до цього для n ЛЗШМ переходів і симетричних ЛЗШМ переходів умови будуть наступними:

$$\phi_s + \zeta_{const}(t) + \zeta_{cos}(t) + 2\pi k = -2\phi_0, \quad (3.8)$$

$$2\phi_s + 4\zeta_{const}(t) + 4\zeta_{cos}(t) + \pi + 2\pi k = -2\phi_1, \quad (3.9)$$

$$2\phi_s + 4\zeta_{const}(t) + 4\zeta_{cos}(t) + \pi + 2\pi k = -2\phi_2, \quad (3.10)$$

$$\dots \quad (3.11)$$

$$2\phi_s + 4\zeta_{const}(t) + 4\zeta_{cos}(t) + \pi + 2\pi k = -2\phi_{n-1}, \quad (3.12)$$

$$\phi_s + \zeta_{const}(t) + \zeta_{cos}(t) + \pi + 2\pi k = -2\phi_n, \quad \text{якщо } n - \text{парне число} \quad (3.13)$$

$$\phi_s + \zeta_{const}(t) + \zeta_{cos}(t) + 2\pi k = -2\phi_n, \quad \text{якщо } n - \text{непарне число}. \quad (3.14)$$

В цих умовах ζ_{const} і ζ_{cos} це набір фази, що залежить від часу еволюції й відповідає умові, що продиктована 3.1. На цьому етапі після визначення цільових $\phi \in \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$ визначається необхідний час еволюції для виконання умов (3.8) - (3.14) і досягання вищезазначених цільових параметрів КОС.

Після цього, задача зводиться до обрахування інтеграла наступного виду:

$$\zeta(t_i, t_j) = \frac{1}{2\hbar\Delta} \int_{t_i}^{t_j} dt \sqrt{\varepsilon(t)^2 + \Delta^2}. \quad (3.15)$$

Для проміжку, де форма сигналу $\varepsilon(t)$ задана лінійно цей інтеграл так само

лінійний по t :

$$\zeta_{lin}(t_i, t_j) = \frac{1}{2\hbar\Delta} \sqrt{\varepsilon(t)^2 + \Delta^2} \Delta t. \quad (3.16)$$

На проміжку, де $\varepsilon(t)$ задано гармонійно, можливе спрощення:

$$\zeta(t_i, t_j) = \frac{1}{2\hbar\Delta} \int_{t_i}^{t_j} dt \sqrt{C \cos^2 \omega t + 1}, \quad C = \frac{A^2}{\Delta^2} \quad (3.17)$$

$$I = \sqrt{C+1} \int_0^{\pi/\omega} dt \sqrt{1 - \frac{C \sin^2 \omega t}{C+1}} = \frac{\sqrt{C+1}}{\omega} \int_0^\pi du \sqrt{1 - \frac{C \sin^2 u}{C+1}} \quad (3.18)$$

$$= \frac{\sqrt{C+1}}{\omega} E\left(\omega t \middle| \frac{C}{C+1}\right). \quad (3.19)$$

Вираз зводиться до неповного еліптичного інтеграла другого роду з амплітудою $\phi = \omega t$ і модулем еліптичного інтеграла $k = \sqrt{C/(C+1)}$. Льюжондром були зіставлені таблиці значень цих функцій при різних ϕ і k [16].

3.2 Реалізація алгоритму і результати

Використовуючи алгоритм, наведений в останньому розділі, були розраховані параметри КОС для класичних цільових послідовностей фаз $\phi \in \{0, 0\}$ і послідовності "ВВ1" з набором фаз $\phi \in \{\pi/2, -\eta, 2\eta, 0, -2\eta, \eta\}$, де $\eta = 1/2 \arccos(-1/4)$ в параметрах адіабатично-імпульсної моделі (амплітуда сигналу, фаза Штукельберга, час еволюції, частота сигналу). Перший випадок також відомий як випадок без обробки сигналу, що відображає осциляції Рабі й відповідає еволюції дворівневої системи з одним ЛЗШМ переходом, а другий випадок, відповідно, відповідає системі з п'ятьма ЛЗШМ переходами. Цей алгоритм визначає кількість необхідних ЛЗШМ переходів і адіабатичні параметри для вхідних параметрів фаз КОС і реалізован на

мові програмування Python (листинг додаток В).

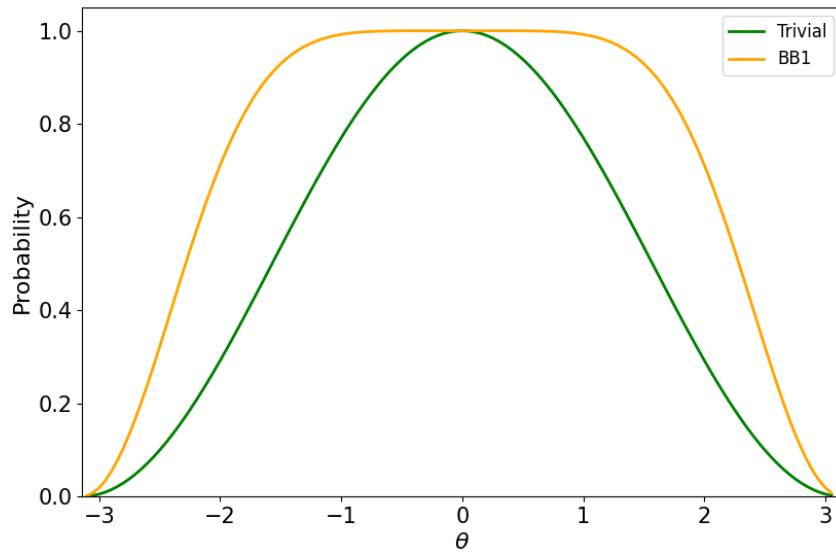


Рис. 3.2: На малюнку зображені вірогідності ЛЗШМ переходу залежно від повороту кута відносно осі X для випадку без обробки сигналу що відповідає $\phi \in \{0, 0\}$ (зелена лінія) і послідовності "BB1" (оранжева лінія).

Також алгоритм був протестован іншими послідовностями (див рис. 3.3).

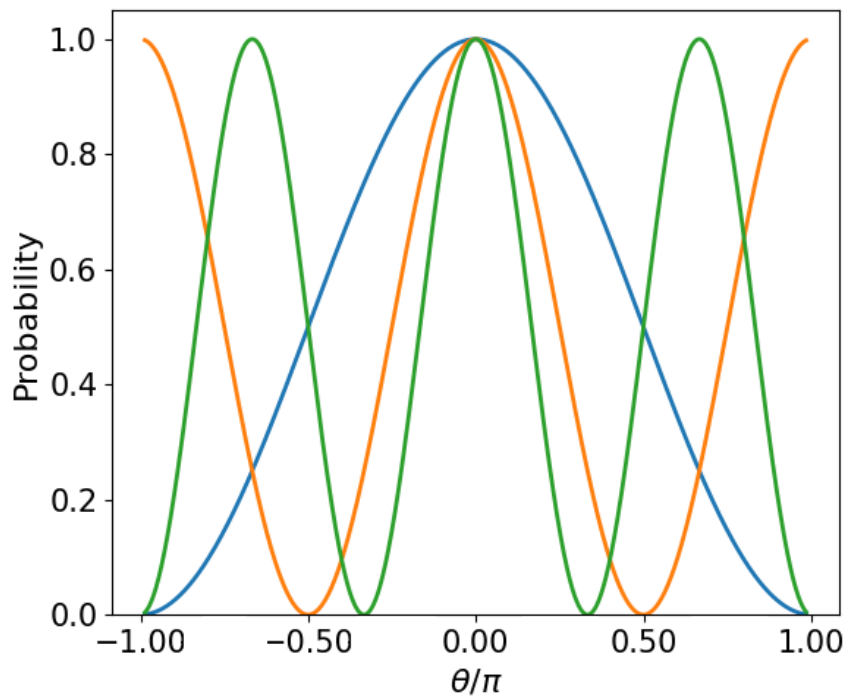


Рис. 3.3: На малюнку зображені вірогідності ЛЗШМ переходу залежно від повороту кута відносно осі X для випадків наборів фаз $\{0, 0\}$ (синя крива), $\{\pi/4, 0, \pi/4\}$ (зелена крива), $\{\pi/4, 0, 0, \pi/4\}$ (оранжева крива).

3.3 Симуляція на квантовому комп'ютері

Результати дослідження були також піддані тестуванню на реальному квантовому процесорі за допомогою ресурсів хмарних обчислень IBM Quantum Lab. IBM Quantum Lab є передовою технологією квантових хмарних обчислень, що включає ряд реальних квантових процесорів та симуляторів, доступних для використання через хмарні обчислення. Реалізація на реальному квантовому процесорі відбувається шляхом передачі або конвертації квантової схеми, розробленої або зіставленої в ході симуляції, на фізичний квантовий апарат для її виконання. Цей процес включає інтерфейс з квантовим апаратом, передачу квантових інструкцій, а також вимірювання результатів обчислень. Для написання завдання, ми використовували Qiskit [35] - це програмний фреймворк з відкритим кодом для квантових обчислень і мову програмування Python.

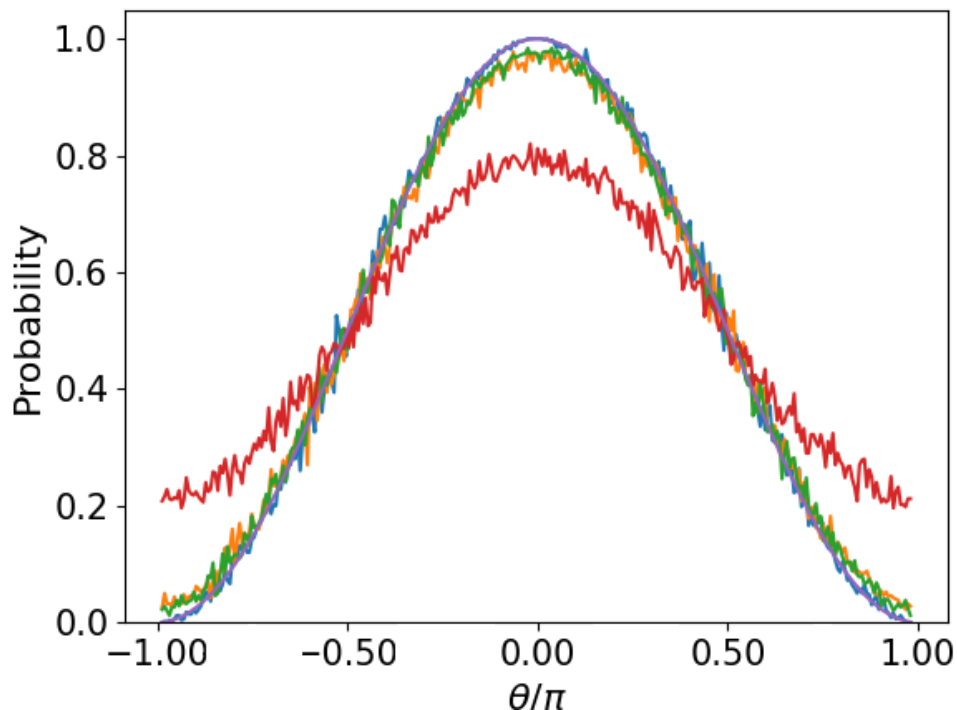


Рис. 3.4: На малюнку зображені вірогідності ЛЗШМ переходу залежно від повороту кута відносно осі X для випадку набору фаз, що відповідають поліному Чебишова 1 роду. Результати отримані на процесорах *ibm brisbane*, *ibm osaka*, *ibm kyoto* відображені зеленою, оранжевою й червоною кривою відповідно. Синя крива відображає результат ідеального симулятора. Фіолетова крива відображає аналітичний результат.

Результат для тривіальної послідовності, поліном Чебишова 1 роду $P(a) = a$ з набором фаз $\phi \in \{0, 0\}$ зображено на рис. 3.4.

Результат для послідовності "BB1" (див. рис. 3.5 і її квантова схема 3.6).

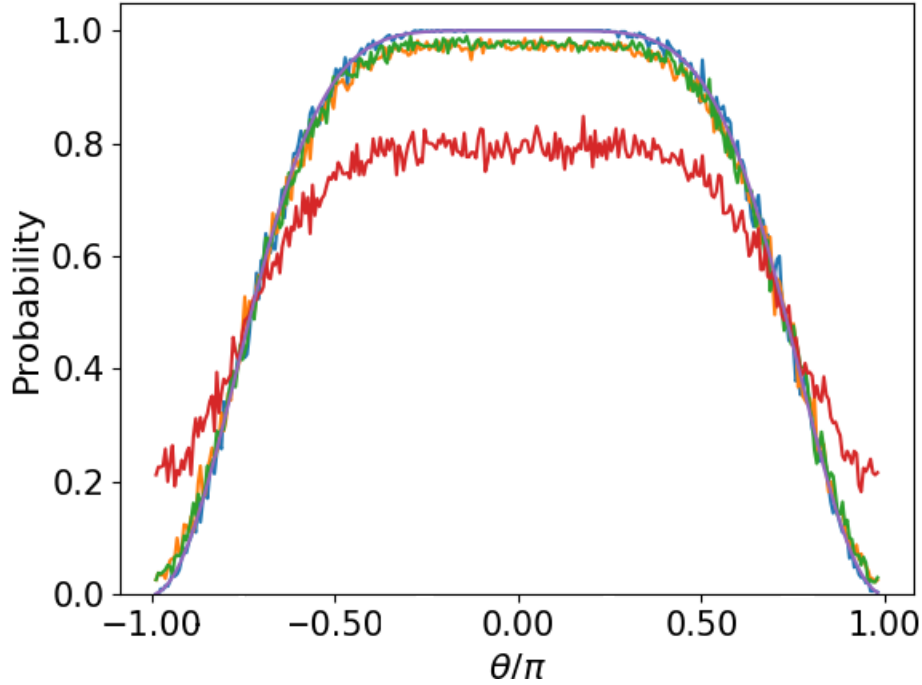


Рис. 3.5: На малюнку зображені вірогідності ЛЗШМ переходу залежно від повороту кута відносно осі X для випадку послідовності "BB1". Кольори на графіку визначені аналогічно рис. 3.4.

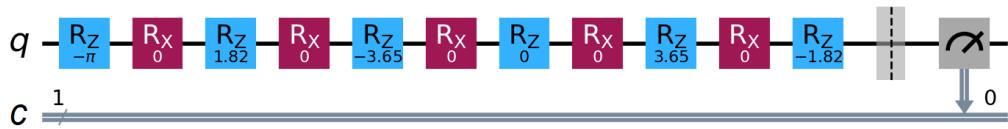


Рис. 3.6: Квантова схема для випадку "BB1".

Такий підхід дозволяє перевіряти роботу квантових алгоритмів у реальних умовах, зокрема, оцінювати ефективність та точність обчислень, а також виявляти можливі проблеми та обмеження, пов'язані з апаратними аспектами реалізації квантових обчислень. Експеримент був проведений на трьох реальних системах і одному симуляторі для 500 ітерацій на точку графіку, що потім були усереднені.

Результат для полінома Чебишова 1 роду $P(a) = 2a^2 - 1$ з набором фаз $\phi \in \{0, 0, 0\}$ зображено на рис. 3.7.

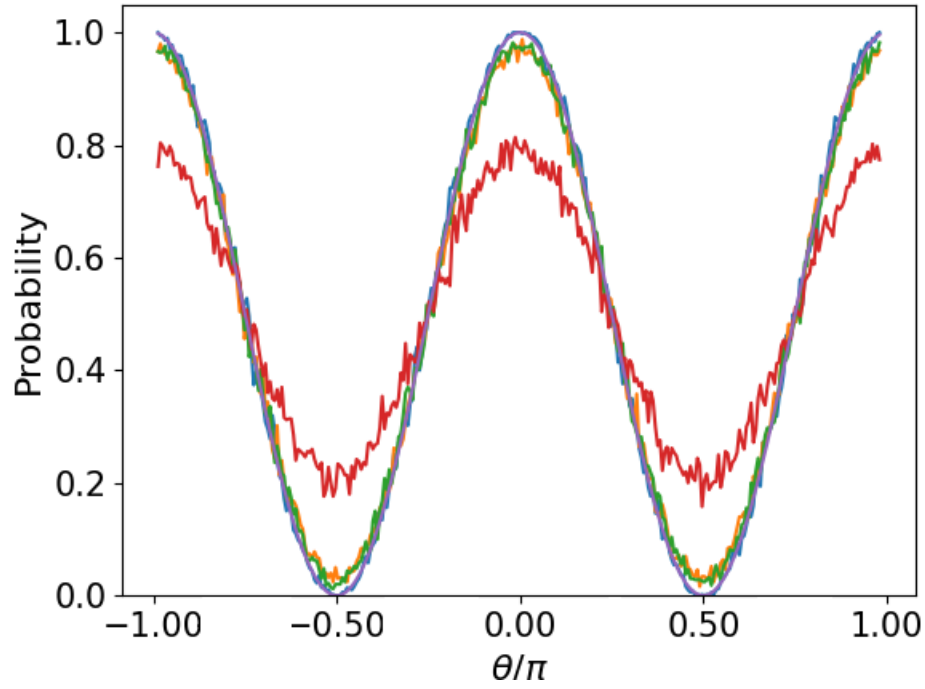


Рис. 3.7: На малюнку зображені вірогідності ЛЗШМ переходу залежно від повороту кута відносно осі X для випадку полінома Чебишова 1 роду $P(a) = 2a^2 - 1$. Кольори на графіку визначені аналогічно рис. 3.4.

Результат для полінома Чебишова 1 роду $P(a) = 4a^3 - 3a$ з набором фаз $\phi \in \{0, 0, 0, 0\}$ зображено на рис. 3.8.

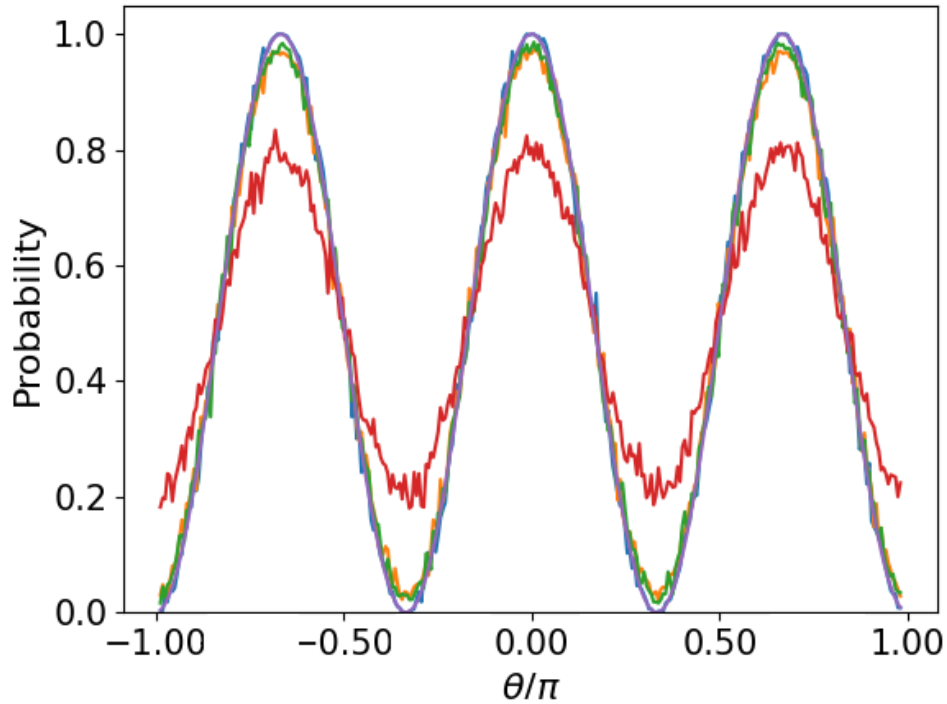


Рис. 3.8: На малюнку зображені вірогідності ЛЗШМ переходу залежно від повороту кута відносно осі X для випадку полінома Чебишова 1 роду $P(a) = 4a^3 - 3a$. Кольори на графіку визначені аналогічно рис. 3.4.

Системи, що були використанні у цих тестуваннях: ibm brisbane, ibm osaka, ibm kyoto, що мають 127 надпровідникових кубітів й працюють на процесорі Eagle r3.

Результат для набору фаз $\phi \in \{-\pi/2, \pi/3, \pi/3, \pi/3, \pi/3, -\pi/2\}$, тобто п'яти ЛЗШМ переходів (див. рис. 3.9) і схема для цього випадку (див. рис. 3.10).

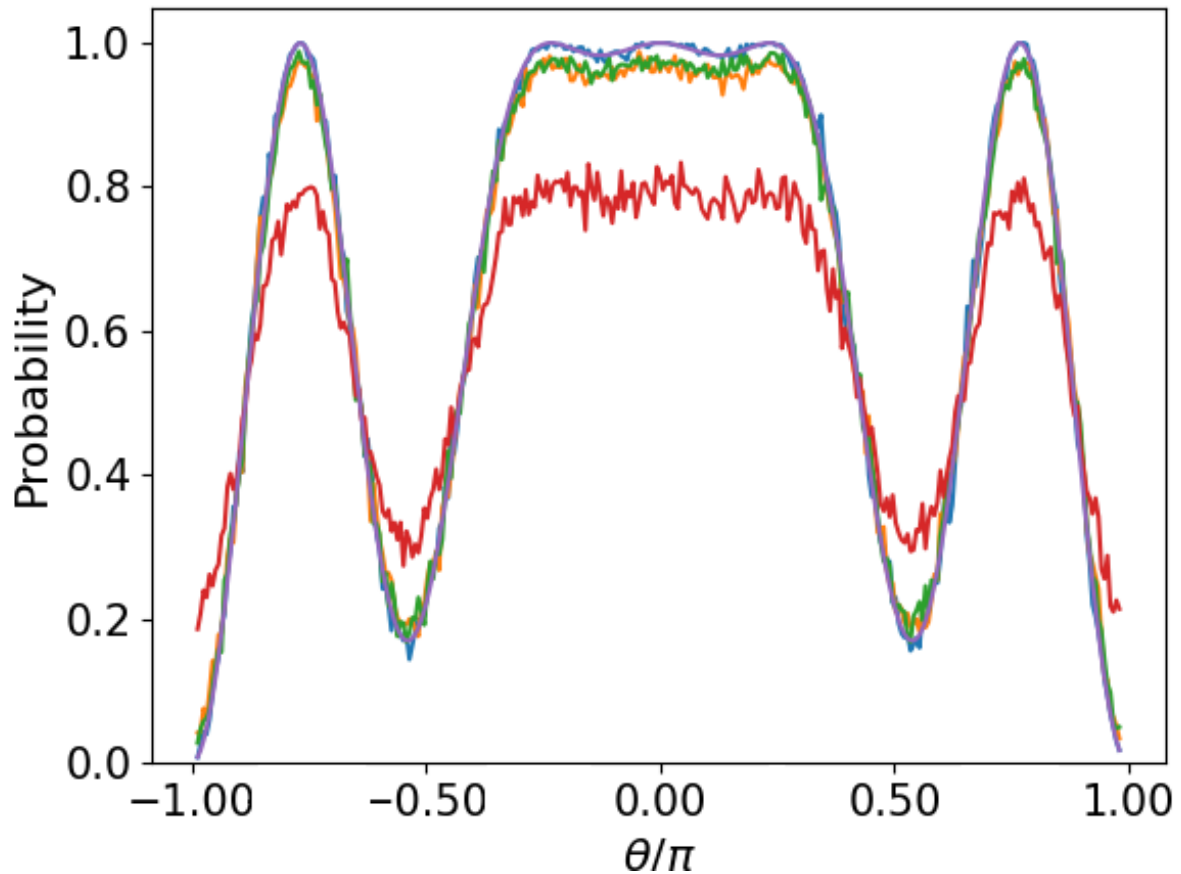


Рис. 3.9: На малюнку зображені вірогідності ЛЗШМ переходу залежно від повороту кута відносно осі X для випадку довільної послідовності. Кольори на графіку визначені аналогічно рис. 3.4.



Рис. 3.10: Квантова схема для довільного випадку $\{-\pi/2, \pi/3, \pi/3, \pi/3, \pi/3, -\pi/2\}$.

В результаті були отримані декілька розподілів імовірностей з флуктуаціями реальних квантових процесорів і симуляцій. Причиною шумів і флуктуацій на графіках є взаємодія квантового процесора з навколишнім середовищем, та може бути викликана різноманітними факторами, зокрема електромагнітними сигналами, зміною температури та збуренням в магнітному полі Землі. Також причинами помилки в обчисленнях можуть бути дефекти у частотах, енергетичних рівнях та міцності зв'язку. Однак отримані помилки не будуть заважати працювати с предетермінованими сигналами, чутливість яких збільшена в певних зонах відповідно до цілей, як, наприклад у послідовності "BB1" підвищена чутливість зберігається в інтервалі $\approx [-2\pi/3, 2\pi/3]$.

ВИСНОВКИ

В роботі було досліджено аналогію між методом квантової обробки сигналу та адіабатично-імпульсною моделлю, зокрема розроблено алгоритм, який успішно перетворює цільові параметри методу квантової обробки даних у параметри, що записані через параметри адіабатично-імпульсної моделі. Це дозволяє зробити параметри квантової обробки даних більш конкретними, а дворівневі системи стають більш зрозумілими для методу квантової оптимізації симуляції.

Розроблені квантові схеми були реалізовані на трьох реальних квантових процесорах та просимульовані на одному квантовому симуляторі, що базується на системах IBM Quantum. Були отримані результати заселеності збудженого рівня кубіту, що усереднена за великим числом проєкційних вимірів і флуктуацій, які підтвердили, що профілі шумів не значно впливають на коректність сигналів у їх чутливих зонах.

Також було досліджено квантові дворівневі системи та розглянуто методи їх опису. Детально розглянуто сучасні системи, які використовуються у ролі кубітів, а також висвітлено вимоги до них та їх характеристики. Окрема увага була приділена вивченню формул ймовірностей збудження в лінійних змішаних системах методом Зенера. У роботі була також розглянута модель на основі перехідних матриць та адіабатично-імпульсного підходу, що використовується для опису операторів еволюції дворівневої системи через однократне і двократне проходження точки квазіперетину.

Також було зроблено огляд історичних аспектів цієї області. Після обговорення методів сингулярного представлення матриці та квантової обробки даних, підкреслено важливість використання квантових методів обчислень. В контексті методу квантової обробки даних також розглянута проблема знаходження фаз для описання певних поліномів та взаємозв'язок із відомими поліномами.

Додаток А

Розв'язок диференціального рівняння параболічного циліндра для задачі Ландау-Зенера-Штукельберга-Майорани

Диференціальні рівняння отримані для задачі про дворівнову систему

$$\ddot{c}_{1,2} + c_{1,2} \left[\frac{\tau^2}{4} + \frac{\omega^2}{2} \mp \frac{i}{2} \right] = 0, \quad (\text{A.20})$$

які можна було переписати у вигляді стандартного рівняння Вебера

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{1}{2} + \nu - \frac{1}{4} x^2 \right) = 0. \quad (\text{A.21})$$

Загальний розв'язок для цього рівняння є комбінацією двох лінійно незалежних функцій і має наступний вигляд [17]

$$y = AD_\nu(z) + BD_\nu(-z). \quad (\text{A.22})$$

Замінивши t , ми можемо записати рівняння (A.20) у формі рівняння Вебера (A.21)

$$c_{1,2} \ddot{c}_{1,2} + c_{1,2} \left[-\frac{1}{4} T^2 - \frac{i\omega^2}{2} \pm \frac{1}{2} \right] \quad t = \sqrt{\frac{\hbar}{\beta}} T = \sqrt{\frac{\hbar}{\beta}} e^{-i\pi/4} \tau. \quad (\text{A.23})$$

Тоді ці два розв'язки матимуть наступний вигляд

$$c_1 = A_1 D_{-i\omega^2/2} \left(\tau e^{i\pi/4} \right) + B_1 D_{-i\omega^2/2} \left(\tau e^{-3i\pi/4} \right), \quad (\text{A.24})$$

$$c_2 = A_2 D_{-i\omega^2/2-1} \left(\tau e^{i\pi/4} \right) + B_2 D_{-i\omega^2/2-1} \left(\tau e^{-3i\pi/4} \right). \quad (\text{A.25})$$

Щоб знайти невідомі коефіцієнти, ми підставляємо розв'язок c_1 і c_2 у рівняння Шредінгера (1.7) та використовуємо лінійні рекурсивні рівняння

для параболічних функцій

$$D'_\nu(z) = -\frac{z}{2}D_\nu(z) + \nu D_{\nu-1}(z) \quad (\text{A.26})$$

$$D'_{\nu-1}(z) = -D_\nu(z) + \frac{z}{2}D_\nu. \quad (\text{A.27})$$

Це приводить до рівнянь зв'язку відповідних коефіцієнтів для c_1 та c_2

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}e^{-3i\pi/4}, \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{\omega}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}. \quad (\text{A.29})$$

Початкові умови визначаються рівнянням нижче для $T_0 \gg 1$

$$c_1(-T_0) = 1, \quad c_2(-T_0) = 0. \quad (\text{A.30})$$

Використовуючи асимптотичні розклади (В.33) для c_2 , а потім для c_1 разом із початковими умовами, можна побачити що $A_2 = 0$ та $B_1 = e^{\pi\omega^2/8}$.

Поєднавши коефіцієнти B_1 та A_2 із рівнянням (А.28), ми можемо отримати розв'язки для коефіцієнтів c_1 та c_2

$$c_1 = e^{\pi\omega^2/8}D_{-i\omega^2/2}\left(\tau e^{-3i\pi/4}\right), \quad (\text{A.31})$$

$$c_2 = \frac{\omega}{\sqrt{2}}e^{-3i\pi/4}e^{\pi\omega^2/8}D_{-i\omega^2/2-1}\left(\tau e^{-3i\pi/4}\right). \quad (\text{A.32})$$

Додаток Б

Властивості функцій параболічного циліндра

Асимптотичні розклади параболічної функції для різних діапазонів аргументу, фіксованих значень ν та $|z| \gg 1$:

$$D_\nu(z) \sim z^\nu e^{-z^2/4}, \quad |\arg z| < \frac{3\pi}{4}, \quad (\text{B.33})$$

$$D_\nu(z) \sim z^\nu e^{-z^2/4} + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{(\nu+1/2)\pi i} z^{-\nu-1} e^{z^2/4}, \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}, \quad (\text{B.34})$$

$$D_\nu(z) \sim z^\nu e^{-z^2/4} - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{(-\nu-1/2)\pi i} z^{-\nu-1} e^{z^2/4}, \quad -\frac{5\pi}{4} < \arg z < -\frac{\pi}{4}. \quad (\text{B.35})$$

Крім того, для уникнення використання асимптотичних виразів можна скористатися рекурентними відносинами для параболічної функції для здвигу аргументу в необхідну область $|\arg z| < \frac{3\pi}{4}$:

$$D_\nu(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{i\pi\nu/2} D_{-1-\nu}(iz) + e^{-i\pi\nu/2} D_{-1-\nu}(-iz) \right] \quad (\text{B.36})$$

$$= e^{-i\pi\nu} D_\nu(-z) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{-(\nu+1)\pi i/2} D_{-1-\nu}(iz) \quad (\text{B.37})$$

$$= e^{i\pi\nu} D_\nu(-z) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{(\nu+1)\pi i/2} D_{-1-\nu}(-iz). \quad (\text{B.38})$$

Визначник вронскіану

$$W[D_\nu(z), D_\nu(-z)] = D_\nu(z) \frac{d}{dz} D_\nu(-z) - D_\nu(-z) \frac{d}{dz} D_\nu(z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)}. \quad (\text{B.39})$$

Властивість похідної

$$\frac{d}{dz} e^{z^2/4} D_\nu(z) = \nu e^{z^2/4} D_{\nu-1}(z). \quad (\text{B.40})$$

Додаток В

Лістинг алгоритму, який перетворює цільові параметри методу квантової обробки даних у параметри, що записані через параметри адіабатично-імпульсної моделі

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate as integrate
import scipy.special as sp
import cmath

from scipy.optimize import fsolve
from scipy.optimize import brentq
from qutip import Qobj, tensor, rx, ry, rz, ket

Delta = 1
A = 4
hbar = 1.0
I = 1.j

def zeta(t_p, A, omega, Delta):
    def DE_integrand(t_p, A, Delta):
        return np.sqrt(Delta**2 + A**2 * np.cos(omega* t_p)**2)/2
    result, _ = integrate.quad(DE_integrand, t_p, np.pi/omega+t_p, args=(A,
        Delta))
    return result

theta_values = np.arange(-3.1, 3.1, 0.005)

def QSP_algo(QSPphases, dim):
    expectation_values = []
    for i in range(len(theta_values)):
        time = [[] for _ in range(dim)]
        rules = np.zeros_like(QSPphases)
        P = (np.sin(theta_values[i]/2))**2
```

```

delta = -np.log(P)/2/np.pi
omega = -np.pi*Delta**2/(2*A*hbar*np.log(P))
phi_stu = np.pi/4 + delta*(np.log(delta)-1) + cmath.phase(sp.gamma(1-I*
    delta))

zeta_cos = zeta(0, A, omega, Delta)

rules[0] = QSPphases[0] * (-2) - phi_stu

for k in range(1, len(QSPphases) - 1):
    rules[k] = QSPphases[k] / (-2) - phi_stu / 2 - np.pi / 4

if len(QSPphases) % 2 == 0:
    rules[-1] = QSPphases[-1] * (-2) - phi_stu
else:
    rules[-1] = QSPphases[-1] * (-2) - phi_stu - np.pi

def zeta_c(t):
    return 0.5 / hbar * np.sqrt(A**2 + Delta**2) * t[0]

for j, rule in enumerate(rules):
    def intersection_func(t):
        return rule - zeta_cos - zeta_c(t)

    intersection_t = fsolve(intersection_func, 0)
    time[j].append(intersection_t)

final_state = 1

for l in range(len(time)):
    if l == 0:
        final_state *= rz(zeta_cos + zeta_c(time[0][0]) + phi_stu)* rx(
            theta_values[i])
    elif l == len(time) - 1:
        final_state *= rz(zeta_cos + zeta_c(time[-1][0]) + phi_stu + np.pi)

```

```

else:
    final_state *= rz(4*(zeta_cos + zeta_c(time[1][0])) + 2*phi_stu + np
        .pi) * rx(theta_values[i])

bra_0 = np.array([[1, 0]])
ket_0 = np.array([[1], [0]])
expectation_value = abs(np.dot(bra_0, np.dot(final_state, ket_0))[0][0])
    **2

expectation_values.append(expectation_value)

return expectation_values

QSPphases_sets = [
    np.array([-np.pi/2, np.pi/3, np.pi/3, np.pi/3, np.pi/3, -np.pi/2]),
    np.array([-np.pi/4, np.pi/3, np.pi/3, np.pi/3, np.pi/3, -np.pi/4]),
    np.array([-np.pi/2, np.pi/4, np.pi/3, np.pi/3, np.pi/4, -np.pi/2]),
    np.array([-np.pi/2, np.pi/6, np.pi/3, np.pi/3, np.pi/3, -np.pi/2]),
]

```


СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. R. P. Feynman, “Simulating Physics with Computers,” *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 21, pp. 467–488, June 1982.
2. C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 70, pp. 1895–1899, Mar 1993.
3. P. W. Shor, “Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer,” *SIAM Journal on Computing*, vol. 26, pp. 1484–1509, Oct 1997.
4. F. Arute, K. Arya, R. Babbush, D. Bacon, J. C. Bardin, R. Barends, R. Biswas, S. Boixo, F. G. Brandao, D. A. Buell, *et al.*, “Quantum supremacy using a programmable superconducting processor,” *Nature*, vol. 574, no. 7779, pp. 505–510, 2019.
5. H.-S. Zhong, H. Wang, Y.-H. Deng, M.-C. Chen, L.-C. Peng, Y.-H. Luo, J. Qin, D. Wu, X. Ding, Y. Hu, *et al.*, “Quantum computational advantage using photons,” *Science*, vol. 370, no. 6523, pp. 1460–1463, 2020.
6. M. Berry, “Two-state quantum asymptotics,” *Annals of the New York Academy of Sciences*, vol. 755, no. 1, pp. 303–317, 1995.
7. D. P. DiVincenzo, “The physical implementation of quantum computation,” *Fortschritte der Physik: Progress of Physics*, vol. 48, no. 9-11, pp. 771–783, 2000.
8. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, vol. 3. Oxford, UK: Pergamon Press, 1958.
9. L. Landau, “Zur theorie der energieubertragung i,” *Z. Sowjetunion*, vol. 1, pp. 88–95, 1932.
10. L. Landau, “Zur theorie der energieubertragung. ii,” *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, vol. 2, p. 46, 1932.

11. C. Zener and R. H. Fowler, “Non-adiabatic crossing of energy levels,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 137, no. 833, pp. 696–702, 1932.
12. E. C. G. Stueckelberg, “Theorie der unelastischen stösse zwischen atomen,” *Helvetica Physica Acta*, vol. 5, p. 369, 1932.
13. E. Majorana, “Atomi orientati in campo magnetico variabile,” *Il Nuovo Cimento*, vol. 9, no. 2, pp. 43–50, 1932.
14. N. Vitanov and B. Garraway, “Landau-Zener model: Effects of finite coupling duration,” *Physical Review A*, vol. 53, no. 6, p. 4288, 1996.
15. N. Vitanov, “Transition times in the Landau-Zener model,” *Physical Review A*, vol. 59, no. 2, p. 988, 1999.
16. M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York City: Dover, 1964.
17. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, vol. II. New York: McGraw-Hill, 1953.
18. O. V. Ivakhnenko, S. N. Shevchenko, and F. Nori, “Nonadiabatic Landau–Zener–Stückelberg–Majorana transitions, dynamics, and interference,” *Physics Reports*, vol. 995, pp. 1–89, 2023.
19. T. Albash and D. A. Lidar, “Adiabatic quantum computation,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 90, p. 015002, Jan 2018.
20. A. Ryzhov, O. Ivakhnenko, S. Shevchenko, M. Gonzalez-Zalba, and F. Nori, “Alternative fast quantum logic gates using nonadiabatic Landau-Zener-Stuckelberg-Majorana transitions,” *arXiv preprint arXiv:2310.17932*, 2023.
21. D. Deutsch and R. Jozsa, “Rapid solutions of problems by quantum computation,” *Proceedings of the Royal Society of London A*, vol. 439, p. 553, 1992.
22. E. Bernstein and U. Vazirani, “Quantum complexity theory,” *SIAM Journal*

- on Computing*, vol. 26, no. 5, pp. 1411–1473, 1997.
23. S. Lloyd, “Universal quantum simulators,” *Science*, vol. 273, no. 5278, pp. 1073–1078, 1996.
 24. L. K. Grover, “A fast quantum mechanical algorithm for database search,” 1996.
 25. “Singular value decomposition — Вікіпедія, Вільна енциклопедія.” веб-сайт. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Singular_value_decomposition; (дата звернення: 4 травня 2024 року).
 26. A. Gilyén, Y. Su, G. H. Low, and N. Wiebe, “Quantum singular value transformation and beyond: exponential improvements for quantum matrix arithmetics,” in *Proceedings of the 51st Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*, pp. 193–204, 2019.
 27. G. H. Low and I. L. Chuang, “Hamiltonian Simulation by Qubitization,” *Quantum*, vol. 3, p. 163, July 2019.
 28. S. Wimperis, “Broadband, narrowband, and passband composite pulses for use in advanced NMR experiments,” *Journal of Magnetic Resonance, Series A*, vol. 109, no. 2, pp. 221–231, 1994.
 29. T. J. Yoder, G. H. Low, and I. L. Chuang, “Fixed-point quantum search with an optimal number of queries,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 113, p. 210501, Nov 2014.
 30. Y. Dong, X. Meng, K. B. Whaley, and L. Lin, “Efficient phase-factor evaluation in quantum signal processing,” *Phys. Rev. A*, vol. 103, p. 042419, Apr 2021.
 31. J. Haah, “Product decomposition of periodic functions in quantum signal processing,” *Quantum*, vol. 3, p. 190, 2019.
 32. R. Chao, D. Ding, A. Gilyen, C. Huang, and M. Szegedy, “Finding angles for quantum signal processing with machine precision,” 2020.
 33. L. Ying, “Stable factorization for phase factors of quantum signal processing,” *Quantum*, vol. 6, p. 842, Oct. 2022.

34. Y. Dong, L. Lin, H. Ni, and J. Wang, “Robust iterative method for symmetric quantum signal processing in all parameter regimes,” 2023.
35. “Ibm quantum.” веб-сайт. URL: <https://docs.quantum.ibm.com/>; (дата звернення: 4 травня 2024 року).