
УДК 517.53

А. А. ГОЛЬДБЕРГ, А. Э. ЕРЕМЕНКО, М. Л. СОДИН

**ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В СМЫСЛЕ
Р. НЕВАНЛИННЫ И В СМЫСЛЕ В. П. ПЕТРЕНКО. 1**

1. Здесь без пояснений будут использованы стандартные обозначения неванлинновской теории распределения значений мероморфных функций (см., например, [1]). В классической теории распределения значений за меру приближения мероморфной в $\mathbb{C}$ функции f к значению $a \in \mathbb{C}$ выбирается величина $m(r, a, f)$, т. е. с точностью до множителя $1/2\pi$ норма $\|\ln^+ |f(re^{i\varphi}) - a|^{-1}\|$ в пространстве L_1 функции $\ln^+ |f - a|^{-1}$, как функции от $\varphi \in [0, 2\pi]$. В последние 15 лет широко используются и нормы в других пространствах, особенно важное значение имеет норма в пространстве L_∞ . Если $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, то за меру приближения f к a можно взять $\ln^+ M(r, 1/(f - a)) = L(r, a, f)$. С помощью $L(r, a, f)$ В. П. Петренко в 1969 г. ввел величину

$$\beta(a, f) = \lim_{r \rightarrow \infty} L(r, a, f)/T(r, f),$$

названную им величиной отклонения мероморфной функции f относительно числа a . В. П. Петренко детально исследовал свойства $\beta(a, f)$ в ряде статей, основные результаты подытожены в его книге [2]. Множество дефектных значений в смысле Р. Неванлинны $\{a \in \bar{\mathbb{C}} : \delta(a, f) > 0\}$ будем обозначать через $E_N(f)$, а множество положительных отклонений $\{a \in \bar{\mathbb{C}} : \beta(a, f) > 0\}$ — через $E_\Pi(f)$. Непосредственно из определений вытекает, что $\delta(a, f) \leq \leq \beta(a, f)$, поэтому $E_N(f) \subset E_\Pi(f)$. В. П. Петренко доказал, что для мероморфных функций конечного нижнего порядка $E_\Pi(f)$ не более чем счетно, и предложил выяснить, не будет ли для функций конечного нижнего порядка всегда $E_N(f) = E_\Pi(f)$, что в случае функций бесконечного нижнего порядка это не так, выяснил сам В. П. Петренко [2, теорема 3.1.1]. В 1976 г. А. Ф. Гришин

[3, 2, теорема 3.1.1] показал, что для любого ρ , $0 \leq \rho < \infty$, существует мероморфная функция f порядка ρ , для которой $\delta(\infty, f) = 0$, а $\beta(\infty, f) > 0$. Построение А. Ф. Гришина было затем заметно упрощено [4], [2, теорема 2.4.2]. Затем был построен пример мероморфной функции f любого заданного порядка ρ $0 < \rho < \infty$, у которой $E_N(f) = \emptyset$, а $E_{\Pi}(f)$ — произвольное не более чем счетное подмножество $\bar{C}$ [5]. Тем самым был получен ответ на один вопрос В. П. Петренко [2, с. 8 и 73]. Естественно поставить вопрос о полном описании связи между множествами $E_N(f)$ и $E_{\Pi}(f)$ для мероморфных функций конечного порядка ρ [6, № 11.3]. Если $\rho = 0$, то известно, что $E_N(f)$ и $E_{\Pi}(f)$ состоят не более, чем из одной точки (соответственно согласно теореме Ж. Валирона [1, с. 90 и 158] и теореме В. П. Петренко [2, теорема 2.6.1]). Вместе с примером А. Ф. Гришина (цит. выше) это дает полное описание множеств $E_N(f)$ и $E_{\Pi}(f)$ для нулевого порядка. Для положительного порядка ответ дает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $0 < \rho < \infty$, $E_1 \subset E_2 \subset \bar{C}$, E_2 не более чем счетно. Существует мероморфная функция f порядка ρ , для которой $E_N(f) = E_1$, $E_{\Pi}(f) = E_2$.

В работе [7] доказано, что для мероморфных функций со свойством

$$T(2r, f) = O(T(r, f)), \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.1)$$

всегда $E_N(f) = E_{\Pi}(f)$. Таким образом, неравенство $E_N \neq E_{\Pi}(f)$ связано с определенной неправильностью роста. Тем не менее функции f из теоремы 1 могут быть выбраны так, что у них нижний порядок λ равен порядку ρ .

В примерах [3—5] функция f с $E_N(f) \neq E_{\Pi}(f)$ мероморфна. Возникает вопрос, возможно ли $E_N(f) \neq E_{\Pi}(f)$ для целых функций конечного порядка ρ [6, № 11.3]. При $\rho \leq 1/2$ для целой функции f известно, что $E_N(f) = \{\infty\}$ [1, с. 269] и $E_{\Pi}(f) = \{\infty\}$, [1, с. 273]. Для $\rho > 1/2$ ответ следующий.

Теорема 2. Для каждого ρ , $1/2 < \rho < \infty$, существует целая функция f порядка ρ , для которой $\delta(0, f) = 0$, $\beta(0, f) > 0$.

Теоремы 1, 2 анонсированы авторами в заметке «Дефекты и отклонения мероморфных функций конечного порядка», ДАН УССР, 1984, № 10, с. 3—5. В письме от 30.04.84. Дрейсин (D. Drasin) сообщил авторам, что он и его ученик Джиллispай (R. Gillespie) независимо от авторов решили проблему 11.3 из [6]. Их примеры основаны на других идеях.

Методы, используемые в этой работе для доказательства теорем 1 и 2, позволяют получить и другие результаты, представляющие интерес.

Теорема 3. Для каждого ρ , $1/2 < \rho < \infty$, существует целая функция f порядка ρ , такая, что $\delta(0, f) > 0$ и не выполняется (1.1).

Котман [9] доказал эту теорему для $\rho > 1$, дав тем самым отрицательный ответ на один вопрос Хеймана [10, № 1.10]. Тео-

рема 3 полностью закрывает этот вопрос, поскольку, как отмечалось, при $\rho \leq 1/2$ необходимо $\delta(0, f) = 0$.

Согласно упомянутому сообщению Дрейсина, он и Джиллиспай другим методом доказали теорему 3 с $\delta(0, f) \geq 1/2$.

Далее будет рассмотрен вопрос о зависимости дефектов целой функции f конечного порядка от выбора начала координат, т. е. всегда ли $\delta(0, f(z)) = \delta(0, f(z+h))$, $h \in \mathbb{C}$. Известно [1, гл. IV, § 6], что дефект может изменяться при переходе от $f(z)$ к $f(z+h)$ у мероморфных функций бесконечного порядка (Д. Дюге, 1947), у целых функций бесконечного порядка (У. Хейман, 1953), у мероморфных функций конечного порядка (А. А. Гольдберг, 1954). Недавно Майлз [11] построил пример целой функции f «очень большого конечного порядка ρ », для которой $0 = \delta(0, f(z)) < \delta(0, f(z+h))$, $h \neq 0$. Оценка сверху порядка ρ в примере Майлза затруднительна в связи с необходимостью решать громоздкую систему неравенств, в которые входят трансцендентные функции. Здесь будет построен более простой чем у Майлза пример функции, у которой порядок сравнительно невелик.

Теорема 4. Пусть $5 < \rho < \infty$. Существует целая функция f порядка ρ такая, что $0 = \delta(0, f(z-1)) < \delta(0, f(z))$.

При $\rho < 3/2$ у целой функции дефект не зависит от выбора начала координат [1, с. 232, следствие 2]. Вопрос остается открытым для $\rho \in [3/2, 5]$.

Введем некоторые обозначения. Через S будем обозначать класс субгармонических в $\mathbb{C}$ функций. Если $u \in S$, то $B(r, u) = \max \{u(z) : |z| = r\}$, $A(r, u) = \inf \{u(z) : |z| = r\}$.

Через $e_m(x)$ и $\ln_m x$ обозначаем m -е итерации функций e^x и $\ln x$. Далее,

$$\|f(\theta)\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)| d\theta.$$

Символ $\partial/\partial n$ обозначает производную по внутренней нормали к границе области. Через x^+ и x^- обозначаем соответственно $(|x| + x)/2$ и $(|x| - x)/2$.

2. Доказательство теоремы 1. Не уменьшая общности, можно считать, что $E_2 \subset \mathbb{C}$. Учитывая результат [5], ограничимся здесь случаем, когда $E_1 \neq \emptyset$. Для мероморфных функций f конечного нижнего порядка $E_{\Pi}(f) \subset E_V(f)$, где $E_V(f)$ — множество значений, исключительных для f в смысле Ж. Валирона [2, с. 52]. Для любого не более чем счетного множества E_1 известны примеры мероморфных функций f порядка ρ , $0 < \rho < \infty$, для которых $E_N(f) = E_V(f) = E_1$ [1, с. 161—166]. Тогда и $E_{\Pi}(f) = E_1$. Поэтому в дальнейшем случай $E_1 = E_2$ не рассматриваем. Итак, $E_1 \neq \emptyset$, E_2 . Будем считать, что $0 < \rho < 1/2$. Общий случай получится сразу, если заметим, что для $f_1(z) = f(z^n)$ выполняется

$\delta(a, f_1) = \delta(a, f)$, $\beta(a, f_1) = \beta(a, f)$, а порядок f_1 равен $n\rho$, где ρ — порядок f , $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 2.1. *Существует $v \in S$ такая, что 1) $v(r) = B(r, v) := \lambda(r)$, $r \geq 0$, $\lambda(0) = 0$; 2) $\ln \lambda(r) \sim \rho \ln r$, $r \rightarrow \infty$; 3) существуют последовательности (r'_n) , (r''_n) , (c_n) такие, что $r'_n \rightarrow \infty$, $r''_n/r'_n \rightarrow \infty$, $\lambda(r) \sim c_n r^\rho$, $r'_n < r < r''_n$, $n \rightarrow \infty$; 4) $v(re^{i\theta}) \leq \lambda(r) \cos \rho\theta$, $r \geq 0$, $|\theta| \leq \pi$; 5) $v(re^{i\theta}) = (1 + o(1))\lambda(r) \cos \rho\theta$, $|\theta| \leq \pi$, $r \rightarrow \infty$, $r \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [r'_n, r''_n]$; 6) существует последовательность R_n , $r''_{n-1} < R_n < r'_n$ и последовательность $\gamma_n \downarrow 0$ такие, что при всех $re^{i\theta}$, $1 + (\ln_2 R_n)^{-1} \leq r/R_n \leq 1 + 2(\ln_2 R_n)^{-1}$, $\gamma_n \leq |\theta| \leq \pi$, выполняется $v(re^{i\theta}) = o(\lambda(r))$, $r \rightarrow \infty$.*

Доказательство. Положим

$$G(re^{i\theta}) = (r^2 - 2^\rho)^+ \cos \rho\theta, \quad 0 \leq r < \infty, \quad |\theta| \leq \pi,$$

$$H(re^{i\theta}) = \begin{cases} r^2 \cos 2\theta, & |\theta| \leq \pi/4, \quad 0 \leq r < \infty, \\ 0, & \pi/4 \leq |\theta| \leq \pi, \quad 0 \leq r < \infty. \end{cases}$$

Легко видеть, что $G \in S$, $H \in S$. Пусть

$$u(re^{i\theta}) = \begin{cases} CG(re^{i\theta}), & r \geq 3, \\ \max\{CG(re^{i\theta}), H(re^{i\theta} - 1)\}, & r < 3, \end{cases}$$

где постоянная $C > 2$ настолько велика, что при $r \in [2.5; 3]$ выполняется $H(re^{i\theta} - 1) < CG(re^{i\theta})$. Тогда $u \in S$. Положим

$$R_n = e_3(n), \quad A_n = R_n^\rho \ln R_n, \quad v(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k u(z/R_k).$$

Так как $u(z) = 0$ при $|z| \leq 1$, то этот ряд в каждом круге $\{z: |z| \leq R\}$ сводится к конечной сумме и $v \in S$. Покажем, что для v справедливы утверждения леммы 2.1. Выполнение 1) очевидно. Пусть $r \in [R_n, R_{n+1}]$. Тогда

$$\lambda(r) = \sum_{k=1}^{n-1} A_k C \left\{ \left(\frac{r}{R_k} \right)^\rho - 2^\rho \right\} + A_n u\left(\frac{r}{R_n}\right).$$

Так как при достаточно больших n выполняется $R_n/R_{n-1} > 2^{1+1/\rho}$, то

$$\begin{aligned} \lambda(r) &\geq A_{n-1} C \{(r/R_{n-1})^\rho - 2^\rho\} > 0.5 A_{n-1} C (r/R_{n-1})^\rho = \\ &= 0.5 C r^\rho \ln R_{n-1} > r^\rho, \end{aligned}$$

поэтому

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \lambda(r)}{\ln r} \geq \rho. \quad (2.1)$$

Если $r \in [R_n \cdot 2.5, R_n]$, то

$$\lambda(r) \leq \sum_{k=1}^{n-1} A_k C (r/R_k)^\rho + A_n u(2.5) \leq$$

$$\leq Cr^p \sum_{k=1}^{n-1} \ln R_k + u(2,5) R_n^p \ln R_n \leq (2C + u(2,5)) r^p \ln r.$$

Если $r \in [2,5R_n, R_{n+1}]$, то

$$\lambda(r) \leq \sum_{k=1}^n A_k C (r/R_k)^p \leq 2Cr^p \ln R_n \leq 2Cr^p \ln r.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \lambda(r)}{\ln r} \leq p. \quad (2.2)$$

Из (2.1) и (2.2) следует выполнение 2).

При $r \in [R_n^2, R_{n+1}]$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k C ((r/R_k)^p - 2^p) \leq \sum_{k=1}^{n-1} Cr^p \ln R_{n-1} = o(r^p \ln R_n), \quad r \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

$$\lambda(r) = (1 + o(1)) A_n C ((r/R_n)^p - 2^p) = (1 + o(1)) Cr^p \ln R_n, \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Положим $r'_n = R_n^2$, $r''_n = R_{n+1}$, $c_n = C \ln R_n$. Тогда из (2.4) следует выполнение 3). Из (2.3) и (2.4) следует, что при $r \in [r'_n, r''_n]$, $|\theta| \leq \pi$, $n \rightarrow \infty$

$$v(re^{i\theta}) = o(r^p \ln R_n) + A_n C G(re^{i\theta}/R_n) =$$

$$= (1 + o(1)) A_n C ((r/R_n)^p - 2^p) \cos \rho\theta = (1 + o(1)) \lambda(r) \cos \rho\theta,$$

т. е. справедливо 5).

При $z = re^{i\theta}$, $r \geq 1$, $|\theta| \leq \pi$, $|\theta'| = |\arg(z-1)| \leq \frac{\pi}{4}$ имеем

$$H(z-1) = |z-1|^2 \cos 2\theta' \leq (r-1)^2 \cos 2\theta' / \cos 2\theta' = (r-1)^2 (1 - \operatorname{tg}^2 \theta') \leq (r-1)^2 \cos \theta' \leq (r-1)^2 \cos \rho\theta = B(r, H(z-1)) \cos \rho\theta,$$

при $\pi/4 \leq |\theta'| \leq \pi$ это неравенство очевидно. Теперь легко показать, что $u(re^{i\theta}) \leq B(r, u) \cos \rho\theta$, $|\theta| \leq \pi$, а затем и утверждение 4).

Докажем справедливость 6). Пусть $r = R_n(1 + t/\ln_2 R_n)$, $t \in [1, 2]$. Окружность $\{z: |z| = r/R_n\}$ пересекает луч $\{z: \arg(z-1) = \pi/4\}$ в точке $\left(\frac{r}{R_n}\right) e^{i\gamma(t)}$. Легко подсчитать, что $\gamma(t) = \pi/4 - \arcsin \{ \sqrt{2} (1 + t/\ln_2 R_n) \}^{-1}$. Положим $\gamma_n = \gamma(2) = O((\ln_2 R_n)^{-1})$, $n \rightarrow \infty$. Так как $\gamma(t) \leq \gamma(2)$, $t \in [1, 2]$, то при $\gamma_n \leq |\theta| \leq \pi$, $k \geq n$ выполняется $u(re^{i\theta}/R_k) = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} v(re^{i\theta}) &\leq \sum_{k=1}^{n-1} A_k C (r/R_k)^p = (1 + o(1)) Cr^p \ln R_{n-1} = \\ &= (1 + o(1)) CR_n^p \ln R_{n-1}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.5)$$

С другой стороны, при рассматриваемых r

$$\begin{aligned}\lambda(r) = v(r) &\geq A_n u(r/R_n) = R_n^2 \ln R_n t^2 (\ln_2 R_n)^{-2} \geq \\ &\geq 10^{-4} R_n^2 \ln R_n / (\ln_2 R_n)^2.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Так как $\ln R_{n-1} = o(\ln R_n / (\ln_2 R_n)^2)$, $n \rightarrow \infty$, то из (2.5) и (2.6) следует утверждение 6).

Следующая лемма доказана в [1, с. 207—208].

Лемма 2.2. Пусть $\lambda(r)$ — неубывающая выпуклая относительно логарифма функция, порядок которой $\rho < 1$. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda(r + O(\ln r)) / \lambda(r) = 1. \quad (2.7)$$

Лемма 2.3. Пусть λ — функция из леммы 2.1, $v_1(re^{i\theta}) = \lambda(r) \times \cos \rho\theta$, $0 \leq r < \infty$, $|\theta| \leq \pi$. Тогда $v_1 \in S$.

Доказательство. Так как

$$v_1(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k u(r/R_k) \cos \rho\theta,$$

то достаточно показать, что $u(r) \cos \rho\theta \in S$. Имеем $u(r) = 0$ при $0 \leq r \leq 1$,

$$u(r) = \max \{(r-1)^2, C(r^2 - 2^2)^+\}, \quad 1 \leq r \leq 3,$$

$$u(r) = C(r^2 - 2^2), \quad r \geq 3.$$

Но $C(r^2 - 2^2)^+ \cos \rho\theta \in S$, а $(r-1)^2 \cos \rho\theta \in S$ при $r > (1 + \sqrt{2})/4$, так как

$$\begin{aligned}\Delta \{(r-1)^2 \cos \rho\theta\} &= r^{-2} (4r^2 - 2r - \rho^2) \cos \rho\theta > \\ &> r^{-2} (4r^2 - 2r - 4^{-1}) \cos \rho\theta > 0,\end{aligned}\quad (2.8)$$

а субгармоничность в окрестности отрицательного луча легко проверяется. Значит, $u(r) \cos \rho\theta \in S$.

Определение. Скажем, что множество $E \subset S$ принадлежит классу (σ) , если оно покрывается кругами с конечной суммой радиусов.

Обозначим через $S_\rho(\theta)$, $0 < \rho < \frac{1}{2}$, 2π -периодическую функцию $S_\rho(\theta) = \cos \rho\theta$ при $|\theta| \leq \pi$.

Лемма 2.4. Пусть выполнены условия леммы 2.1. Существуют целые функции F и G и $E \in (\sigma)$ такие, что

$$\ln M(r, G) \sim \ln M(r, F) \sim \lambda(r), \quad r \rightarrow \infty, \quad (2.9)$$

$$\ln |G(re^{i\theta})| \sim S_\rho(\theta) \lambda(r), \quad re^{i\theta} \notin E, \quad r \rightarrow \infty, \quad (2.10)$$

$$\ln |G(re^{i\theta})| \leq (1 + o(1)) S_\rho(\theta) \lambda(r), \quad r \rightarrow \infty, \quad (2.11)$$

$$\ln |F(re^{i\theta})| \leq (1 + o(1)) S_\rho(\theta) \lambda(r), \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

Существуют последовательности (p_n) , (q_n) , $n \geq n_0$, $p_n \in [R_n(1 + (\ln_2 R_n)^{-1}, R_n(1 + 2(\ln_2 R_n)^{-1})]$, $q_n \in [r_n, r_n']$, $r_n' = o(q_n)$, $q_n =$

$= o(r_n'')$, $n \rightarrow \infty$, такие, что окружности $\{z: |z| = p_n\}$ и $\{z: |z| = q_n\}$ не пересекаются с E . и

$$\ln |F(p_n e^{i\theta})| = o(\lambda(p_n)), \quad \gamma_n \leq |\theta| \leq \pi, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.13)$$

$$\ln |F(q_n e^{i\theta})| \sim S_p(\theta) \lambda(q_n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

Существуют функции φ_1 и φ_2 , $\varphi_1(r) \rightarrow 0$, $\varphi_2(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, такие, что

$$\ln |F(re^{i\varphi_1(r)})| \sim \lambda(r), \quad r \rightarrow \infty, \quad (2.15)$$

$$\ln |G(re^{i\varphi_2(r)})| \sim \lambda(r), \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.16)$$

Доказательство. Здесь и в дальнейшем будет использоваться следующая теорема Р. С. Юлмухаметова [12].

Теорема Ю. Пусть $u \in S$, $B(r, u) = O(r^\rho)$, $r \rightarrow \infty$, $\rho < \infty$. Тогда существуют целая функция f и $E \in (\sigma)$ такие, что

$$|u(z) - \ln |f(z)|| = O(\ln^2 |z|) \quad z \rightarrow \infty, \quad z \notin E. \quad (2.17)$$

По теореме Ю можно найти такие целые функции F и G , для которых вне некоторого $E \in (\sigma)$ выполняется

$$|v(z) - \ln |F(z)|| = O(\ln^2 |z|), \quad z \rightarrow \infty, \quad z \notin E, \quad (2.18)$$

$$|v_1(z) - \ln |G(z)|| = O(\ln^2 |z|), \quad z \rightarrow \infty, \quad z \notin E. \quad (2.19)$$

Из (2.19) сразу следует (2.10), а из (2.18) и свойства 5) в лемме 2.1—(2.14). Из (2.18) и (2.19) вытекает выполнение (2.9) сначала при $r \notin E_1$, где $E_1 = \{r > 0: \exists re^{i\theta} \in E\}$. Так как $E_1 \in (\sigma)$, то в силу монотонности $\ln M(r, G)$, $\ln M(r, F)$ и $\lambda(r)$ и леммы 2.2 соотношение (2.9) выполняется при $r \rightarrow \infty$ без ограничений. Из $E \in (\sigma)$ леммы 2.2, (2.10) и принципа максимума модуля следует (2.11). Из тех же соображений и свойства 4) в лемме 2.1 получаем (2.12). Так как $R_n(1 + 2/\ln_2 R_n) - R_n(1 + 1/\ln_2 R_n) > \{R_n(1 + 2/\ln_2 R_n)\}^{1/2}$, то из свойства 6) в лемме 2.1 и (2.18) следует (2.13). Из (2.9), (2.11), (2.12) сразу вытекают (2.15) и (2.16).

Лемма 2.4 доказана.

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. Выберем последовательность (a_k) , $k \in \mathbb{Z}$, так, чтобы $a_{-k} = a_k$, $E_1 = \{a_{2m}: m \in \mathbb{Z}_+\}$, $E_2 \setminus E_1 = \{a_{2m+1}: m \in \mathbb{Z}_+\}$. Последовательность $\theta_k \uparrow \pi$, $k \rightarrow +\infty$, выберем так, что $\theta_{-k} = -\theta_k$, $\theta_0 = 0$, $\theta_{k+1} - \theta_k \downarrow 0$, $0 \leq k \rightarrow +\infty$; $\theta_{2k+1} = (\theta_{2k} + \theta_{2k+2})/2$. Положим

$$H_k = \begin{cases} G, & k = 2m, \\ F, & k = 2m + 1, \end{cases}$$

где целые функции G и F построены в лемме 2.4. Выберем последовательность (c_k) , $c_k > 0$, $c_{-k} = c_k$, так, чтобы $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k < \infty$.

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k |a_k| < \infty$. Пусть

$$f_j(z) = \sum_{k \neq j} c_k (a_k - a_j) H_k(ze^{-i\theta_k}),$$

$$g_j(z) = \sum_{k \neq j} c_k H_k(ze^{-i\theta_k}).$$

Следующая лемма выводится в [5, с. 202—203] из тождества Картана [1, с. 33].

Лемма 2.5. Пусть заданы произвольная последовательность чисел (R_q) и произвольная последовательность мероморфных функций (f_k) . Тогда множество

$$E = \{\theta \in [-\pi, \pi] : \forall k, q \geq 1 \\ m(R_q, (f_k - e^{i\theta})^{-1}) < 2^{k+q+1} \pi \ln 2\}$$

не пусто.

Применяя эту лемму, заключаем, что существует число $\alpha \in [0, 2\pi]$ такое, что при всех $j \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ выполняется

$$m(p_n, e^{i\alpha}, f_j) \leq 2^{j+n+2} \pi \ln 2. \quad (2.20)$$

Пусть далее

$$\psi_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k a_k H_k(ze^{-i\theta_k}) - e^{i\alpha},$$

$$\psi_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H_k(ze^{-i\theta_k}), \quad f(z) = \psi_1(z)/\psi_2(z).$$

Отсюда в силу (2.9) при $r \rightarrow \infty$

$$T(r, f) \leq T(r, \psi_1) + T(r, \psi_2) + O(1) \leq \ln M(r, \psi_1) + \\ + \ln M(r, \psi_2) + O(1) \leq (2 + o(1)) \lambda(r). \quad (2.21)$$

Пусть $k(\theta) = \sup \{S_p(\theta + \theta_m) : m \in \mathbf{Z}\}$. Легко видеть, что для всех $\theta \in [0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ в определении $k(\theta)$ можно брать $\max$ вместо $\sup$, $0 < k(\theta) < 1$, $k(\theta_m) = 1$, $m \in \mathbf{Z}$, $k(\pi) = 1$. Непрерывная функция k имеет угловые точки в $\theta_{m+1} = (\theta_m + \theta_{m+1})/2$. Положим $\varphi_{2m+1}(r) = \varphi_1(r)$, $\varphi_{2m}(r) = \varphi_2(r)$, $m \in \mathbf{Z}$, где φ_1 и φ_2 взять из (2.15) и (2.16).

Покажем, что $\beta(a_j, f) > 0$. Имеем

$$f(z) - a_j = \frac{f_j(z) - e^{i\alpha}}{g_j(z) + c_j H_j(ze^{-i\theta_j})}. \quad (2.22)$$

Из (2.11) и (2.12) следует, что при $r \rightarrow \infty$

$$|f_j(re^{i(\theta_j + \varphi_j(r))})| \leq \exp\{(\omega_j + o(1))\lambda(r)\},$$

$$|g_j(re^{i(\theta_j + \varphi_j(r))})| \leq \exp\{(\omega_j + o(1))\lambda(r)\},$$

где $\omega_j = \max \{S_p(\theta_j - \theta_m) : m \in \mathbf{Z} \setminus \{j\}\} = \max \{S_p(\theta_j - \theta_{j-1}), S_p(\theta_j - \theta_{j+1})\}$, $0 < \omega_j < 1$. С другой стороны, в силу (2.15) и (2.16)

$$|c_j H_j(re^{i\varphi_j(r)})| \geq \exp\{(1 + o(1))\lambda(r)\}, \quad r \rightarrow \infty.$$

Из (2.22) следует поэтому, что $(r \rightarrow \infty)$

$$|f(re^{i(\theta_j + \varphi_j(r))} - a_j| \leq \exp \{(\omega_j - 1 + o(1))\lambda(r)\},$$

$$L(r, a_j, f) \geq (1 - \omega_j + o(1))\lambda(r).$$

Вместе с (2.21) это дает $\beta(a_j, f) \geq (1 - \omega_j)/2 > 0$.

Теперь докажем, что $\delta(a_{2k}, f) = 0$. Положим $j = 2k$ и выберем $\eta = \eta_j$, $0 < \eta < \theta'_{j+1} - \theta_j$ при $j \geq 0$ и $0 < \eta < \theta_j - \theta'_{j-1}$ при $j < 0$. Рассмотрим угол $W_j = \{z: \theta'_j + \eta \leq \arg z \leq \theta'_{j+1} - \eta\}$. Пусть $E^j = \{z: ze^{-i\theta_j} \in E\}$, где E — множество из (2.10). Тогда по (2.10) при $z = re^{i\theta} \in W_j \setminus E^j$, $r \rightarrow \infty$, выполняется

$$|H_j(ze^{-i\theta_j})| \geq \exp \{(S_\rho(\theta - \theta_j) + o(1))\lambda(r)\}. \quad (2.23)$$

Пусть

$$\omega_j(\theta) = \max \{S_\rho(\theta - \theta_m) : m \in \mathbb{Z} \setminus \{j\}\} = \max \{S_\rho(\theta - \theta_{j-1}),$$

$$S_\rho(\theta_{j+1} - \theta)\}, \quad \theta'_j + \eta \leq \theta \leq \theta'_{j+1} - \eta.$$

Легко видеть, что

$$\max \{\omega_j(\theta) - S_\rho(\theta - \theta_j) : \theta'_j + \eta \leq \theta \leq \theta'_{j+1} - \eta\} =$$

$$= \max \{\omega_j(\theta) - S_\rho(\theta - \theta_j) : \theta = \theta'_j + \eta, \theta = \theta'_{j+1} - \eta\} = -\gamma(j) < 0.$$

Из (2.11) и (2.12) следует, что при $z = re^{i\theta} \in W_j$, $r \rightarrow \infty$

$$|f_j(z)| \leq \exp \{(\omega_j(\theta) + o(1))\lambda(r)\}, \quad (2.24)$$

$$|g_j(z)| \leq \exp \{(\omega_j(\theta) + o(1))\lambda(r)\}. \quad (2.25)$$

Из (2.22)–(2.25) получаем, что при $z = re^{i\theta} \in W_j \setminus E^j$ выполняется

$$|f(z) - a_j| \leq \exp \{(\omega_j(\theta) - S_\rho(\theta - \theta_j) + o(1))\lambda(r)\} \leq \\ \leq \exp \{(-\gamma(j) + o(1))\lambda(r)\}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.26)$$

Вместе с (2.21) это дает

$$\delta(a_j, f) \geq \gamma(j)(\theta'_{j+1} - \theta'_j - 2\eta)/4\pi > 0, \quad j = 2k.$$

Из (2.26) следует также, что при $r \rightarrow \infty$

$$T(r, f) \geq m(r, a_0, f) + O(1) \geq (L + o(1))\lambda(r), \quad L > 0. \quad (2.27)$$

Из (2.21), (2.27) и свойства 2) в лемме 2.1 вытекает, что $\ln T(r, f) \sim_\rho \ln r$, $r \rightarrow \infty$.

Покажем теперь, что $\delta(a_{2k}, f) = 0$. Положим $j = 2k + 1$ и зафиксируем η , $0 < \eta < \pi/2$. Пусть $k_0 > 0$ таково, что $\theta_{2k_0-1} \leq \pi - \eta < \theta_{2k_0+1}$, $S_{nm} = \{z = p_n e^{i\theta} : \theta_{2m-1} + \eta' \leq \theta \leq \theta_{2m+1} + \eta'\}$, где p_n взято из (2.13), а $\eta' = \eta/2(2k_0 + 1)$. На $S_{nm} \setminus E^{2m}$ в силу (2.10), (2.11) и (2.13) выполняется ($z = re^{i\theta} \in S_{nm} \setminus E^{2m}$) при $n \rightarrow \infty$

$$|H_{2m}(ze^{-i\theta_{2m}})| \geq \exp \{(S_\rho(\theta - \theta_{2m}) + o(1))\lambda(p_n)\},$$

$$|f_{2m}(z)| \leq \exp \{(h_{2m}(\theta) + o(1))\lambda(p_n)\},$$

$$|g_{2m}(z)| \leq \exp \{(h_{2m}(\theta) + o(1))\lambda(p_n)\},$$

где $h_{2m}(\theta) = \max \{S_p(\theta - \theta_{2k}) : k \in Z \setminus \{m\}\} \leq S_p(\theta - \theta_{2m}) - \varkappa_m$, $\varkappa_m > 0$. Отсюда и из (2.22) следует, что на $\bigcup_{n=1}^{\infty} (S_{nm} \setminus E^{2m})$ функция f равномерно стремится к a_{2m} при $r = |z| \rightarrow \infty$ и, следовательно, $\ln^+ |f(z) - a_j|^{-1} = O(1)$ при $r \rightarrow \infty$. Пусть

$$I_n = \{z : |z| = p_n\} \setminus \bigcup_{m=-k_0}^{k_0} (S_{nm} \setminus E^{2m}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} m(p_n, a_j, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{I_n} \ln^+ \frac{1}{|f(p_n e^{i\theta}) - a_j|} d\theta + O(1) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{I_n} \ln^+ |\psi_2(p_n e^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{I_n} \ln^+ \frac{1}{|f_j(p_n e^{i\theta}) - e^{ia}|} d\theta + \\ &\quad + O(1) \leq \frac{3\eta}{2\pi} (1 + o(1)) \lambda(p_n) + m(p_n, e^{ia}, f_j) = \\ &= \frac{3\eta}{2\pi} (1 + o(1)) \lambda(p_n) + O(2^n) = \frac{3\eta}{2\pi} (1 + o(1)) \lambda(p_n), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

в силу (2.9) и (2.20), поскольку $\ln \lambda(p_n) = (1 + o(1)) \rho \ln p_n \gg (1 + o(1)) \rho \ln R_n = (1 + o(1)) \rho e_2(n)$. Из (2.27) и произвольности $\eta > 0$ следует, что $\delta(a_{2k+1}, f) = 0$.

Осталось показать, что $\beta(a, f) = 0$ при $a \notin E_2$. Сначала установим, что $\delta(a, f) = 0$ при $a \notin E_2$. Отрезок $[-\pi + \eta, \pi - \eta]$, $\eta < 1/3$, содержит конечное число точек θ'_m . Покроем каждую из этих точек интервалом так, чтобы суммарная длина этих интервалов не превышала η . Дополнение к $[-\pi + \eta, \pi - \eta]$ до объединения этих интервалов состоит из конечного числа сегментов Θ_j , $j_1 \leq j \leq j_2$, $\Theta_j \subset [\theta'_{j-1}, \theta'_j]$. Используя (2.10), (2.14) и (2.22), подобно тому, как рассуждали выше, показываем, что $f(q_n e^{i\theta})$ равномерно относительно $\theta \in \Theta_j$ стремится к a_j при $n \rightarrow \infty$, $j_1 \leq j \leq j_2$. Поэтому

$$\ln^+ |f(q_n e^{i\theta}) - a|^{-1} = O(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad \theta \in \bigcup_{j=j_1}^{j_2} \Theta_j.$$

Пусть

$$S = [-\pi, \pi] \setminus \bigcup_{j=j_1}^{j_2} \Theta_j,$$

тогда $\text{mes } S \leq 3\eta$. Используя теорему Эдreja и Фукса [1, с. 58], получим

$$\begin{aligned} m(q_n, a, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_S \ln^+ \frac{1}{|f(q_n e^{i\theta}) - a|} d\theta + O(1) \leq \\ &\leq K_\mu \ln \frac{1}{3\eta} T(2q_n, f) + O(1), \quad K = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

При $r \in [r'_n, r''_n/2]$ в силу свойства 3) из леммы 2.1, (2.21) и (2.27) имеем при $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} T(2r, f) &\leq (2 + o(1)) \lambda(2r) = (1 + o(1)) 2^{p+1} c_n r^p = \\ &= (1 + o(1)) 2^{p+1} \lambda(r) \leq (1 + o(1)) 2^{p+1} L^{-1} T(r, f). \end{aligned} \quad (2.29)$$

В частности, (2.29) справедливо при $r = q_n$,* и из (2.28) получаем при $n \rightarrow \infty$

$$m(q_n, a, f) \leq (1 + o(1)) K 2^{p+1} L^{-1} \eta \ln \frac{1}{3\eta} T(q_n, f). \quad (2.30)$$

Учитывая, что η можно выбирать сколь угодно малым, получаем $\delta(a, f) = 0$, $a \notin E_2$.

В силу (2.29) выполняется

$$T(2r, f) = O(T(r, f)), \quad r \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [r'_n, r''_n/2], \quad r \rightarrow \infty,$$

а по (2.30) $m(q_n, a, f) = o(T(q_n, f))$, $r'_n = o(q_n)$, $q_n = o(r''_n)$, $n \rightarrow \infty$. По теореме одного из авторов [7] тогда $\beta(a, f) = 0$. Теорема 1 полностью доказана.

Список литературы: 1. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. — М.: Наука, 1970. — 592 с. 2. Петренко В. П. Рост мероморфных функций. — Х.: Вища шк., 1978. — 136 с. 3. Гришин А. Ф. О сравнении дефектов $\delta_p(a)$ — Теория функций, функционал. анализ и их приложения, 1976, вып. 25, с. 56—66. 4. Гольдберг А. А. К вопросу о связи между дефектом и отклонением мероморфной функции. — Теория функций, функционал. анализ и их прил., 1978, вып. 29, с. 31—35. 5. Седин М. Л. О соотношении между множествами дефектных значений и отклонений для мероморфной функции конечного порядка. — Сиб. мат. журн., 1981, 22, № 2, с. 198—206. 6. Linear and complex analysis problem book, 199 research problems. — Lect. Notes in Math., N 1043. Springer Verl., Berlin, 1984. 7. Еременко А. Э. О дефектах и отклонениях мероморфных функций конечного порядка. — Докл. АН СССР, 1985, № 1, с. 8. Петренко В. П. К вопросу о структуре множества положительных отклонений мероморфных функций. — Теория функций, функционал. анализ и их прил., 1970, вып. 12, с. 86—94. 9. Kotman L. J. An entire function with irregular growth and more than one deficient value. — Lect. Notes in Math., N 747. Springer Verl., Berlin, 1979, p. 219—229. 10. Hayman W. K. Research problems in function theory. Athlone Press, London, 1967. — 56 p. 11. Miles J. Some examples of the dependence of the Nevanlinna deficiency upon the choice of origin. — Proc. London Math. Soc., 1983, 47, p. 145—176. 12. Юлмухаматов Р. С. Приближение субгармонических функций. — Мат. сб., 1984, 124, № 3, с. 393—415.

Поступила в редколлегию 16. 09. 85.