МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ ISSN 0321-4427

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

57/93

«ОСНОВА»

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ
МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ
НАУЧНЫЙ
СБОРНИК

Основан в 1965г.

ISSN 0321—4427. Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1993. Вып. 57. 1—132.

«ОСНОВА»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
И ОРДЕНА ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А. М. ГОРЬКОГО

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Республиканский межведомственный научный сборник

Основан в 1965 г.

ВЫПУСК 57

ХАРКІВ
ВИДАВНИЦТВО «ОСНОВА» ПРИ ХАРКІВСЬКОМУ
ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
1992

УДК 513.33

Сборник содержит статьи по теории целых и субгармонических функций, спектральной теории дифференциальных операторов, краевой задачи Римана с бесконечным индексом, геометрии банаховых пространств.
Для научных работников и специалистов.

Адрес редакционной коллегии: 310077 Харьков, пл. Дзержинского, 4, университет, механико-математический факультет, тел. 45-73-27

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 57

Редактор *Н. С. Калинина*
Художественный редактор *Т. П. Короленко*
Технический редактор *Г. П. Александрова*
Корректор *В. Л. Светличная*

Сдано в набор 20.07.92. Подписано в печать 12.11.92. Формат 60×90/16. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Печ. л. 8,25. Кр.-отт. 8,5. Уч.-изд. л. 9,2. Изд. № 2154. Зак. № 2-231.

Издательство «Основа» при Харьковском государственном университете. 310005 Харьков, пл. Восстания, 17.

Отпечатано с матриц Книжной ф-ки им. М. В. Фрунзе. 310057 Харьков, ул. Донец-Захаржевского, 6/8, в Харьковской городской типографии № 16. Харьков-3, 310003 ул. Университетская, 16. Зак. 794.

$\text{Т}\,\dfrac{2702000000-100}{226-92}\,53\text{-}92$

УДК 517.53

И. В. ОСТРОВСКИЙ

ОДНОРОДНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ НА КРИВОЛИНЕЙНОМ КОНТУРЕ. II

Введение. Настоящая статья является продолжением [1], и ее результаты дают обобщения на случай криволинейного контура результатов [2]. Дополнительно к цитированным в [1] работам, связанным с рассматриваемой темой, отметим работы Б. А. Каца [4] и С. А. Плаксы [3].

В качестве контуров будем рассматривать кривые вида $L=\{z: z= re^{i\varphi(r)},\ 2\leqslant r_0\leqslant r<\infty\}$, где φ — вещественная непрерывно дифференцируемая функция, такая, что

$$\exists \lim_{r\to\infty}(r\varphi'(r)-\varphi(r)/\ln r)=0,\ \overline{\lim_{r\to\infty}}\,|\varphi(r)|/\ln r<\infty, \tag{0.1}$$

и, кроме того, $\varphi'\in\Delta$, где Δ — класс непрерывных на $[r_0, \infty)$ функций g, модуль непрерывности которых $\omega_R(\delta, g)$ на $[r_0, R]$ при любом $R>r_0$ удовлетворяет условию $\int\limits_0 \omega_R(\delta, g)\,\delta^{-1}\,d\delta<\infty$. Такие кривые образуют класс, несколько более узкий, чем класс допустимых кривых из [1], но мы сохраним за ними название допустимых и будем, как и в [1], характеризовать их величинами

$$C(L)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\,|\varphi(r)|/\ln r,\quad c(L)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\,|\varphi(r)|/\ln r.$$

Рассмотрим на L однородную краевую задачу Римана:

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t),\quad t\in L\setminus\{t_0\},\quad t_0=r_0\,e^{i\varphi(r_0)}. \tag{0.2}$$

Будем считать, что $G(t)\neq 0$ на L, $-2\pi<\arg G(t_0)\leqslant 0$, $\ln G(re^{i\varphi(r)})\in\Delta$. Относительно поведения $\ln G$ на бесконечности будем предполагать следующее. Найдутся пара уточненных порядков Бутру $(l(r),\ l_1(r))$, такая, что

$$p=[\lambda]<\lambda=\underline{\lim_{r\to\infty}}\,l(r)\leqslant\overline{\lim_{r\to\infty}}\,l(r)=\rho<\min\left\{p+1,\ \frac{1}{2}(1+c^2(L))\right\}, \tag{0.3}$$

$$V_1(r)=o(V(r)/\ln r),\ r\to\infty,\ (V(r)=r^{l(r)},\ V_1(r)=r^{l_1(r)}),$$

и целозначная неубывающая функция $n(r)\geqslant 0$, $r_0\leqslant r<\infty$, связанные с $\ln G$ и кривой L следующим образом. Полагая $\Lambda(t)=\frac{1}{2\pi}\arg G(t)-n(|t|)$, имеем

А) справедливо представление

$$\Lambda(t)=V(|t|)+o(V_1(|t|)),\ t\to\infty;$$

Б) имеет место соотношение

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\,V^{-1}(r)\int\limits_0^{k(r)}(\Lambda(t^+(r,\sigma))-\Lambda(t^-(r,\sigma)))\,\sigma^{-1}\,d\sigma\quad 0, \tag{0.4}$$

где $k(r) = \exp\{-V(r)/(V_1(r)\ln r)\}$, а $t^{\pm}(r, \sigma)$ — точки на L такие, что $|t^{\pm}(r, \sigma) - re^{i\varphi(r)}| = \sigma$, $|t^{+}(r, \sigma)| > r > |t^{-}(r, \sigma)|$ (как мы покажем далее, при $0 < \sigma < k(r)$ и достаточно большом r точки $t^{\pm}(r, \sigma)$ определяются однозначно);

(В) справедлива оценка

$$|\ln|G(t)||\left\{1 + |t| \int\limits_0^{k(|t|/2)} \omega_{3|t|}(\delta, \varphi')\,\delta^{-1}\,d\delta\right\} = o(V_1(|t|)), \quad t \to \infty. \quad (0.5)$$

Условие (А) означает, что функция $\arg G(re^{i\varphi(r)})$ достаточно хорошо аппроксимируется неубывающей; этот характер условия особенно ясен, когда $\arg G(re^{i\varphi(r)})$ быстро растет (например, быстрее любой степенной функции). Условие (Б) можно рассматривать как ограничение на регулярность поведения $\arg G(re^{i\varphi(r)})$ при больших r. Как будет показано ниже (см. доказательство теоремы 3), оно, например, всегда выполняется, если функция $\arg G(re^{i\varphi(r)})$ непрерывно дифференцируема и ее производная имеет не более чем степенной рост. Однако (см. доказательство теоремы 4) последнее не является необходимым для выполнения (Б). Условие (В) включает, вообще говоря, одновременно ограничения и на рост $|\ln|G(re^{i\varphi(r)})||$, и на регулярность поведения кривой L на бесконечности. Конечно, оно тривиально выполняется, если $|G| \equiv 1$, и в этом случае не накладывает дополнительных ограничений на L. В общем случае оно влечет оценку $|\ln|G(t)|| = o(V_1(|t|))$, $t \to \infty$, и будет выполнено, если L принадлежит классу C^2 и $|\ln|G(t)||(1 + |t|\,k(|t|)\,|\varphi''(|t|)|) = o(V_1(|t|))$, $t \to \infty$. Для выполнения последнего, конечно, достаточно, чтобы $|\ln|G(t)||(1 + |t||\varphi''(|t|)|) = o(V_1(|t|))$, $t \to \infty$.

Основным результатом статьи является следующая теорема, аналогичная теореме 1 из [2].

Теорема 1. *Пусть L — допустимая кривая и $\varphi' \in \Delta$. Если коэффициент G задачи* (0.2) *таков, что $\ln G \in \Delta$, и выполнены условия (А), (Б), (В), то задача* (0.2) ***имеет нетривиальное решение*** *Φ, допускающее в области $D = \mathbf{C} \setminus L$ оценку*

$$|\Phi(z)| \leqslant C\exp\{-CV(|z|)\}. \quad (0.6)$$

Рассмотрим также следующие ограничения более простого характера, чем (А) — (В). Найдется целозначная неубывающая функция $0 \leqslant n(r) \uparrow \infty$, $r_0 \leqslant r \uparrow \infty$, такая, что

(А′) выполняется $\Lambda(t) = O(1)$, $t \to \infty$;

(Б′) при некотором $q > 0$ имеем

$$\overline{\lim_{r \to \infty}}\,(\ln r)^{-1} \int\limits_0^{r^{-q}} (\Lambda(t^{+}(r, \sigma)) - \Lambda(t^{-}(r, \sigma)))\,\sigma^{-1}\,d\sigma < \infty;$$

(В′) справедлива оценка, получающаяся из (0.5) заменой в левой и правой частях соответственно $k(|t|)$ на $|t|^{-q}$ и $o(V_1(|t|))$ на $O(1)$.

Теорема 2. *Пусть L — допустимая кривая и $\varphi' \in \Delta$. Если коэффициент G задачи* (0.2) *таков, что $\ln G \in \Delta$, и выполнены условия (А′) — (В′), то задача* (0.2) ***имеет нетривиальное ограниченное решение.***

Замечание. Как будет видно из доказательств теорем 1 и 2, утверждения этих теорем сохраняют силу и без предположения, что $\varphi' \in \Delta$, если считать, что коэффициент G задачи (0.2) унимодулярен, т. е. $|G| \equiv 1$.

Теоремы 1 и 2 позволяют указать условия разрешимости задачи (0.2), допускающие возможность весьма нерегулярного поведения $\arg G(t)$ при $t \to \infty$ и сколь угодно быстрого его роста. Условия первого типа содержит теорема 3, а второго — теорема 4. Отметим, что впервые краевая задача Римана со сколь угодно быстро растущим аргументом коэффициента, однако в классах, содержащих неограниченные функции Φ, была рассмотрена С. М. Грудским [5].

Теорема 3. *Пусть L — допустимая кривая и $\varphi' \in \Delta$. Предположим, что коэффициент G задачи* (0.2) *удовлетворяет условиям:* 1) *функция* $\arg G(re^{i\varphi(r)})$ *непрерывно дифференцируема и монотонно стремится к $+\infty$ при $r \to \infty$ и для некоторого $\eta > 0$ справедлива оценка* $(d/dr) \arg G(re^{i\varphi(r)}) = O(r^{\eta})$, $r \to \infty$;
2) *функция* $\ln|G|$ *принадлежит Δ и удовлетворяет условию* (B′). *Тогда задача* (0.2) *имеет нетривиальное ограниченное решение.*

Отметим, что условие 1) выполнено, если $\arg G(t) = |t|^{l(|t|)}$, где $l(r)$ — уточненный порядок Бутру с любыми наперед заданными $0 < \lambda \leqslant \rho < \infty$, $\lambda = \varliminf\limits_{r \to \infty} l(r)$, $\rho = \varlimsup\limits_{r \to \infty} l(r)$.

Чтобы сформулировать теорему 4, обозначим через F_β, $\beta > 0$, класс всех целых функций h, $0 \leqslant h(r) \uparrow \infty$ $(r \uparrow \infty)$, удовлетворяющих условиям: а) $|h(z)| \leqslant h(\operatorname{Re} z)$, $z \in C$; б) $h(r + h^{-\beta}(r)) = O(h(r))$, $r \to \infty$. Примерами функций, принадлежащих классу F_β при любом $\beta > 0$, могут служить $e_n(z)$, $e_n(z^2)$ (где через e_n обозначена n-я итерация e^z), а также $e_n^{(k)}(z)$, $e_n^{(k)}(z^2)$ при любом $k \in N$. Легко видеть, что если $h \in F_\beta$, то $h(r) \geqslant Ce^{Cr}$ при некотором $C > 0$. В [6] установлено, что рост функций класса F_β не ограничен сверху: каковы бы ни были неубывающая функция $0 \leqslant q(r) \uparrow \infty$ и число $\beta > 0$, найдется функция $h \in F_\beta$, такая, что $h(r) \geqslant q(r)$, $r \geqslant 0$.

Теорема 4. *Пусть L — допустимая кривая и $\varphi' \in \Delta$. Предположим, что коэффициент G задачи* (0.2) *удовлетворяет условиям:* 1) *справедливо представление*

$$\frac{1}{2\pi} \arg G(re^{i\varphi(r)}) = \int_{r_0}^{r} h(u)\, du + V(r) - V(r_0), \quad r_0 \leqslant r < \infty, \tag{0.7}$$

где $h \in F_\beta$, $\beta \in (0, 1/2)$, а $V(r) = r^{l(r)}$, причем уточненный порядок Бутру $l(r)$ удовлетворяет условию (0.3);
2) *функция* $\ln|G|$ *принадлежит Δ и удовлетворяет условию* (B). *Если*

$$r \int_0^{k(r)} \omega_{2r}(\delta, \varphi')\, \delta^{-1}\, d\delta = o(V(r)), \quad r \to \infty, \tag{0.8}$$

то задача (0.2) *имеет нетривиальное решение Φ, допускающее оценку* (0.6).

Для доказательства теорем 1 и 2 используется следующая теорема типа Фрагмена — Линделефа (аналогичную роль в [2] играет теорема Р. Неванлинны).

Теорема 5. *Пусть* $L=\{z: z=re^{i\varphi(r)},\ 0\leqslant r<\infty\}$ *— гладкая кривая,* $D=\mathbf{C}\setminus L$, Φ *— функция, аналитическая в* D *и ограниченная в* $D\cap\{z:|z|\leqslant R\}$ *при любом* $R>0$. *Если угловые предельные значения* $\Phi^{\pm}$ *функции* Φ *на обоих берегах разреза вдоль* L *удовлетворяют почти всюду на* L *условию*

$$|\Phi^{\pm}(\zeta)|\leqslant M<\infty, \tag{0.9}$$

и, кроме того, при некотором $\beta>1$ *справедливо соотношение*

$$\left\{\int\limits_{\varphi(r)}^{\varphi(r)+2\pi}(\ln^{+}|\Phi(re^{i\theta})|)^{\beta}\,d\theta\right\}^{1/\beta}=$$

$$=o\left\{(\ln r)^{1/\beta}\exp\left(\frac{\beta-1}{2\beta}\,\frac{\ln^2 r+(|\varphi(r)|-4\pi)^2}{\ln r}\right)\right\},\quad r\to\infty, \tag{0.10}$$

то $|\Phi(z)|\leqslant M$ *при всех* $z\in D$.

Доказательство теоремы 5 приведем в конце статьи, а сначала с ее помощью докажем теоремы 1 и 2 и выведем из них теоремы 3 и 4.

§ 1. Доказательство теоремы 1

Положим

$$\Phi(z)=\exp\left\{\frac{z^{p+1}}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\ln G(t)-2\pi i n(|t|)}{t^{p+1}(t-z)}\,dt\right\},\quad z\in D. \tag{1.1}$$

Так как из условий (A) и (B) следует, что $|\ln G(t)-2\pi i n(|t|)|\leqslant$ $\leqslant|\ln|G(t)||+2\pi|\Lambda(t)|=O(V(|t|))$, $t\to\infty$, а в силу допустимости кривой L имеем $|dt|\leqslant Cd|t|$, то учитывая (0.3), видим, что интеграл в правой части (1.1) абсолютно сходится. Так как $\ln G\in\Delta$, то по теореме Племеля — Привалова функция Φ непрерывна на множестве (D), получаемом присоединением к D обоих берегов разреза вдоль $L\setminus\{t_0\}$. Формула Сохоцкого — Племеля показывает, что функция Φ удовлетворяет условию (0.2). Из условия $0\geqslant\arg G(t_0)>-2\pi$ вытекает (ср. [7, с. 115]), что функция Φ ограничена в окрестности точки t_0. Таким образом, функция Φ ограничена в $D\cap\{z:|z|\leqslant R\}$ при любом $R>0$. Докажем, что функция Φ удовлетворяет условиям (0.9) и (0.10) теоремы 5.

Сначала проверим выполнение условия (0.10). Имеем при $\varphi(r)<$ $<\theta<\varphi(r)+2\pi$

$$|\ln\Phi(re^{i\theta})|\leqslant\frac{r^{p+1}}{2\pi}\int\limits_{L}\frac{|\ln|G(t)||+2\pi|\Lambda(t)|}{|t|^{p+1}|t-re^{i\theta}|}|dt|\leqslant$$

$$\leqslant Cr^{p+1}\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{V(s)\,ds}{s^{p+1}|se^{i\varphi(s)}-re^{i\theta}|}\leqslant Cr^{p+1}\left\{\int\limits_{r_0}^{r/2}\frac{V(s)\,ds}{s^{p+1}r}+\right.$$

$$+\int\limits_{r/2}^{3r/2}\frac{V(s)\,ds}{s^{p+1}\,|se^{i\varphi(s)}-re^{i\theta}|}+\int\limits_{3r/2}^{\infty}\frac{V(s)\,ds}{s^{p+2}}\Bigg\}\leqslant$$

$$\leqslant CV(r)\left\{1+\int\limits_{r/2}^{3r/2}\frac{ds}{|se^{i\varphi(s)}-re^{i\theta}|}\right\} \qquad (1.2)$$

(мы воспользовались свойствами уточненного порядка Бутру [8, с. 91]).

Докажем справедливость оценки

$$\int\limits_{r/2}^{3r/2}\frac{ds}{|se^{i\varphi(s)}-re^{i\theta}|}\leqslant C\left(1+\left|\ln\sin\frac{\theta-\varphi(r)}{2}\right|\right),$$

$$\varphi(r)<\theta<\varphi(r)+2\pi. \qquad (1.3)$$

Ограничимся случаем $\varphi(r)<\theta\leqslant\varphi(r)+\pi$, так как случай $\varphi(r)+\pi\leqslant\theta<\varphi(r)+2\pi$ рассматривается аналогично.

Пусть $|s-r|<\delta r(\theta-\varphi(r))$, где $\delta=\min\{1/(8C(L)),\ 1/(4\pi)\}$. При достаточно больших r в силу (0.1) имеем $|\varphi'(r)|\leqslant 2C(L)/r$, поэтому $|\varphi(r)-\varphi(s)|\leqslant|r-s|\max\{|\varphi'(t)|: r/2\leqslant t\leqslant 3r/2\}\leqslant|r-s|\,4C(L)/r\leqslant\leqslant\frac{1}{2}(\theta-\varphi(r))$ и, следовательно, $\frac{1}{2}(\theta-\varphi(r))\leqslant\theta-\varphi(s)\leqslant\frac{3}{2}(\theta-\varphi(r))$. Поскольку $|se^{i\varphi(s)}-re^{i\theta}|=\{(s-r)^2+4sr\sin^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi(s))\}^{1/2}\geqslant 2\sqrt{rs}\times\left|\sin\frac{1}{2}(\theta-\varphi(s))\right|$, то при $\varphi(r)<\theta\leqslant\varphi(r)+\pi/3$ имеем $|se^{i\varphi(s)}-re^{i\theta}|\geqslant 2\sqrt{rs}(\theta-\varphi(s))/\pi\geqslant C(\theta-\varphi(r))$, а при $\varphi(r)+\pi/3\leqslant\theta\leqslant\varphi(r)+\pi$ имеем $|se^{i\varphi(s)}-re^{i\theta}|\geqslant 2\sqrt{rs}\sin(\pi/12)\geqslant Cr(\theta-\varphi(r))$. Поэтому

$$\int\limits_{|s-r|<\delta r(\theta-\varphi(r))}\frac{ds}{|se^{i\varphi(s)}-re^{i\theta}|}\leqslant C$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{r/2}^{3r/2}\frac{ds}{|se^{i\varphi(s)}-re^{i\theta}|}\leqslant C+\int\limits_{r/2\geqslant|s-r|\geqslant\delta r(\theta-\varphi(r))}\frac{ds}{|s-r|}=C+2\ln\frac{1}{2\delta(\theta-\varphi(r))}.$$

Тем самым оценка (1.3) доказана.

Из (1.2) и (1.3) следует, что для любого $\beta>1$ выполняется

$$\left(\int\limits_{\varphi(r)}^{\varphi(r)+2\pi}|\ln\Phi(re^{i\theta})|^\beta d\theta\right)^{1/\beta}\leqslant CV(r)\left\{1+\left(\int\limits_{\varphi(r)}^{\varphi(r)+2\pi}\left|\ln\sin\frac{\theta-\varphi(r)}{2}\right|^\beta d\theta\right)^{1/\beta}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant CV(r). \qquad (1.4)$$

В силу условия (0.3) число β можно выбрать столь большим, чтобы $\varepsilon<\frac{\beta-1}{2\beta}(1+c^2(L))$. Для такого β будем иметь

$$V(r)=o\left\{(\ln r)^{1/\beta}\exp\left(\frac{\beta-1}{2\beta}\,\frac{\ln^2 r+(|\varphi(r)|-4\pi)^2}{\ln r}\right)\right\},\quad r\to\infty.$$

Тем самым доказано, что функция Φ удовлетворяет условию (0.10).

Покажем теперь что функция Φ удовлетворяет и условию (0) теоремы 5.

Так как $\ln G \in \Delta$, то в силу формулы Сохоцкого—Племеля имеем при всех $\zeta \in L$, за исключением точек разрыва функции $n(|\zeta|)$, равенство

$$\ln \Phi^{\pm}(\zeta) = \pm \frac{1}{2}(\ln G(\zeta) - 2\pi i n(|\zeta|)) + \\ + \frac{\zeta^{p+1}}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(t) - 2\pi i n(|t|)}{t^{p+1}(t-\zeta)} dt$$

(интеграл существует в смысле главного значения). Отделяя действительную часть и полагая $|\zeta| = r$, $\omega(r) = L \cap \{z : |z - \zeta| \leqslant k(r)\}$, $\Omega(r) = L \setminus \omega(r)$, получим

$$\ln |\Phi^{\pm}(\zeta)| = \pm \frac{1}{2} \ln |G(\zeta)| + \operatorname{Re} \frac{\zeta^{p+1}}{2\pi i} \int_{\omega(r)} \frac{\ln |G(t)| dt}{t^{p+1}(t-\zeta)} + \\ + \operatorname{Re} \frac{\zeta^{p+1}}{2\pi i} \int_{\Omega(r)} \frac{\ln |G(t)| dt}{t^{p+1}(t-\zeta)} + \operatorname{Re} \zeta^{p+1} \int_{\omega(r)} \frac{\Lambda(t) dt}{t^{p+1}(t-\zeta)} + \\ + \operatorname{Re} \zeta^{p+1} \int_{\Omega(r)} \frac{\Lambda(t) dt}{t^{p+1}(t-\zeta)} = \pm \frac{1}{2} \ln |G(\zeta)| + \sum_{j=1}^{4} \operatorname{Re} I_j(\zeta). \quad (1.5)$$

Имеем

$$I_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega(r)} \frac{\ln |G(t)| dt}{t-\zeta} + \sum_{k=0}^{p} \frac{\zeta^k}{2\pi i} \int_{\omega(r)} \frac{\ln |G(t)| dt}{t^{k+1}}.$$

В силу условия (B) выполняется $\ln |G(t)| = o(V_1(|t|))$, $t \to \infty$, поэтому

$$\left| \frac{\zeta^k}{2\pi i} \int_{\omega(r)} \frac{\ln |G(t)|}{t^{k+1}} dt \right| \leqslant \frac{r^k}{2\pi} \int_{r-k(r)}^{r+k(r)} \frac{o(V_1(s)) ds}{s^{k+1}} = o(V_1(r)), \quad r \to \infty;$$

$$\operatorname{Re} I_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega(r)} \ln |G(t)| \operatorname{Im}\left(\frac{dt}{t-\zeta}\right) + o(V_1(r)), \quad r \to \infty. \quad (1.6)$$

При $t = se^{i\varphi(s)}$, $\zeta = re^{i\varphi(r)}$ выполняется

$$\operatorname{Im}\left(\frac{dt}{t-\zeta}\right) = |t-\zeta|^{-2} \{s\varphi'(s)(s - r\cos(\varphi(s) - \varphi(r))) - r\sin(\varphi(s) - \\ - \varphi(r))\} ds = |t-\zeta|^{-2} \{s(\varphi(r) - \varphi(s) - \varphi'(s)(r-s)) + B(r, s)\} ds,$$

где $B(r, s)$ при $|s-r| \leqslant r/2$ допускает оценку $|B(r, s)| \leqslant r \times \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi(s) - \varphi(r)) + r|\sin(\varphi(s) - \varphi(r)) - (\varphi(s) - \varphi(r))| + |r-s| \times |\varphi(s) - \varphi(r)| \leqslant Cr^{-1}(s-r)^2$ (мы использовали формулу конечных приращений и условие $\varphi'(r) = O(1/r)$, $r \to \infty$). В силу формулы конечных приращений имеем $|\varphi(r) - \varphi(s) - \varphi'(s)(r-s)| \leqslant \omega_{2r}(|r-s|, \varphi')|r-s|$, $|r-s| \leqslant r/2$, поэтому

$$\operatorname{Im}\left(\frac{dt}{t-\zeta}\right) \leqslant \left(s \frac{\omega_{2r}(|r-s|, \varphi')}{|r-s|} + \frac{C}{r}\right) ds, \ |r-s| \leqslant r/2.$$

Отсюда следует, что для некоторого $t' \in \omega(r)$ имеем

$$\left|\int\limits_{\omega(r)} \ln|G(t)| \operatorname{Im}\left(\frac{dt}{t-\zeta}\right)\right| \leqslant |\ln|G(t')|| \int\limits_{r-k(r)}^{r+k(r)} \left(s\frac{\omega_{2r}(|s-r|, \varphi')}{|s-r|} + \frac{C}{r}\right) ds \leqslant$$

$$\leqslant |\ln|G(t')|| \left\{4|t'| \int\limits_0^{k(r)} \omega_{2r}(\delta)\,\delta^{-1}d\delta + 2k(r)C/r\right\} \leqslant$$

$$\leqslant |\ln|G(t')|| \left\{C|t'| \int\limits_0^{k(|t'|/2)} \omega_{3|t'|}(\delta)\,\delta^{-1}d\delta + o(1/r)\right\},$$

и с помощью условия (B) из (1.6) заключаем, что $|\operatorname{Re} I_1(\zeta)| \leqslant \leqslant o(V_1(|t'|)) + o(V_1(r)) = o(V(r))$, $r \to \infty$.

Так как в силу (0.1) имеем $|se^{i\varphi(s)} - re^{i\varphi(r)}| \geqslant C_0|s-r|$, то $\Omega(r) \subset \subset \{se^{i\varphi(s)} : |s-r| \geqslant k(r)/C_0\}$. Поскольку из условия (B) следует, что $\ln|G(t)| = o(V_1(|t|))$, $t \to \infty$, получаем

$$|I_2(\zeta)| \leqslant Cr^{p+1}\left(\int\limits_{r_0}^{r-k(r)/C_0} + \int\limits_{r+k(r)/C_0}^{\infty}\right) \frac{o(V_1(s))\,ds}{s^{p+1}|s-r|} =$$

$$= Cr^{p+1}\left\{\frac{1}{r}\int\limits_{r_0}^{r/2} o(V_1(s))\,s^{-p-1}ds + o(V_1(r)\,r^{-p-1}) \int\limits_{r/2}^{r-k(r)/C_0} \frac{ds}{r-s} + \right.$$

$$\left. + o(V_1(r)\,r^{-p-1}) \int\limits_{r+k(r)/C_0}^{3r/2} \frac{ds}{s-r} + \int\limits_{3r/2}^{\infty} o(V_1(s))\,s^{-p-2}ds\right\} =$$

$$= o\left(V_1(r)\ln\frac{rC_0}{2k(r)}\right) = o(V(r)), \quad r \to \infty. \tag{1.7}$$

Имеем

$$I_3(\zeta) = \int\limits_{\omega(r)} \frac{\Lambda(t)\,dt}{t-\zeta} + \sum_{k=0}^{p} \zeta^k \int\limits_{\omega(r)} \frac{\Lambda(t)}{t^{k+1}}\,dt.$$

В силу условия (A) выполняется $\Lambda(t) = O(V(|t|))$, $t \to \infty$, поэтому

$$\left|\zeta^k \int\limits_{\omega(r)} \frac{\Lambda(t)\,dt}{t^{k+1}}\right| \leqslant r^k \int\limits_{r-k(r)}^{r+k(r)} \frac{CV(s)}{s^{k+1}}\,ds = o(V(r)), \quad r \to \infty,$$

$$\operatorname{Re} I_3(\zeta) = \int\limits_{\omega(r)} \Lambda(t) \operatorname{Re}\left(\frac{dt}{t-\zeta}\right) + o(V(r)) = A(\zeta) + o(V(r)), \quad r \to \infty. \tag{1.8}$$

Чтобы оценить интеграл $A(\zeta)$, покажем сначала, что величина $\sigma = = |t-\zeta| = \{s^2 + r^2 - 2sr\cos(\varphi(s) - \varphi(r))\}^{1/2}$ является при достаточно больших r возрастающей функцией от s при $s \in (r, r+k(r))$ и убывающей — при $s \in (r-k(r), r)$. Действительно, при $|s-r| = o(r)$, $r \to \infty$, имеем $\frac{1}{s-r}\frac{d\sigma^2}{ds} = \frac{2}{s-r}\left\{s - r + 2r\sin^2\frac{1}{2}(\varphi(s) - \varphi(r)) + sr \times\right.$ $\left.\times \varphi'(s)\sin(\varphi(s) - \varphi(r))\right\} = 2 + o(1) + 2sr(\varphi'(s))^2 + \frac{2sr\,\varphi'(s)}{s-r}\{\varphi(s) -$

$-\varphi(r)-\varphi'(s)(s-r)\}+o(1)$. Последнее выражение положительно при достаточно больших r, так как из теоремы Лагранжа и первого условия в (0.1) следует, что при некоторых s', s'', лежащих между r и s, выполняется $\frac{r}{s-r}\{\varphi(s)-\varphi(r)-\varphi'(s)(s-r)\}=r\{\varphi'(s')-$ $-\varphi'(s)\}=r\left\{\frac{\varphi(s')}{s'\ln s'}-\frac{\varphi(s)}{s\ln s}+o\left(\frac{1}{r}\right)\right\}=r(s'-s)\frac{d}{du}\left(\frac{\varphi(u)}{u\ln u}\right)_{u=s''}+o(1)=$ $=o(1)$.

Из доказанного свойства величины σ следует, что точки $t^{\pm}(r,\sigma)$, о которых говорится в условии (Б), определяются однозначно, и интеграл $A(\zeta)$ (в смысле главного значения) может быть записан в виде

$$A(\zeta)=\int\limits_{\omega(r)}\Lambda(t)\,d\ln|t-\zeta|=\int\limits_{0}^{k(r)}\{\Lambda(t^{+}(r,\sigma))-\Lambda(t^{-}(r,\sigma))\}\frac{d\sigma}{\sigma}. \quad (1.9)$$

Поэтому из условия (Б) и соотношения (1.8) непосредственно вытекает, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}V^{-1}(r)\operatorname{Re}I_3(\zeta)\leqslant 0. \quad (1.10)$$

Интеграл $I_4(\zeta)$ запишем в виде

$$I_4(\zeta)=\zeta^{p+1}\int\limits_{\Omega(r)}\frac{\Lambda(t)-V(|t|)}{t^{p+1}(t-\zeta)}dt-\zeta^{p+1}\int\limits_{\omega(r)}\frac{V(|t|)\,dt}{t^{p+1}(t-\zeta)}+$$
$$+\zeta^{p+1}\int\limits_{L}\frac{V(|t|)\,dt}{t^{p+1}(t-\zeta)}=A_1(\zeta)-A_2(\zeta)+A_3(\zeta).$$

Используя условие (А), с помощью выкладки, аналогичной проведенной при оценке (1.7) интеграла I_2, убеждаемся, что $A_1(\zeta)=$ $=o(V(r))$, $r\to\infty$. Далее имеем

$$A_2(\zeta)=\int\limits_{\omega(r)}\frac{V(|t|)\,dt}{t-\zeta}+\sum_{k=0}^{p}\zeta^k\int\limits_{\omega(r)}\frac{V(|t|)\,dt}{t^{k+1}}=\int\limits_{\omega(r)}\frac{V(|t|)\,dt}{t-\zeta}+o(V(r)),\ r\to\infty. \quad (1.11)$$

Аналогично (1.9) верно равенство

$$\int\limits_{\omega(r)}V(|t|)\,d\ln|t-\zeta|=\int\limits_{0}^{k(r)}\{V(|t^{+}(r,\sigma)|)-V(|t^{-}(r,\sigma)|)\}\frac{d\sigma}{\sigma}, \quad (1.12)$$

поэтому

$$\operatorname{Re}A_2(\zeta)=\int\limits_{0}^{k(r)}\frac{d\sigma}{\sigma}\int\limits_{|t^{-}(r,\sigma)|}^{|t^{+}(r,\sigma)|}V'(u)\,du+o(V(r)),\ r\to\infty.$$

Так как $V'(u)\leqslant CV(u)u^{-1}$, $|t^{+}(r,\sigma)|-|t^{-}(r,\sigma)|\leqslant|t^{+}(r,\sigma)-\zeta|+$ $+|t^{-}(r,\sigma)-\zeta|=2\sigma$, то

$$|\operatorname{Re}A_2(\zeta)|\leqslant 2CV(r)r^{-1}k(r)+o(V(r))=o(V(r)),\ r\to\infty. \quad (1.13)$$

Интеграл $A_3(\zeta)$ связан с интегралом $I(|z|)$, определяемым равенством (10) из [1] формулой

$$\lim_{\theta\to\varphi(r)+0} 2\pi i I(re^{i\theta}) = \pi i V(|\zeta|) + A_3(\zeta), \ \zeta = r e^{i\varphi(r)}.$$

Так как для $\operatorname{Im} I(re^{i\theta})$ справедлива равномерная относительно $\theta \in (\varphi(r), \varphi(r)+2\pi)$ оценка (20) из [1], то имеем

$$\operatorname{Re} A_3(\zeta) = -2\pi \lim_{\theta\to\varphi(r)+0} \operatorname{Im} I(re^{i\theta}) \leqslant -CV(r).$$

Таким образом, для достаточно больших r выполняется

$$\operatorname{Re} I_4(\zeta) \leqslant -CV(r). \tag{1.14}$$

Подставляя оценки (1.6), (1.7), (1.10) и (1.14) в (1.5) и учитывая условие (B), заключаем, что

$$\ln|\Phi^{\pm}(\zeta)| \leqslant -CV(r), \ r \geqslant r_1 \geqslant r_0. \tag{1.15}$$

Так как функция Φ ограничена в $D \cap \{z\colon |z| \leqslant R\}$ при любом $R > r_0$, то из (1.15) следует, что условие (0.9) теоремы 5 также выполнено. Тем самым мы доказали, что функция Φ ограничена в D.

Остается установить справедливость оценки (0.6). Для этого рассмотрим функцию $\Phi_\varepsilon(z) = \Phi(z)\exp\{-\varepsilon 2\pi i I(z)\}$, где $\varepsilon > 0$, а $I(z)$ определяется равенством (10) из [1]. Легко видеть, что функция Φ_ε при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию (0.10) теоремы 5. Из соотношения (23) из [1] и ограниченности входящей в него величины $B(\beta(r), \alpha)$ следует, что функция Φ_ε при достаточно малом ε удовлетворяет также и условию (0.9). Поэтому функция Φ_ε при достаточно малом ε ограничена в D. Отсюда с помощью оценки (20) из [1] получаем (0.6).

§ 2. Доказательство теоремы 2

Положим

$$\Phi_0(z) = \exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(t) - 2\pi i n(|t|)}{t(t-\zeta)}\,dt\right\}, \ z \in D.$$

С помощью рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве (1.4), но использующим условия (A′), (B′), вместо (A), (B), убеждаемся, что для любого $\beta > 1$ имеем

$$\left(\int_{\varphi(r)}^{\varphi(r)+2\pi} |\ln \Phi_0(re^{i\theta})|^\beta\,d\theta\right)^{1/\beta} = O(\ln^2 r), \ r\to\infty.$$

Полагая $\zeta \in L$, $|\zeta| = r$, $\omega_0(r) = L \cap \{z\colon |z-\zeta| \leqslant r^{-q}\}$, $\Omega_0(r) = L \setminus \omega_0(r)$, где q — число, фигурирующее в условии (Б′), получим аналогичное (1.5) равенство

$$\ln|\Phi_0^{\pm}(\zeta)| = \pm\ln|G(\zeta)| + \operatorname{Re}\frac{\zeta}{2\pi i}\int_{\omega_0(r)} \frac{\ln|G(t)|\,dt}{t(t-\zeta)} +$$

$$+ \operatorname{Re}\frac{\zeta}{2\pi i}\int_{\Omega_0(r)} \frac{\ln|G(t)|\,dt}{t(t-\zeta)} + \operatorname{Re}\zeta\int_{\omega_0(r)} \frac{\Lambda(t)\,dt}{t(t-\zeta)} +$$

$$+ \operatorname{Re}\zeta\int_{\Omega_0(r)} \frac{\Lambda(t)\,dt}{t(t-\zeta)} = \pm\frac{1}{2}\ln|G(\zeta)| + \sum_{j=1}^{4}\operatorname{Re} I_j^0(\zeta).$$

Оценки интегралов I_1^0, I_2^0, I_3^0 получаются так же, как оценки интегралов I_1, I_2, I_3 в доказательстве теоремы 1 (но используются условия (А′), (Б′), (В′), вместо (А), (Б), (В)), а оценка интеграла I_4^0 получается существенно проще, чем оценка интеграла I_4 — так же, как оценка I_2. Из этих оценок следует, что для достаточно больших r имеем $\ln|\Phi_0^{\pm}(\zeta)| \leqslant C \ln r$.

Пусть h — полином, степень которого не меньше постоянной C из последнего неравенства, а корни лежат в тех точках $re^{i\varphi(r)} \in L$, в которых $n(r)$ имеет разрыв. Тогда функция $\Phi = \Phi_0/h$ удовлетворяет условиям теоремы 5 и, следовательно, ограничена в D. Она, очевидно, является искомым решением краевой задачи (0.2).

§ 3. Доказательство теоремы 3

Убедимся, что коэффициент G удовлетворяет условиям теоремы 2. Положим $n(s) = \left[\frac{1}{2\pi}\arg G(se^{i\varphi(s)})\right] + 1$. Очевидно, функция n — целозначная неотрицательная и монотонно стремится к $+\infty$ при $s \to +\infty$. Так как $\Lambda(t) = \frac{1}{2\pi}\arg G(t) - n(|t|) = O(1)$, $t \to \infty$, то условие (А′) выполнено. Так как $|t^+(r,\sigma)| > |t^-(r,\sigma)|$, то $n(|t^+(r,\sigma)|) - n(|t^-(r,\sigma)|) > 0$, и, следовательно, $\Lambda(t^+(r,\sigma)) - \Lambda(t^-(r,\sigma)) \leqslant \frac{1}{2\pi}\{\arg G(t^+(r,\sigma)) - \arg G(t^-(r,\sigma))\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t^-(r,\sigma)|}^{|t^+(r,\sigma)|}(d/ds)\arg G(se^{i\varphi(s)})\,ds \leqslant C|t^+(r,\sigma)|^{\eta}(|t^+(r,\sigma)| - |t^-(r,\sigma)|)$. Поскольку $|t^+(r,\sigma)| - |t^-(r,\sigma)| \leqslant 2\sigma$, $|t^+(r,\sigma)| \leqslant r + \sigma \leqslant 2r$ при $\sigma \leqslant r$, то условие (Б′) выполнено при любом $q \geqslant \eta$. Так как условие (В′) входит в формулировку теоремы 3, то условия теоремы 2 выполнены.

§ 4. Доказательство теоремы 4

Убедимся, что выполнены условия (А) и (Б) с $V(r)$, взятым из (0.7), и любым $V_1(r) = o(V(r)/\ln r)$, $r \to \infty$. Так как условие (В) входит в формулировку теоремы 4, справедливость этой теоремы будет следовать из теоремы 1.

Положим $H(s) = \int\limits_{r_0}^{s} h(u)\,du$, $s \geqslant r_0$, и обозначим через $\vartheta(x)$, $x \geqslant 0$, функцию, обратную к H. В качестве $n(s)$, $s \geqslant r_0$, возьмем целозначную неубывающую функцию, определяемую условиями

$$n(\vartheta(m)) = H(\vartheta(m)) = m, \quad \int\limits_{\vartheta(m)}^{\vartheta(m+1)}(H(s) - n(s))\,ds = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ясно, что

$$|H(s) - n(s)| < 1, \; s \geqslant r_0, \tag{4.1}$$

поэтому выполнение условия (A) очевидно.

Обозначим через $Z(r)$ интеграл, стоящий в левой части соотношения (0.4) в условии (Б). С помощью введенных обозначений его можно записать в виде

$$Z(r)=\int\limits_0^{k(r)}\{(H(|t^+(r,\sigma)|)-H(|t^-(r,\sigma)|))-(n(|t^+(r,\sigma)|)-$$

$$-n(|t^-(r,\sigma)|))\}\frac{d\sigma}{\sigma}+\int\limits_0^{k(r)}(V(|t^+(r,\sigma)|)-V(|t^-(r,\sigma)|))\frac{d\sigma}{\sigma}=$$

$$=Z_1(r)+Z_2(r). \tag{4.2}$$

Интеграл $Z_2(r)$ был оценен при доказательстве теоремы 1 (см оценку $I_2(\zeta)$, (1.12) — (1.13)), где было установлено, что

$$Z_2(r)=o(V(r)),\ r\to\infty. \tag{4.3}$$

Оценим интеграл $Z_1(r)$. Пусть $E=\{r: r\geqslant r_0,\ k(r)>1/h(r)\}$. Рассмотрим два случая: α) E — ограничено, β) E — неограничено. В случае α) для достаточно больших r выполняется $k(r)\leqslant 1/h(r)$, и оценка получается так:

$$Z_1(r)\leqslant\int\limits_0^{k(r)}(H(|t^+(r,\sigma)|)-H(|t^-(r,\sigma)|))\frac{d\sigma}{\sigma}\leqslant\int\limits_0^{1/h(r)}(H(|t^+(r,\sigma)|)-$$

$$-H(|t^-(r,\sigma)|))\frac{d\sigma}{\sigma}\leqslant\int\limits_0^{1/h(r)}h(|t^+(r,\sigma)|)(|t^+(r,\sigma)|-|t^-(r,\sigma)|)\frac{d\sigma}{\sigma}\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^{1/h(r)}h(r+\sigma)\,2\sigma\frac{d\sigma}{\sigma}\leqslant 2h(r+1/h(r))/h(r)\leqslant C$$

в силу условия б) из определения класса F_β.

Рассмотрим случай β). Достаточно получить оценку для $Z_1(r)$ при $r\in E$, так как оценка в случае α) показывает, что при $r\notin E$ выполняется $Z_1(r)\leqslant C$. Запишем при $r\in E$ интеграл $Z_1(r)$ в виде

$$Z_1(r)=\int\limits_0^{1/h(r)}\{(H(|t^+(r,\sigma)|)-H(|t^-(r,\sigma)|))-(n(|t^+(r,\sigma)|)-$$

$$-n(|t^-(r,\sigma)|))\}\frac{d\sigma}{\sigma}+\int\limits_{1/h(r)}^{k(r)}\{H(|t^+(r,\sigma)|)-n(|t^+(r,\sigma)|)\}\frac{d\sigma}{\sigma}-$$

$$-\int\limits_{1/h(r)}^{k(r)}\{H(|t^-(r,\sigma)|)-n(|t^-(r,\sigma)|)\}\frac{d\sigma}{\sigma}=W_1(r)+W_2^{(1)}(r)-W_2^{(2)}(r).$$

Интеграл $W_1(r)$ оценивается так же, как интеграл $Z_1(r)$ в случае α), т. е. мы имеем $W_1(r)\leqslant C$.

Оценим интеграл $W_2^{(1)}(r)$. Обозначим через $s=s(r,\sigma)>r$ решение уравнения $|se^{i\varphi(s)}-re^{i\varphi(r)}|=\sigma$. Как было установлено при доказательстве теоремы 1, функция $s(r,\sigma)$ строго возрастает по $\sigma\in[0,$

$k(r)]$ и допускает оценку $r+\sigma \geqslant s(r,\sigma) \geqslant r+\sigma/C_0$. Пусть $\sigma=\sigma(r,s)$ — функция, обратная к $s(r,\sigma)$. Делая в интеграле $W_2^{(1)}(r)$ замену переменной $\sigma \to s$, получим

$$W_2^{(1)}(r)=\int\limits_{s(r,1/h(r))}^{s(r,k(r))}\{H(s)-n(s)\}\frac{\sigma'(r,s)}{\sigma(r,s)}\,ds.$$

Положим

$$\tilde{W}_2^{(1)}(r)=\int\limits_{s(r,1/h(r))}^{s(r,k(r))}\{H(s)-n(s)\}\frac{ds}{s-r}.$$

Интеграл, несколько отличный от $\tilde{W}_2^{(1)}(r)$, а именно

$$Y_2^{(1)}(r)=\int\limits_{r+1/h(r)}^{r+k(r)}\{H(s)-n(s)\}\frac{ds}{s-r},$$

рассматривался в [2, § 7], где было установлено, что $Y_2^{(1)}(r)=O(1)$, $r\to\infty$. Поскольку $s(r,k(r))\leqslant r+k(r)$, $s(r,1/h(r))\geqslant r+1/(C_0h(r))$, то рассуждения, проведенные в [2, § 7], показывают также, что и $\tilde{W}_2^{(1)}(r)=O(1)$, $r\to\infty$.

Рассмотрим разность

$$W_2^{(1)}(r)-\tilde{W}_2^{(1)}(r)=\int\limits_{s(r,1/h(r))}^{s(r,k(r))}\{H(s)-n(s)\}\left\{\frac{\sigma'(r,s)}{\sigma(r,s)}-\frac{1}{s-r}\right\}ds.$$

Из (4.1) следует, что

$$|W_2^{(1)}(r)-\tilde{W}_2^{(1)}(r)|\leqslant\int\limits_r^{r+k(r)}\left|\frac{\sigma'(r,s)}{\sigma(r,s)}-\frac{1}{s-r}\right|ds.$$

Оценим подынтегральное выражение:

$$\left|\frac{\sigma'(r,s)}{\sigma(r,s)}-\frac{1}{s-r}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{d}{ds}\ln\frac{\sigma^2(r,s)}{(s-r)^2}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{d}{ds}\ln\left(1+\frac{4rs\sin^2\frac{1}{2}(\varphi(r)-\varphi(s))}{(s-r)^2}\right)\right|\leqslant 2r\left|\frac{d}{ds}\,\frac{s\sin^2\frac{1}{2}(\varphi(r)-\varphi(s))}{(s-r)^2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant C\left(1+r\frac{|\varphi(s)-\varphi(r)-\varphi'(s)(s-r)|}{(s-r)^2}\right)\leqslant C\left(1+r\frac{\omega_{2r}(|s-r|,\varphi')}{|s-r|}\right).$$

Используя условие (0.8), получаем

$$|W_2^{(1)}(r)-\tilde{W}_2^{(1)}(r)|\leqslant Ck(r)+Cr\int\limits_0^{k(r)}\omega_{2r}(\delta,\varphi')\frac{d\delta}{\delta}=o(V(r)),\ r\to\infty.$$

Таким образом, мы доказали, что $W_2^{(1)}(r)=o(V(r))$, $r\to\infty$.

Оценка интеграла $W_2^{(2)}(r)$ проводится аналогично; при этом используется установленная в [2, § 7] оценка $Y_2^{(2)}(r)=O(1)$, $r\to\infty$, где

$$Y_2^{(2)}(r)=\int\limits_{r-k(r)}^{r-1/h(r)}\{H(s)-n(s)\}\frac{ds}{r-s}.$$

Подставляя полученные оценки для W_1, $W_2^{(1)}$ и $W_2^{(2)}$ в (4.4), заключаем, что в случае β) выполняется соотношение

$$\varlimsup_{r\to\infty} V^{-1}(r)\, Z_1(r) \leqslant 0.$$

Так как в случае α) справедливо даже $Z_1(r) \leqslant C$, то из (4.2) и (4.3) вытекает, что выполняется условие (Б). Тем самым теорема 4 доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 5

Полагая $f(z) = \Phi(e^z)$, $y(x) = \varphi(e^x)$, видим, что достаточно доказать следующий эквивалент теоремы 5:

Теорема 5′. *Пусть функция f аналитична в криволинейной полосе $S = \{z = x + iy : y(x) < y < y(x) + 2\pi,\ -\infty < x < \infty\}$, $y(x) \in C^1(\boldsymbol{R})$, и ограничена в $S_R = S \cap \{z : \operatorname{Re} z < R\}$ при любом $R > 0$. Если угловые предельные значения функции f на ∂S почти всюду на ∂S удовлетворяют условию $|f(z)| \leqslant M$ и, кроме того, при некотором $\beta > 1$ справедливо соотношение*

$$\left\{\int\limits_{y(x)}^{y(x)+2\pi} (\ln^+|f(x+iy)|)^\beta\, dy\right\}^{1/\beta} = o\left\{x^{1/\beta} \exp\left(\frac{\beta-1}{2\beta}\,\frac{x^2 + (|y(x)| - 4\pi)^2}{x}\right)\right\}, \tag{5.1}$$

то $|f(z)| \leqslant M$ при всех $z \in S$.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что $M = 1$. Пусть z_0 — произвольная точка в S; выберем R столь большим, чтобы $z_0 \in S_R$. Обозначая через g_R функцию Грина области S_R, имеем

$$\ln^+|f(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial S_R} \ln^+|f(\zeta)|\,(\partial/\partial n_\zeta)\, g_R(z_0, \zeta)\,|d\zeta|,$$

где через n_ζ обозначена внутренняя нормаль к ∂S_R в точке ζ. Так как $|f(\zeta)| \leqslant 1$ на ∂S, то отсюда следует, что

$$\ln^+|f(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{y(R)}^{y(R)+2\pi} \ln^+|f(R+iy)|\,(\partial/\partial n_{R+iy})\, g_R(z_0, R+iy)\, dy.$$

Используя неравенство Гельдера, получаем

$$\ln^+|f(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left\{\int\limits_{y(R)}^{y(R)+2\pi} (\ln^+|f(R+iy)|)^\beta\, dy\right\}^{1/\beta} \left\{\int\limits_{y(R)}^{y(R)+2\pi} (\partial/\partial n_{R+iy}) \times\right.$$

$$\left.\times\, g_R(z_0, R+iy))^{\beta/(\beta-1)}\, dy\right\}^{(\beta-1)/\beta} \leqslant \frac{1}{2\pi} \left\{\int\limits_{y(R)}^{y(R)+2\pi} (\ln^+|f(R+iy)|)^\beta\, dy\right\}^{1/\beta} \times$$

$$\times \left\{\int\limits_{y(R)}^{y(R)+2\pi} (\partial/\partial n_{R+iy})\, g_R(z_0, R+iy)\, dy\right\}^{(\beta-1)/\beta} \max\{(\partial/\partial n_{R+iy}) \times$$

$$\times\, g_R(z_0, R+iy) : y(R) \leqslant y \leqslant y(R) + 2\pi\}^{1/\beta}. \tag{5.2}$$

Так как область S_R содержится в полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Re} z < R\}$, то в силу принципа расширения области имеем

$$(\partial/\partial n_{R+iy})\, g_R(z_0,\ R+iy) \leqslant \operatorname{Re}(R+iy-z_0)^{-1} = O(1/R),\ R\to\infty, \tag{5.3}$$

равномерно относительно $y\in(y(R),\ y(R)+2\pi)$. Обозначая через $\omega(z,\ E,\ G)$, $z\in G$, гармоническую меру относительно области G множества $E\subset\partial G$ и полагая $E_R=\{\zeta\colon \operatorname{Re}\zeta=R,\ y(R)\leqslant \operatorname{Im}\zeta\leqslant y(R)+2\pi\}$, имеем

$$\int\limits_{y(R)}^{y(R)+2\pi} (\partial/\partial n_{R+iy})\, g_R(z_0,\ R+iy)\,dy = \omega(z_0,\ E_R,\ S_R). \tag{5.4}$$

Оценим величину $\omega(z_0,\ E_R,\ S_R)$. Обозначим через $w=w(z)$ функцию, конформно отображающую криволинейную полосу S на прямолинейную $S_0=\{w\colon 0<\operatorname{Im} w<1\}$, $w(\pm\infty)=\pm\infty$. В силу конформной инвариантности гармонической меры имеем $\omega(z_0,\ E_R,\ S_R)=\omega(w(z_0),\ w(E_R),\ w(S_R))$. Положим $\beta_R=\min\{\operatorname{Re} w(R+iy)\colon y(R)\leqslant y\leqslant y(R)+2\pi\}$, $\tilde E_R=\{w\colon \operatorname{Re} w=\beta_R,\ 0\leqslant\operatorname{Im} w\leqslant 1\}$, $\tilde S_R=\{w\colon \operatorname{Re} w<\beta_R,\ 0<\operatorname{Im} w<1\}$. В силу принципа расширения области имеем $\omega(w,\ w(E_R),\ w(S_R))\leqslant\omega(w,\ \tilde E_R,\ \tilde S_R)$. Прямой подсчет показывает, что

$$\omega(w,\ \tilde E_R,\ \tilde S_R)=\frac{2}{\pi}\arg\frac{1+e^{\pi(w-\beta_R)}}{1-e^{\pi(w-\beta_R)}}=O(e^{-\pi\beta_R}),\ R\to\infty,$$

и, следовательно, $\omega(z_0,\ E_R,\ S_R)=O(e^{-\pi\beta_R})$, $R\to\infty$.

Учитывая последнюю оценку, из (5.2), (5.3), (5.4) и условия (5.1) заключаем, что $\ln^+|f(z_0)|\leqslant H(z_0,\ R)$, где

$$H(z_0,\ R)=o\left\{\exp\left(\frac{\beta-1}{2\beta}\,\frac{R^2+(|y(R)|-4\pi)^2}{R}-\pi\beta_R\right)\right\},\ R\to\infty.$$

Для завершения доказательства остается установить, что величина, стоящая в правой части этого соотношения, стремится к 0 при $R\to\infty$. Это вытекает из следующей леммы, любезно сообщенной автору вместе с доказательством А. А. Гольдбергом.

Лемма. *Справедлива оценка*

$$\beta_R\geqslant\frac{R^2+(|y(R)|-4\pi)^2}{2\pi R}+O(1),\ R\to\infty.$$

Доказательство. Будем пользоваться понятием экстремальной длины семейства кривых (см., напр., [9, с. 17—18]). Пусть λ_R — экстремальная длина семейства Γ_R кривых, соединяющих в S отрезки E_0 и E_R, $R>0$. Длина каждой кривой из Γ_R не меньше $\{R^2+(|y(R)|-4\pi)^2\}^{1/2}$, а площадь области $S\cap\{z\colon 0<\operatorname{Re} z<R\}$ равна $2\pi R$. Поэтому, выбирая в качестве одной из допустимых функций ρ, фигурирующих в определении экстремальной длины [9, с. 18], функцию, равную 1 в $S\cap\{z\colon 0<\operatorname{Re} z<R\}$ и равную 0 для прочих значений z, видим, что

$$\lambda_R\geqslant\frac{R^2+(|y(R)|-4\pi)^2}{2\pi R}. \tag{5.5}$$

С другой стороны, как показано в [10, с. 77], справедливо неравенство $\lambda_R \leqslant 2\Lambda(e^{\pi(\beta_R-\alpha)})$, где $\alpha = \max\{\operatorname{Re} w(z) : z \in E_0\}$, а $\Lambda(x)$ — функция Тейхмюллера, определяемая как модуль двухсвязной области $\mathbf{C} \setminus \{[-1, 0] \cup [x, +\infty)\}$. Для этой функции справедлива [10, с. 76, (4—21)] оценка $\Lambda(x) \leqslant \frac{1}{2\pi}\ln(16(x+1))$. Поэтому имеем

$$\lambda_R \leqslant \frac{1}{\pi}(\ln(e^{\pi(\beta_R-\alpha)}+1)+\ln 16) \leqslant \beta_R + O(1),\ R \to \infty. \quad (5.6)$$

Из (5.5) и (5.6) следует утверждение леммы.

Список литературы: 1. *Островский И. В.* Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом на криволинейном контуре, I // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1991. Вып. 56. С. 95—105. 2. *Островский И. В.* Условия разрешимости однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1991. Вып. 55. С. 3—23. 3. *Плакса С. А.* Краевая задача Римана с плюс-бесконечным индексом на спрямляемой кривой // Укр. мат. журн. 1990. 42, № 9. С. 1204—1213. 4. *Кац Б. А.* Об исключительном случае задачи Римана с осциллирующим коэффициентом // Изв. вузов. Математика. 1981. № 12. С. 41—50. 5. *Грудский С. М.* Сингулярные интегральные операторы с бесконечным индексом и произведения Бляшке // Math. Nachr. 1986. **120.** P. 313—331. 6. *Камынин И. П., Островский И. В.* О нулевых множествах целых эрмитов-положительных функций // Сиб. мат. журн. 1982. 23, № 3. С. 66—82. 7. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М., 1986. 240 с. 8. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., 1970. 592 с. 9. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. М., 1969. 134 с. 10. *Ahlfors L.* Conformal invariants. New York, 1973. 157 p.

Поступила в редколлегию 10.12.90

УДК 517.55

А. Ю. РАШКОВСКИЙ, Л. И. РОНКИН

СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В КОНУСЕ. III (ФУНКЦИИ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА) [1]

1. Слабая сходимость функций $t^{-\rho}u(tx)$. Пусть функция $u(x) \in SH(K; \rho)$, $\rho > \varkappa^+$. Определим индикатор $L_u(x)$ и регуляризованный индикатор $L_u^*(x)$ функции u следующим образом:

$$L_u(x) = \varlimsup_{t\to\infty} t^{-\rho}u(tx),\ L_u^*(x) = \varlimsup_{x'\to x} L_u(x').$$

Ясно, что $L_u^*(x) \in SH(K)$, $L_u(tx) = t^\rho L_u(x)$ и $L_u^*(x) = L_u(x)$ для почти всех $x \in K$.

Отправляясь от понятий функций вполне регулярного роста в полуплоскости и во всем пространстве R^m, дадим

[1] Это третья часть статьи, первые две части опубликованы в предыдущих выпусках настоящего сборника («Теория функций, функцион. анализ и их прил.»). Нумерация утверждений, формул и литературы является продолжением соответствующей нумерации предыдущих частей. Для удобства чтения укажем, что леммы 1—5, формулы (1)—(26) и литературные источники [1—9] содержатся в первой части, а теоремы 1—2, леммы 5—8, формулы (27)—(48) и литературные источники [10—11] — во второй части настоящей работы.

Определение. *Функция* $u \in SH(K)$ *называется функцией вполне*[1] *регулярного роста (в.р.р.) в* K *относительно порядка* $\rho > \varkappa^+$, *если* $u \in SH(K; \rho)$ *и для каждого конуса* $K' = K^{\Gamma'}$, $\Gamma' \subset\subset \Gamma$, *существует такое* C_0*-множество* $E' \subset K'$, что $\lim\limits_{\substack{t\to\infty,\\ tx \notin E'}} \sup\limits_{x \in \Gamma'} | t^{-\rho} u(tx) -$

$- L_u^*(x) | = 0.$

Мы уже упоминали, что регулярность роста субгармонической в R^m функции u эквивалентна сходимости в $D'(R^m)$ функций $t^{-\rho}u(tx)$, $t \to \infty$. Для функций в.р.р. в конусе подобное утверждение также справедливо, но в этом пункте мы установим только «половину» этого утверждения, а именно, наличие соответствующей слабой сходимости.

Теорема 3. *Пусть функция* $u \in SH(K)$ *имеет в* K *в.р.р. относительно порядка* $\rho > \varkappa^+$ *и пусть*

$$v_{\lambda, t}(x) = \begin{cases} t^{-\rho} u(tx), & |x| > \frac{\lambda}{t}, \\ 0, & |x| \leqslant \frac{\lambda}{t} \quad (\lambda > 0). \end{cases}$$

Тогда для любой функции $\psi \in C(\overline{K}_r)$, $r > \lambda$, *существует предел*

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{K_r} v_{\lambda, t}(x)\, \psi(x)\, |x|^{-2} \varphi(x)\, d\omega$$

и справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{K_r} v_{\lambda, t}(x)\, \psi(x)\, |x|^{-2} \varphi(x)\, d\omega = \int\limits_{K_r} L_u^*(x)\, \psi(x)\, |x|^{-2} \varphi(x)\, d\omega.$$

Доказательство. Возьмем какую-либо функцию $\psi \in C(\overline{K}_r)$ и положим $\psi_j = \chi_j \psi$, $j = 1, 2, 3$, где неотрицательные функции $\chi_j \in C(\overline{K}_r)$ таковы, что $\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 \equiv 1$ и при априори заданных $\alpha > 0$ и $\delta > 0$

$$\operatorname{supp} \chi_1 \subset \overline{K}_\alpha, \ \operatorname{supp} \chi_2 \subset \overline{\Delta}^{\delta}_{\frac{\alpha}{2}, r},$$

$$\operatorname{supp} \chi_3 \subset \overline{K}_{\frac{\alpha}{2}, r} \setminus \Delta^{\frac{\delta}{2}}_{\frac{\alpha}{2}, r} = K_{\frac{\alpha}{2}, r}.$$

Тогда

$$\Big| \int\limits_{K_r} v_{\lambda, t} \psi |x|^{-2} \varphi d\omega - \int\limits_{K_r} L_u^* \psi |x|^{-2} \varphi d\omega \Big| \leqslant \Big| \int\limits_{K_r} (v_{\lambda, t} - L_u) \psi_3 |x|^{-2} \varphi d\omega \Big| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{K_r} (|v_{\lambda, t}| + |L_u|) |\psi_j| |x|^{-2} \varphi d\omega. \tag{49}$$

Поскольку функция u имеет в конусе K не более чем нормальный тип при порядке ρ, то применима теорема 1, из оценок которой следует, что

---

[1] Иногда для краткости слово «вполне» будет опускаться.

$$\int_{K_r} |v_{\lambda,t}|\,|\psi_2|\,|x|^{-2}\varphi d\omega \leqslant \|\psi\|_\infty t^{-\rho-m+2} \int_{\Delta^\delta_{\frac{\alpha t}{2},\, rt}} |u|\,|x|^{-2}\varphi d\omega \leqslant$$

$$\leqslant \|\psi\|_\infty t^{-\rho-m+2}\delta C_2 (rt)^{\rho+m-2} = \delta C_2 \|\psi\|_\infty r^{\rho+m-2}$$

и

$$\int_{K_r} |v_{\lambda,t}|\,|\psi_1|\,|x|^{-2}\varphi d\omega \leqslant \|\varphi\|_\infty t^{-\rho-m+2} \int_{K_{\lambda,\alpha t}} |u|\,|x|^{-2}\varphi d\omega \leqslant$$

$$\leqslant \|\psi\|_\infty t^{-\rho-m+2} C_1 (\alpha t)^{\rho+m-2} = \alpha^{\rho+m-2} C_1 \|\psi\|_\infty$$

(здесь и далее $\|\psi\|_\infty = \max\limits_x |\psi(x)|$). Из теоремы 1 следует также, что

$$\int_{\Gamma_1} |L_u| \varphi d\omega < \infty.$$

Поэтому

$$\int_{K_r} |L_u|\,|\psi_1|\,|x|^{-2}\varphi d\omega \leqslant \|\psi\|_\infty \int_0^\alpha \int_{\Gamma_1} |L_u| \varphi dS_1 l^{\rho+m-2} dl \leqslant C\alpha^{\rho+m-2} \|\psi\|_\infty$$

и

$$\int_{K_r} |L_u|\,|\psi_2|\,|x|^{-2}\varphi d\omega \leqslant \|\psi\|_\infty \int_{\frac{\alpha}{2}}^{r} \int_{\Delta^\delta_{0,2}\cap\Gamma_1} |L_u| \varphi dS_1 l^{\rho+m-3} dl \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\|_\infty r^{\rho+m-2}\gamma(\delta),$$

где $\gamma(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Таким образом, выбрав α и δ при фиксированных $\psi(x)$ и r достаточно малыми, можно сделать два последних слагаемых в равенстве (49) меньшими любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ для всех значений t одновременно. Значит, для завершения доказательства теоремы теперь достаточно показать, что для любой функции $g \geqslant 0$, $g \in C(\overline{K_{\alpha/2,\, r}})$, существует

$$\lim_{t\to\infty} \int_{K'_{\alpha/2,\, r}} v_{\lambda,t} g d\omega = \int_{K'_{\alpha/2,\, r}} L_u g d\omega.$$

Согласно лемме Фату,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_{K'_{\alpha/2,\, r}} v_{\lambda,t} g d\omega \leqslant \int_{K'_{\alpha/2,\, r}} L_u g d\omega. \tag{50}$$

Для получения обратного неравенства заметим, что

$$\int_{K'_{\alpha/2,\, r}} v_{\lambda,t} g d\omega = t^{-\rho-m} \int_{K'_{\alpha t/2,\, rt}} u(x)\, g\left(\frac{x}{t}\right) d\omega =$$

$$= t^{-\rho-m} \int_{E_{rt}} u(x)\, g\left(\frac{x}{t}\right) d\omega + t^{-\rho-m} \int_{K'_{\alpha t/2,\, rt}\setminus E_{rt}} u(x)\, g\left(\frac{x}{t}\right) d\omega,$$

где $E_{rt} = E \cap K'_{rt}$; E — C_0-множество, фигурирующее в задании функции u как функции в.р.р. в K. Согласно лемме 8 первое слагаемое в правой части этого равенства стремится к нулю при $t \to \infty$.

В то же время ввиду регулярности роста функции u для произвольного $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших значениях t выполняется неравенство

$$t^{-\rho-m} \int\limits_{K'_{\alpha t/2,\, rt} \setminus E_{rt}} u(x)\, g\left(\frac{x}{t}\right) d\omega \geqslant \int\limits_{K'_{\alpha/2,\, r}} [L_u(x) - \varepsilon\, |x|^{\rho}]\, g(x)\, d\omega -$$

$$- t^{-\rho-m} \int\limits_{E_{rt}} g\left(\frac{x}{t}\right) [L_u(x) - \varepsilon\, |x|^{\rho}]\, d\omega.$$

Если $\sup\limits_{x \in E} \left[L_u\left(\frac{x}{|x|}\right) - \varepsilon\right] = M \leqslant 0$, то из этого соотношения следует, что

$$\varliminf_{t \to \infty} t^{-\rho-m} \int\limits_{K'_{\alpha t/2,\, rt}} g\left(\frac{x}{t}\right) u(x)\, d\omega \geqslant \int\limits_{K'_{\alpha/2,\, r}} g(x)\, [L_u(x) - \varepsilon\, |x|^{\rho}]\, d\omega. \qquad (51)$$

Если же $M > 0$, то, обозначив через $t_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots$, радиусы шаров, фигурирующих в характеристике множества E как C_0-множества, получим, что

$$t^{-\rho-m} \int\limits_{E_{rt}} g\left(\frac{x}{t}\right) [L_u(x) - \varepsilon\, |x|^{\rho}]\, d\omega \leqslant c r^{\rho}\, \| g \|_{\infty} M t^{-m} \sum_j t_j^m = o(1).$$

Таким образом, неравенство (51) справедливо и при $M > 0$.

Учитывая затем произвольность $\varepsilon > 0$, получим, что

$$\varliminf_{t \to \infty} \int\limits_{K'_{\alpha/2,\, r}} v_{\lambda,\, t}(x)\, g(x)\, d\omega = \varliminf_{t \to \infty} \int\limits_{K'_{\alpha t/2,\, rt}} g\left(\frac{x}{t}\right) u(x)\, d\omega \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{K'_{\alpha/2,\, r}} L_u(x)\, g(x)\, d\omega.$$

Отсюда, а также из (47) следует, что

$$\lim_{t \to \infty} \int\limits_{K'_{\alpha/2,\, r}} v_{\lambda,\, t}\, g\, d\omega = \int\limits_{K'_{\alpha/2,\, r}} L_u\, g\, d\omega.$$

Теорема доказана.

2. Сходимость функционалов T_R, конусно-граничная плотность. Как уже отмечалось, полная регулярность роста целых функций в C эквивалентна определенной правильности распределения их корней. Составным элементом (а в случае $\rho \notin N$ — и единственным) этой правильности является наличие угловой плотности корней, т. е. существование предела

$$\lim_{t \to \infty} t^{-\rho} n_f(t, \alpha, \beta), \ \alpha \notin A, \ \beta \notin A,$$

где $n_f(t, \alpha, \beta)$ — подсчитанное с учетом кратности число корней z_i рассматриваемой функции $f(z)$ в секторе $Y(\alpha, \beta, t) = \{z : |z| < t, \alpha < \arg z < \beta\}$, а A — какое-нибудь не более чем счетное множество на отрезке $[0, 2\pi]$. Для функций в.р.р. в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ роль угловой плотности выполняет введенная

Н. В. Говоровым аргументно-граничная плотность. Она определяется подобно угловой плотности с заменой $n_l(t, \alpha, \beta)$ на

$$a(t, \alpha, \beta) = \begin{cases} \sum\limits_{z_i \in Y(\alpha, \beta, t)} \sin(\arg z_i) \overset{\text{def}}{=} c(t, \alpha, \beta), \ [\alpha, \beta] \subset (0, \pi); \\ c(t, 0, \beta) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[\lambda, t]} \frac{d\nu(x)}{x}, \ \nu = \nu_{\ln|f|}, \ \alpha = 0, \ \beta < \pi; \\ c(t, 0, \pi) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[\lambda, t] \cup [-t, \lambda]} \frac{d\nu(x)}{x}, \ \alpha = 0, \ \beta = \pi. \end{cases}$$

Для построения аналога аргументно-граничной плотности в многомерном случае рассмотрим на пространстве $C(\overline{K}_\delta)$, $\delta \geqslant \lambda > 0$, функционалы $T_R = T_{R, \delta, u}$ и $T = T_{\delta, u}$, определенные по функции $u(x) \in SH(K; \rho)$ и ее индикатору $L = L_u^*$ равенствами

$$\langle T_R, \psi \rangle = R^{-\rho-m+2} \int\limits_{\overline{K}_{\lambda, \delta R}} \psi\left(\frac{x}{R}\right) d\tau_u(x), \ \forall \psi \in C(\overline{K}_\delta),$$

$$\langle T, \psi \rangle = \int\limits_{\overline{K}_\delta} \psi(x)\, d\tau_L(x), \ \forall \psi \in C(\overline{K}_\delta).$$

Из неравенства (37) вытекает равномерная ограниченность функционалов T_R, т. е. существование такой константы A, не зависящей от R и ψ, что $|\langle T_R, \psi \rangle| \leqslant A \|\psi\|$. Тем самым, T_R — это вещественнозначные меры на $\overline{K}_\delta$ с равномерно ограниченными относительно R полными вариациями $\|T_R\| = |T_R|(\overline{K}_\delta)$.

Представим меру T_R, которая не является знакопостоянной, з виде $T_R = T_R^* - T_R^{**}$, где мера T_R^{**} определена посредством равенства

$$\langle T_R^{**}, \psi \rangle = \frac{2}{\theta_m} R^{-\rho-m+2} \int\limits_{\Gamma_{\lambda, \delta R}} \psi\left(\frac{x}{R}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial n} (a|x|^\rho + b) d\sigma.$$

Так как $u(x) \leqslant a|x|^\rho + b$, то мера T_R^* — неотрицательная, а T_R^{**} — абсолютно непрерывная мера на $\Gamma_{0,\delta}$ и притом такая, что

$$\forall \psi \in C(\Gamma_{0,\delta}) \ \exists \lim_{R \to \infty} \langle T_R^{**}, \psi \rangle.$$

Отсюда вытекает, что меры T_R обладают следующим свойством, аналогичным соответствующему свойству положительных мер (напр., [12]):

а) если меры T_R при $R \to \infty$ слабо сходятся к некоторой мере T_0 на пространстве

$$F_\delta = \{\psi \in C(\overline{K}) : \operatorname{supp} \psi \subset \overline{K} \cap B_\delta\}$$

и если множество $G_\delta = G \cap K_\delta$, где область $G \subset\subset B_\delta$ удовлетворяет условию $|T_0|(\overline{\partial G \cap K}) = 0$, то меры T_R на пространстве $C(\overline{G}_\delta)$ слабо сходятся к мере T_0 и

$$\lim_{R \to \infty} T_R(G_\delta) = \lim_{R \to \infty} T_R(\overline{G}_\delta) = T_0(G_\delta).$$

Отметим еще одно свойство мер T_R, очевидным образом вытекающее из равномерной ограниченности величин $\|T_R\|$:

б) если для любой функции ψ из некоторого семейства $W \subset\subset C(\overline{K}_\delta)$ выполняется равенство $\lim\limits_{R\to\infty}\langle T_R, \psi\rangle = \langle T_R, \psi\rangle$, то это же равенство выполняется для всех функций из замыкания $\overline{W}$ множества W в метрике $C(\overline{K}_\delta)$.

Теорема 4. *Пусть функция* $u \in SH(K)$ *имеет в* K *не более чем нормальный тип при порядке* $\rho > \varkappa^+$ *и пусть*

$$v_{\lambda, t}(x) = \begin{cases} t^{-\rho}u(tx), & |x| > \lambda/t, \\ 0, & |x| \leqslant \lambda/t, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$, $\lambda \notin \Lambda_u$. *Пусть, далее, существует* $\forall \psi \in C(\overline{K}_\delta)$

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{K_\delta} v_{\lambda, t}(x)\,\psi(x)\,|x|^{-2}\varphi(x)\,d\omega = \int\limits_{K_\delta} L_u^*\psi\,|x|^{-2}\varphi\,d\omega.$$

Тогда существует

$$\lim_{R\to\infty}\langle T_R, \psi\rangle = \langle T, \psi\rangle, \quad \forall \psi \in C(\overline{K}_\delta). \tag{52}$$

Доказательство. Из позитивной однородности индикатора L_u^* вытекает позитивная однородность меры τ_L, т. е. $\tau_L(tE) = t^{\rho+m-2}\tau_L(E)$ для любого измеримого множества $E \subset \overline{K}$, $t > 0$. Поэтому $|T|(\overline{\Gamma}_\delta) = 0$ и, согласно свойству а) мер T_R, а также ввиду того, что при $\delta' < \delta$ меры $T_{R,\delta'}$ и $T_{\delta'}$ суть сужения на $\overline{K}_{\delta'}$ мер $T_{R,\delta}$ и T_δ, равенство (52) достаточно доказать лишь для функций из пространства F_δ. Нетрудно видеть, что любую такую функцию можно сколь угодно хорошо приблизить в метрике $C(\overline{K}_\delta)$ функциями семейства $F_\delta^* = \left\{\psi \in F_\delta : \psi \in C^2(\overline{K}),\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{\Gamma_{0,\infty}} = 0\right\}$. Отсюда, согласно свойству б) мер T_R, заключаем, что для доказательства теоремы равенство (52) достаточно установить для функций из F_δ^*.

Согласно лемме 6 при $\delta R \notin \Lambda_u$ и $\psi \in F_\delta^*$ имеем

$$\langle T_R, \psi\rangle = \frac{1}{\theta_m} R^{-\rho-m+2} \int\limits_{K_{\lambda,\delta R}} u(x)\,\Delta\left(\varphi(x)\,\psi\left(\frac{x}{R}\right)\right) d\omega +$$

$$+ \frac{1}{\theta_m} R^{-\rho-m+2} \int\limits_{\Gamma_\lambda} u(x)\,\varphi(x)\,\frac{\partial\psi\left(\frac{x}{R}\right)}{\partial n}\, dS_\lambda +$$

$$+ \frac{1}{\theta_m} R^{-\rho-m+2} \int\limits_{\Gamma_{\delta R}} u(x)\,\varphi(x)\,\frac{\partial\psi\left(\frac{x}{R}\right)}{\partial n}\, dS_{\delta R} -$$

$$- \frac{1}{\theta_m} R^{-\rho-m+2} Q\left(\psi\left(\frac{x}{R}\right),\ \lambda,\ u\right) + \frac{1}{\theta_m} R^{-\rho-m+2} Q\left(\psi\left(\frac{x}{R}\right),\ \delta R,\ u\right) = \tag{53}$$

$$= \frac{R^{m-2}\cdot R^{-\rho-m+2}}{\theta_m} \int\limits_{K_{\lambda/R,\delta}} u(Rx)\,\Delta(\varphi(x)\,\psi(x))\,d\omega +$$

$$+\frac{1}{\theta_m}R^{-\rho-m+2}\left[\int\limits_{\Gamma_\lambda}u(x)\varphi(x)\frac{\partial\psi\left(\frac{x}{R}\right)}{\partial n}dS_\lambda-Q\left(\psi\left(\frac{x}{R}\right),\ \lambda,\ u\right)\right]=$$

$$=\frac{R^{-\rho}}{\theta_m}\int\limits_{K_{\lambda/R,\,\delta}}u(Rx)\Psi(x)|x|^{-2}\varphi(x)\,d\omega+$$

$$+\frac{1}{\theta_m}R^{-\rho-m+2}\left[\int\limits_{\Gamma_\lambda}u(x)\varphi(x)\frac{\partial\psi\left(\frac{x}{R}\right)}{\partial n}dS_\lambda-Q\left(\psi\left(\frac{x}{R}\right),\ \lambda,\ u\right)\right],$$

где, как показывают элементарные вычисления, $\Psi(x)\in C(\overline{K}_\delta)$. Из условия доказываемой теоремы следует, что

$$\exists\lim_{R\to\infty}\frac{R^{-\rho}}{\theta_m}\int\limits_{K_{\lambda/R,\,\delta}}u(Rx)\Psi(x)|x|^{-2}\varphi(x)\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{\theta_m}\int\limits_{K_\delta}L_u^*\Psi|x|^{-2}\varphi\,d\omega=\frac{1}{\theta_m}\int\limits_{K_\delta}L_u^*\Delta(\varphi\psi)\,d\omega.$$

Отсюда, а также из леммы 7 следует, что

$$\lim_{R\to\infty}\frac{R^{-\rho}}{\theta_m}\int\limits_{K_{\lambda/R,\,\delta}}u(Rx)\Psi(x)|x|^{-2}\varphi(x)\,d\omega=$$

$$=\int\limits_{\overline{K}_\delta}\psi(x)\,d\tau_L=\langle T,\ \psi\rangle. \tag{54}$$

Далее, используя содержащееся в равенствах (34) и (26) выражение величины Q, нетрудно заключить, что

$$\lim_{R\to\infty}R^{-\rho-m+2}Q\left(\psi\left(\frac{x}{R}\right),\ \lambda,\ u\right)=0. \tag{55}$$

И, наконец, непосредственно проверяется, что

$$\lim_{R\to\infty}R^{-\rho-m+2}\int\limits_{\Gamma_\lambda}u(x)\varphi(x)\frac{\partial\psi\left(\frac{x}{R}\right)}{\partial n}dS_\lambda=0. \tag{56}$$

Из (53)—(56) следует, что

$$\exists\lim_{\substack{R\to\infty\\ R\notin\frac{1}{\delta}\Lambda_u}}\langle T_R,\ \psi\rangle=\langle T,\ \psi\rangle,\quad\forall\psi\in F_\delta^*.$$

Отсюда, учитывая сказанное ранее, получаем, что

$$\exists\lim_{\substack{R\to\infty\\ R\notin\frac{1}{\delta}\Lambda_u}}\langle T_R,\ \psi\rangle=\langle T,\ \psi\rangle,\quad\forall\psi\in C(\overline{K}_\delta).$$

Заметим, наконец, что, как следует из свойств интеграла по мере, функционал T_R как функция от R, непрерывен слева. Значит,

$$\exists\lim_{R\to\infty}\langle T_R,\ \psi\rangle,\quad\forall\psi\in C(\overline{K}_\delta).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если функция u удовлетворяет условиям теоремы 4, то для каждого конуса $K' = K^{\Gamma'}$, $\Gamma' \subset \Gamma$, такого, что $|\tau_L|(\overline{\partial K' \cap K}) = 0$, существует предел*

$$\lim_{R\to\infty} R^{-\rho-m+2}\,\tau_u(\overline{K'_{\lambda,R}}) = \tau_L(\overline{K'_1}). \tag{57}$$

Доказательство. Мера τ_L, или, что то же самое, T_u, построенная по позитивно однородным функциям L_u^* и φ, сама также является позитивно однородной, и поэтому $\forall \Gamma' \subset \Gamma \; |\tau_L|(\Gamma') = 0$. Следовательно, равенство $|\tau_L|(\overline{\partial K' \cap K}) = 0$ равносильно равенству $|T_u|(\overline{\partial K'_1 \cap K}) = 0$ и утверждение следствия вытекает из свойства а) мер T_R.

Фигурирующий в следствии 1 предел в случае, когда $m = 2$ и $u = \ln|f(z)|$, где $f(z)$ — функция, голоморфная и в. р. р. в полуплоскости $\mathbb{C}_+$, совпадает с упоминавшейся выше аргументно-граничной плотностью. По аналогии мы назовем предел (56) конусно-граничной плотностью. Точнее, мы будем говорить, что у функции $u \in SH(K, \rho)$ существует конусно-граничная плотность относительно $\rho > \varkappa^+$, если для каждого конуса $K' = K^{\Gamma'}$, $\Gamma' \subset \Gamma$, такого, что $|\tau_L|(\overline{\partial K' \cap K}) = 0$, существует предел (57). Таким образом, из теоремы 3 и следствия 1 вытекает, что у функции в. р. р. относительно порядка $\rho > \varkappa^+$ существует конусно-граничная плотность.

3. Слабая сходимость на Γ. С помощью теоремы 4 можно показать, что указанная в теореме 3 слабая сходимость в K функций $t^{-\rho}u(tx)$, $t \to \infty$, влечет за собой слабую сходимость этих же функций на Γ.

Теорема 5. *Пусть функция u удовлетворяет условиям теоремы 4. Тогда*

а) существует предел

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ R\notin\Lambda_u}} R^{-\rho-m+1}\int_{\Gamma_R} u(x)\,\varphi(x)\,\eta\left(\frac{x}{|x|}\right) dS_R = \int_{\Gamma_1} \eta(x)\,\varphi(x)\,L_u^*(x)\,dS_1, \qquad \forall \eta \in C(\overline{\Gamma}_1);$$

б) существует предел

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ R\notin\Lambda_u}} R^{-\rho-m+2} Q\left(\eta\left(\frac{x}{|x|}\right),\ R,\ u\right) = \rho\int_{\Gamma_1} \eta(x)\,\varphi(x)\,L_u^*(x)\,dS_1, \quad \forall \eta \in C^2(\overline{\Gamma}_1), \quad \left.\frac{\partial\eta}{\partial n}\right|_{\partial\Gamma_1} = 0.$$

Доказательство. Пусть функция $\eta \in C^2(\overline{\Gamma}_1)$, $\left.\frac{\partial\eta}{\partial n}\right|_{\partial\Gamma_1} = 0$, $\lambda \notin \Lambda_u$, и пусть функция $\gamma(t) \in C^\infty([0, 1])$ такова, что $\operatorname{supp}\gamma \subset\subset (0, \infty)$, $\gamma(1) = 0$, $\gamma'(1) = 1$. Положим $\psi(x) = \eta\left(\frac{x}{|x|}\right)\gamma(|x|)$ и применим к ψ

функционал T_R, считая, что $R \notin \Lambda_u$ а $\delta = 1$. Согласно лемме 6, учитывая определение функции ψ, имеем

$$\langle T_R, \psi \rangle = R^{-\rho-m+2} \int\limits_{\overline{K}_{\lambda, R}} \psi\left(\frac{x}{R}\right) d\tau_u =$$

$$= \frac{R^{-\rho-m+2}}{\theta_m} \int\limits_{K_{\lambda, R}} u(x)\, \Delta\left(\psi\left(\frac{x}{R}\right) \varphi(x)\right) d\omega -$$

$$- \frac{R^{-\rho-m+1}}{\theta_m} \int\limits_{\Gamma_R} u(x)\, \varphi(x)\, \eta\left(\frac{x}{|x|}\right) dS_R. \tag{58}$$

Далее, поскольку по условию теоремы функция u имеет вполне регулярный рост, то, согласно теоремам 3 и 4, существует предел

$$\lim_{R \to \infty} \langle T_R, \psi \rangle = \langle T, \psi \rangle = \int\limits_{\overline{K}_1} \psi d\tau_L, \tag{59}$$

а согласно теореме 3, существует предел

$$\lim_{R \to \infty} R^{-\rho-m+2} \int\limits_{K_{\lambda, R}} u(x)\, \Delta\left(\psi\left(\frac{x}{R}\right) \varphi(x)\right) d\omega = \int\limits_{K_1} L_u^* \Delta(\psi\varphi)\, d\omega.$$

Преобразуя последний интеграл с помощью леммы 7, заключаем, что

$$\lim_{R \to \infty} R^{-\rho-m+2} \int\limits_{\Gamma_R} u(x)\, \Delta\left(\psi\left(\frac{x}{R}\right) \varphi(x)\right) d\omega =$$

$$= \theta_m \int\limits_{\overline{K}_1} \psi d\tau_L + \int\limits_{\Gamma_1} L_u^* \varphi\eta dS_1. \tag{60}$$

Из (58)—(60) следует, что

$$\lim_{R \to \infty} R^{-\rho-m+1} \int\limits_{\Gamma_R} u(x)\, \varphi(x)\, \eta\left(\frac{x}{|x|}\right) dS_R =$$

$$= -\theta_m \int\limits_{\overline{K}_1} \psi d\tau_L + \theta_m \int\limits_{\overline{K}_1} \psi d\tau_L + \int\limits_{\Gamma_1} L_u^* \varphi\eta dS_1 = \int\limits_{\overline{\Gamma}_1} L_u^* \varphi\eta dS_1.$$

Тем самым утверждение а) доказано для функций $\eta \in C^2(\overline{\Gamma}_1)$, $\left.\frac{\partial\eta}{\partial n}\right|_{\partial\Gamma_1} = 0$. Общий случай, т. е. случай $\eta \in C(\overline{\Gamma}_1)$, сводится к доказанному посредством равномерной аппроксимации функций $\eta \in C(\overline{\Gamma}_1)$ функциями η из $C^2(\overline{\Gamma}_1)$, удовлетворяющими условию $\left.\frac{\partial\eta}{\partial n}\right|_{\partial\Gamma_1} = 0$.

Для получения утверждения б) достаточно провести рассуждения, подобные приведенным выше, заменяя при этом функцию $\gamma(t)$ функцией $\gamma_1(t) \in C^\infty([0, 1])$, удовлетворяющей условиям $\operatorname{supp} \gamma_1 \subset\subset$ $\subset\subset (0, \infty)$, $\gamma_1(1) = 1$, $\gamma_1'(1) = 0$.

Теорема доказана.

4. Конусно-граничная уравновешенность. Рассмотрим случай, когда дополнительно дано, что порядок функции совпадает с одним из чисел $\varkappa_j^+$ $(j \geqslant 2)$. Этот случай соответствует случаю целого порядка для функций, голоморфных в $\mathbb{C}$ или в $\mathbb{C}_+$. Как известно [1, 5], для таких функций существования угловой плотности корней или соответственно аргументно-граничной плотности недостаточно, в отличие от случая нецелого порядка, для полной регулярности роста рассматриваемой голоморфной функции. Оказывается необходимым дополнительное условие некоторой симметрии корней или, соответственно так называемой аргументно-граничной симметрии. В рассматриваемой ситуации, т. е. для функций $u \in SH(K)$ в. р. р. относительно порядка $\rho = \varkappa_j^+$, соответствующая симметрия описывается с помощью функции $\varphi_j(x)$ — j-й собственной функции, указанной в ч.1 п.1 краевой задачи. Заметим, что при сделанных относительно конуса K предположениях функция $\varphi_j(x)$ такова, что $\forall x_0 \in \partial K \setminus \{0\}$:

$$\exists \lim_{\substack{x \to x^0 \in \partial K \setminus \{0\} \\ x \in K}} \frac{\varphi_j(x)}{\varphi(x)} = \frac{\partial \varphi_j(x^0)}{\partial n} \Big/ \frac{\partial \varphi(x^0)}{\partial n}.$$

Теорема 6. *Пусть функция u удовлетворяет условиям теоремы 3 относительно $\rho = \varkappa_j^+$ $(j \geqslant 2)$ и пусть $\lambda \notin \Lambda_u$. Тогда*

$$\exists \lim_{R \to \infty} \theta_m \int\limits_{\overline{K}_{\lambda, R}} \frac{\varphi_j(x)}{\varphi(x)} |x|^{-\rho-m+2} d\tau_u = \varkappa_j^- \lambda^{\varkappa_j^- - 1} \int\limits_{\Gamma_\lambda} u\varphi_j dS_\lambda -$$

$$- \lambda^{\varkappa_j^-} Q\left(\frac{\varphi_j}{\varphi}, \lambda, u\right) + (2\rho + m - 2) \int\limits_{\Gamma_1} L_u^* \varphi_j dS_1. \qquad (61)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что, как следует из свойств интеграла по мере, доказательство равенства (61) достаточно провести при дополнительном предположении, что $R \to \infty$, не принимая значений из какого-либо счетного множества. Будем предполагать, что $R \notin \Lambda_u$. Тогда, применяя лемму 6 для $\psi(x) = |x|^{\varkappa_j^-} \varphi_j(x) / \varphi(x)$ и учитывая при этом гармоничность функции $|x|^{\varkappa_j^-} \varphi_j(x)$, получаем, что

$$\theta_m \int\limits_{\overline{K}_{\lambda, R}} \varphi_j \varphi^{-1} |x|^{\varkappa_j^-} d\tau_u = \int\limits_{\Gamma_\lambda} u\varphi \frac{\partial}{\partial n} [|x|^{\varkappa_j^-} \varphi_j \varphi^{-1}] dS_\lambda +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_R} u\varphi \frac{\partial}{\partial n} [|x|^{\varkappa_j^-} \varphi_j \varphi^{-1}] dS_R - Q(|x|^{\varkappa_j^-} \varphi_j \varphi^{-1}, \lambda, u) +$$

$$+ Q(|x|^{\varkappa_j^-} \varphi_j \varphi^{-1}, R, u) = \varkappa_j^- \lambda^{\varkappa_j^- - 1} \int\limits_{\Gamma_\lambda} u\varphi_j dS_\lambda -$$

$$- \varkappa_j^- R^{\varkappa_j^- - 1} \int\limits_{\Gamma_R} u\varphi_j dS_R - \lambda^{\varkappa_j^-} Q(\varphi_j \varphi^{-1}, \lambda, u) + R^{\varkappa_j^-} Q(\varphi_j \varphi^{-1}, R, u).$$

Таким образом,

$$\theta_m \int\limits_{\overline{K}_{\lambda, R}} \frac{\varphi_j}{\varphi} |x|^{-\rho-m+2} d\tau_u = \frac{\rho+m-2}{R^{\rho+m-1}} \int\limits_{\Gamma_R} u\varphi_j dS_R +$$

$$+ R^{-\rho-m+2} Q(\varphi_j\varphi^{-1}, R, u) + \varkappa_j^- \lambda^{\varkappa_j^- -1} \int\limits_{\Gamma_\lambda} u\varphi_j dS_\lambda - \lambda^{\varkappa_j^-} Q(\varphi_j\varphi^{-1}, \lambda, u). \quad (62)$$

Теперь для доказательства равенства (61) достаточно сослаться на то, что в силу теоремы 5 первое слагаемое в правой части равенства (62) стремится при $R \to \infty$ к $(\rho + m - 2) \int\limits_{\Gamma} L_u^* \varphi_j dS_1$, а второе— к $\rho \int\limits_{\Gamma_1} L_u^* \varphi_j dS_1$.

Теорема доказана.

Существование предела (61) мы будем называть условием конусно-граничной уравновешенности функции $u(x)$. Для функций, голоморфных в полуплоскости, это условие совпадает с условием аргументно-граничной симметрии [5].

5. Регулярность роста функций со сходящимися функционалами T_R. В теоремах 3, 4, 6 установлено, что полная регулярность роста функции $u \in SH(K:\rho)$ влечет специальную слабую сходимость функций $t^{-\rho}u(tx)$ на пространстве $C(\overline{K}_\delta)$ с весом $|x|^{-2}\varphi(x)$, из которой в свою очередь следует сходимость функционалов T_R, $R \to \infty$, и дополнительно, в случае $\rho \in \{\varkappa_j^+\}$, условие конусно-граничной уравновешенности. Следующая ниже теорема показывает, что и наоборот, сходимость функционалов T_R и наличие конусно-граничной уравновешенности влекут за собой регулярность роста исходной функции.

Теорема 7. *Пусть функция* $u \in SH(K; \rho)$, $\rho > \varkappa^+$, *и* $\forall \psi \in C(\overline{K}_1)$ $\exists \lim\limits_{R\to\infty} \langle T_R, \psi\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle \tilde{T}, \psi\rangle$, *а кроме того, если* $\rho = \varkappa_q^+$, $q \geqslant 2$,

$$\exists \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\overline{K}_{\lambda, R}} \varphi_q\varphi^{-1} |x|^{-\rho-m+2} d\tau_u.$$

Тогда функция и является функцией в. р. р. в K и $\tilde{T} = T$.

Доказательство этой теоремы опирается на следующие леммы.

Лемма 9*. *Пусть функция* $u \in SH(K; \rho)$, $\varkappa_q^+ < \rho < \varkappa_{q+1}^+$, *и пусть* $\forall \psi \in C(\overline{K}_1)$ $\exists \lim\limits_{R\to\infty} \langle T_R, \psi\rangle = \langle \tilde{T}, \psi\rangle$. *Тогда* $\forall \psi \in C(\overline{K}_1)$ *и* $0 < \lambda < 1$

$$\exists \lim_{t\to\infty} \int\limits_{K_1} v_{\lambda, t}(x)\psi(x)|x|^{-2}\varphi(x)\,d\omega \overset{\text{def}}{=} \langle \tilde{L}, \psi\rangle,$$

где функция $v_{\lambda, t}$ *определяется по функции и так же, как в теореме 3.*

* Доказательство близкого утверждения для функций, субгармонических в полуплоскости, содержится в [13].

Доказательство. В силу оценок теоремы 1 доказательство данного утверждения сводится, как и доказательство теоремы 3, к установлению того, что $\forall K' = K^{\Gamma'}$, $\Gamma' \subset\subset \Gamma$, $\forall \psi \in C(\overline{K}'_{\lambda,1})$,

$$\exists \lim_{t\to\infty} \int_{K'_{\lambda,1}} t^{-\rho} u(tx)\, \psi(x)\, d\omega.$$

Для функции $u_t(x) \overset{\text{def}}{=} t^{-\rho} u(tx)$ запишем представление, вытекающее из (46). Считая $\frac{\lambda}{2} \notin \Lambda_u$, что, очевидно, не нарушает общности, имеем

$$u_t(x) = t^{-\rho} \int_{\overline{K}_{\lambda/2,\infty}} W_q(tx, y)\, d\tau(y) + t^{-\rho} v(tx) + \\ + t^{-\rho} \sum_{n=1}^{q} c_n |tx|^{\varkappa_n^+} \varphi_n(x).$$

Следовательно,

$$\int_{K'_{\lambda,1}} \psi u_t d\omega = t^{-\rho} \int_{K'_{\lambda,1}} \psi(x) \int_{\overline{K}_{\lambda/2,\infty}} W_q(tx, y)\, d\tau(y)\, d\omega(x) + \\ + t^{-\rho} \int_{K'_{\lambda,1}} \psi(x) v(tx)\, d\omega + t^{-\rho} \int_{K'_{\lambda,1}} \psi(x) \sum_{n=1}^{q} c_n |tx|^{\varkappa_n^+} \varphi_n(x)\, d\omega = \\ = A_1(t) + A_2(t) + A_3(t). \tag{63}$$

Исследуем поведение при $t \to \infty$ каждого из слагаемых A_j. Поскольку $\rho > \varkappa_q^+$, то очевидно, что $\lim\limits_{t\to\infty} A_3(t) = 0$. В силу теоремы 2 $\lim\limits_{t\to\infty} A_2(t) = 0$. Для исследования слагаемого $A_1(t)$ вначале преобразуем его к виду

$$A_1 = t^{-\rho} \int_{K'_{\lambda,1}} \psi(x) \int_{\overline{K}_{\lambda/2,\delta t}} W_q(tx, y)\, d\tau(y)\, d\omega(x) + \\ + t^{-\rho} \int_{K'_{\lambda,1}} \psi(x) \int_{\overline{K}_{\delta t, Nt}} W_q(tx, y)\, d\tau(y)\, d\omega(x) + \\ + t^{-\rho} \int_{K'_{\lambda,1}} \psi(x) \int_{\overline{K}_{Nt,\infty}} W_q(tx, y)\, d\tau(y)\, d\omega(x) = B_1 + B_2 + B_3, \tag{64}$$

где $0 < \delta < \frac{\lambda}{2} < N < \infty$. Так как $|tx| < |y|/2$ при $x \in K'_{\lambda,1}$, $y \in \overline{K}_{Nt,\infty}$, то в силу оценки (48) ядра W_q и неравенства (37) для меры $\tilde{\tau}(s) \overset{\text{def}}{=} |\tau|(\overline{K}_{\lambda,s})$, величина $|B_3|$ оценивается следующим образом:

$$|B_3| \leqslant t^{\varkappa_q^+ + 1 - \rho} \|\psi\| \int_{K'_{\lambda,1}} |x|^{\varkappa_q^+ + 1} d\omega(x) \int_{\overline{K}_{Nt,\infty}} |y|^{\varkappa_q^- + 1} d|\tau|(y) \leqslant \\ \leqslant c(\lambda) \|\psi\| t^{\varkappa_q^+ + 1 - \rho} \int_{Nt}^{\infty} s^{\varkappa_q^- + 1} d\tilde{\tau}(s) \leqslant \tilde{c}(\lambda) \|\psi\| N^{\varkappa_q^- + 1 + \rho + m - 2}.$$

Заметим, что $\varkappa_{q+1}^{-}+\rho+m-2<0$. Поэтому для любого наперед заданного $\varepsilon>0$ можно выбрать N так, чтобы при всех $t>1$ была выполнена оценка $|B_3|<\varepsilon$.

Для оценки B_1 оценим предварительно функцию

$$w_{t,\delta}(x)=t^{-\rho}\int\limits_{\overline{K}_{\lambda/2,\,\delta t}} W_q(tx,\ y)\,d\tau(y).$$

Используя определение ядра W_q и учитывая, что $\forall x\in K'_{\lambda,1}$ и $\forall y\in\overline{K}_{\lambda/2,\,\delta t}$ $|tx|>\lambda t\geqslant 2|y|$, с помощью оценок (48) (при $p=0$) и (37) получаем, что

$$|w_{t,\delta}(x)|=t^{-\rho}\left|\int\limits_{\overline{K}_{\lambda/2,\,\delta t}}\left\{\frac{G(tx,\ y)}{\varphi(y)}-\beta\sum_{j=1}^{q}|tx|^{\varkappa_j^{+}}|y|^{\varkappa_j^{-}}\frac{\varphi_j(x)\,\varphi_j(y)}{\alpha_j\varphi(x)}\right\}d\tau(y)\right|$$

$$\leqslant Ct^{-\rho}\int\limits_{\overline{K}_{\lambda/2,\,\delta t}}[\,|y|^{\varkappa^{+}}|tx|^{\varkappa^{-}}+|tx|^{\varkappa_q^{+}}|y|^{\varkappa_q^{-}}]\,d\,|\tau|(y)\leqslant$$

$$\leqslant Ct^{\varkappa^{-}-\rho}|x|^{\varkappa^{-}}(\delta t)^{\rho+m-2+\varkappa^{+}}+Ct^{\varkappa_q^{+}-\rho}|x|^{\varkappa_q^{+}}(\delta t)^{\rho+m-2+\varkappa_q^{-}}\leqslant$$

$$\leqslant C(|x|^{\varkappa^{-}}+|x|^{\varkappa_q^{+}})\,\delta^{\rho-\varkappa_q^{+}}.$$

Из этого неравенства следует, что при достаточно малом $\delta>0$ и всех $t>\lambda/\delta$

$$|B_3|\leqslant\|\psi\|\int\limits_{K'_{\lambda,1}}|w_{t,\delta}|\,d\omega\leqslant D\varepsilon.$$

Исследуем теперь поведение при $t\to\infty$ слагаемого B_2. Учитывая, что $W_q(tx,\ y)=t^{-m+2}W_q\left(x,\ \frac{y}{t}\right)$, запишем B_2 в следующем виде:

$$B_2=t^{-\rho-m+2}\int\limits_{K'_{\lambda,1}}\psi(x)\int\limits_{\overline{K}_{\delta t,\,Nt}}W_q\left(x,\ \frac{y}{t}\right)d\tau(y)\,d\omega(x)=$$

$$=t^{-\rho-m+2}\int\limits_{\overline{K}_{\delta t,\,Nt}}\left\{\int\limits_{K'_{\lambda,1}}W_q\left(x,\ \frac{y}{t}\right)\psi(x)\,d\omega(x)\right\}d\tau(y). \tag{65}$$

Далее положим $a_N(y)=\int\limits_{K'_{\lambda,1}}W_q(x,\ Ny)\,\psi(x)\,d\omega(x)$. Ясно, что $a_N(y)\in C(\overline{K}_{\delta/N,1})$. Заметим теперь, что, как следует из (65) и определения функционалов T_R, справедливо равенство $B_2=\langle T_{Nt},\ a_N\rangle$. Согласно условию леммы

$$\forall a^*\in C(\overline{K}_1)\quad\exists\lim_{R\to\infty}\langle T_R,\ a^*\rangle=\langle\tilde{T},\ a^*\rangle.$$

Отсюда, как легко видеть, вытекает также наличие равенства

$$\lim_{R\to\infty}\langle T_R,\ a^*\chi_{\delta_1,\delta_2}\rangle=\langle\tilde{T},\ a^*\chi_{\delta_1,\delta_2}\rangle,$$

где $\chi_{\delta_1, \delta_2}$ — характеристическая функция шарового слоя $B_{\delta_2} \setminus B_{\delta_1}$, $0 < \delta_1 < \delta_2$. Взяв в этом равенстве в качестве a^* какое-либо непрерывное продолжение функции a_N и положив $\delta_1 = \frac{\delta}{N}$, $\delta_2 = 1$, получим, что

$$\exists \lim_{t\to\infty} B_2(t) = \langle \tilde{T},\ a_N \rangle.$$

Из установленных свойств величин A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 немедленно следует, что $\forall \psi \in C(\overline{K}'_{\lambda, 1})$ существует

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{K'_{\lambda, 1}} u_t \psi d\omega.$$

Лемма 10. *Пусть функция* $u \in SH(K;\ \rho)$, $\varkappa^+_{q-l-1} < \varkappa^+_{q-l} = \cdots$ $\cdots = \varkappa^+_q = \rho < \varkappa^+_{q+1}$, *и пусть существуют пределы*

$$\lim_{R\to\infty} \langle T_R,\ \psi \rangle = \langle \tilde{T},\ \psi \rangle,\ \forall \psi \in C(\overline{K}_1)$$

и

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\overline{K}_{\lambda, R}} \varphi_{q-j} \varphi^{-1} |x|^{-\rho-m+2} d\tau_u, \quad j = 0,\ \ldots,\ l. \tag{66}$$

Тогда $\forall \psi \in C(\overline{K}_1)$

$$\exists \lim_{t\to\infty} \int\limits_{K'_1} v_{\lambda, t}(x) \psi(x) |x|^{-2} \varphi(x) d\omega \overset{\text{def}}{=} \langle \tilde{L},\ \psi \rangle.$$

Доказательство. Так же, как и при доказательстве леммы 9, достаточно установить существование предела

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{K'_{\lambda, 1}} u_t \psi d\omega,\ \forall K' = K^{\Gamma'},\ \Gamma' \subset\subset \Gamma,\ \forall \psi \in C(\overline{K'_{\lambda, 1}}). \tag{67}$$

Воспользуемся равенствами (63) и (64). При доказательстве леммы 9 было установлено, что в условиях этой леммы

$$\lim_{t\to\infty} A_2 = 0,\ \lim_{t\to\infty} B_2 = \langle \tilde{T},\ a_N \rangle,\ B_3 \to 0$$

при $N \to \infty$ равномерно относительно $t > 1$. При этом использовалось по существу не то, что порядок $\rho \notin \{\varkappa^+_n\}$, а неравенство $\rho < \varkappa^+_{q+1}$. Это неравенство выполнено и в условиях доказываемой леммы и, следовательно, в рассматриваемом здесь случае указанные соотношения также имеют место. Далее, очевидно, что

$$\exists \lim_{t\to\infty} A_3 = c_n \int\limits_{K'_{\lambda, 1}} \psi |x|^{\varkappa^+_q} \varphi_q d\omega.$$

Рассмотрим теперь слагаемое B_1. Имеем

$$B_1 = t^{-\rho} \int\limits_{K'_{\lambda, 1}} \psi(x) \int\limits_{\overline{K}_{\lambda/2, \delta t}} W_q(tx,\ y) d\tau(y) d\omega(x) =$$

$$= t^{-\rho} \int\limits_{K'_{\lambda, 1}} \psi(x) \Bigg[\int\limits_{\overline{K}_{\lambda/2, \delta t}} W_{q-l-1}(tx,\ y) d\tau(y) +$$

$$+\beta\sum_{j=0}^{l}\int\limits_{\overline{K}_{\lambda/2,\,\delta t}}|tx|^{\varkappa_q^+}|y|^{\varkappa_q^-}\frac{\varphi_{q-j}(x)\,\varphi_{q-j}(y)}{\alpha_q\varphi(y)}\,d\tau(y)\Bigg]d\omega(x)=$$

$$=t^{-\rho}\int\limits_{K'_{\lambda,1}}\psi(x)\int\limits_{\overline{K}_{\lambda/2,\,\delta t}}W_{q-l-1}(tx,\,y)\,d\tau(y)\,d\omega(x)+$$

$$+t^{-\rho}\beta\sum_{j=0}^{l}\int\limits_{K'_{\lambda,1}}\psi(x)\,|x|^{\varkappa_q^+}\frac{\varphi_{q-j}(x)}{\alpha_q}d\omega(x)\int\limits_{\overline{K}_{\lambda/2,\,\delta t}}|y|^{\varkappa_q^-}\frac{\varphi_{q-j}(y)}{\varphi(y)}\,d\tau(y)=$$

$$=B_{1,1}(t)+B_{1,2}(t).$$

Поскольку $\rho=\varkappa_q^+>\varkappa_{q-l-1}^+$, то, как и при доказательстве леммы 9, заключаем, что $\sup\limits_{t>\lambda/2\delta}|B_{1,1}(t)|\to 0$ при $\delta\to 0$. Наконец, наличие конусно-граничной уравновешенности, т. е. существование пределов (65), влечет за собой существование предела $\lim\limits_{t\to\infty}B_{1,2}(t)$ (напомним, что в нашем случае $\varkappa_q^-=-\rho-m+2$).

Из указанных свойств величин A_j, B_j и $B_{i,j}$ получаем выполнение соотношения (67). Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть функция* $u\in SH(K;\rho)$ *и пусть функции* u_t *при* $t\to\infty$ *сходятся в* $D'(K)$ *к обобщенной функции* $\tilde{L}$. *Тогда* $\tilde{L}=L_u^*$.

Доказательство этой леммы мы опускаем, поскольку оно элементарно и мало отличается от доказательства соответствующего утверждения для функций $u(z)=\ln|f(z)|$, где $f(z)$ — голоморфная функция в полуплоскости [14].

Лемма 12. *Пусть функция* $u\in SH(K;\rho)$, $\rho>\varkappa^+$, *и пусть в пространстве* $D'(K)\ \exists\lim\limits_{t\to\infty}u_t=L_u^*$. *Тогда функция u является функцией в. р. р. в* K.

Доказательство. Эта лемма является простым следствием теоремы 2.7.4.1 из [15, ч. 1]. Действительно, согласно этой теореме сходимость функций u_t к индикатору L_u^* в $D'(K)$ влечет за собой сходимость этих функций к L_u^* по α-мере Карлесона[1], $m-2<\alpha<m$, в любой области $G_0\subset\subset K$. Отсюда, как нетрудно видеть, при $\alpha=m-1$ следует, что в каждом конусе $K^{\Gamma'}$, $\Gamma'\subset\subset\Gamma$, функции $|x|^{-\rho}u(x)\to L_u^*\left(\frac{x}{|x|}\right)$, когда $x\to\infty$, не принимая значений из некоторого C_0-множества. Вместе с предполагаемой в условии леммы 12 нормальностью типа это означает полную регулярность роста рассматриваемой функции. Лемма доказана.

---

[1] α-мерой Карлесона множества $E\subset R^m$ называется $\inf\sum\limits_j r_j^\alpha$, где r_j — радиусы шаров B_j, образующих покрытие множества E, и inf берется по всем счетным покрытиям множества E.

Из приведенных лемм немедленно следует, что функция $u(x)$ из условия теоремы 7 является функцией в. р. р. в K. Тогда, согласно теореме 4, $\lim\limits_{R\to\infty} T_R = T$. Значит, $\tilde{T} = T$. Теорема доказана.

6. Правильное распределение меры τ_u. Критерии регулярности роста. Объединение теоремы 7 с теоремой 4 дает критерий полной регулярности роста в терминах распределения меры τ_u. Для краткости формулировки этого утверждения и большей ее схожести с формулировкой соответствующего критерия Левина—Пфлюгера для целых функций [1] введем следующее

Определение. *Мера τ_u, ассоциированная с функцией $u \in SH(K;\rho)$, называется правильно распределенной относительно данного порядка ρ, если при каком-либо $\lambda > 0$*

$$\forall\, \psi \in C(\overline{K}_1)\ \exists \lim_{R\to\infty} \langle T_R,\ \psi\rangle, \tag{68}$$

и дополнительно к этому, в случае $\rho \in \{\varkappa_n^+\}$ выполнено условие конусно-граничной уравновешенности, т. е. существуют пределы

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\overline{K}_{\lambda,\,R}} \varphi_q \varphi^{-1} |x|^{-\rho-m+2} d\tau_u$$

для всех q, таких, что $\rho = \varkappa_q^+$.

Условие (68), как нетрудно видеть, эквивалентно условию существования конусно-граничной плотности (57) (это следует, например, из теоремы 2.2.3.7 [15, ч. 1]). Таким образом, эквивалентное определение правильной распределенности меры τ_u — это существование конусно-граничной плотности и дополнительно к этому, в случае $\rho \in \{\varkappa_n^+\}$ — конусно-граничной уравновешенности.

Теперь упоминавшийся критерий полной регулярности роста может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 8. *Для того чтобы функция $u \in SH(K;\rho)$, $\rho > \varkappa^+$, была функцией в. р. р. в K, необходимо и достаточно, чтобы ассоциированная мера τ_u была правильно распределена (относительно ρ).*

Наряду с приведенным критерием полной регулярности роста в терминах меры τ_u отметим еще вытекающий из теоремы 3 и леммы 12 критерий полной регулярности роста в терминах слабой сходимости функций $u_t(x)$. Соответствующее утверждение для функций, голоморфных в C_+, произвольного положительного порядка содержится в [14].

Теорема 9. *Пусть функция $u \in SH(K;\rho)$, $\rho > \varkappa^+$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) функция u имеет в. р. р. в K;

б) в пространстве $D'(K)$ существует $\lim\limits_{t\to\infty} u_t(x)$;

в) $\forall\, \psi \in C(\overline{K}_r)$ при некоторых $\lambda > 0$ и $r > 0$

$$\exists \lim_{t\to\infty} \int\limits_{K_r} v_{\lambda,\,t}(x)\, \psi(x)\, |x|^{-2}\, \varphi(x)\, d\omega,$$

где $v_{\lambda,\,t}(x) = u_t(x)$ при $|x| > \frac{\lambda}{t}$ и $v_{\lambda,\,t}(x) = 0$ при $|x| < \frac{\lambda}{t}$.

В заключение отметим, что содержащееся в настоящей работе требование $\rho > \varkappa^+$ непосредственно используется лишь при установлении интегральных оценок функции $u \in SH(K; \rho)$ и ассоциированной с нею меры τ_u (теорема 1). Использованный в ч. 1 метод получения этих оценок для случая $\rho \leqslant \varkappa^+$ не пригоден. Распространение полученных результатов на случай $\rho \leqslant \varkappa^+$ проведено одним из авторов [16].

Список литературы: 12. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. М., 1971. 422 с. 13. *Файнберг Е. Д.* Оценки индикаторов специальных классов функций, аналитических в полуплоскости. Х., 1981. 51 с. Деп. в ВИНИТИ 07.08.81, № 4167-81 Деп. 14. *Бабий В. И.* О голоморфных функциях вполне регулярного роста в полуплоскости. Х., 1986. 15 с. Деп. в УкрНИИТИ 12.07.86, № 1697-Ук86. 15. *Азарин В. С.* Теория роста субгармонических функций. Ч. 1. Х., 1978. 72 с. 16. *Рашковский А. Ю.* Рост и убывание субгармонических функций в конусе. Х., 1986. 20 с. Деп. в ВИНИТИ 24.11.86, № 7977-В86.

Поступила в редколлегию 12.11.90

УДК 517.9

Т. В. МИСЮРА

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВЕЙЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА

В спектральном анализе дифференциальных операторов и его приложениях важное место занимает исследование поведения решений Вейля соответствующих уравнений, когда спектральный параметр стремится к бесконечности.

Точная асимптотическая формула для решений Вейля широкого класса уравнений Штурма—Лиувилля получена в работе [1]. Решающее значение при доказательстве этой формулы имело условие полуограниченности соответствующих операторов Штурма—Лиувилля. В настоящей работе аналогичная формула получена для решений Вейля уравнений Дирака.

Заметим, что операторы Дирака не могут быть полуограниченными и наш метод доказательства существенно отличается от метода работы [1].

1. Рассмотрим дифференциальную операцию Дирака:

$$D = B\frac{d}{dx} + \Omega(x), \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ -\infty < x < \infty \tag{1}$$

с вещественной непрерывно дифференцируемой потенциальной матрицей

$$\Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & r(x) \\ r(x) & -p(x) \end{pmatrix} \tag{1'}$$

и обозначим через

$$\mathrm{E}(z, x) = \begin{pmatrix} \mathrm{E}_{11}(z, x) & \mathrm{E}_{12}(z, x) \\ \mathrm{E}_{21}(z, x) & \mathrm{E}_{22}(z, x) \end{pmatrix}, \ \mathrm{E}(z, 0) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

фундаментальное решение уравнения

$$D(y(z, x)) = zy(z, x). \qquad (2)$$

Общее векторное решение этого уравнения представимо в виде $\mathrm{E}(z, x)C$, где C — произвольная постоянная столбцевая матрица.

Условимся обозначать через $\vec{L}_2(a, b)$ гильбертово пространство вектор-функций $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$, т. е. столбцевых матричных функций со скалярным произведением:

$$(f, g) = \int_a^b g^*(x) f(x)\, dx = \int_a^b \{\overline{g_1(x)} f_1(x) + \overline{g_2(x)} f_2(x)\}\, dx.$$

Согласно классической теореме Вейля существуют такие голоморфные вне вещественной оси функции $m^{\pm}(z)$, что решения

$$\psi^{\pm}(z, x) = \mathrm{E}(z, x)\begin{pmatrix} m^{\pm}(z) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}_{11}(z, x) m^{\pm}(z) + \mathrm{E}_{12}(z, x) \\ \mathrm{E}_{21}(z, x) m^{\pm}(z) + \mathrm{E}_{22}(z, x) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

уравнения (2) соответственно принадлежат пространствам $\vec{L}_2(0, \infty)$ и $\vec{L}_2(-\infty, 0)$:

$$\psi^{+}(z, x) \in \vec{L}_2(0, \infty), \quad \psi^{-}(z, x) \in \vec{L}_2(-\infty, 0).$$

Функцию $m(z)$ и решение $\psi(z, x)$, определяемые равенствами

$$m(z) = \begin{cases} m^{+}(z) \\ m^{-}(z) \end{cases}, \quad \psi(z, x) = \begin{cases} \psi^{+}(z, x) & \mathrm{Im}\, z > 0, \\ \psi^{-}(z, x) & \mathrm{Im}\, z < 0, \end{cases} \qquad (4)$$

будем называть функцией и решением Вейля уравнения (2). Таким образом, решение Вейля $\psi(z, x) = \begin{pmatrix} \psi_1(z, x) \\ \psi_2(z, x) \end{pmatrix}$ удовлетворяет начальному условию $\psi_2(z, 0) = 1$, принадлежит пространству $\vec{L}_2(0, \infty)$ при $\mathrm{Im}\, z > 0$ и пространству $\vec{L}_2(-\infty, 0)$ при $\mathrm{Im}\, z < 0$. Так как для уравнения (2) всегда имеет место случай предельной точки [2], то этими свойствами решение Вейля однозначно определено, и любое решение $\Phi(z, x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(z, x) \\ \Phi_2(z, x) \end{pmatrix}$ уравнения (2), принадлежащее пространству $\vec{L}_2(0, \infty)$ при $\mathrm{Im}\, z > 0$ и пространству $\vec{L}_2(-\infty, 0)$ при $\mathrm{Im}\, z < 0$, представимо в виде

$$\Phi(z, x) = \Phi_2(z, 0)\, \psi(z, x), \qquad (5)$$

откуда, в частности, следует, что

$$m(z) = \frac{\Phi_1(z, 0)}{\Phi_2(z, 0)}. \qquad (5')$$

В простейшем случае, когда $\Omega(x) \equiv 0$, функция $m_0(z)$ и решение $\psi_0(z, x)$ Вейля равны:

$$m_0(z) = i; \quad \psi_0(z, x) = e^{izx}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

А´солютной величиной $|A|$ матрицы $A=(a_{ik})$ (вообще говоря, ямоугольной) будем называть неотрицательное число
$$|A| = \max_i \left(\sum_k |a_{ik}|\right).$$
метим, что она обладает всеми свойствами нормы.

Основной результат настоящей работы содержится в следующей реме:

Теорема. *Пусть в уравнении* (2) *потенциальная матрица* $\Omega(x)$ *фференцируема и ее производная* $\Omega'(x)$ *удовлетворяет неравенству*
$$|\Omega'(x)| \leqslant \exp(C_1 + C_2|x|), \tag{6}$$
е C_1 *и* C_2 *— некоторые неотрицательные числа.*

Тогда для решения Вейля $\psi(z, x)$ *этого уравнения при всех* >0, $A>0$ *выполняется асимптотическое равенство*
$$\lim_{|z|\to\infty} \sup_{|x|<A} |e^{-izx}(\psi(z, x) - \psi_0(z, x))| = 0, \quad |\operatorname{Im} z| > \varepsilon, \tag{7}$$
е $\psi_0(z, x) = e^{izx}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Так как $\psi(-z, -x)$ является решением Вейля уравнения
$$B\frac{d}{dx}\psi(-z, -x) - \Omega(-x)\psi(-z, -x) = z\psi(-z, -x),$$
отором потенциальная матрица $-\Omega(-x)$ тоже удовлетворяет виям теоремы, то можно без ограничения общности рассматри- только z, лежащие в верхней полуплоскости.

Далее, фундаментальная матрица $\mathrm{E}(z, x)$ уравнения (2) удовлет- яет также уравнению
$$-\frac{d^2}{dx^2}Y(z, x) + V(x)Y(z, x) = z^2 Y(z, x), \tag{8}$$
$V(x) = B\Omega'(x) + \Omega^2(x)$, и начальным условиям $\mathrm{E}(z, 0) = I$, $(z, 0) = B\Omega(0) - zB$. Следовательно,
$$\mathrm{E}(z, x) = C(z, x) - zS(z, x)B + S(z, x)B\Omega(0), \tag{9}$$
$C(z, x)$, $S(z, x)$ — решения уравнения (8) при начальных данных $0) = S'(z, 0) = I$; $C'(z, 0) = S(z, 0) = 0$.

Из уравнения
$$C(z, x) = \cos zx \cdot I + \int_0^x \frac{\sin z(x-t)}{z} V(t) C(z, t)\, dt,$$
орому удовлетворяет $C(z, x)$, и аналогичного уравнения для $x)$ следует, что в области $|z| > 2P(x)$, где $P(x) = \left|\int_0^x |V(t)|\, dt\right|$, олняются неравенства
$$\begin{gathered} |C(z, x)| \leqslant 2e^{|\operatorname{Im} zx|}, \quad |zS(z, x)| \leqslant 2e^{|\operatorname{Im} zx|}, \\ |C(z, x) - \cos zx \cdot I| \leqslant \frac{2P(x)}{|z|} e^{|\operatorname{Im} zx|}, \\ |zS(z, x) - \sin zx \cdot I| \leqslant \frac{2P(x)}{|z|} e^{|\operatorname{Im} zx|}, \end{gathered} \tag{10}$$

из которых согласно (9), (3) и (4) следует, что

$$|e^{-izx}(\psi(z, x) - \psi_0(z, x))| \leqslant \left(|m(z) - i| + \frac{2|\Omega(0)|}{|z|} + \right.$$
$$\left. + \frac{1 + |m(z)|}{|z|} \cdot 4P(x)\right) e^{|\operatorname{Im} zx| + \operatorname{Im} zx}.$$

Поэтому, если $\operatorname{Im} z > 0$ и $|z| > 2\max\{P(A),\ P(-A)\}$, то

$$\sup_{-A<x<0} |e^{-izx}(\psi(z, x) - \psi_0(z, x))| \leqslant |m(z) - i| +$$
$$+ |z^{-1}|\{2|\Omega(0)| + 4(1 + |m(z)|)P(-A)\}$$

и

$$\sup_{0<x<A} |e^{-izx}(\psi(z, x) - \psi_0(z, x))| \leqslant \{|m(z) - i| +$$
$$+ |z^{-1}|[2|\Omega(0)| + 4(1 + |m(z)|)P(A)]\} e^{2A \operatorname{Im} z}.$$

Эти неравенства показывают, что для доказательства теор[е]
достаточно доказать справедливость следующих двух равенств:

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ \operatorname{Im} z \geqslant \varepsilon}} m(z) = i; \qquad (\ldots)$$

$$\lim_{\Lambda\to+\infty} \sup_{\operatorname{Im} z \geqslant \Lambda} \left(\sup_{0<x\leqslant A} |e^{-izx}(\psi(z, x) - \psi_0(z, x))|\right) = 0. \qquad (\ldots)$$

2. Дифференциальная операция (1) порождает в пространст[ва]
$\vec{L}_2(0, l)$ $(l < \infty)$ и $\vec{L}_2(0, \infty)$ самосопряженные операторы $D_1 = D$[…]
$D_2 = D_2(l)$ и $D_3 = D(\infty)$, области определения которых сос[тоят]
из вектор-функций $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$, удовлетворяющих условиям:

$$D(y(x)) \in \vec{L}_2(0, l), \quad y_2(0) = y_1(l) = 0 \text{ для } D_1;$$
$$D(y(x)) \in \vec{L}_2(0, l), \quad y_2(0) = y_2(l) = 0 \text{ для } D_2;$$
$$D(y(x)) \in \vec{L}_2(0, \infty), \quad y_2(0) = 0 \qquad \text{для } D_3.$$

Формулы разложения по собственным вектор-функциям этих оп[е]раторов и связанные с ними равенства Парсеваля имеют такой ви[д]

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda, x)\,\omega(\lambda, f)\,d\rho_i(\lambda); \qquad (1\ldots)$$

$$\int_0^{\infty} g^*(x) f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\omega(\lambda, g)}\,\omega(\lambda, f)\,d\rho_i(\lambda), \qquad (1\ldots)$$

где $i = 1, 2, 3$;

$$\omega(z, x) = \mathrm{E}(z, x)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}_{11}(z, x) \\ \mathrm{E}_{21}(z, x) \end{pmatrix};$$

$$\omega(z, f) = \int_0^{\infty} \omega^T(z, x) f(x)\,dx;$$

неубывающие функции $\rho_1(\lambda) = \rho_1(\lambda, l)$, $\rho_2(\lambda) = \rho_2(\lambda, l)$, $\rho_3(\lambda) =$
$= \rho(\lambda, \infty)$ называются спектральными функциями операторов D_1,
D_2, D_3, и через A^T обозначены матрицы, транспонированные матр[и]цам A.

Спектральная функция $\rho(\lambda, \infty)$ удовлетворяет асимптотическому равенству (см. [3]):

$$\rho(\lambda, \infty) = \frac{1}{\pi}\{\lambda - p(0)\ln|\lambda|\} - \frac{\lambda}{2|\lambda|} r(0) + \varepsilon(\lambda), \tag{14}$$

где $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} \varepsilon(\lambda) = 0$, и связана с функцией Вейля $m(z) = m^+(z)$ формулами

$$m(z) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \frac{d\rho(\lambda, \infty)}{\lambda - z}; \tag{14'}$$

$$\rho(\lambda_2, \infty) - \rho(\lambda_1, \infty) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \operatorname{Im} m(t + i\varepsilon)\, dt. \tag{14''}$$

Из равенств (14), (14′), повторяя ход доказательства леммы 1 работы [1], выводим справедливость равенства (11).

3. Обозначим через $W_2(\sigma)$ множество всех целых функций $\varphi(z)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2\, dx < \infty.$$

Согласно теореме Винера—Пэли это множество совпадает с множеством всех функцчй, представимых в виде $f(z) = \int_0^\sigma (\cos zt \cdot g_1(t) + \sin zt \cdot g_2(t))\, dt$, где $g_k(t) \in L_2(0, \sigma)$ $(k = 1, 2)$.

Лемма 1. *Множество обобщенных преобразований Фурье*

$$\omega(z, f) = \int_0^\sigma \omega^T(z, y) f(y)\, dy$$

всех вектор-функций $f(y) \in \overrightarrow{L}_2(0, \sigma)$ *совпадает с множеством* $W_2(\sigma)$.

Доказательство. Решение $\omega(z, x)$ уравнения (2) выражается через решение

$$\omega_0(z, x) = \begin{pmatrix}\cos zx \\ \sin zx\end{pmatrix}$$

простейшего уравнения с нулевой потенциальной матрицей с помощью операторов преобразования

$$\omega(z, x) = \omega_0(z, x) + \int_0^x K(x, t)\, \omega_0(z, t)\, dt,$$

откуда следует, что для вектор-функций $f(x) \in \overrightarrow{L}_2(0, \sigma)$ выполняются равенства $\omega(z, f) = \omega(z, \tilde{f})$, где

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \int_x^\sigma K^T(t, x) f(t)\, dt.$$

Так как эта формула определяет взаимно однозначное отображение $f(x) \to \tilde{f}(x)$ пространства $\vec{L}_2(0, \sigma)$ на себя, то множество обобщенных преобразований Фурье $\omega(z, f)$ совпадает с множеством функций вида

$$\omega_0(z, \tilde{f}) = \int\limits_0^\sigma \{\cos zx \cdot \tilde{f}_1(x) + \sin zx \cdot \tilde{f}_2(x)\}\, dx,$$

где $\tilde{f}_1(x)$ и $\tilde{f}_2(x)$ — произвольные функции из $L_2(0, \sigma)$, т. е. с множеством $W_2(\sigma)$.

Следствие. *Если у двух операций Дирака D, $\tilde{D}$ потенциальные матрицы $\Omega(x)$, $\tilde{\Omega}(x)$ совпадают на интервале $(0, \sigma)$ и $l \geqslant \sigma$, $\tilde{l} \geqslant \sigma$, то для всех функций $\varphi_k(z) \in W_2(\sigma)$ $(k = 1, 2)$ равенства*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi_1(\lambda)}\, \varphi_2(\lambda)\, d\rho_i(\lambda, l) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi_1(\lambda)}\, \varphi_2(\lambda)\, d\tilde{\rho}_j(\lambda, \tilde{l})$$

выполняются при всех $i = 1, 2, 3$ и $j = 1, 2, 3$.

Действительно, из равенства $\Omega(x) = \tilde{\Omega}(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant \sigma)$ следует, что $\omega(z, x) = \tilde{\omega}(z, x)$ $(0 \leqslant x \leqslant \sigma)$, а значит, и $\omega(z, f) = \tilde{\omega}(z, f)$ для всех вектор-функций $f(x) \in \vec{L}_2(0, \infty)$, равных нулю при $x > \sigma$. Отсюда и из равенств Парсеваля (13') следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\omega(\lambda, g)}\, \omega(\lambda, f)\, d\rho_i(\lambda, l) = \int\limits_0^\sigma g^*(x) f(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\tilde{\omega}(\lambda, g)}\, \tilde{\omega}(\lambda, f)\, d\tilde{\rho}_j(\lambda, \tilde{l}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\omega(\lambda, g)}\, \omega(\lambda, f)\, d\tilde{\rho}_j(\lambda, \tilde{l})$$

при всех $g(x), f(x) \in \vec{L}_2(0, \sigma)$ и всех $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$, причем, согласно лемме 1, в качестве $\omega(\lambda, g)$, $\omega(\lambda, f)$ можно взять любые функции из множества $W_2(\sigma)$.

Лемма 2. *В верхней полуплоскости* $(\operatorname{Im} z > 0)$ *компоненты $\psi_k(z, x)$ $(k = 1, 2)$ решения Вейля $\psi(z, x) = \begin{pmatrix} \psi_1(z, x) \\ \psi_2(z, x) \end{pmatrix}$ при всех $x > 0$ представляются в виде*

$$\psi_k(z, x) = \frac{E_{k1}(z, x)}{\varphi(z)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - z}\, d\{\rho(\lambda, \infty) - \rho_k(\lambda, x)\}, \tag{15}$$

где $\varphi(z)$ — произвольная функция из множества $W_2(x)$.

Доказательство. Резольвентами операторов $D_1(l)$, $D_2(l)$, $D(\infty)$ являются операторы $(D_i - zI)^{-1}$, которые на любую вектор-функцию $f(x) \in \vec{L}_2(0, \infty)$, равную нулю при $x > l$, действуют как интегральные операторы $(D_i - zI)^{-1} f(x) = \int\limits_0^\infty R_i(z;\ x,\ y) f(y)\, dy$ $(i = 1, 2, 3)$ с ядрами

$$R_i(z;\ x,\ y) = \begin{cases} \omega(z, x)\, \psi_i^T(z, y) & 0 \leqslant x \leqslant y \\ \psi_i(z, x)\, \omega^T(z, y) & 0 \leqslant y \leqslant x, \end{cases}$$

где

$$\psi_i(z, x) = \mathrm{E}(z, x)\begin{pmatrix} m_i(z) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}_{11}(z, x)\, m_i(z) + \mathrm{E}_{12}(z, x) \\ \mathrm{E}_{21}(z, x)\, m_i(z) + \mathrm{E}_{22}(z, x) \end{pmatrix};$$

$$m_1(z) = -\frac{\mathrm{E}_{12}(z, l)}{\mathrm{E}_{11}(z, l)}, \quad m_2(z) = -\frac{\mathrm{E}_{22}(z, l)}{\mathrm{E}_{21}(z, l)}; \tag{16}$$

$$m_3(z) = m(z) = m^+(z).$$

С другой стороны, из формул разложения (13) следует, что

$$(D_i - zI)^{-1} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(\lambda, x)\, \omega(\lambda, f)}{\lambda - z}\, d\rho_i(\lambda).$$

Поэтому

$$\int_0^{\infty} R_i(z; x, y) f(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(\lambda, x)\, \omega(\lambda, f)}{\lambda - z}\, d\rho_i(\lambda),$$

откуда при $x = 0$ следует, что

$$\int_0^{l} \psi_i^T(z, y) f(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(\lambda, f)}{\lambda - z}\, d\rho_i(\lambda),$$

какова бы ни была вектор-функция $f(x) \in \vec{L}_2(0, \infty)$, равная нулю при $x > l$. Так как

$$\int_0^{l} \psi_i^T(z, y) f(y)\, dy = m_i(z) \int_0^{l} \{\mathrm{E}_{11}(z, y) f_1(y) +$$

$$+ \mathrm{E}_{21}(z, y) f_2(y)\}\, dy + \int_0^{l} \{\mathrm{E}_{12}(z, y) f_1(y) + \mathrm{E}_{22}(z, y) f_2(y)\}\, dy =$$

$$= m_i(z)\, \omega(z, f) + \nu(z, f),$$

где
$$\nu(z, f) = \int_0^{l} \{\mathrm{E}_{12}(z, y) f_1(y) + \mathrm{E}_{22}(z, y) f_2(y)\}\, dy,$$

то
$$(m(z) - m_i(z))\, \omega(z, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(\lambda, f)}{\lambda - z}\, d\{\rho(\lambda, \infty) - \rho_k(\lambda, l)\}$$

и согласно (16), (3), (4)

$$\psi_k(z, l) = \frac{\mathrm{E}_{k1}(z, l)}{\omega(z, f)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(\lambda, f)}{\lambda - z}\, d\{\rho(\lambda, \infty) - \rho_k(\lambda, l)\},$$

причем в силу леммы 1 и произвольности $f(x) \in \vec{L}_2(0, l)$ в качестве $\omega(z, f)$ можно взять произвольную функцию $\varphi \in W_2(l)$. Полагая здесь $l = x$, получаем формулы (15).

Следствие. *Если у операций Дирака D, $\tilde{D}$ потенциальные матрицы $\Omega(x)$, $\tilde{\Omega}(x)$ совпадают на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \sigma$ и $\operatorname{Im} z > 0$, то на отрезке $2\alpha \leqslant x \leqslant \sigma$ соответствующие решения Вейля $\psi(z, x)$, $\tilde{\psi}(z, x)$ удовлетворяют равенствам*

$$\psi(z, x) - \tilde{\psi}(z, x) = i\omega(z, x)\left(\frac{z\alpha}{\sin z\alpha}\right)^2 \int_0^\infty e^{izt} \times$$

$$\times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \lambda\alpha}{\lambda\alpha}\right)^2 e^{-i\lambda t} d\left(\rho(\lambda, \infty) - \tilde{\rho}(\lambda, \infty)\right)\right\} dt, \tag{17}$$

где $\rho(\lambda, \infty)$, $\tilde{\rho}(\lambda, \infty)$ — *спектральные функции операторов;* $D_3 = D_3(\infty)$; $\tilde{D}_3 = \tilde{D}(\infty)$.

Действительно, если $\Omega(x) = \tilde{\Omega}(x)$ при $x \in [0, \sigma]$, то $\mathrm{E}(z, x) = \tilde{\mathrm{E}}(z, x)$, а значит, и $\rho_j(\lambda, x) = \tilde{\rho}_j(\lambda, x)$ $(j = 1, 2)$ при $x \in [0, \sigma]$, откуда согласно (15) следует, что при $x \in (0, \sigma]$

$$\psi_k(z, x) - \tilde{\psi}_k(z, x) = \frac{\mathrm{E}_{k1}(z, x)}{\varphi(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - z} d\left(\rho(\lambda, \infty) - \rho_k(\lambda, x)\right) -$$

$$- \frac{\tilde{\mathrm{E}}_{k1}(z, x)}{\varphi(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - z} d\left(\tilde{\rho}(\lambda, \infty) - \tilde{\rho}_k(\lambda, x)\right) =$$

$$= \frac{\mathrm{E}_{k1}(z, x)}{\varphi(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - z} d\left(\rho(\lambda, \infty) - \tilde{\rho}(\lambda, \infty)\right), \quad (k = 1, 2)$$

где $\varphi(z)$ — произвольная функция из множества $W_2(x)$.

Отсюда следует, что

$$\psi(z, x) - \tilde{\psi}(z, x) = \frac{\omega(z, x)}{\varphi(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - z} d\left(\rho(\lambda, \infty) - \tilde{\rho}(\lambda, \infty)\right). \tag{18}$$

Заметим теперь, что если $\lambda \in (-\infty, \infty)$ и $\operatorname{Im} z > 0$, то

$$(\lambda - z)^{-1} = i \int_0^\infty e^{i(z-\lambda)t} dt$$

и, значит,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - z} d\rho(\lambda, \infty) = i \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^\infty \varphi(\lambda) e^{i(z-\lambda)t} dt \right\} d\rho(\lambda, \infty) =$$

$$= i \int_0^\infty e^{izt} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) e^{-i\lambda t} d\rho(\lambda, \infty) \right\} dt, \tag{19}$$

при условии, что функция $\varphi(\lambda)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)| \, d\rho(\lambda, \infty) < \infty,$$

гарантирующему законность произведенной перемены порядка интегрирования. Это условие заведомо выполняется для функций

$$\varphi(z) = \left(\frac{\sin z\alpha}{z\alpha}\right)^2 \in W_2(2\alpha),$$

откуда согласно (18), (19) следуют доказываемые равенства (17).

4. Рассмотрим операцию Дирака (1) с финитной потенциальной матрицей: $\Omega(x)=0$ при $|x|\geqslant L$. Очевидно, в этом случае вектор-функция $\psi_0(z, x)=e^{izx}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ при $x>L$ удовлетворяет уравнению (2) и принадлежит пространству $\vec{L}_2(0, \infty)$, если $\operatorname{Im} z>0$.

Обозначим через $\Phi(z, x)$ то решение уравнения (2), которое совпадает с $\psi_0(z, x)$ при $L>x$. Ясно, что при $\operatorname{Im} z>0$ решение $\Phi(z, x)$ принадлежит пространству $\vec{L}_2(0, \infty)$, откуда следует, что функция и решения Вейля уравнения (2) выражаются через $\Phi(z, x)$ по формулам (5), (5′). Так как вектор-функция $\Phi(z, x)$ удовлетворяет также уравнению (8) с финитным потенциалом (8′) и при $x \in (L, \infty)$ совпадает с $\psi_0(z, x)$, то она находится из такого интегрального уравнения:

$$\Phi(z, x)=\psi_0(z, x)+\int_x^\infty \frac{\sin z(x-t)}{z} V(t)\, \Phi(z, t)\, dt. \tag{20}$$

Лемма 3. *В замкнутой верхней полуплоскости* $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ *при всех* $x \in [0, \infty)$ *выполняются неравенства*

$$|e^{-izx}(\Phi(z, x)-\psi_0(z, x))|\leqslant \frac{1}{|z|} Q(x) \exp\left\{\frac{Q(x)}{|z|}\right\}; \tag{21}$$

$$\left|e^{-izx}\left\{\Phi(z, x)-\psi_0(z, x)-e^{izx}\int_x^\infty \frac{1-e^{2iz(t-x)}}{2iz} V(t)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} dt\right\}\right|\leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left\{\frac{Q(x)}{|z|}\right\}^2 \exp\left\{\frac{Q(x)}{|z|}\right\}, \tag{21′}$$

где $Q(x)=\int_x^\infty |V(t)|\, dt$.

Доказательство. Из (20) следует, что вектор-функция $y(z, x)=e^{-izx}\Phi(z, x)$ удовлетворяет уравнению

$$y(z, x)=\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}+\int_x^\infty \frac{1-e^{2iz(t-x)}}{2iz} V(t)\, y(z, t)\, dt. \tag{20′}$$

Поэтому в замкнутой верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ выполняется неравенство $|y(z, x)|\leqslant 1+\int_x^\infty |z|^{-1}|V(t)|\,|y(z, t)|\,dt$, показывающее, что функция $|y(z, x)|$ мажорируется решением уравнения $y(x)= =1+\int_x^\infty |z|^{-1}|V(t)|\, y(t)\, dt$, т. е. функцией $y(x)=\exp\left\{|z|^{-1}\int_x^\infty |V(t)|\, dt\right\}$:

$$|y(z, x)|\leqslant \exp\left\{|z|^{-1}\int_x^\infty |V(t)|\, dt\right\}=\exp\{|z|^{-1}Q(x)\}.$$

Из этой оценки, уравнения (20′) и его первой итерации вытекают неравенства

$$\left| y(z,\ x) - \binom{i}{1} \right| \leqslant \int_x^\infty |z|^{-1} |V(t)|\,|y(z,\ t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_x^\infty |z|^{-1} |V(t)| \exp\left\{|z|^{-1} \int_t^\infty |V(\xi)|\,d\xi\right\} dt =$$

$$= \exp\{|z|^{-1} Q(x)\} - 1 \leqslant |z|^{-1} Q(x) \exp\{|z|^{-1} Q(x)\},$$

$$\left| y(z,\ x) - \left[\binom{i}{1} + \int_x^\infty \frac{1 - e^{2iz(t-x)}}{2iz} V(t) \binom{i}{1} dt \right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_x^\infty |z|^{-1} |V(t)| \left\{ \int_t^\infty \frac{|V(\xi)|}{|z|} \exp\left[|z|^{-1} \int_\xi^\infty |V(\eta)|\,d\eta\right] d\xi \right\} dt =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{|z|} \int_x^\infty |V(t)|\,dt\right\} - 1 - \frac{1}{|z|} \int_x^\infty |V(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left\{\frac{Q(x)}{|z|}\right\}^2 \exp\left(\frac{Q(x)}{|z|}\right),$$

эквивалентные доказываемым неравенствам (20), (21′).

Следствие. *В замкнутой верхней полуплоскости* $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ *при* $|z| \geqslant 3Q(0)$ *решение и функция Вейля уравнения* (2) *с финитной потенциальной матрицей* (1′) *удовлетворяют неравенствам*

$$\sup_{0 \leqslant x < \infty} |e^{-izx} (\psi(z,\ x) - \psi_0(z,\ x))| \leqslant 6 |z|^{-1} Q(0); \tag{22}$$

$$\left| m(z) - \left\{ i - \frac{1}{z} \left[q(0) + \int_0^\infty e^{2izt} q'(t) \right] \right\} \right| \leqslant 11 \left\{\frac{Q(0)}{|z|}\right\}^2, \tag{22′}$$

где $q(x) = r(x) + ip(x)$.

Действительно, при рассматриваемых значениях z и всех $x \in [0,\ \infty)$

$$\exp\left\{\frac{Q(x)}{|z|}\right\} \leqslant \exp\left\{\frac{Q(0)}{|z|}\right\} \leqslant e^{\frac{1}{3}} < \frac{3}{2},$$

откуда согласно (21) следует, что

$$|\Phi_1(z,\ 0) - i| \leqslant \frac{3}{2} \frac{Q(0)}{|z|};$$

$$|\Phi_2(z,\ 0) - 1| \leqslant \frac{3}{2} |z|^{-1} Q(0) \leqslant \frac{1}{2}$$

и, значит,

$$|\Phi_2(z,\ 0)| \geqslant \frac{1}{2},\ \left| \frac{1}{\Phi_2(z,\ 0)} - 1 \right| \leqslant 3 \frac{Q(0)}{|z|} \tag{23}$$

$$\left| \frac{\Phi_1(z,0)}{\Phi_2(z,0)} - \{\Phi_1(z,\ 0) + i(1 - \Phi_2(z,\ 0))\} \right| =$$

$$= \left| \frac{(1 - \Phi_2(z,0)) [(\Phi_1(z,0) - i) - i(\Phi_2(z,0) - 1)]}{\Phi_2(z,0)} \right| \leqslant 9 \left(\frac{Q(0)}{|z|}\right)^2.$$

Из этих оценок, формул (5), (5′) и неравенств (21), (21′) следует, что

$$|e^{-izx}(\psi(z, x)-\psi_0(z, x))| =$$

$$= \left|e^{-izx}\left\{\frac{\Phi(z, x)-\psi_0(z, x)}{\Phi_2(z, 0)}+\psi_0(z, x)\left[\frac{1}{\Phi_2(z, 0)}-1\right]\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2|e^{-izx}(\Phi(z, x)-\psi_0(z, x))|+3|z|^{-1}Q(0)\leqslant 6|z|^{-1}Q(0);$$

$$|m(z)-\{i+\Phi_1(z, 0)-i\Phi_2(z, 0)\}|\leqslant 9\left(\frac{Q(0)}{|z|}\right)^2;$$

$$\left|\Phi_1(z, 0)-i\Phi_2(z, 0)-\int_0^\infty\frac{1-e^{2izt}}{2iz}(1-i)V(t)\binom{i}{1}dt\right|\leqslant\left(\frac{Q(0)}{|z|}\right)^2\frac{3}{2}$$

и, значит,

$$\left|m(z)-\left\{i+\int_0^\infty\frac{1-e^{2izt}}{2iz}(1-i)V(t)\binom{i}{1}dt\right\}\right|\leqslant 11\left(\frac{Q(0)}{|z|}\right)^2.$$

Таким образом, неравенство (22) уже доказано, а для завершения доказательства неравенства (22′) остается заметить, что согласно (8′)

$$V(t)=\begin{pmatrix} r'(t) & -p'(t)\\ -p'(t) & -r'(t)\end{pmatrix}+(p^2(t)+r^2(t))\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$(1, -i)V(t)\binom{i}{1}=2i(r'(t)+ip'(t))=2iq'(t),$$

и в силу финитности функции $q(t)$

$$\int_0^\infty\frac{1-e^{2izt}}{2iz}(1, -i)V(t)\binom{i}{1}dt=\int_0^\infty\frac{1-e^{2izt}}{z}q'(t)\,dt=$$

$$=-\frac{1}{z}\left(q(0)+\int_0^\infty e^{2izt}q'(t)\,dt\right).$$

Лемма 4. *Спектральная функция $\rho(\lambda, \infty)$ оператора Дирака с финитной потенциальной матрицей непрерывно дифференцируема на полуосях $(-\infty, -3Q(0))$, $(3Q(0), \infty)$ $\left(Q(0)=\int_0^\infty V(t)\,dt\right)$ и ее производная представима в виде*

$$\rho'(\lambda, \infty)=\frac{1}{\pi}\left\{1-\frac{1}{\lambda}\left[p(0)+\int_0^\infty(\cos 2\lambda t\cdot p'(t)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sin 2\lambda t\cdot r'(t))\,dt\right]+\delta(\lambda)\right\}, \tag{24}$$

где $|\delta(\lambda)|\leqslant 11\lambda^{-2}Q(0)^2$ при $|\lambda|\geqslant 3Q(0)$.

Доказательство. Из интегрального уравнения (20) и финитности матрицы $V(t)$ следует, что компоненты вектор-функции $\Phi(z, x)$ при каждом $x\geqslant 0$ являются целыми функциями от z. Поэтому функция Вейля $m(z)=\Phi_1(z, 0)(\Phi_2(z, 0))^{-1}$ является мероморфной функцией, и согласно (23) ее полюсы не могут лежать на полуосях $(-\infty, -3Q(0))$, $(3Q(0), \infty)$. Таким образом, на этих полуосях функция Вейля непрерывна, а спектральная функция согласно (14") непрерывно дифференцируема, причем $\rho'(\lambda, \infty) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} m(\lambda)$, и согласно (22')

$$\operatorname{Im} m(\lambda) = 1 - \frac{1}{\lambda}\left[p(0) + \int_0^\infty (\cos 2\lambda t \cdot p'(t) + \sin 2\lambda t \cdot r'(t))\, dt\right] + \delta(\lambda),$$

где $|\delta(\lambda)| \leqslant 11\lambda^2 Q(0)^2$.

Следствие. *Остаточный член* $\varepsilon(\lambda)$ *в асимптотической формуле* (14) *для спектральной функции оператора Дирака с финитной потенциальной матрицей при* $|\lambda| \geqslant 3Q(0)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|\varepsilon(\lambda)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi|\lambda|}}\left\{\int_0^\infty |q'(t)|^2\, dt\right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{11}{\pi|\lambda|} Q(0)^2. \tag{25}$$

Действительно, если $\lambda \geqslant 3Q(0)$, то, интегрируя обе части равенства (24) по отрезку $[\lambda, \mu]$ $(\mu > \lambda)$, находим, что

$$\rho(\mu, \infty) - \rho(\lambda, \infty) = \frac{1}{\pi}\{\mu - \lambda - p(0)[\ln\mu - \ln\lambda]\} +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_\lambda^\mu \left\{\frac{1}{\xi}\int_0^\infty [\cos 2\xi t \cdot p'(t) + \sin 2\xi t \cdot r'(t)]\, dt + \delta(\xi)\right\} d\xi.$$

Устремляя здесь μ к $+\infty$ и замечая при этом, что согласно (14)

$$\lim_{\mu \to +\infty} \left\{\rho(\mu, \infty) - \frac{1}{\pi}[\mu - p(0)\ln\mu]\right\} = -\frac{1}{2} r(0),$$

получаем

$$\rho(\lambda, \infty) = \frac{1}{\pi}\{\lambda - p(0)\ln\lambda\} - \frac{1}{2} r(0) + \varepsilon(\lambda),$$

где

$$\varepsilon(\lambda) = -\frac{1}{\pi}\int_\lambda^\infty \left\{\frac{1}{\xi}(c(2\xi, p') + s(2\xi, r')) + \delta(\xi)\right\} d\xi,$$

и через $c(\xi, p')$, $s(\xi, r')$ обозначены косинус- и синус-преобразования Фурье функций $p'(t)$ и $r'(t)$. Далее, согласно лемме 4 $|\delta(\xi)| \leqslant 11\xi^{-2}Q(0)^2$ при $|\xi| > 3Q(0)$ и, значит,

$$\left|\int_\lambda^\infty \delta(\xi)\, d\xi\right| \leqslant \int_\lambda^\infty |\delta(\xi)|\, d\xi \leqslant 11\lambda^{-1} Q(0)^2, \tag{26}$$

а согласно неравенству Коши-Буняковского и равенству Парсеваля для преобразований Фурье

$$\left|\int_\lambda^\infty \frac{1}{\xi}(c(2\xi, p') + s(2\xi, r'))\, d\xi\right| \leqslant \int_\lambda^\infty \frac{1}{\xi}|c(2\xi, p') + s(2\xi, r')|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left\{\int_{\lambda}^{\infty}|c(2\xi, p')+s(2\xi, r')|^2 d\xi\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\left\{\int_{0}^{\infty}(c(2\xi, p')^2+\right.$$

$$\left.+s(2\xi, r')^2)\, d\xi\right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\left\{\int_{0}^{\infty}(p'(t)^2+r'(t)^2)\, dt\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\left\{\int_{0}^{\infty}|q'(t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}},$$

откуда следует, что

$$|\varepsilon(\lambda)| \leqslant \frac{11}{\pi\lambda} Q(0)^2 + \sqrt{\frac{1}{2\pi\lambda}}\left\{\int_{0}^{\infty}|q'(t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Для $\lambda < -3Q(0)$ доказательство проводится так же.

Замечание. Из формулы (24) следует, что при $|\xi| \geqslant 3Q(0)$

$$\left|\rho'(\xi, \infty) - \frac{1}{\pi}\left\{1 - \frac{p(0)}{\xi}\right\}\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{|\xi|}|c(2\xi, p') + s(2\xi, r')| + |\delta(\xi)|\right\},$$

откуда согласно неравенствам (26), (26′) и аналогичным неравенствам для $\lambda < -3Q(0)$ следует, что при $|\lambda| \geqslant 3Q(0)$

$$\int_{|\xi|>|\lambda|}\left|\rho'(\xi, \infty) - \frac{1}{\pi}\left\{1 - \frac{p(0)}{\xi}\right\}\right| d\xi \leqslant \frac{22Q(0)^2}{\pi|\lambda|} +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{2\pi|\lambda|}}\left\{\int_{0}^{\infty}|q'(t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (27)$$

5. Одновременно с данной операцией (1) рассмотрим порождаемое ею семейство операций Дирака $D(\sigma)$ с финитными потенциальными матрицами $\Omega(x, \sigma)$ вида

$$\Omega(x, \sigma) = \begin{cases} \Omega(x) & |x| \leqslant \sigma \\ \Omega(x)\{1 - (|x| - \sigma)^2\}^2 & \sigma \leqslant |x| \leqslant \sigma + 1 \\ 0 & \sigma + 1 \leqslant |x| \end{cases}.$$

Все величины $A(\cdot)$, связанные с операцией $D(\sigma)$, условимся обозначать через $A(\cdot, \sigma)$. Например, $p(x, \sigma)$, $r(x, \sigma)$ — элементы матрицы $\Omega(x, \sigma)$; $q(x, \sigma) = r(x, \sigma) + ip(x, \sigma)$; $\rho(\lambda, \infty, \sigma)$ — спектральная функция оператора $D_3(\sigma)$ и т. д.

Матрицы $\Omega(x, \sigma)$ тоже непрерывно дифференцируемы, причем

$$\Omega'(x, \sigma) =$$

$$= \begin{cases} \Omega'(x) & |x| \leqslant \sigma \\ \Omega'(x)\{1 - (|x| - \sigma)^2\}^2 - 4\Omega(x)\frac{x}{|x|}\{1 - (|x| - \sigma)^2\}(|x| - \sigma) & \sigma \leqslant |x| \leqslant \sigma + 1 \\ 0 & \sigma + 1 \leqslant |x|, \end{cases}$$

откуда следует, что функции $q(x, \sigma)$ и матрицы $V(x, \sigma) = B\Omega'(x, \sigma) + \Omega(x, \sigma)^2$ при $|x| \leqslant \sigma + 1$ удовлетворяют неравенствам

$$|q'(x, \sigma)| \leqslant |q'(x)| + 2|q(x)|;$$
$$|V(x, \sigma)| \leqslant |\Omega'(x)| + 2|\Omega(x)| + |\Omega(x)|^2 \qquad (28)$$

и обращаются в нуль при $|x| \geqslant \sigma + 1$.

Лемма 5. *При всех $\sigma > 0$ выполняются неравенства*

$$\left\{\int_0^\infty |q'(t, \sigma)|^2 \, dt\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant 3\sqrt{\sigma+1}\{|q(0)| + \sqrt{\sigma+1}\cdot\alpha(\sigma+1)\}, \qquad (29)$$

$$Q(0, \sigma) = \int_0^\infty |V(t, \sigma)| \, dt \leqslant 2(\sigma+1)\{1 + |q(0)| + \sqrt{\sigma+1}\cdot\alpha(\sigma+1)\}^2, \qquad (30)$$

где

$$\alpha(x) = \left\{\int_0^x |\Omega'(t)| \, dt\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (x > 0). \qquad (31)$$

Доказательство. Согласно определению абсолютной величины матрицы $|\Omega'(x)| = |p'(x)| + |r'(x)|$, откуда следует, что $|q'(x)|^2 = |p'(x)|^2 + |r'(x)|^2 \leqslant |\Omega'(x)|^2$ и, значит,

$$|q(x)| = \left|q(0) + \int_0^x q'(t) \, dt\right| \leqslant |q(0)| + \int_0^x |q'(t)| \, dt \leqslant$$
$$\leqslant |q(0)| + \sqrt{x}\left\{\int_0^x |q'(t)|^2 \, dt\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant |q(0)| + \sqrt{x}\alpha(x). \qquad (32)$$

Поэтому

$$\left\{\int_0^\infty |q'(t, \sigma)|^2 \, dt\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\int_0^{\sigma+1} |q'(t, \sigma)|^2 \, dt\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant \left\{\int_0^{\sigma+1} (|q'(t)| + 2|q(t)|)^2 \, dt\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \left\{\int_0^{\sigma+1} |q'(t)|^2 \, dt\right\}^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ 2\left\{\int_0^{\sigma+1} |q(t)|^2 \, dt\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \alpha(\sigma+1) + 2\sqrt{\sigma+1}\{|q(0)| +$$
$$+ \sqrt{\sigma+1}\,\alpha(\sigma+1)\} \leqslant 3\sqrt{\sigma+1}\{|q(0)| + \alpha(\sigma+1)\sqrt{\sigma+1}\}$$

и, так как $|\Omega(t)| = |r(t)| + |p(t)| \leqslant 2|q(t)|$, то согласно (28), (32)

$$Q(0, \sigma) = \int_0^\infty |V(t, \sigma)| \, dt = \int_0^{\sigma+1} |V(t, \sigma)| \, dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^{\sigma+1} |\Omega'(t)| \, dt + \int_0^{\sigma+1} \{2|\Omega(t)| + |\Omega(t)|^2\} \, dt \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\sigma+1}\,\alpha(\sigma+1) + 2(\sigma+1)\{\sqrt{2}[|q(0)| +$$
$$+ \sqrt{\sigma+1}\,\alpha(\sigma+1)] + [|q(0)| + \sqrt{\sigma+1}\,\alpha(\sigma+1)]^2\} \leqslant$$
$$\leqslant 2(\sigma+1)\{1 + |q(0)| + \sqrt{\sigma+1}\cdot\alpha(\sigma+1)\}^2.$$

Следствие. *Пусть*

$$L = L(\sigma) = 6(\sigma + 1)\{1 + |q(0)| + \sqrt{\sigma + 1}\,\alpha(\sigma + 1)\}^2 \tag{33}$$

и $0 < \sigma_1 \leqslant \sigma$, $0 < \sigma_2 \leqslant \sigma$. *Тогда*

$$\rho(L, \infty, \sigma_i) - \rho(-L, \infty, \sigma_i) \leqslant 2L, \quad (i = 1, 2) \tag{34}$$

$$\int\limits_{|\lambda| > L} |\rho'(\lambda, \infty, \sigma_2) - \rho'(\lambda, \infty, \sigma_1)|\, d\lambda \leqslant 2L. \tag{35}$$

Действительно, из (30), (33) следует, что $L > 3Q(0, \sigma_i)$ $(i = 1, 2)$. Поэтому остаточные члены $\varepsilon(\pm L, \sigma_i)$ в формуле (14) удовлетворяют неравенству (25), и, значит,

$$\rho(L, \infty, \sigma_i) - \rho(-L, \infty, \sigma_i) = \frac{2}{\pi} L - r(0) + \varepsilon(L, \sigma_i) - \varepsilon(-L, \sigma_i) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} L + |r(0)| + |\varepsilon(L, \sigma_i)| + |\varepsilon(-L, \sigma_i)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} L + |r(0)| + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, L^{-\frac{1}{2}} \left\{\int\limits_0^\infty |q'(t, \sigma_i)|^2\, dt\right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{22}{\pi L} Q(0, \sigma_i)^2.$$

Так как $L^{-1}Q(0, \sigma_i)^2 = L(L^{-1}Q(0, \sigma_i))^2 \leqslant \frac{1}{9} L$, $L \geqslant 6(1 + 2|q(0)|) \geqslant 6(1 + |r(0)|)$ и согласно (29), (33)

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, L^{-\frac{1}{2}} \left\{\int\limits_0^\infty |q'(t, \sigma_i)|^2\, dt\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{6}{\sqrt{2\pi \cdot 6}} < 1,$$

то из последнего неравенства следует

$$\rho(L, \infty, \sigma_i) - \rho(-L, \infty, \sigma_i) \leqslant \frac{2}{\pi} L + \frac{22}{9\pi} L + |r(0)| + 1 \leqslant$$

$$\leqslant L\left\{\frac{2}{\pi} + \frac{22}{9\pi} + \frac{1}{6}\right\} < 2L.$$

Далее, воспользовавшись неравенствами (27), находим, что

$$\int\limits_{|\lambda| > L} |\rho'(\lambda, \infty, \sigma_2) - \rho'(\lambda, \infty, \sigma_1)|\, d\lambda \leqslant \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{|\lambda| > L} \Big|\rho'(\lambda, \infty, \sigma_i) -$$

$$- \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{1}{\lambda} p(0)\right)\Big|\, d\lambda \leqslant \sum_{i=1}^{2} \left\{\frac{22}{\pi} \frac{Q(0, \sigma_i)}{L} +\right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{L} \left\{\int\limits_0^\infty |q'(t, \sigma_i)|^2\, dt\right\}^{\frac{1}{2}}\right\} \leqslant 2L\left\{\frac{22}{9\pi} + \frac{1}{6}\right\} < 2L.$$

Из совпадения потенциальных матриц операторов D и $D(\sigma)$ на сегменте $[-\sigma, \sigma]$ и формулы (17) следует, что на отрезке $2\alpha \leqslant x \leqslant \sigma_0$ выполняется равенство

$$\psi(z, x) - \psi(z, x, \sigma_0) = i\omega(z, x)\left(\frac{z\alpha}{\sin z\alpha}\right)^2 \int\limits_0^\infty e^{izt} F(t, \alpha, \sigma_0)\, dt, \tag{36}$$

где $\psi(z, x, \sigma_0)$ — решение Вейля уравнения $D(\sigma_0)\psi = z\psi$, а

$$F(t, \alpha, \sigma_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \lambda\alpha}{\lambda\alpha}\right)^2 e^{-i\lambda t}\, d\{\rho(\lambda, \infty) - \rho(\lambda, \infty, \sigma_0)\}. \tag{37}$$

Так как

$$\left(\frac{\sin \lambda\alpha}{\lambda\alpha}\right)^2 e^{-i\lambda t} = \overline{\left(\frac{\sin \lambda\alpha}{\lambda\alpha}\, e^{i\frac{\lambda t}{2}}\right)} \left(\frac{\sin \lambda\alpha}{\lambda\alpha}\, e^{-\frac{i\lambda t}{2}}\right)$$

и

$$\frac{\sin \lambda\alpha}{\lambda\alpha}\, e^{\pm i\frac{\lambda t}{2}} \in W_2\left(\frac{|t|}{2} + \alpha\right),$$

то согласно следствию леммы 1 при $|t| \leqslant 2(\sigma - \alpha)$ выполняется неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \lambda\alpha}{\lambda\alpha}\right)^2 e^{-i\lambda t}\, d\rho(\lambda, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \lambda\alpha}{\lambda\alpha}\right)^2 e^{-i\lambda t}\, d\rho(\lambda, \infty, \sigma).$$

Отсюда и из определения (37) функции $F(t, \alpha, \sigma_0)$ следует, что, во-первых, $F(t, \alpha, \sigma_0) = 0$ при $|t| \leqslant 2(\sigma_0 - \alpha)$ и, во-вторых, при $|t| < < 2(\sigma - \alpha)$ в формуле (37) вместо $\rho(\lambda, \infty)$ можно взять $\rho(\lambda, \infty, \sigma)$, т. е.

$$F(t, \alpha, \sigma_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \lambda\alpha}{\lambda\alpha}\right)^2 e^{-i\lambda t}\, d\{\rho(\lambda, \infty, \sigma) - \rho(\lambda, \infty, \sigma_0)\}$$

при $t \in [-2(\sigma - \alpha), 2(\sigma - \alpha)]$. Полагая $\sigma > \sigma_0$ и определяя $L = L(\sigma)$ по формуле (33), находим, что при $|t| \leqslant 2(\sigma - \alpha)$

$$F(t, \alpha, \sigma_0) = \int_{-L}^{L} \left(\frac{\sin \lambda\alpha}{\lambda\alpha}\right)^2 e^{-i\lambda t}\, d\{\rho(\lambda, \infty, \sigma) - \rho(\lambda, \infty, \sigma_0)\} +$$

$$+ \int_{|\lambda| > L} \left(\frac{\sin \lambda\alpha}{\lambda\alpha}\right)^2 e^{-i\lambda t} \{\rho'(\lambda, \infty, \sigma) - \rho'(\lambda, \infty, \sigma_0)\}\, d\lambda,$$

откуда в силу неравенств (34), (35) следует, что при $\alpha \to 0$ функции $F(t, \alpha, \sigma_0)$ сходятся к $F(t, 0, \sigma_0)$ равномерно на сегменте $[-\sigma, \sigma]$, причем их модули удовлетворяют неравенствам $|F(t, \alpha, \sigma_0)| \leqslant 2L + + 2L \leqslant 4L(\sigma)$ ($|t| \leqslant 2(\sigma - \alpha)$). Так как $\sigma > \sigma_0$ произвольно, то предел

$$\lim_{\alpha \to 0} F(t, \alpha, \sigma_0) = F(t, 0, \sigma_0) \tag{38}$$

существует при всех $t \in (-\infty, \infty)$, и сходимость к $F(t, 0, \sigma_0)$ равномерна на каждом компакте вещественной оси. Кроме того, полагая в неравенстве $\sigma = 0{,}5|t| + \sigma_0$ и замечая при этом, что $\sigma_0 > 2\alpha$, получаем верную при всех $t \in (-\infty, \infty)$ и не зависящую от α оценку

$$|F(t, \alpha, \sigma_0)| \leqslant L(0{,}5|t| + \sigma_0). \tag{39}$$

Наконец, так как $F(t, \alpha, \sigma_0) = 0$ при $|t| \leqslant 2(\sigma_0 - \alpha)$, то

$$F(t, 0, \sigma_0) = 0 \quad (|t| < 2\sigma_0). \tag{40}$$

Лемма 6. *Если матрица* $\Omega(x)$ *удовлетворяет неравенству* (6) *и* $\operatorname{Im} z > C_2$, *то в правой части формулы* (36) *можно сделать предельный переход по* $\alpha \to 0$, *т. е.*

$$\psi(z, x) - \psi(z, x, \sigma_0) = i\omega(z, x) \int_{2\sigma_0}^{\infty} e^{izt} F(t, 0, \sigma_0)\, dt, \tag{41}$$

где $0 \leqslant x \leqslant \sigma_0$ *и*

$$|F(t, 0, \sigma_0)| \leqslant C(\sigma_0)(|t| + 2\sigma_0)\, e^{C_2|t|}. \tag{41'}$$

Доказательство. Из определения функций $\alpha(\sigma)$, $L(\sigma)$ и неравенства (6) следует, что $\sqrt{\sigma} \cdot \alpha(\sigma) \leqslant e^{C_1 + C_2\sigma}$, $L(\sigma) \leqslant 6(2 + |q(0)|)^2 \times (\sigma + 1)\, e^{2(C_1 + C_2\sigma)}$, откуда согласно (39) вытекает оценка

$$|F(t, \alpha, \sigma_0)| \leqslant C(\sigma_0)(|t| + 2\sigma_0)\, e^{C_2|t|} \tag{42}$$

$(C(\sigma_0) = 15(2 + |q(0)|)^2 e^{2C_1 + C_2\sigma_0})$, позволяющая при $\operatorname{Im} z > C_2$ сделать предельный переход по $\alpha \to 0$ под знаком интеграла в формуле (36). Поэтому

$$\lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{z\alpha}{\sin z\alpha}\right)^2 \int_0^{\infty} e^{izt} F(t, \alpha, \sigma_0)\, dt = \lim_{\alpha \to 0} \int_0^{\infty} e^{izt} F(t, \alpha, \sigma_1)\, dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{izt} F(t, 0, \sigma_1)\, dt = \int_{2\sigma_0}^{\infty} e^{izt} F(t, 0, \sigma_1)\, dt,$$

так как согласно (40) $F(t, 0, \sigma_0) = 0$ при $|t| < 2\sigma_0$.

Неравенство (41′) вытекает из допредельных неравенств (42).

Перейдем теперь к доказательству равенства (12).

Пусть выполнено неравенство (6), $\operatorname{Im} z > C_2$ и $|z| > 3Q(0, \sigma_0)$. Тогда согласно (22), (41) при всех $x \in [0, \sigma_0]$ выполняется неравенство

$$|e^{-izx}(\psi(z, x) - \psi_0(z, x))| \leqslant |e^{-izx}(\psi(z, x, \sigma_0) - \psi_0(z, x))| +$$
$$+ |e^{-izx}(\psi(z, x) - \psi(z, x, \sigma_0))| \leqslant 6|z|^{-1} Q(0, \sigma_0) +$$
$$+ e^{\operatorname{Im} zx} |\omega(z, x)| \left| \int_{2\sigma_0}^{\infty} e^{izt} F(t, 0, \sigma_0)\, dt \right|.$$

Далее, так как $Q(0, \sigma_0) \geqslant \int_0^{\sigma_0} |V(t)|\, dt = P(\sigma_0)$, то согласно (9), (10) при $x \in [0, \sigma_0]$

$$|E(z, x)| \leqslant 4(1 + |z|^{-1} |\Omega(0)|)\, e^{\operatorname{Im} zx}$$

и, тем более,

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant \sigma_0} e^{|\operatorname{Im} zx|} |\omega(z, x)| \leqslant 4(1 + |z|^{-1} |\Omega(0)|)\, e^{2\operatorname{Im} z\sigma_0},$$

а согласно (41′)

$$\left| \int_{2\sigma_0}^{\infty} e^{izt} F(t, 0, \sigma_0)\, dt \right| \leqslant C(\sigma_0) \int_{2\sigma_0}^{\infty} e^{-\operatorname{Im} zt} (t + 2\sigma_0)\, e^{C_2 t}\, dt =$$
$$= C(\sigma_0)(4\sigma_0 + (\operatorname{Im} z - C_2)^{-1})\, e^{-2\sigma_0(\operatorname{Im} z - C_2)} (\operatorname{Im} z - C_2)^{-1}.$$

Сопоставляя полученные неравенства, находим, что

$$\sup_{0<x<\sigma_0} |e^{-izx}(\psi(z, x) - \psi_0(z, x))| \leqslant 6|z|^{-1} Q(0, \sigma_0) +$$
$$+ 4C(\sigma_0)(1 + |z|^{-1}|\Omega(0)|)(4\sigma_0 + (\operatorname{Im} z - C_2)^{-1}) e^{2\sigma_0 C_2} (\operatorname{Im} z - C_2)^{-1}$$

и, значит,

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \sup_{\operatorname{Im} z \geqslant \Lambda} (\sup_{0<x<\sigma_0} |e^{-izx}(\psi(z, x) - \psi_0(z, x))|) = 0.$$

Так как здесь $\sigma_0 > 0$ произвольно, то тем самым формула (12), а вместе с ней и основная теорема доказаны.

Список литературы: 1. *Марченко В. А.* Асимптотика по спектральному параметру решений Вейля уравнений Штурма — Лиувилля // Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1989. 170, № 17. С. 184—206. 2. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. М., 1970. 671 с. 3. *Марченко В. А.* Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. К., 1977. 331 с.

Поступила в редколлегию 14.12.90

УДК 517.5

В. Н. ЛОГВИНЕНКО

ТЕОРЕМА О СЕПАРАТНОЙ АНАЛИТИЧНОСТИ И ТЕОРЕМА ОБ «ОСТРИЕ КЛИНА»

Введение. С. Н. Бернштейну принадлежит замечательная теорема о сепаратно аналитических функциях, опубликованная им в 1911 г. [1, с. 96]. Чтобы сформулировать эту теорему, введем следующие обозначения: $I(h)$ есть интервал $(-h, h)$; $E(h, R)$, $R > 1$, — это множество точек комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$, лежащих внутри эллипса с фокусами $\pm h$ и полусуммой осей hR.

Теорема С. Н. Бернштейна *(для случая двух комплексных переменных). Пусть функция $f(x, y)$ определена на прямоугольнике $I(h) \times I(k)$ и пусть $x \mapsto f(x, y)$, $\forall y \in I(k)$, имеет голоморфное продолжение с $I(h)$ на $E(h, R)$, а $y \mapsto f(x, y)$, $\forall x \in I(h)$, имеет голоморфное продолжение с $I(k)$ на $E(k, S)$, $S > 1$. Пусть эти сепаратные продолжения равномерно ограничены.*

В таком случае при любом $\theta \in (0, 1)$: 1) f имеет голоморфное продолжение с прямоугольника $I(h) \times I(k)$ на $E(h, R^{\theta}) \times E(k, S^{1-\theta})$; 2) это продолжение в области $E(h, \lambda R^{\theta}) \times E(k, \mu S^{1-\theta})$ ограничено константой $4M/\{(1-\lambda)(1-\mu)\}$, где M — общая верхняя грань упомянутых сепаратных продолжений, а числа λ, μ удовлетворяют неравенствам: $R^{-\theta} < \lambda < 1$, $S^{\theta-1} < \mu < 1$.

Эта теорема неоднократно обобщалась (Мальгранж — Цернер [2], Сичак [3], Н. И. Ахиезер — Л. И. Ронкин [4]) и усиливалась [3, 4]. В частности, оказалось, что первое из ее заключений справедливо и без предположения о равномерной ограниченности сепаратных продолжений. В настоящей работе получен несколько иной результат о сепаратной аналитичности, восходящий к теореме Форелли [5] о голоморфности в некотором шаре пространства C^n функции, все срез-функции которой, отвечающие комплексным прямым, проходящим через центр шара, голоморфны в соответствующих сечениях. Несколько огрубляя, можно сказать, что наш результат о сепаратной аналитичности так относится к теореме Форелли, как теорема С. Н. Бернштейна — к классической теореме Гартогса.

В работе [4] Н. И. Ахиезера — Л. И. Ронкина указан некий путь, ведущий от теорем типа теоремы С. Н. Бернштейна к кругу идей, порожденных известной теоремой Н. Н. Боголюбова об острие клина [6]. Теоремами об острие клина называют следующие предложения. Пусть функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ голоморфны в областях $G_1 \subset C^n$, $G_2 \subset C^n$, причем $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. Если эти функции совпадают (в том или ином смысле) на n-мерном множестве $\Omega \subset \bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 \subset R^n$, то они являются сужениями на области G_1, G_2 некоторой функции $f(z)$, голоморфной в области $G \supset \Omega$. В этом смысле настоящая работа является продолжением работы Н. И. Ахиезера — Л. И. Ронкина: доказанная в § 1 теорема о сепаратной аналитичности и доказанная в § 2 теорема об острие клина получены единым методом, основанным на одном результате Б. Я. Левина, который он сообщил в докладе на Всесоюзной конференции по комплексному анализу (Харьков, 1971 г.) (Б. Я. Левин опубликовал свое доказательство лишь для случая $n = 1$ [7]; наиболее общая теорема, относящаяся к этому кругу вопросов, содержится в совместной работе Б. Я. Левина и автора [8]). Чтобы сформулировать этот результат, нам понадобятся следующие определения. Множество $E \subset R^n$ называется относительно плотным, если оно измеримо, и существуют такие положительные постоянные L и δ, что лебегова мера пересечения E с кубом $K(x, L) = \{y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n : \max\{|x_j - y_j| : j = \overline{1, n}\} \leqslant L\}$ не меньше, чем δ; L и δ называются при этом характеристиками E. Целая в C^n функция $f(z)$ имеет экспоненциальный тип (конечную степень) не выше σ, если величина $\sup\{|f(z)| \times \exp\{-A(|z_1| + \dots + |z_n|)\} : z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n\}$ конечна при любом $A > \sigma$; класс таких функций обозначается через $[1, \sigma]_n$.

Теорема Б. Я. Левина. *Каждому натуральному n отвечает конечная величина C_n со следующим свойством. Для любого относительно плотного множества $E \subset R^n$ с характеристиками L и δ, любого $\sigma \in (0, \infty)$ и любой функции $f \in [1, \sigma]_n$ справедливо неравенство*

$$\sup\{|f(x)| : x \in R^n\} \leqslant \exp\{C_n \sigma L^{n+1}/\delta\} \sup\{|f(x)| : x \in E\} \quad (1).$$

§ 1. Теорема о сепаратной аналитичности. Обозначим через B прямое произведение шаров $B_j = \{x_j = (x_{j,1}, \dots, x_{j,n_j}) \in R^{n_j} : x_{j,1}^2 + \dots + x_{j,n_j}^2 < 1\}$, $j = \overline{1, p}$, а через S — остов B. Таким образом, $S = S_1 \times \dots \times S_p$, где $S_j = S^{n_j - 1} = \partial B_j$, $j = \overline{1, p}$. Пусть O обозначает прямое произведение начал координат пространств R^{n_j}.

Теорема 1. *Пусть функция $f: B \to C$ такова, что: а) $f \in C^\infty(O)$ (т. е. для любого $k \in N$ найдется такая окрестность U_k точки O, что $f \in C^k(U_k)$); б) для любого вектора $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_p)$ функция $f(\lambda_1\omega_1, \dots, \lambda_p\omega_p)$ голоморфно продолжается с куба $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in R^p : -1 < \lambda_j < 1, j = \overline{1, p}\}$ на полидиск $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in C^p : |\lambda_j| < 1$.*

$j=\overline{1, p}\}$. *Тогда f голоморфно продолжается с $\boldsymbol{B}$ на область $\boldsymbol{D} \subset \subset \boldsymbol{C}^n$, $n=n_1+\cdots+n_p$, являющуюся прямым произведением p областей*

$$D_j=\{x_j+iy_j \in \boldsymbol{C}^{n_j}: \int_{R^{n_j}} P_j(x_j-t_j, (|y_{j,1}|, \ldots, |y_{j,n_j}|)) \ln\|t_j\| dt_j<0\},$$

где $P_j(x_j, y_j)$ — произведение n_j ядер Пуассона для полуплоскостей $\boldsymbol{C}_{+,k}=\{x_{j,k}+iy_{j,k} \in \boldsymbol{C}: y_{j,k}>0\}$, $k=\overline{1, n_j}$, а $\|z_j\|^2=|z_{j,1}|^2+\cdots \cdots+|z_{j,n_j}|^2$.

Предваряя доказательство, заметим, что частный случай теоремы 1, когда $p=1$, был известен ранее. В менее точной форме (без указания вида области $\boldsymbol{D}$, куда гарантировано голоморфное продолжение всех функций, удовлетворяющих условиям теоремы) он был получен и докладывался автором в 1983 г. на конференции по комплексному анализу в Черноголовке и на семинарах по комплексному анализу и банаховым алгебрам при Московском университете. В точной форме этот частный случай был доказан Вигеринком и Коревааром [9]; при $n=2$ ими указана область максимальной голоморфной продолжаемости.

Доказательство. Достаточно показать, что f голоморфно продолжается на любую область $\boldsymbol{D}_\varepsilon$, $\varepsilon>0$, являющуюся прямым произведением p областей:

$$D_{j,\varepsilon}=\Big\{x_j+iy_j \in \boldsymbol{C}^{n_j}: \int_{R^{n_j}} P_j(x_j-t_j, (|y_{j,1}|, \ldots, |y_{j,n_j}|)) \ln\|t_j\| dt_j<-\varepsilon\Big\}.$$

Условие а) позволяет сопоставить функции $f(x)$, $x=(x_1, \ldots, x_p)$, формальное разложение $\Sigma_{k\in(Z_+)^p} A_k(x)$, где $\boldsymbol{Z}_+=\{0, 1, \ldots\}$, а $A_k(x)= =\Pi_{j=1}^p\left(x_{j,1}\frac{\partial}{\partial x_{j,1}}+\cdots+x_{j,n_j}\frac{\partial}{\partial x_{j,n_j}}\right)^{k_j} f(\mathbf{0})/(k_1! \ldots k_p!)$ — многочлены, степень однородности которых по каждой из групп переменных x_j равна k_j. Из условия б) следует, что при любом $\omega \in \boldsymbol{S}$ в полидиске $\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \boldsymbol{C}^p: |\lambda_j|<1, j=\overline{1, p}\}$ справедливо неформальное разложение $f(\lambda_1\omega_1, \ldots, \lambda_p\omega_p)=\Sigma_{k\in(Z_+)^p} A_k(\omega) \lambda_1^{k_1} \ldots \lambda_p^{k_p}$. Так как теорему достаточно доказать для функций $f(\rho x)$, $0<\rho<1$, то можно считать, что при любом $\omega \in \boldsymbol{S}$ ряд $\Sigma_k |A_k(\omega)|$ сходится. Значит, для любого $\eta>0$ найдется такая конечная величина M_η и такое измеримое множество $e_\eta \subset \boldsymbol{S}$, что лебегова мера e_η меньше η, а при любом $\omega \in \boldsymbol{S} \setminus e_\eta$ выполняется оценка $\Sigma_k |A_k(\omega)| \leqslant M_\eta$.

Отображение $\tau=(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, где τ_j, $j=\overline{1, p}$, — стандартная параметризация сферы S_j, продолженная на куб $\{(\theta_{j,1}, \ldots, \theta_{j,n_j}^{-1}): -\pi \leqslant \theta_{j,k}<\pi, k=\overline{1, n_j-1}\}$, осуществляет конечнократное покрытие $\boldsymbol{S}$ и переводит $A_k(\omega)$, $k \in (\boldsymbol{Z}_+)^p$, в тригонометрические многочлены $Q_k(\exp\{i\theta_{1,1}\}, \exp\{-i\theta_{1,1}\}, \ldots, \exp\{-i\theta_{p,n_p}^{-1}\})$ степени не выше $|k|=k_1+\cdots+k_p$ по совокупности переменных. Для каждого мультииндекса k функция

$w) = Q_k(\exp\{iw_{1,1}\}, \exp\{-iw_{1,1}\}, \ldots, \exp\{-iw_{p,n_p-1}\}) \in [1, |k||_{n-p}$ ограничена по модулю величиной M_η на относительно плотном жестве $E = \mathbf{R}^{n-p} \setminus (U_{k \in Z^{n-p}}(2\pi k + \tau^{-1}(e_\eta)))$. При этом для любого >0 можно подобрать настолько малое $\eta > 0$, что характеристики жества E будут удовлетворять неравенствам $L < C_{n-p}^{-1}\varepsilon/4$, $\delta > \varepsilon^{n-p}/2$, где C_{n-p} — коэффициент в показателе экспоненты, стоящей авой части (1), который зависит только от размерности. По теореме Левина, $\max\{|G_k(t)| : t \in \mathbf{R}^{n-p}\} \leqslant M_\eta \exp\{|k|\varepsilon/2\}$. Таким образом, любого мультииндекса k и любого $\omega \in \mathbf{S}$ справедлива оценка $(\omega)| \leqslant M_\eta \exp\{|k|\varepsilon/2\}$. Пусть $z = (z_1, \ldots, z_p) \in \mathbf{D}_\varepsilon$. Используя льтиоднородность» $A_k(x)$ и эту оценку, получаем

$$\ln|A_k(z)| \leqslant \int_{R^n} \{\Pi_{j=1}^p P_j(x_j - t_j, (|y_{j,1}|, \ldots, |y_{j,n_j}|))\} \ln|A_k(t)|\, dt =$$

$$= \int_{R^n} \{\Pi_{j=1}^p P_j(x_j - t_j, (|y_{j,1}|, \ldots, |y_{j,n_j}|))\} \ln|A_k(t_1/\|t_1\|, \ldots$$

$$\ldots, t_p/\|t_p\|)\, dt + \Sigma_{j=1}^p k_j \int_{R^{n_j}} P_j(x_j - t_j, (|y_{j,1}|, \ldots, |y_{j,n_j}|)) \times$$

$$\times \ln\|t_j\|\, dt_j \leqslant \ln M_\eta + |k|\varepsilon/2 - |k|\varepsilon.$$

ит, $\Sigma_k A_k(z)$ сходится на $\overline{\mathbf{D}}_\varepsilon$ абсолютно и равномерно. Его сумма голоморфна в $\mathbf{D}_\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Следовательно, она голона в $\mathbf{D}$. Сужение F на $\mathbf{B}$ совпадает с f. Теорема доказана.

амечание 1. Как показано в [10, с. 70], условие а) теоремы 1 ьзя ослабить, заменив его требованием конечной гладкости.

Представляется целесообразным выделить в отдельное утвержде следующий результат, полученный в ходе доказательства теоремы 1 редставляющий, на наш взгляд, самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Пусть ряд* $\Sigma_{k \in (\mathbf{Z}_+)^p} A_k(x)$, *где* $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $x_j \in \mathbf{R}^{n_j}$, $j = \overline{1, p}$, *а* $A_k(x)$ — *многочлены степени однородности* k_j *по группе ременных* x_j, $j = \overline{1, p}$, *сходится абсолютно на остове* $\mathbf{S}$ *полиа* $\mathbf{B}$. *Тогда этот ряд сходится абсолютно и равномерно на мыкании любого внутреннего полишара* $\mathbf{B}_r = \{x \in \mathbf{B} : \|x_j\| < r_j < 1$ $= \overline{1, p}\}$, *причем для любого вектора* $r' \in \mathbf{R}^p$, *у которого* $r'_j \in (r_j, 1)$, $= \overline{1, p}$, *найдется такая конечная величина* $M = M(r, r')$, *что и каждом* $k = (k_1, \ldots, k_p) \in (\mathbf{Z}_+)^p$ *выполняется неравенство* $\max\{|A_k(x)| : x \in \mathbf{B}_r\} \leqslant M r_1'^{k_1} \ldots r_p'^{k_p}$.

Из теоремы 1 и многомерного аналога (который доказывается же, как сама теорема) теоремы Принсгейма (см. [10]), связываюй аналитичность функции на отрезке с ростом sup-норм ее послевательных производных, вытекает такое

Следствие 1. *Пусть функция* f, *заданная на замкнутом единном шаре* $\overline{\mathbf{B}}(0, 1) = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$, *такова, что: а)* $f \in C^\infty(0)$; *для любой точки* $\omega \in S = \partial\overline{B}(0, 1)$ *функция* $f(\lambda\omega)$ *принадлежит переменной* λ *классу* $C^\infty[-1, 1]$, *причем*

$$\sup\left\{\sqrt[j]{\max\left\{\left|\frac{\partial^j f(\lambda\omega)}{\partial\lambda^j}\right| : -1 \leqslant \lambda \leqslant 1\right\}\Big/ j!} : j \in \boldsymbol{N}\right\} \leqslant C,$$

где конечная величина C не зависит от ω. Тогда найдется такое число $r > 0$, что $f \in C^\infty(rB(0, 1))$ и

$$\sup\left\{\sqrt[k_1+\dots+k_n]{\max\left\{\left|\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}\right| : x \in r\overline{B}(0, 1)\right\}\Big/(k_1!\dots k_n!)} : k \in (\boldsymbol{Z}_+)^n \setminus \{0\}\right\} < \infty.$$

§ 2. Теорема об острие клина.

Справедлив следующий результат, являющийся «гибридом» теоремы о сепаратной аналитичности и теоремы об острие клина.

Теорема 3. *Пусть e — симметричное относительно $\mathbf{0}$ подмножество S положительной лебеговой меры, а функция f, заданная в объединении некоторой окрестности $\mathbf{0}$ и пересечения конической оболочки e с $\boldsymbol{B}$, лежит в $C^\infty(\mathbf{0})$. Пусть, кроме того, при любом $\omega \in e$ функция $f(\lambda_1\omega_1, \dots, \lambda_p\omega_p)$ голоморфно продолжается с куба $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \boldsymbol{R}^p : -1 < \lambda_j < 1,\ j = \overline{1, p}\}$ на полидиск $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \boldsymbol{C}^p : |\lambda_j| < 1,\ j = \overline{1, p}\}$. Тогда найдутся такое число $\varepsilon = \varepsilon_e < \infty$ и такая голоморфная в $\boldsymbol{D}_\varepsilon$ функция $F(z)$, что сужение F на пересечение конической оболочки e с $\boldsymbol{D}_\varepsilon$ совпадает с f.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, сопоставим функции f формальное разложение по «мультиоднородным» многочленам $A_k(x)$: $f(x) \sim \sum_{k \in (Z_+)^p} A_k(x)$. При $\omega \in e$ это разложение перестает быть формальным: для любого вектора $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ из куба $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \boldsymbol{R}^p : -1 < \lambda_j < 1,\ j = \overline{1, p}\}$ имеет место равенство $f(\lambda_1\omega_1, \dots, \lambda_p\omega_p) = \sum_{k \in (Z_+)^p} A_k(\omega)\lambda_1^{k_1} \dots \lambda_p^{k_p}$, причем ряд в правой части сходится для всех λ из полидиска $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \boldsymbol{C}^p : |\lambda_j| < 1,\ j = \overline{1, p}\}$. Не ограничивая общности, можно считать, что при любом $\omega \in e$ ряд $\sum_k |A_k(\omega)|$ сходится. Значит, найдутся такая конечная величина M и такое измеримое множество $\tilde{e} \subset e$, что, во-первых, лебегова мера множества $\tilde{e}$ больше половины меры e, а, во-вторых, при любом $\omega \in \tilde{e}$ справедлива оценка $\sum_{k \in (Z_+)^p} |A_k(\omega)| \leqslant M$. Переходя, как при доказательстве теоремы 1, от многочленов $A_k(x)$ к целым функциям $G_k(\omega)$ и используя теорему Б. Я. Левина, получаем, что при любом $k \in (Z_+)^p$ справедлива оценка $\max\{|A_k(\omega)| : \omega \in \boldsymbol{S}\} \leqslant M \exp\{\gamma|k|\}$, где конечная величина $\gamma = \gamma_{\tilde{e}}$ не зависит от k. Отсюда вытекает, что при $\varepsilon > \gamma$ ряд $\sum_k A_k(z)$ сходится в области $\boldsymbol{D}_\varepsilon$ равномерно и абсолютно. Его сумма $F(z)$ — голоморфная в $\boldsymbol{D}_\varepsilon$ функция, которая совпадает с f на пересечении конической оболочки e с $\boldsymbol{D}_\varepsilon$.

Список литературы: 1. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений: в 4-х т. М., 1952. 582 с. 2. *Zerner M.* Mimeographed notes of a seminar given in Marseilles. Marseilles, 1961. 136 p. 3. *Siciak J.* Separately analytic functions and envelopes of holomorphy of some lower-dimensional subsets in C^n//Seminar Avanissian. 1967—1968. P. 92—116. 4. *Ахиезер Н. И., Ронкин Л. И.* О сепаратно аналитиких функциях многих переменных и теоремах об «острие клина»//Успехи мат. наук. 1973. 28, № 3(171). С. 27—42. 5. *Forelli F.* Pluriharmonicity in terms of harmonic slices//Math. Scand. 1977. 41. P. 358—364. 6. *Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К.* Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., 1958. 203 с. 7. *Левин Б. Я.* Мажоранты в классах субгармонических функций и их приложения. 1. ФТИНТ АН УССР. Х., 1984. 52 с. Препринт № 18—84. 8. *Левин Б. Я., Логвиненко В. Н.* О классах субгармонических функций, ограниченных на некоторых подмножествах R^n//Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1989. 170. С. 157—175. 9. *Wiegerink J.* A lemma on mixed derivatives and a theorem on holomorphic extention/J. Wiegerink. Entire functions of Paley-Wiener type in C^n, Radon transform and problems of holomorphic extention. Amsterdam, 1985. P. 71—87. 10. *Мандельбройт С.* Квазианалитические классы функций. М.; Л., 1937. 107 с.

Поступила в редколлегию 28.11.90

УДК 517.956

Я. И. ЖИТОМИРСКИЙ

О ПОТЕНЦИАЛАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Хорошо известно, что теория потенциалов, развитая для уравнений эллиптического и параболического типов, позволяет сводить краевые задачи к решению интегральных уравнений.

Цель данной заметки — показать возможность построения аналога потенциалов для уравнений, не относящихся к названным типам. В заметке рассмотрен модельный представитель эволюционных корректных по И. Г. Петровскому уравнений — уравнение Шредингера

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = i\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Пусть ищется решение уравнения (1) в области $\{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T < \infty\}$, удовлетворяющее краевым и начальному условиям:

$$u(x,0) = u_0(x); \tag{2}$$

$$u(0,t) = I_0(t), \qquad u(1,t) = I_1(t);$$
$$u_0(0) = I_0(0), \qquad u_0(1) = I_0(0). \tag{3}$$

Считая сначала $u_0(x) \equiv 0$, $I_0(0) = I_1(0) = 0$, будем искать решение задачи (1) — (2) — (3) в виде

$$u(x,t) = \int_0^t \mu(\tau)\frac{\exp\left\{\frac{ix^2}{4(t-\tau)}\right\}}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau + \int_0^t \nu(\tau)\frac{\exp\left\{\frac{i(x-1)^2}{4(t-\tau)}\right\}}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau \equiv$$
$$\equiv U(x,t) + V(x,t), \tag{4}$$

где $\mu(\tau)$ и $\nu(\tau)$ — искомые плотности «потенциалов» $U(x, t)$ и $V(x, t)$. Условия (3) приводят тогда к системе интегральных уравнений для определения $\mu(\tau)$ и $\nu(\tau)$:

$$\int_0^t \mu(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \int_0^t \nu(\tau)\frac{\exp\left\{\frac{l}{4(t-\tau)}\right\}}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau = I_0(t), \qquad (5)$$

$$\int_0^t \mu(\tau)\exp\left\{\frac{l}{4(t-\tau)}\right\}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \int_0^t \nu(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = I_1(t).$$

Введя искомую вектор-функцию $\Pi(t) = \{\mu(t), \nu(t)\}$ и обозначив $I(t) = \{I_0(t), I_1(t)\}$, перепишем систему (5) в виде

$$\Pi(t) \ast G(t) = I(t), \qquad (6)$$

где

$$G(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{t}} & \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left\{\frac{l}{4t}\right\} \\ \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left\{\frac{l}{4t}\right\} & \frac{1}{\sqrt{t}} \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

а символом $f \ast g$ мы обозначим, как обычно,

$$f \ast g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau.$$

Все рассматриваемые функции (как искомые, так и элементы матрицы (7) и вектора $I(t)$) считаем продолженными нулем на неположительные значения аргумента. Это замечание распространяется на все функции, вводимые в дальнейшем.

Обозначим

$$f_i(t) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t I_i(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad i = 0, 1 \qquad (8)$$

$$f(t) = \{f_0(t), f_1(t)\}.$$

Тогда из (6) получим

$$\Pi(t) = f(t) + A\Pi(t), \qquad (9)$$

где

$$A\Pi(t) = \left\{-\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\left[\nu(t) \ast \frac{\exp\left\{\frac{l}{4t}\right\}}{\sqrt{t}} \ast \frac{1}{\sqrt{t}}\right], -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\left[\mu(t) \ast \frac{\exp\left\{\frac{l}{4t}\right\}}{\sqrt{t}} \ast \frac{1}{\sqrt{t}}\right]\right\}. \qquad (10)$$

Систему интегро-дифференциальных уравнений (9) решим методом последовательных приближений:

$$\Pi(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\Pi_k(t), \quad \Pi_0(t) = f(t), \quad \Pi_n(t) = A\Pi_{n-1}(t). \qquad (11)$$

Покажем, что имеет место следующая формула:

$$\Pi_k(t)=\left\{\frac{(-1)^k}{\pi}\frac{d}{dt}\left[I_{\frac{1+(-1)^{k+1}}{2}}(t)\ast\frac{\exp\left\{\frac{ik^2}{4t}\right\}}{\sqrt{t}}\right],\right.$$

$$\left.\frac{(-1)^k}{\pi}\frac{d}{dt}\left[I_{\frac{1+(-1)^k}{2}}(t)\ast\frac{\exp\left\{\frac{ik^2}{4t}\right\}}{\sqrt{t}}\right]\right\}. \qquad (12)$$

Действительно, из (10) и (11) получаем

$$\Pi_{k+1}(t)=A\Pi_k(t)=$$

$$=\left\{\frac{(-1)^{k+1}}{\pi^2}\frac{d^2}{dt^2}\left[I_{\frac{1+(-1)^k}{2}}(t)\ast\frac{\exp\left\{\frac{ik^2}{4t}\right\}}{\sqrt{t}}\ast\frac{\exp\left\{\frac{i}{4t}\right\}}{\sqrt{t}}\ast\frac{1}{\sqrt{t}}\right],\right.$$

$$\left.\frac{(-1)^{k+1}}{\pi^2}\frac{d^2}{dt^2}\left[I_{\frac{1+(-1)^{k+1}}{2}}(t)\ast\frac{\exp\left\{\frac{ik^2}{4t}\right\}}{\sqrt{t}}\ast\frac{\exp\left\{\frac{i}{4t}\right\}}{\sqrt{t}}\ast\frac{1}{\sqrt{t}}\right]\right\}. \qquad (13)$$

Выражение (13) можно преобразовать с помощью равенства

$$\frac{\exp\left\{\frac{ik^2}{4t}\right\}}{\sqrt{t}}\ast\frac{\exp\left\{\frac{i}{\sqrt{t}}\right\}}{\sqrt{\ }}\ast\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{\exp\left\{\frac{i(k+1)^2}{\sqrt{t}}\right\}}{\sqrt{t}}\ast\frac{1}{\sqrt{t}}\ast\frac{1}{\sqrt{t}}, \qquad (14)$$

которое легко доказывается применением преобразования Лапласа с использованием формул 5.232*.

Используя теперь соотношение $\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\left[h(t)\ast\frac{1}{\sqrt{t}}\ast\frac{1}{\sqrt{t}}\right]=h(t)$, очевидное в силу того, что $\frac{1}{\sqrt{t}}\ast\frac{1}{\sqrt{t}}=\begin{cases}0, & t<0\\ \pi, & t>0,\end{cases}$ из (13) и (14) получаем

$$\Pi_{k+1}(t)=\left\{\frac{(-1)^{k+1}}{\pi}\frac{d}{dt}\left[I_{\frac{1+(-1)^{k+2}}{2}}(t)\ast\frac{\exp\left\{\frac{i(k+1)^2}{4t}\right\}}{\sqrt{t}}\right],\right.$$

$$\left.\frac{(-1)^{k+1}}{\pi}\frac{d}{dt}\left[I_{\frac{1+(-1)^{k+1}}{2}}(t)\ast\frac{\exp\left\{\frac{i(k+1)^2}{4t}\right\}}{\sqrt{t}}\right]\right\}.$$

Отсюда и из того, что (12) справедлива при $k=0$, как это видно из (8) и (11), следует справедливость формулы (12) при всех значениях k.

---

* *Рыжик И. М., Градштейн И. Р.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 1951. 464 с.

Обозначим

$$\alpha_0(t) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}I_0(t), \qquad \beta_0(t) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}I_1(t),$$

$$\alpha_k(t) = \alpha_0(t) * \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left\{\frac{ik^2}{4t}\right\}, \qquad \beta_k(t) = \beta_0(t) * \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left\{\frac{ik^2}{4t}\right\}$$

и оценим функции $\alpha_k(t)$ и $\beta_k(t)$ при $0 < t \leqslant T$:

$$\alpha_k(t) = \int_0^t \alpha_0(\tau)\exp\left\{\frac{ik^2}{4(t-\tau)}\right\}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = k\int_{\frac{k}{2\sqrt{t}}}^{\infty}\alpha_0\left(t - \frac{k^2}{4y^2}\right)\frac{\exp\{iy^2\}}{y^2}\,dy.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\alpha_k(t) = k\left\{\frac{\alpha_0\left(t - \frac{k^2}{4y^2}\right)}{2iy^3}\exp\{iy^2\}\Bigg|_{\frac{k}{2\sqrt{t}}}^{\infty} - \right.$$

$$\left. - \int_{\frac{k}{2\sqrt{t}}}^{\infty}\exp\{iy^2\}\left[\alpha_0'\left(t - \frac{k^2}{4y^2}\right)\cdot\frac{k^2}{4iy^6} - \alpha_0\left(t - \frac{k^2}{4y^2}\right)\cdot\frac{3}{2iy^4}\right]dy\right\}.$$

Впредь будем предполагать, что функции $I_0(t)$ и $I_1(t)$ имеют ограниченные на $[0, T]$ производные до третьего порядка включительно. Тогда из последнего равенства заключаем, что $|\alpha_k(t)| \leqslant Ck^{-2}$. Аналогично приходим к такой же оценке для $\beta_k(t)$.

Поскольку $\alpha_k(t)$ и $\beta_k(t)$ служат компонентами вектора $\Pi_k(t)$, то из полученных оценок вытекает равномерная сходимость ряда (11) и тем самым существование решения $\Pi(t)$ уравнения (9).

Члены ряда (11), как видно из (12), непрерывно дифференцируемы на $[0, T]$. Ряд, полученный почленным дифференцированием ряда (11), сходится равномерно, что устанавливается так же, как равномерная сходимость ряда (11). Поэтому функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[0, T]$. Из непрерывности $\mu(t)$ и $\nu(t)$ вытекает, что $U(x, 0) = V(x, 0) \equiv 0$; краевые условия (3) выполняются в силу самого построения функции $\Pi(t)$. Остается установить, что $U(x, t)$ и $V(x, t)$ — решения уравнения (1). Формальное дифференцирование под знаком интегралов в (4) сразу приводит к нужному результату. Для оправдания формальных действий заметим, что

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = \frac{ix}{2}\int_0^t \mu(\tau)\exp\left\{\frac{ix^2}{4(t-\tau)}\right\}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{2}{x}\left[\int_0^t \mu(\tau)\frac{\exp\left\{\frac{ix^2}{4(t-\tau)}\right\}}{2\sqrt{(t-\tau)}}\,d\tau - \int_0^t \mu'(\tau)\sqrt{t-\tau}\exp\left\{\frac{ix^2}{4(t-\tau)}\right\}d\tau\right] \equiv$$

$$\equiv \frac{2}{x}[F_1(x, t) + F_2(x, t)].$$

Интегралы $F_1(x, t)$, $F_2(x, t)$, $\frac{\partial F_1(x, t)}{\partial x}$ и

$$\frac{\partial F_2(x, t)}{\partial x} = -\frac{ix}{2}\int_0^t \mu'(\tau)(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{\bar{i}x^2}{4(t-\tau)}\right\}d\tau,$$

видно, сходятся абсолютно и равномерно относительно x, $-\infty < x < \infty$; для $\frac{\partial F_1(x, t)}{\partial x}$ это вытекает из того, что $F_1(x, t) = \frac{1}{2}U(x, t)$. Аналогично оправдываются формальные действия с интегралом $V(x, t)$.

Случай, когда $U_0(x) \not\equiv 0$ сводится к рассмотренному обычным образом: вместо $U(x, t)$ вводится новая искомая функция $U^*(x, t) = U(x, t) - U_0(x, t)$, где $U_0(x, t)$ — решение задачи Коши для (I) с начальным условием $u_0(x, 0) = \bar{u}_0(x)$; здесь $\bar{u}_0(x)$ — достаточно гладкая финитная функция, совпадающая на $[0, 1]$ с $u_0(x)$. При этом роль $I_0(t)$ и $I_1(t)$ исполнят функции $\bar{I}_0(t) = I_0(t) - U_0(0, t)$; $\bar{I}_1(t) = I_1(t) - U_0(1, t)$. Очевидно, $\bar{I}_0(0) = \bar{I}_1(0) = 0$ в силу (3).

Итак, если начальная функция $u_0(x)$ и граничные функции $I_0(t)$, $I_1(t)$ являются достаточно гладкими, то решение задачи (1)—(2)—(3) может быть представлено с помощью потенциалов.

Отметим, что единственность построенного решения может быть установлена обычным образом по методу Гольмгрена.

Поступила в редколлегию 20.12.90

УДК 517.982

С. Ю. ФАВОРОВ

ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ПЛЮРИПОЛЯРНЫЕ МНОЖЕСТВА В СОПРЯЖЕННЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Плюрисубгармонические (п.-с.-г.) функции и плюриполярные (п.-п.) множества в топологических векторных пространствах рассматривались во многих работах (см., напр., [1—3]). При этом, как правило, использовалось следующее определение:

Функция $P(x)$ называется п.-с.-г. в топологическом векторном пространстве E, если она п.-с.-г. в каждом конечномерном его подпространстве.

Эквивалентное определение состоит в том, что $P(x)$ является субгармонической на каждой комплексной прямой $\{x_1 + wx_2 : w \in C\}$ $x_1, x_2 \in E$, и полунепрерывна сверху в конечномернооткрытой топологии τ на E[1].

В настоящей заметке для случая $E = X^*$, где X — банахово пространство, вводится новое определение п.-с.-г. функции, отличаю-

[1] Т. е. сильнейшей топологии, индуцирующей на всех конечномерных подпространствах топологию эвклидова пространства.

щееся от предыдущего тем, что вместо топологии τ рассматривает слабая* топология в X^*. Это позволяет получить п.-с.-г. функц в X^*, наследующие многие свойства п.-с.-г. функций в конечн мерных пространствах. Так, в заметке приводятся бесконечномерн аналоги теорем о максимуме функции на остове поликруга, о ср нем по остову поликруга, теоремы о связи с классом функци выпуклых относительно логарифмов бесконечного числа переменн П.-п. множества в X^*, которые определяются с помощью п.-с функций тем же способом, что и в конечномерном случае, так близки по своим свойствам к п.-п. множествам в конечномерн пространстве. Так, счетное объединение п.-п. множеств в X^* так является п.-п. множеством. Далее, в заметке доказывается, что плюриполярные множества в X^* массивны в следующем смыс. для ограниченности множества $A \subset X$ достаточно, чтобы множест $\{(g, x): x \in A\}$ были ограничены при каждом g из некоторого п.-п. множества $E \subset X^*$. В частности, в качестве E можно взя множество c-крайних точек единичного шара в X^*. Другие при жения п.-с.-г. функций и п.-п. множеств в X^*, относящиеся к р ту и распределению значений голоморфных отображений $C^m \rightarrow$ можно найти в [4—5].

Пусть X — банахово пространство над полем комплексных чи X^* — его сопряженное.

Определение 1. *Функцию $P: X^* \to [-\infty, \infty)$, $P \not\equiv -\infty$, зовем плюрисубгармонической* (**п.-с.-г.**) *в X^*, если ее сужен на любую комплексную прямую $\{g_1 w + g_2 : w \in C\}$, g_1, $g_2 \in X^*$, е субгармоническая функция на этой прямой (или тождестве равна $-\infty$), а сужение P на любой шар в X^* есть полунепре ная сверху функция в слабой* топологии. В случае сепарабельн X такая непрерывность эквивалентна тому, что для любой сл сходящейся к $g \in X^*$ последовательности g_n имеем $\limsup_{n\to\infty} P(g_n) \leqslant P(g)$.*

Определение 2. *Множество $E \subset X^*$ назовем плюриполя ным (п.-п.) в X^*, если существует п.-с.-г. в X^* функция P така что $E \subset \{g \in X^*: P(g) = -\infty\}$.*

Например, функция $P(g) = \log|(g, x) - c|$, где $x \in X$, $c \in C$, п.-с. в X^*; множество $\{g \in X^*: (g, x) = c\}$ — п.-п. множество в X^*.

Из свойств субгармонических функций в C немедленно вытека следующие свойства п.-с.-г. функций в X^*:

1. Сумма конечного числа п.-с.-г. функций является п.-с. функцией.

2. Верхняя огибающая конечного числа п.-с.-г.- функций явл ется п.-с.-г. функцией.

3. П.-с.-г. функция, умноженная на положительный скаляр, так является п.-с.-г. функцией.

4. Предел равномерно сходящейся на каждом шаре в X^* пос довательности п.-с.-г. функций также будет п.-с.-г. функцией.

5. Предел монотонно убывающей последовательности п.-с.-г. фу ний, если он не равен тождественно $-\infty$, является п.-с.-г. функци

6. Ограниченная сверху в X^* п.-с.-г. функция есть тождественная константа.

Следующее утверждение вытекает из свойств 1 и 5.

Теорема 1. *Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(g)$ п.-с.-г. в X^* функции, причем в каждом шаре из X^* только конечное число из них может принимать положительные значения. Тогда ряд или расходится для всех $g \in X^*$, или множество его точек расходимости плюриполярно.*

Используя эту теорему, можно показать, что пространство последовательностей l^p образует п.-п. множество в пространстве l^∞. Действительно, ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^p - \log(N \log N)}{N \log^2 N}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 1, расходится в любой точке $(\lambda_n) \in l^p$ и сходится в точке $(1, 1, \ldots) \in l^\infty$.

Чтобы сформулировать следующую теорему, напомним, что c-крайней точкой выпуклого множества $E \subset X^*$ называется такая его точка g_0, что для всех $g \in X^*$ и всех $\varepsilon > 0$ найдется число $w \in \boldsymbol{C}$, $|w| < \varepsilon$, такое, что $g_0 + wg \notin E$ (см. [6]).

Теорема 2. *Пусть $P(g)$ — п.-с.-г. функция в X^*, K — выпуклое ограниченное слабо* замкнутое множество в X^*. Тогда существует c-крайняя точка $g_0 \in K$ такая, что $\sup_K P(g) = P(g_0)$.*

Доказательство. Так как K — слабо* компактное множество в X^*, то в каких-то точках K полунепрерывная сверху функция $P(g)$ достигает своего максимума. Множество E таких точек образует компакт в X^*. Пусть g_0 — крайняя точка множества E. Предположим, что для каких-то $g' \in X^*$, $\varepsilon > 0$ множество $F = \{g_0 + \lambda g' : \lambda \in \boldsymbol{C}, |\lambda| < \varepsilon\}$ лежит в K. Применяя принцип максимума к субгармонической функции $\varphi(\lambda) = P(g_0 + \lambda g')$, заключаем, что $F \subset E$, что противоречит выбору точки g_0. Таким образом, g_0 — c-крайняя точка K, что доказывает теорему.

Следствие. *Множество c-крайних точек единичного шара в X^* не плюриполярно.*

П.-с.-г. функции в $\boldsymbol{C}^m$ тесно связаны с функциями в $\boldsymbol{R}^m_+$, выпуклыми относительно логарифмов переменных (см. [7], с. 134). Чтобы сформулировать подобные утверждения для п.-с.-г. функций в X^*, введем следующие обозначения.

Через l^∞_+ (соответственно $\bar{l}^\infty_+$) обозначим множество последовательностей из l^∞, все элементы которых положительны (соответственно неотрицательны). Так, $I = (1, 1, \ldots) \in l^\infty_+$. Для $r, r' \in \bar{l}^\infty_+$ запись $r \leqslant r'$ означает, что $r' - r \in \bar{l}^\infty_+$. Пусть $\{g_n\}$ — такая последовательность линейно независимых элементов из X^*, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |(g_n, x)|$ сходится при всех $x \in X$. Положим для $r = (r_n) \in l_+^\infty$

$$\Pi(r) = \{ \sum_n \lambda_n g_n, \quad |\lambda_n| < r_n \},$$

$$\Gamma(r) = \{ \sum_n \lambda_n g_n, \quad |\lambda_n| = r_n \},$$

где суммы понимаются в смысле слабой* сходимости. Далее, для п.-с.-г. функции $P(g)$ в X^* обозначим

$$m(r, P) = \sup \{ P(g) : g \in \Pi(r) \},$$

$$L(r, P) = \int P\Big(\sum_{n=1}^{\infty} r_n e^{i\varphi_n} g_n \Big)\, d\mu,$$

где мера μ есть прямое произведение мер $(1/2\pi)\, d\varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$ на $[0, 2\pi)$.

Отметим, что последний интеграл имеет смысл, так как функция $P(g)$ на $\Gamma(r)$ есть предел монотонно убывающей последовательности полунепрерывных сверху функций $\tilde{P}_N(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = \sup \Big\{ P\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n g_n \Big) : |\lambda_n| = r_n \text{ при } n > N \Big\}$.

Теорема 3. *а)* $\tilde{P}(\lambda) = P\Big(\sum_n \lambda_n g_n \Big)$ *в п.-с.-г. функция в* l^∞.

б) Если $P(g) \not\equiv \mathrm{const}$ *в* $\Pi(r)$, *то* $P(g) < m(r, P)$ *в* $\Pi(r)$, *причем для некоторого* $g' \in \Gamma(r)$ *имеем* $P(g') = m(r, P)$.

в) Для любого $r \in \bar{l}_+^\infty$ *имеем* $P(0) \leqslant L(r, P)$.

г) Функции $m(r, P)$ *и* $L(r, P)$ *выпуклы относительно* $\log r$ *в* l_+^∞, *т. е. для любых* $r' = (r'_n)$, $r'' = (r''_n)$ *и* $\alpha \in (0, 1)$ *выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} m(r, P) &\leqslant \alpha m(r', P) + (1-\alpha)\, m(r'', P), \\ L(r, P) &\leqslant \alpha L(r', P) + (1-\alpha)\, L(r'', P), \end{aligned} \tag{2}$$

где $r = (r_n'^{\alpha} \cdot r_n''^{1-\alpha})$.

д) Функции $m(r, P)$ *и* $L(r, P)$ *монотонны по* r *относительно введенного частичного порядка в* $\bar{l}_+^\infty$.

е) Функции $m(r, P)$ *и* $L(r, P)$ *слабо* полунепрерывны сверху в* $\bar{l}_+^\infty$.

ж) Если $\psi(r)$ — *слабо* полунепрерывна сверху, монотонная по* r *и выпуклая относительно* $\log r$ *функция в* $\bar{l}_+^\infty$ *(последнее свойство должно также выполняться на всех подмножествах вида* $\{r \in \bar{l}_+^\infty : r_n = 0$ *при* $n \in A\}$ *по ненулевым переменным), то функция* $\psi((|\lambda_n|))$ *п.-с.-г. в* l^∞.

Доказательство. Утверждение а) очевидно. б) вытекает из теоремы 2. Далее, так как функция $\tilde{P}(\lambda)$ п.-с.-г. по первым N переменным, то

$$P(0) \leqslant \int P\Big(\sum_{n=1}^{N} r_n e^{i\varphi_n} g_n\Big)\, d\mu.$$

Для доказательства в) осталось перейти к пределу при $N \to \infty$, пользуясь слабой* полунепрерывностью сверху функции $P(g)$ и леммой Фату. Пусть теперь r', r'', r те же, что и в (2). Выберем, пользуясь свойством б), точку $g = \sum_n \tilde{\lambda}_n g_n \in \Gamma(r)$ так, что $m(r, P) = P(g)$. Функция $\tilde{P}(\lambda)$ п.-с.-г. по переменным $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, поэтому, согласно ([7], с. 134), функция $u(r_1, \ldots, r_N) = \max\{\tilde{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N, \tilde{\lambda}_{N+1}, \ldots) : |\lambda_1| = r_1, \ldots, |\lambda_N| = r_N\}$ выпукла по совокупности переменных $\log r_1, \ldots, \log r_N$, так что $m(r, P) \leqslant \alpha u(r_1', \ldots, r_N') + (1-\alpha) \times u(r_1'', \ldots, r_N'')$. Поэтому найдутся точки $\lambda'^{(N)}$ и $\lambda''^{(N)}$ из l^∞, у которых модули первых N координат равны соответственно $r_1', \ldots, r_N'$ и $r_1'', \ldots, r_N''$, а остальные координаты совпадают с соответствующими координатами точки $\tilde{\lambda}$ так, что $m(r, P) \leqslant \alpha \tilde{P}(\lambda'^{(N)}) + (1-\alpha)\tilde{P}(\lambda''^{(N)})$. Переходя, если это необходимо, к подпоследовательностям, считаем, что $\lambda'^{(N)} \to \lambda'$ и $\lambda''^{(N)} \to \lambda''$ в смысле слабой* сходимости. Пользуясь полунепрерывностью сверху функции $\tilde{P}(\lambda)$, приходим к неравенству (2). Доказательство остальных утверждений теоремы 3 проводится приблизительно по той же схеме. □

Следствие 1. *Пусть $P(g)$ — такая п.-с.-г. функция в X^*, что $P(e^{i\theta} g) = P(g)$ для всех $\theta \in [0, 2\pi)$, $g \in X^*$. Тогда*

$$\int P\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\varphi_n} g_n\Big)\, d\mu \geqslant P(g_N), \quad N = 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Для любого N ввиду свойств меры μ

$$\int P\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\varphi_n} g_n\Big)\, d\mu = \int P\Big(g_N + \sum_{n \neq N} e^{i\varphi_n} g_n\Big)\, d\mu.$$

Согласно утверждению в) теоремы, правая часть этого неравенства не меньше, чем $P(g_N)$. □

Следствие 2. *Пространство Банаха c_0 — не плюриполярное множество в l^∞.*

Доказательство. Пусть $P(g)$ — такая п.-с.-г. функция в l^∞, что $P(g) = -\infty$ на c_0. Построим последовательность натуральных чисел $n(k) \to \infty$ и точек $r^{(k)} = (r_n^{(k)}) \in l_+^\infty$ так, что $r^{(0)} = I$, $r_n^{(k)} = r_n^{(k-1)}$ при $n \leqslant n(k)$, $r_n^{(k)} = r_n^{(k-1)} + 1$ при $n > n(k)$, и так, чтобы при всех k выполнялось неравенство $m(r^{(k)}, P) \leqslant m(r^{(k-1)}, P) + 2^{-k}$. Точки $s^{(k)} = (1/r_n^{(k)}) \in l_+^\infty$ сходятся к точке $s^{(0)} \in c_0$. Из утверждения д) теоремы 3 следует, что $m(s^{(k)}, P) \to -\infty$ при $k \to \infty$, а из утверждения г) той же теоремы имеем $m(I, P) \leqslant [m(r^{(k)}, P) + m(s^{(k)}, P)]/2$. Поэтому $m(l, P) = -\infty$; ясно также, что l можно заменить на tl для любого $t > 0$, т. е. $P(g) \equiv -\infty$ в l^∞, что невозможно. $\square$

Отметим, что в отличие от конечномерного случая п.-п. множество может пересекаться с $\Gamma(r)$ по множеству полной меры μ. Это показывает следующий пример.

Положим для $\lambda = (\lambda_n) \in l^\infty$

$$P(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \{\log |\sum_{j=1}^{N(n)} \lambda_j| - \log nN(n)\}, \tag{3}$$

где $N(n) = [ne^{2n^4}] + 1$. Нетрудно видеть, что ряд (3) удовлетворяет всем условиям теоремы 1 и при этом $P(l) \neq -\infty$. С другой стороны, из неравенства $\mu\{\varphi : |e^{i\varphi_1} + \cdots + e^{i\varphi_N}| > \alpha\} \leqslant \alpha^{-2} \int |e^{i\varphi_1} + \cdots + e^{i\varphi_N}|^2 d\mu = N\alpha^{-2}$ следует, что множество $E_n = \{\varphi : |e^{i\varphi_1} + \cdots + e^{i\varphi_N}| > Ne^{-n^2}\}$ удовлетворяет условию $\mu(E_n) < 1/n$, и поэтому мера множества $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=j}^{\infty} E_n$ равна нулю. При этом для точек $\lambda = (e^{i\varphi_n})$ таких, что $\varphi' = (\varphi_n') \notin E$, ряд (3) расходится. $\square$

Теорема 4. *Пусть $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ — последовательность п.-п. множеств в X^*. Тогда их объединение $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ также является п.-п. множеством.*

Доказательство. Пусть $P_n(g)$ — последовательность п.-с.-г. функций, таких, что $E_n \subset \{g : P_n(g) = -\infty\}$. Построим такую последовательность точек $g_n \in X^*$, что

а) $\| g_n - g_{n-1} \| < 2^{-n}$, $n = 2, 3, \ldots$

б) $P_j(g_n) \geqslant P_j(g_{n-1}) - 2^{-n}$, $j < n$, $n = 2, 3, \ldots$

в) $P_n(g_n) \neq -\infty$, $n = 1, 2, \ldots$

Для этого выберем g_1 так, чтобы выполнялось в) при $n = 1$. Предполагая, что подходящие g_j для $j = 1, \ldots, n-1$ уже выбраны, выберем $\tilde{g}$ так, что $P_n(\tilde{g}) \neq -\infty$, и проведем комплексную прямую L через точки $\tilde{g}, g_{n-1}$. Так как $P_j(g)$, $j = 1, \ldots, n$, субгармонические функции на L, не равные тождественно $-\infty$, можно выбрать точку g_n, удовлетворяющую условиям а), б), в). Для точки $g' = \lim_{n\to\infty} g_n$ имеем

$$P_j(g') \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} P_j(g_n) \geqslant P_j(g_j) - 1 \neq -\infty, \ j = 1, 2, \ldots$$

Выберем теперь последовательность чисел $\alpha_n > 0$, такую, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n [P_n(g) - \max_{\|g\|<n} P_n(g)]$$

сходился в точке g'. Утверждение теоремы 4 вытекает теперь из теоремы 1. $\square$

Теорема 5. *Пусть A — такое подмножество X, что для каждого $g \in E$, где E неплюриполярное множество в X^*, множества $\{(g, x) : x \in A\}$ ограничены в $\mathbf{C}$. Тогда A ограничено по норме в X.*

Доказательство. Если A — неограниченное множество, то найдется последовательность точек $x_n \in A$ такая, что $\|x_n\| \geqslant \exp n$ и точки $g_n \in X^*$ такие, что $\|g_n\| = n^{-2}$ и $(g_n, x_n) = \|g_n\| \|x_n\|$. Ряд

$$P(g) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} [\log |(g, x_n)| - \log \|x_n\| - \log n] \tag{4}$$

удовлетворяет условию теоремы 1 и расходится для каждого $g \in E$. С другой стороны, так как ряд $\sum_n g_n$ сходится, то согласно следствию теоремы 3

$$\int P\Big(\sum_{N=1}^{\infty} e^{i\varphi_N} g_N\Big) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \Big\{\int \log \Big| \Big(\sum_{N=1}^{\infty} e^{i\varphi_N} g_N, x_n\Big)\Big| d\mu -$$

$$- \log (n \|x_n\|\Big\} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \{\log |(g_n, x_n)| - \log (n \|x_n\|)\} > -\infty.$$

Поэтому ряд (4) не может расходиться для всех $g \in X^*$, и E п.-п. множество, что противоречит условию. □

Отсюда и из следствия теоремы 2 вытекает следующий результат.

Теорема 6. *Если A такое множество в X, что множества $\{(g, x) \mid x \in A\}$ ограничены для каждой c-крайней точки единичного шара в X^*, то A ограничено в X.*[1] □

Тем же способом, каким из теоремы Банаха—Штейнгауза выводится теорема Данфорда о голоморфном отображении, из теоремы 5 можно получить следующий результат.

Теорема 7. *Пусть D — область в $\mathbf{C}^m$, а f — такое отображение из D в X, что для всех $g \in E$, где E — неплюриполярное подмножество в X^*, функция $(g, f)(z)$ голоморфна в D. Тогда $f(z)$ — голоморфное отображение из D в X.* □

В случае $X = l^1$, $X^* = l^\infty$ имеем

Следствие. *Если $f_n(z)$ — последовательность комплекснозначных функций в области D такая, что ряд $\sum_n |f_n(z)|$ сходится для каждого $z \in D$, а сумма*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(z) \tag{5}$$

голоморфна для каждой последовательности (λ_n) из некоторого неплюриполярного подмножества в l^∞, то ряд (5) — голоморфная функция в D для всех $(\lambda_n) \in l^\infty$. □

Список литературы: 1. *Lelong P.* Fonctions plurisousharmoniques et ensembles polaires sur une algebre de fonctions holomorphes//Lecture Notes. 1969. № 116. P. 1—20. 2. *Lelong P.* Plurisubharmonic functions in topological vector spaces. Polar sets and problems of measure//Lecture Notes. 1973. № 364. P. 58—69. 3. *Kiselman O.* Croissance des fonctions plurisousharmoniques dimension in finie// Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1984. 34. P. 155—183. 4. *Фаворов С. Ю.* Распре-

[1] Заменить c-крайние точки на крайние в общем случае нельзя, точное описание пространств X, где такая замена возможна (см. [8]).

деление значений голоморфных отображений C^m в банахово пространство//Функцион. анализ и его прил. 1987. 21, вып. 3. С. 91—92. 5. *Фаворов С. Ю.* Рост и распределение значений голоморфных отображений конечномерного пространства в банахово//Сиб. мат. журн. 1990. 31, № 1. С. 101—112. 6. *Globevnik I.* On complex strict and uniform convexity//Proc. Amer. Math. Soc. 1975. 48. P. 61—69. 7. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. М., 1971. 430 с. 8. *Фонф В. П.* Слабо экстремальные свойства банаховых пространств//Мат. заметки. 1989. 45, вып. 6. С. 83—92.

Поступила в редколлегию 30.11.90

УДК 517.9

Л. К. МАСЛОВ

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ ЯКОБИ

При интегрировании эволюционных уравнений методом обратной задачи представляют особый интерес те случаи, когда решения получаются в замкнутом виде. Это происходит, в частности, когда соответствующий L-оператор имеет нулевой коэффициент отражения. В работе ставится и решается задача описания безотражательных якобиевых матриц в терминах их спектральных свойств. Для этого вводится модификация функции Вейля якобиевой матрицы, подобно тому, как это сделано в [1]. Основным результатом является теорема о том, что якобиева матрица безотражательна тогда и только тогда, когда ее функция Вейля рациональна.

1. Бесконечная в обе стороны матрица J с элементами

$$J_{ik} = \delta(i-k)\,a(i) + \delta(i-k+1)\,b(i-1) + \delta(i-k-1)\,b(i) \quad (1.1)$$
$$\operatorname{Im} a(n) = 0, \quad b(n) > 0, \quad n \in \mathbf{Z}$$

называется якобиевой матрицей. Она определяет следующую разностную операцию на последовательности $\{\psi(n)\}_{n \in Z}$:

$$(J\psi)(n) = b(n-1)\,\psi(n-1) + a(n)\,\psi(n) + b(n)\,\psi(n+1). \quad (1.2)$$

Вронскианом двух последовательностей $\{\varphi(n)\}_{n \in Z}$ и $\{\psi(n)\}_{n \in Z}$ мы будем называть выражение $W[\varphi, \psi](n) = \varphi(n)\psi(n+1) - \varphi(n+1)\psi(n)$.

Для решений $\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda, n)$ уравнения

$$(J\psi)(\lambda, n) = \lambda\psi(\lambda, n) \quad (1.3)$$

справедлива формула Грина [2]:

$$b(n)\,W[\varphi(\lambda), \varphi(\mu)](n) - b(m)\,W[\varphi(\lambda), \varphi(\mu)](m) = (\lambda-\mu)\sum_{k=n+1}^{m} \varphi(\lambda, k)\,\varphi(\mu, k), \quad (1.4)$$

откуда, в частности, вытекает, что если φ и ψ является решениями уравнения (1.3) при одном и том же λ, то выражение $b(n)\,W[\varphi, \psi](n)$ не зависит от n.

Дифференцируя формулу Грина по μ и полагая $\mu=\lambda$, получим

$$b(n)W[\varphi,\varphi'](n)-b(m)W[\varphi,\varphi'](m)=-\sum_{k=n+1}^{m}\varphi^2(k). \qquad (1.5)$$

Введем следующие обозначения:

$$Z_+(m)=\{n\in Z: n\geqslant m\};$$
$$Z_-(m)=\{n\in Z: n<m\}.$$

Рассмотрим разностные операции $(J_m^-\psi)(n)$ $((J_m^-\psi)(n))$, заданные на последовательностях вида $\{\psi(n)\}_{n\geqslant m}$ $(\{\psi(n)\}_{n<m})$:

$$(J_m^+\psi)(n)=\begin{cases}(J\psi)(n) & n>m,\\ a(n)\psi(n)+b(n)\psi(n+1) & \text{при } n=m;\end{cases}$$

$$(J_m^-\psi)(n)=\begin{cases}(J\psi)(n) & n<m-1,\\ b(n-1)\psi(n-1)+a(n)\psi(n) & \text{при } n=m-1.\end{cases}$$

Если последовательность $\{\psi(n)\}_{n\in Z}$ удовлетворяет условию $\psi(m-1)=0$ $(\psi(m)=0)$, то

$$(J\psi)(n)=(J_m^+\psi)(n),\quad n=m,\ m+1,\ \ldots$$
$$((J\psi)(n)=(J_m^-\psi)(n),\quad n=m-1,\ m-2,\ \ldots)$$

Рассмотрим канонические решения $P(\lambda,n)$, $Q(\lambda,n)$ уравнения (1.3), удовлетворяющие начальным условиям: $P(\lambda-1)=0$, $P(\lambda,0)=1$; $Q(\lambda,-1)=1$, $Q(\lambda,0)=0$.

Они, очевидно, существуют, определены единственным образом и линейно независимы.

Теорема Вейля—Хеллингера [2] утверждает, что при $\operatorname{Im}\lambda\neq0$ существует решение ψ^+ уравнения (1.3) вида $\psi^+(\lambda,n)=m^+(\lambda)\times P(\lambda,n)+Q(\lambda,n)$, принадлежащее $l_2(Z_+)$. Кроме того, выполняется равенство:

$$-b(-1)\frac{\operatorname{Im}m^+\lambda}{\operatorname{Im}\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}|\psi^+(\lambda,n)|^2. \qquad (1.6)$$

Отметим, что функция $m^+(\lambda)$ голоморфна вне вещественной оси и принимает сопряженные значения в сопряженных точках. Она отличается от канонической функции Вейля $w(\lambda)$ ([2]) множителем $-b(-1)$: $m^+(\lambda)=-b(-1)w(\lambda)$. Так как для канонической функции Вейля имеет место представление:

$$w(\lambda)=\int_R\frac{d\rho(u)}{u-\lambda},$$

где ρ — вероятностная мера, функция $m^+(\lambda)$ имеет следующее асимптотическое поведение в окрестности бесконечности:

$$m^+(\lambda)=-b(-1)w(\lambda)=\frac{b(-1)}{\lambda}+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\quad \operatorname{Im}\lambda\to\infty. \qquad (1.7)$$

Функция Вейля $w(\lambda)$ однозначно определяет все коэффициенты матрицы J_0^+. Функция $m^+(\lambda)$ определяет также коэффициент $b(-1)$, из 1.7.

Введем решение $\psi^-(\lambda, n)$ такое, что $\psi^-(\lambda, n) \in l_2(\mathbf{Z}_-)$ и $\psi^-(\lambda, n) = m^-(\lambda) Q(\lambda, n) + P(\lambda, n)$. Функция $m^-(\lambda)$ также голоморфна вне вещественной оси

$$-b(-1)\frac{\operatorname{Im} m^-(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda} = \sum_{k=-\infty}^{-1} |\psi^-(\lambda, k)|^2. \tag{1.8}$$

Функции $m^\pm(\lambda)$ мы будем называть функциями Вейля матрицы J на Z_+ и Z_- соответственно. Они имеют следующее асимптотическое поведение:

$$m^\pm(\lambda) = \frac{b(-1)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad \operatorname{Im}\lambda \to \infty. \tag{1.9}$$

Определение. *Функцией Вейля якобиевой матрицы J на $\mathbf{Z}$ называется функция*

$$m(z) = \begin{cases} m^+(z + z^{-1}), & |z| < 1, \\ \dfrac{1}{m^-(z + z^{-1})}, & |z| > 1. \end{cases}$$

Последовательность $\psi(z, n) = m(z) P(z + z^{-1}) + Q(z + z^{-1}, n)$ является решением уравнения (1.3) при $\lambda = z + z^{-1}$. При $|z| < 1$ она совпадает с $\psi^+(\lambda, n)$, а при $|z| > 1$ — с $(m^-(\lambda))^{-1}\psi^-(\lambda, n)$. В том случае, когда операторы $J_0^\pm$, порождаемые соответствующими матрицами в $l_2(\mathbf{Z}_\pm)$, являются существенно самосопряженными, решения $\psi^\pm$ определены с точностью до постоянного множителя, а функции $m^\pm$ определяются однозначно и выражаются формулами:

$$m^+(\lambda) = \frac{\psi^+(\lambda, 0)}{\psi^+(\lambda, -1)}, \tag{1.10}$$

$$\frac{1}{m^-(\lambda)} = \frac{\psi^-(\lambda, 0)}{\psi^-(\lambda, -1)},$$

где $\psi^\pm$ — любые решения, принадлежащие $l_2(\mathbf{Z}_\pm)$.

Из формул (1.9) и определения функции $m(z)$ следует, что

$m(z) = \dfrac{z}{b(-1)} + O(1)$ при $\operatorname{Im} z \to \infty$,

$m(z) = b(-1) z + O(z^2)$ при $z \to 0$, $\varepsilon < |\arg z| < \pi - \varepsilon$.

Кроме того, из (1.6) и (1.8) вытекает, что $\operatorname{sgn}\operatorname{Im} m^\pm(\lambda) = -\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\lambda$.

Далее, так как $\operatorname{Im}(z + z^{-1}) = \operatorname{Im}\left(z + \dfrac{\bar z}{|z|^2}\right) = \operatorname{Im} z(1 - |z|^{-2})$, то при $|z| < 1$ $\operatorname{sgn}\operatorname{Im} m(z) = \operatorname{sgn}\operatorname{Im} m^+(z + z^{-1}) = -\operatorname{sgn}\operatorname{Im}(z + z^{-1}) = \operatorname{sgn}\operatorname{Im} z$, а при $|z| > 1$ $\operatorname{sgn}\operatorname{Im} m(z) = -\operatorname{sgn}\operatorname{Im} m^-(z + z^{-1}) = \operatorname{sgn}\operatorname{Im}(z + z^{-1}) = \operatorname{sgn}\operatorname{Im} z$. Поэтому мнимая часть функции Вейля $m(z)$ положительна в верхней и отрицательна в нижней полуплоскости.

Сказанное позволяет сформулировать свойства функции Вейля в виде леммы:

Лемма 1.1. *(Свойства функции Вейля):*

1) *Функция Вейля $m(z)$ голоморфна вне вещественной оси ($\mathbf{R}$) и единичной окружности ($\mathbf{T}$).*

2) $\frac{\operatorname{Im} m(z)}{\operatorname{Im} z} > 0, \quad z \notin \boldsymbol{T} \cup \boldsymbol{R},$

3) $m(z) = \frac{z}{b(-1)} + O(1)$ *при* $\operatorname{Im} z \to \infty,$

4) $m(z) = b(-1)z + O(z^2)$ *при* $z \to 0,\ \varepsilon < |\arg z| < \pi - \varepsilon.$

2. *Будем якобиеву матрицу называть быстроубывающей, если*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} n\,|a(n)| < \infty \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} n\,|b^2(n) - 1| < \infty.$$

Для таких матриц конечноразностное уравнение

$$(J\psi)(z, n) = (z + z^{-1})\,\psi(z, n) \tag{2.1}$$

имеет решения $e^+(z, n)$ и $e^-(z, n)$, которые голоморфны соответственно внутри и вне единичного круга и непрерывны вплоть до окружности $\boldsymbol{T}$, причем имеют место асимптотические формулы по n:

$$e^+(z, n) = \frac{z^n}{\beta^+(n)}(1 + o(1)), \quad n \to +\infty, \quad |z| \leqslant 1,$$

$$e^-(z, n) = \frac{z^n}{\beta^-(n)}(1 + o(1)), \quad n \to -\infty, \quad |z| \geqslant 1 \tag{2.2}$$

асимптотические формулы по z:

$$e^+(z, n) = \frac{z^n}{\beta^+(n)}(1 + O(z)), \quad z \to 0,$$

$$e^-(z, n) = \frac{z^n}{\beta^-(n)}(1 + O(z^{-1})), \quad z \to \infty, \tag{2.3}$$

где

$$\beta^+(n) = \prod_{k=n}^{\infty} b(k), \quad \beta^-(n) = \prod_{k=-\infty}^{n-1} b(k).$$

Доказательство существования этих решений дано в приложении (п. 3).

Функция $e^+(z^{-1}, n)$, заданная при $|z| \geqslant 1$, очевидно, также является решением уравнения (2.1) и на окружности $|z| = 1$ она вместе с $e^+(z, n)$ образует фундаментальную систему решений этого уравнения. Поэтому на единичной окружности решение можно представить в виде их линейной комбинации:

$$e^-(z, n) = A(z)\,e^+(z, n) + B(z)\,e^+(z^{-1}, n). \tag{2.4}$$

Коэффициент $A(z)$ выражается через эти три решения следующим образом:

$$A(z) = \frac{b(n)\,W[e^-(z),\ e^+(z^{-1})](n)}{b(n)\,W[e^+(z),\ e^+(z^{-1})](n)}.$$

Заметим, что числитель и знаменатель не зависят от n, а с учетом (2.2) мы получим $b(n)\,W[e^+(z),\ e^+(z^{-1})](n) = z^{-1} - z$, откуда

$$A(z) = \frac{b(n)\,W[e^-(z),\ e^+(z^{-1})](n)}{z^{-1} - z}. \tag{2.5}$$

Числитель в выражении (2.5) является голоморфной функцией вне единичного круга, поэтому функция $A(z)$ аналитически продолжается с окружности в область $|z|>1$. Известно [3], что она имеет конечное число вещественных простых нулей $\{\varkappa_k\}_{k=1}^{N}$ ($|\varkappa_k|>1$) и, кроме того,

$$A(z) \to \frac{1}{\beta} \text{ при } z \to \infty, \text{ где } \beta = \beta^+(n)\beta^-(n) = \prod_{k=-\infty}^{+\infty} b(k).$$

Нули $\varkappa_k$ функции $A(z)$ отвечают собственным значениям $\varkappa_k + \varkappa_k^{-1}$ оператора J, поскольку при $z=\varkappa_k$ решения $e^-(z, n)$ и $e^+(z^{-1}, n)$, принадлежащие соответственно $l_2(\boldsymbol{Z}_-)$ и $l_2(\boldsymbol{Z}_+)$, линейно зависимы:

$$e^-(\varkappa_k, n) = C_k e^+(\varkappa_k^{-1}, n). \tag{2.6}$$

Полагая в формуле Грина (1.5) $\lambda = z + z^{-1}$ ($|z|>1$) и переходя к дифференцированию по z, мы получим соотношения

$$b(n)\left(e^+(z^{-1}, n)\frac{d}{dz}e^+(z^{-1}, n+1) - e^+(z^{-1}, n+1)\frac{d}{dz}e^+(z^{-1}, n)\right) =$$

$$= (z^{-2}-1)\sum_{k=n+1}^{\infty} e^+(z^{-1}, k)^2,$$

$$b(n)\left(e^-(z, n+1)\frac{d}{dz}e^-(z, n) - e^-(z, n)\frac{d}{dz}e^-(z, n+1)\right) =$$

$$= (z^{-2}-1)\sum_{k=-\infty}^{n} e^-(z, k)^2, \tag{2.7}$$

из которых, в частности, следует, что производная функции $A(z)$ в точке $\varkappa_k$ равна

$$A'(\varkappa_k) = \frac{C_k}{\varkappa_k}\|e^+(\varkappa_k^{-1}, n)\|_{l_2(Z)}, \tag{2.8}$$

так как $\varkappa_k \in \boldsymbol{R}$, решения $e^+(\varkappa_k^{-1}, k)$ и $e^-(\varkappa_k, k)$ вещественны и поэтому $e^+(\varkappa_k^{-1}, k)^2 = |e^+(\varkappa_k^{-1}, k)|^2$, $e^-(\varkappa_k, k)^2 = |e^-(\varkappa_k, k)|^2$.

Числа $\mu_k^2 = \|e^+(\varkappa_k^{+1}, n)\|$ называются нормировочными коэффициентами.

Матрица J называется безотражательной, если $B(z)=0$ при $|z|=1$. В этом случае функция $A(z)$ продолжается во всю плоскость формулой [3]:

$$A(z) = \frac{1}{\beta}\prod_{k=1}^{N}\frac{z-\varkappa_k}{z-\varkappa_k^{-1}} \tag{2.9}$$

и равенство (2.4) принимает вид

$$e^-(z, n) = A(z)e^+(z, n). \tag{2.10}$$

Так как функция, стоящая в этом равенстве слева, голоморфна вне единичного круга, а функция, стоящая справа, голоморфна внутри круга (за исключением конечного числа точек), каждая из них является аналитическим продолжением другой.

Безотражательная матрица J однозначно восстанавливается по данным рассеяния $\{\varkappa_k, \mu_k\}_{k=1}^N$. Для этого [3] нужно найти функцию $\varphi(z, n) = \frac{z^{-n}}{\beta^+(n)} e^+(z, n)$ из соотношения

$$\varphi(z, n) = 1 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{z - \varkappa_k} \frac{\varkappa_k^{-2n+1} \varphi(\varkappa_k^{-1}, n)}{\mu_k^2}. \tag{2.11}$$

Полагая в этом уравнении $z = \varkappa_k^{-1}$, получим конечную систему линейных уравнений для значений $\varphi(\varkappa_k^{-1}, n)$ функции $\varphi(z, n)$ в точках $\varkappa_k^{-1}$, решив которую, восстановим функцию φ во всей плоскости. Поскольку $e^+(z, n)$ удовлетворяет уравнению (2.1), функция $\varphi(z, n)$ удовлетворяет уравнению

$$zb^2(n-1)\varphi(z, n-1) + a(n)\varphi(z, n) + z^{-1}\varphi(z, n+1) = (z+z^{-1})\varphi(z, n),$$

из которого $a(n)$ и $b(n)$ вычисляются по коэффициентам разложения функции φ в ряд Тейлора в нуле [3].

Лемма 2.1. *Пусть J — безотражательная матрица Якоби. Тогда соответствующие решения $e^\pm(z, n)$ могут быть представлены в виде:*

$$e^+(z, n) = \frac{z^n}{\beta^+(n)} \prod_{k=1}^N \frac{1 - z\lambda_k^{-1}(n)}{1 - z\varkappa_k^{-1}}, \tag{2.12}$$

$$e^-(z, n) = \frac{z^n}{\beta^-(n)} \prod_{k=1}^N \frac{z - \lambda_k(n)}{z - \varkappa_k^{-1}},$$

где $\{\lambda_k(n)\}_{k=1}^\infty$, $n \in Z$ — некоторый набор различных вещественных чисел.

Доказательство. Из уравнения (2.11) следует, функция $e^+(z, n)$ рациональна и имеет вид

$$e^+(z, n) = z^n\beta^+(n) \frac{T_N(z, n)}{\prod_{k=1}^N (z - \varkappa_k)},$$

где $T_N(z) = z^N + C_{N-1}(n) z^{N-1} + \cdots + C_0(n)$ — полином степени N с вещественными коэффициентами. Обозначим его нули $\lambda_k(n)$. Тогда

$$e^+(z, n) = z^n\beta^+(n) \prod_{k=1}^N \frac{z - \lambda_k(n)}{z - \varkappa_k}, \tag{2.13}$$

откуда сразу из соотношений (2.9) и (2.10) следует, что функция $e^-(z, n)$ имеет требуемый вид. Сравнивая далее представление (2.13) с асимптотической формулой (2.3) для $e^+(z, n)$ при $z \to 0$, будем иметь

$$\prod_{k=1}^N \frac{\lambda_k(n)}{\varkappa_k} = \frac{1}{\beta^+(n)^2}. \tag{2.14}$$

Это позволяет преобразовать выражение (2.13) к требуемому виду.

Покажем, что числа λ_k вещественны и попарно различны. Если $|\lambda_k|<1$, то $e^+(\lambda_k, n)\in l_2(Z_+)$, и поэтому величина $\lambda_k(n)+\lambda_k^{-1}(n)$ есть собственное значение матрицы J_{n+1}^+. Значит, все числа $\lambda_k(n)$, лежащие внутри единичного круга, вещественны и различны. То же, очевидно, можно утверждать и относительно чисел $\lambda_k(n)$, лежащих вне круга, так как в этом случае величины $\lambda_k(n)+\lambda_k^{-1}(n)$ будут собственными значениями матрицы J_n^-. Если $|\lambda_k|=1$, то поскольку полином T имеет вещественные коэффициенты, $0=e^+(\lambda_k, n)=$ $=e^+(\bar\lambda_k, n)=e^+(\lambda_k^{-1}, n)$, откуда следует, что $e^+(\lambda_k, n)$ и $e^+(\bar\lambda_k, n)$ — линейно зависимые решения уравнения (2.1). Пусть $e^+(\lambda_k, n)=C\times$ $\times e^+(\bar\lambda_k, n)$. Тогда, в силу (2.2),

$$\left(\frac{\lambda_k}{\bar\lambda_k}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} C,\quad |\lambda_k|=1,$$

что возможно лишь при $\lambda_k=\pm 1$. Вещественность чисел λ_k доказана.

Остается показать, что полином $T(z)$ не может иметь кратных нулей, равных ± 1. Дифференцируя уравнение (2.1) по z, получим

$$J\frac{d}{dz}e^+(z, n)=(z+z^{-1})\frac{d}{dz}e^+(z, n)+(1-z^{-2})e^+(z, n).$$

Отсюда видно, что при $z=\pm 1$, функция $\frac{d}{dz}e^+(z, n)$ также является решением уравнения (2.1). Предположим, что $e^+(z, n)=0$ и одновременно $\frac{d}{dz}e^+(z, n)=0$ при $z=\pm 1$. Тогда решения $e^+(z, n)$ и $\frac{d}{dz}e^+(z, n)$ линейно зависимы. С другой стороны, из (2.2) вытекает, что

$$\frac{d}{dz}e^+(z, n)=\frac{nz^n}{\beta^+(n)}(1+o(1)),\quad n\to\infty,\ |z|<1+\varepsilon.$$

(Дифференцирование асимптотики законно, так как нами уже доказано представление (2.12), в котором $|\varkappa_k|>1$). Поэтому при $z=$ $=\pm 1$ решение $e^+(z, n)$ ограничено, а $\frac{d}{dz}e^+(z, n)$ — неограничено, что противоречит линейной зависимости этих решений.

Следствие 2.1. *Функция Вейля безотражательной якобиевой матрицы есть рациональная дробь вида:*

$$m(z)=zb(-1)\prod_{j=1}^{N}\frac{1-z\lambda_j^{-1}(0)}{1-z\lambda_j^{-1}(-1)}=\frac{z}{b(-1)}\prod_{j=1}^{N}\frac{z-\lambda_j(0)}{z-\lambda_j(-1)}.\qquad(2.15)$$

Доказательство. Поскольку коэффициенты матрицы J ограничены, операторы $J_0^\pm$, порождаемые матрицами $J_0^\pm$ в $l_2(Z_\pm)$, ограничены, и, следовательно, являются самосопряженными. Решения $e^+(z, n)$ и $e^-(z, n)$ принадлежат соответственно $l_2(Z_+)$ при $|z|<1$ и $l_2(Z_-)$ при $|z|>1$. Поэтому из формул (1.10) и определения функции Вейля следует, что

$$m(z)=\begin{cases} m^+(z+z^{-1})=\dfrac{e^+(z, 0)}{e^+(z, -1)}, & |z|<1\\ \dfrac{1}{m^-(z+z^{-1})}=\dfrac{e^-(z, 0)}{e^-(z, -1)}, & |z|>1.\end{cases}$$

одставляя сюда выражения (2.12), получим, что

$$m(z) = zb(-1)\prod_{j=1}^{N}\frac{1 - z\lambda_j^{-1}(0)}{1 - z\lambda_j^{-1}(-1)} \quad (|z| < 1),$$

$$m(z) = \frac{z}{b(-1)}\prod_{j=1}^{N}\frac{z - \lambda_j(0)}{z - \lambda_j(-1)} \quad (|z| > 1).$$

о из (2.14) следует, что

$$\prod_{k=1}^{N}\frac{\lambda_k(0)}{\lambda_k(-1)} = b^2(-1). \tag{2.16}$$

ткуда видно, что эти выражения совпадают, поэтому имеет место (2.15).

Раскладывая функцию Вейля в сумму простых дробей, с учетом свойства 4) функции Вейля (лемма 1.1), получаем

$$m(z) = \frac{1}{b(-1)}\left(z + \sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j}{\lambda_j(-1)} + \sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j}{z - \lambda_j(-1)}\right), \tag{2.17}$$

$$\alpha_k = \lambda_k(-1)\frac{\prod\limits_{j=1}^{N}(\lambda_k(-1) - \lambda_j(0))}{\prod\limits_{j\neq k}(\lambda_k(-1) - \lambda_j(-1))}. \tag{2.18}$$

Из того, что $m(z)$ есть функция Неванлинны (т. е. ее мнимая часть положительна в верхней и отрицательна в нижней полуплоскости), следует, что $\alpha_k < 0$.

Занумеруем числа $\lambda_r(0)$ и $\lambda_r(-1)$ в порядке возрастания. Условимся и в дальнейшем такую нумерацию обозначать индексом r, поскольку в других случаях мы будем упорядочивать эти числа по возрастанию величин $\lambda_k + \lambda_k^{-1}$.

Из неравенств $\alpha_k < 0$ следует, что

$$\begin{gathered}\lambda_1(0) < \lambda_1(-1) < \lambda_2(0) < \cdots < \lambda_s(0) < \lambda_s(-1) < 0,\\ 0 < \lambda_{s+1}(-1) < \lambda_{s+1}(0) < \cdots < \lambda_N(-1) < \lambda_N(0).\end{gathered} \tag{2.19}$$

Действительно, если $\alpha_k < 0$, то на вещественной оси функция $m(x)$ монотонно растет:

$$\frac{d}{dx}m(x) = \frac{1}{b(-1)}\left(1 + \sum_{j=1}^{N}\frac{-\alpha_j}{(x - \lambda_j(-1))^2}\right) > 0.$$

Кроме того, $m(\pm\infty) = \pm\infty$ и $m(x)$ имеет простой нуль в нуле. Поэтому ее нули $\lambda_1(0), \ldots, \lambda_s(0), 0, \lambda_{s+1}(0), \ldots, \lambda_N(0)$ и полюсы $\lambda_1(-1), \ldots, \lambda_s(-1), \lambda_{s+1}(-1), \ldots, \lambda_N(-1)$ перемежаются.

Еще раз подчеркнем, что числа $\lambda_k(n) + \lambda_k^{-1}(n)$ являются собственными значениями матриц J_{n+1}^{+} при $|\lambda_k| < 1$, и собственными значениями матрицы J_n^{-} при $|\lambda_k| > 1$. Набор чисел $\{\lambda_r(0), \lambda_r(-1)\}_{r=1}^{N}$

однозначно определяет функцию Вейля (коэффициент $b(-1)$) определяется соотношением (2.16)), а следовательно, и матрицу J. Этот набор мы будем называть спектральными данными безотражательной матрицы Якоби.

Тот факт, что спектральные данные являются нулями и полюсами функции Неванлинны $m(z)$, накладывает на них условие перемежаемости (2.19), необходимость которого была доказана выше. В теореме 2.1 будет доказано, что это условие достаточно для того, чтобы числа $\{\lambda_r(0), \lambda_r(-1)\}_{r=1}^N$ были спектральными данными некоторой безотражательной матрицы.

Выясним взаимосвязь спектральных данных и данных рассеяния.

Лемма 2.2. *Для всех $n \in \boldsymbol{Z}$ числа $\lambda_k(n)$ можно упорядочить так, что будут выполняться неравенства:*

$$\varkappa_1 + \varkappa_1^{-1} < \lambda_1(n) + \lambda_1^{-1}(n) \leqslant \cdots \leqslant \varkappa_s + \varkappa_s^{-1} \leqslant \lambda_s(n) + \lambda_s^{-1}(n) \leqslant -2$$
$$2 \leqslant \lambda_{s+1}(n) + \lambda_{s+1}^{-1}(n) \leqslant \varkappa_{s+1} + \varkappa_{s+1}^{-1} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_N(n) + \lambda_N^{-1}(n) < \varkappa_N + \varkappa_N^{-1}. \tag{2.20}$$

При этом для всех n кроме некоторого конечного множества K имеют место строгие неравенства.

Если для некоторого номера j в (2.20) имеет место равенство и $\varkappa_j = \lambda_j(n)$, то найдется такой номер j', что $\lambda_{j'}^{-1} = \varkappa_j$ и обратно, если для некоторого j $\lambda_j^{-1} = \varkappa_j$, то найдется номер j', такой, что $\lambda_j = \varkappa_j$.

Доказательство. Пусть $K \subset \boldsymbol{Z}$ — множество тех точек n, в которых для некоторого $z = \varkappa_k$ или $z = \pm 1$ выполнено $e^+(z^{-1}, n) \times e^-(z, n) = 0$.

Предположим, что множество K бесконечно. Это означало бы, что найдется такая подпоследовательность $n_j \to \pm\infty$ и число z, равное одному из $\varkappa_k$ или ± 1, для которых одновременно выполняются равенства: $e^+(z^{-1}, n_j)\, e^-(z, n_j) = 0$. Если $z = \pm 1$, то отсюда следует равенство нулю каждого из сомножителей, так как $e^-(z, n)$ и $e^+(z, n)$ имеют одинаковые корни. Если $z = \varkappa_k$, то равенство нулю каждого из сомножителей следует из соотношения (2.6). Если $n_j \to -\infty$, то это противоречит асимптотике $e^-(z, n)$, а если $n_j \to +\infty$, это противоречит асимптотике $e^+(z, n)$. Следовательно, множество K конечно.

Для доказательства неравенств (2.20) рассмотрим поведение функции

$$f(x) = \frac{e^-(x, n)\, e^+(x^{-1}, n)}{A(x)\,(x^{-1} - x)}$$

при $|x| \geqslant 1$, $x \in \boldsymbol{R}$. Все нули числителя в этом выражении принадлежат множеству $\{\lambda_k, \lambda_k^{-1}\}_{k=1}^N$, а знаменатель имеет простые нули в точках $\{\varkappa_k\}_{k=1}^N$ и ± 1. Кроме того, $f(\mp\infty) = \pm 0$, $f(\mp 1) = \pm\infty$.

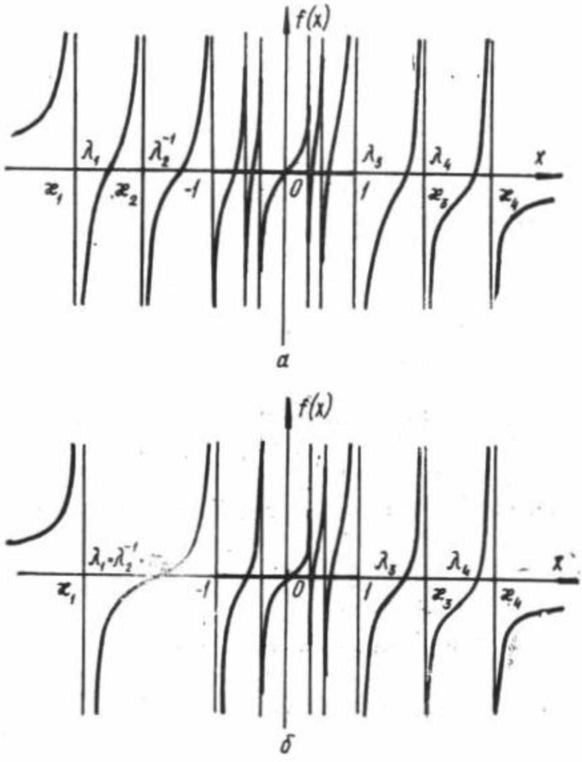
Покажем, что при $|x| > 1$ функция $f(x)$ возрастает на интервалах непрерывности: $f'(x) > 0$. Действительно, из (2.5) вытекает:

$$\frac{1}{f(x)} = b(n)\left(\frac{e^+(x^{-1}, n+1)}{e^+(x^{-1}, n)} - \frac{e^-(x, n+1)}{e^-(x, n)}\right),$$

а из формул (2.7) мы имеем

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)} = (x^{-2}-1)\left(\frac{\widetilde{\sum\limits_{k=n+1}}\, e^{+}(x^{-1},\,k)^{2}}{e^{+}(x^{-1},\,n)^{2}} + \frac{\sum\limits_{k=-\infty}^{n} e^{-}(x,\,k)^{2}}{e^{-}(x,\,n)^{2}}\right) < 0,\ |x|>1.$$

Поэтому при $n \notin K$ график функции $f(x)$ имеет такой вид, как показано на рисунке, *а*. В этом случае в (2.20) имеют место строгие неравенства. Если же $n \in K$ и одно из чисел $\{\lambda_k, \lambda_k^{-1}\}_{k=1}^{N}$ совпадает с одним из $\varkappa_k$, то в силу (2.6) обязательно найдется другое число из этого набора, равное $\varkappa_k^{-1}$. При этом $\varkappa_k$ будет двукратным корнем функции $e^{-}(x, n)\,e^{+}(x^{-1}, n)$ и однократным корнем функции $f(x)$ (рисунок, *б*)). Такая ситуация невозможна при $x = \varkappa_1$ и $x = \varkappa_N$, так как



Взаимное расположение спектральных данных χ и данных рассеяния λ

функция $f(x)$ монотонно растет и положительна (отрицательна) при $x \to -\infty$ $(x \to +\infty)$. Таким образом, неравенства (2.20) имеют место при всех $n \in \boldsymbol{Z}$.

Договоримся обозначать через $\hat{z}$ выражение $\hat{z} = z + z^{-1}$. За етим, что

$$(1 - za)(1 - z^{-1}a) = a(a - \hat{z}). \qquad (2.21)$$

Упорядочим числа λ_k в порядке неубывания величин $\hat{\lambda}_k$. Поскольку все числа λ_k различны, равенство $\hat{\lambda}_k = \hat{\lambda}_{k+1}$ может выполняться, только если $\lambda_k = \lambda_{k+1}^{-1}$. При этом, согласно лемме 2.2, возможны следующие случаи: $\lambda_{k-1} = \varkappa_k = \hat{\lambda}_k = -2$ или $2 < \lambda_k = \varkappa_k = \lambda_{k+1}$. Будем считать, что индексу k соответствует значение $\lambda_k = \varkappa_k$, а индексу k' — значение $\lambda_{k'}^{-1} = \varkappa_k$, где $k' = k - 1$ или $k' = k + 1$ соответственно. Таким образом, мы делаем упорядочение величин $\hat{\lambda}_k$ однозначным, даже если среди них есть равные.

Лемма 2.3. *Полиномы*

$$P(w) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^{N} (w - \varkappa_j), \quad P_0(w) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^{N} (w - \hat{\lambda}_j(-1))$$

связаны между собой соотношением

$$P(w) = P_0(w)\left(1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{\lambda_j(-1)\,(w - \hat{\lambda}_j(-1))}\right),$$

где числа α_k определены формулами (2.17).

Доказательство. Согласно формуле (2.5)

$$z^{-1} - z = b(-1)\,W[e^+(z),\ e^+(z^{-1})](-1) =$$
$$= b(-1)\,e^+(z, -1)\,e^+(z^{-1}, -1)\left(\frac{e^+(z^{-1}, 0)}{e^+(z^{-1}, 1)} - \frac{e^+(z, 0)}{e^+(z, -1)}\right) =$$
$$= b(-1)\,e^+(z, -1)\,e^+(z^{-1}, -1)\,(m(z^{-1}) - m(z)).$$

Подставим сюда выражения (2.12) для $e^+(z, -1)$:

$$z^{-1} - z = \frac{b(-1)}{\beta^+(-1)^2} \prod_{j=1}^{N} \frac{(1 - z\lambda_j^{-1}(-1))\,(1 - z^{-1}\lambda_j^{-1}(-1))}{(1 - z\varkappa_j^{-1})\,(1 - z^{-1}\varkappa_j^{-1})}\,(m(z^{-1}) - m(z)).$$

Воспользовавшись (2.14) и (2.21), упростим последнее соотношение

$$z^{-1} - z = b(-1) \prod_{j=1}^{N} \frac{z - \hat{\lambda}_j(-1)}{z - \varkappa_j}\,(m(z^{-1}) - m(z)).$$

Заметим, что согласно определению чисел α_k

$$b(-1)\,(m(z^{-1}) - m(z)) = z^{-1} - z + \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\alpha_j}{z^{-1} - \lambda_j(-1)} - \frac{\alpha_j}{z - \lambda_j(-1)}\right) =$$
$$= (z^{-1} - z)\left(1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{\lambda_j(-1)\,(z - \hat{\lambda}_j(-1))}\right).$$

Следовательно,

$$1 = \prod_{j=1}^{N} \frac{z - \hat{\lambda}_j(-1)}{z - \varkappa_j}\left(1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{\lambda_j(-1)\,(z - \hat{\lambda}_j(-1))}\right),$$

откуда вытекает утверждение леммы.

Лемма 2.4. *Пусть* $\{\lambda_k(0), \lambda_k(-1)\}_{k=1}^{N}$ *— спектральные данные некоторой безотражательной матрицы. Тогда нормировочные коэффициенты вычисляются по формулам:*

$$\mu_k^2 = \varkappa_k^3 \frac{\prod_{j\neq k}(\varkappa_k - \varkappa_j)}{\prod_j(\varkappa_k^{-1} - \varkappa_j)} \prod_{j=1}^{N} \frac{\varkappa_k^{-1} - \lambda_j(-1)}{\varkappa_k - \lambda_j(-1)} \tag{2.22}$$

в случае, если $\varkappa_k \neq \lambda_j^{\pm 1}$ *при всех* $j = \overline{1, N}$ *или*

$$\mu_k^2 = \varkappa_k \frac{\prod_{j\neq k}(\varkappa_k - \varkappa_j)}{\prod_j(\varkappa_k^{-1} - \varkappa_j)} \left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k(-1)}\right)^{-1} \left(\frac{\alpha_{k'}}{\lambda_{k'}(-1)}\right) \frac{\prod_{j\neq k'}(\varkappa_k^{-1} - \lambda_j(-1))}{\prod_{j\neq k}(\varkappa_k - \lambda_j(-1))}, \tag{2.23}$$

если $\lambda_k = \varkappa_k = \lambda_{k'}^{-1}$.

Доказательство. Из равенств (2.6), (2.8) и (2.9) следует:

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{\beta}\prod_{j=1}^{N}\frac{z - \varkappa_j}{z - \varkappa_j^{-1}}\bigg|_{z=\varkappa_k} = \frac{\mu_k^2}{\varkappa_k}\frac{e^-(\varkappa_k, n)}{e^+(\varkappa_k^{-1}, n)},$$

если $e^+(\varkappa_k^{-1}, n) \neq 0$. Отсюда, с учетом (2.12), получаем

$$\frac{1}{\beta}\frac{\prod_{j\neq k}(\varkappa_k - \varkappa_j)}{\prod_j(\varkappa_k^{-1} - \varkappa_j)} = \frac{\mu_k^2}{\varkappa_k}\left(\frac{\varkappa_k^n}{\beta^-(n)}\prod_{j=1}^{N}\frac{\varkappa_k - \lambda_j(n)}{\varkappa_k - \varkappa_j^{-1}}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{\beta^+(n)}{\varkappa_k^{-n}}\prod_{j=1}^{N}\frac{1 - \varkappa_k^{-1}\varkappa_j^{-1}}{1 - \varkappa_k^{-1}\lambda_j^{-1}(n)}\right).$$

Пользуясь соотношением (2.14), перепишем это равенство в виде

$$\mu_k^2 = \varkappa_k^{-2n+1}\frac{\prod_{j\neq k}(\varkappa_k - \varkappa_j)}{\prod_j(\varkappa_k^{-1} - \varkappa_j)}\prod_{j=1}^{N}\frac{\varkappa_k^{-1} - \lambda_j(n)}{\varkappa_k - \lambda_j(n)},$$

при $n = -1$ это и есть в точности (2.22)

Пусть $\lambda_k(-1) = \varkappa_k = \lambda_{k'}^{-1}(-1)$. Мы имеем $e^+(\varkappa_k^{-1}, n) = 0$ и $e^-(\varkappa_k, n) = 0$ при $n = -1$. Но тогда эти равенства наверняка не выполняется в соседней точке $n = 0$. Поэтому

$$\mu_k^2 = \varkappa_k\frac{\prod_{j\neq k}(\varkappa_k - \varkappa_j)}{\prod_j(\varkappa_k^{-1} - \varkappa_j)}\prod_{j=1}^{N}\frac{\varkappa_k^{-1} - \lambda_j(0)}{\varkappa_k - \lambda_j(0)}.$$

Остается заметить, что

$$\prod_{j=1}^{N}\frac{\varkappa_k^{-1} - \lambda_j(0)}{\varkappa_k - \lambda_j(0)} = \prod_{j=1}^{N}\frac{\lambda_{k'}(-1) - \lambda_j(0)}{\lambda_k(-1) - \lambda_j(0)} =$$

$$= \left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k(-1)}\right)^{-1} \left(\frac{\alpha_{k'}}{\lambda_{k'}(-1)}\right) \frac{\prod\limits_{j \neq k'} (\varkappa_k^{-1} - \lambda_j(-1))}{\prod\limits_{j \neq k} (\varkappa_k - \lambda_j(-1))},$$

откуда вытекает (2.23).

Теорема 2.1. *Для того чтобы набор* $\{\lambda_r^*(-1), \lambda_r^*(0)\}_{r=1}^N$ *вещественных чисел был спектральными данными безотражательной матрицы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:*

$$\lambda_1^*(0) < \lambda_1^*(-1) < \lambda_2^*(0) < \cdots < \lambda_s^*(0) < \lambda_s^*(-1) < 0;$$
$$0 < \lambda_{s+1}^*(-1) < \lambda_{s+1}^*(0) < \cdots < \lambda_N^*(-1) < \lambda_N^*(0).$$

Доказательство. Необходимость была доказана выше (см. (2.19)).

Достаточность. Пусть $\{\lambda_k^*(-1), \lambda_k^*(0)\}_{k=1}^N$ — набор чисел, удовлетворяющих условию теоремы. Будем считать, числа $\hat{\lambda}_k^*(-1)$ упорядочены по возрастанию. Рассмотрим полином $P^*(w) = R^*(w)\,R^*(w)$, где

$$P_0(w) = \prod_{j=1}^{N} (w - \hat{\lambda}_j^*(-1));$$

$$R^*(w) = 1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j^*}{\lambda_j^*(-1)\,(w - \lambda_j^*(-1))};$$

$$\alpha_k^* = \lambda_k^*(-1) \frac{\prod\limits_{j=1}^{N} (\lambda_k^*(-1) - \lambda_j^*(0))}{\prod\limits_{j \neq k} (\lambda_k^*(-1) - \lambda_j^*(-1))}.$$

Легко убедиться, что в силу условия теоремы $\alpha_k^* < 0$. Поэтому $R^*(\lambda_k^* \pm 0) = \pm\infty$, при $\lambda_k < 0$ и $R^*(\hat{\lambda}_k^* \pm 0) = \mp\infty$ при $\lambda_k > 0$ и, кроме того, $R^*(\pm\infty) = 1$.

Если числа $\lambda_j^*(-1)$ попарно различны, то они являются простыми полюсами функции $R^*(w)$. Последняя меняет знак на интервалах $(-\infty, \lambda_1^*)$, $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$, ..., $(\lambda_{s-1}^*, \lambda_s^*)$; $(\lambda_{s+1}^*, \hat{\lambda}_{s+2}^*)$, ..., $(\lambda_N^*, +\infty)$ $(0 \in (\hat{\lambda}_s^*, \hat{\lambda}_{s+1}^*)$, причем, поскольку $R(x)$ имеет ровно N нулей, то на каждом из этих интервалов лежит ровно один ее нуль, причем однократный. Если же $\hat{\lambda}_k(-1) = \lambda_{k'}(-1) = \hat{\varkappa}$, то $\varkappa$ будет двукратным корнем полинома $P_0^*(w)$ и однократным корнем полинома $P^*(w)$. Отсюда следует, что полином $P^*(w)$ имеет N вещественных простых нулей (обозначим их $\varkappa_k$), и выполняются неравенства

$$\varkappa_1 < \lambda_1^*(-1) \leqslant \cdots \leqslant \varkappa_s \leqslant \lambda_s^*(-1) \leqslant -2,$$
$$2 \leqslant \hat{\lambda}_{s+1}^*(-1) \leqslant \varkappa_{s+1} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_N^*(-1) < \hat{\varkappa}_N. \tag{2.24}$$

Пусть $\varkappa_k$ — те корни уравнения $\hat{\varkappa}_k = \varkappa + \varkappa^{-1}$, которые по модулю больше единицы. Положим

$$\mu_k^2 = \varkappa_k^3 \frac{\prod\limits_{j \neq k} (\varkappa_k - \varkappa_j)}{\prod\limits_j (\varkappa_k^{-1} - \varkappa_j)} \prod_{j=1}^{N} \frac{\varkappa_k^{-1} - \lambda_j^*(-1))}{\varkappa_k - \lambda_j^*(-1))} \tag{2.25}$$

в случае, если λ_k^* не совпадает ни с одним из $\varkappa_k$, или

$$\mu_k^2 = \varkappa_k \frac{\prod\limits_{j \neq k} (\varkappa_k - \varkappa_j)}{\prod\limits_j (\varkappa_k^{-1} - \varkappa_j)} \left(\frac{\alpha_k^*}{\lambda_k^*(-1)}\right)^{-1} \left(\frac{\alpha_{k'}^*}{\lambda_{k'}^*(-1)}\right) \frac{\prod\limits_{j \neq k'} (\varkappa_k^{-1} - \lambda_j^*(-1))}{\prod\limits_{j \neq k} (\varkappa_k - \lambda_j^*(-1))}, \tag{2.26}$$

если $\varkappa_k = \lambda_k^*(-1)$ и $\varkappa_k^{-1} = \lambda_{k'}(-1)$.

Используя неравенства (2.24) и отрицательность чисел α_k^*, легко доказать, что определенные таким образом числа μ_k^2 положительны. Поэтому набор данных $\{\varkappa_k, \mu_k^2\}_{k=1}^N$ является данными рассеяния некоторой безотражательной матрицы Якоби. Докажем, что соответствующие ей спектральные данные $\lambda_k(0)$ и $\lambda_k(-1)$ совпадают с первоначально заданным набором $\lambda_k^*(0)$, $\lambda_k^*(-1)$.

Рассмотрим полиномы следующего вида:

$$T(z) = \prod_{k=1}^{N} (z - \lambda_k(-1)) \quad \text{и} \quad T^*(z) = \prod_{k=1}^{N} (z - \lambda_k^*(-1)).$$

Для любого $\varkappa_k$ $(k = \overline{1, N})$

$$\mu_k^2 T(\varkappa_k) = \varkappa_k^3 \frac{\prod\limits_{j \neq k} (\varkappa_k - \varkappa_j)}{\prod\limits_j (\varkappa_k^{-1} - \varkappa_j)} T(\varkappa_k^{-1}). \tag{2.27}$$

Действительно, если $\varkappa_k$ не совпадает ни с одним из $\lambda_j^{\pm 1}(-1)$, то равенство (2.27) следует из (2.22). Если же $\lambda_k(-1) = \lambda_k^{-1}(-1) = \varkappa_k$, то правая и левая части этого равенства обращаются в нуль. Аналогичным образом из (2.25) получается соотношение

$$\mu_k^2 T^*(\varkappa_k) = \varkappa_k^3 \frac{\prod\limits_{j \neq k} (\varkappa_k - \varkappa_j)}{\prod\limits_j (\varkappa_k^{-1} - \varkappa_j)} T^*(\varkappa_k^{-1}). \tag{2.28}$$

Из (2.27) и (2.28) вытекает тождество:

$$T(z)\, T^*(z^{-1}) \equiv T^*(z)\, T(z^{-1}). \tag{2.29}$$

Действительно, функция $U(z) \overset{\text{def}}{=} T(z)\, T^*(z^{-1}) - T^*(z)\, T(z^{-1})$ может быть представлена в виде $U(z) = (z^{-1} - z)\, P_{N-1}(z + z^{-1})$, где $P_{N-1}(\hat{z})$ — некоторый полином степени $N-1$ от z. С другой стороны, $U(\varkappa_k) = 0$ и, следовательно, $P(\varkappa_k) = 0$ при $k = \overline{1, N}$. Поэтому $P_{N-1}(\hat{z}) \equiv 0$ и $U(z) \equiv 0$.

Исходя из (2.29) и пользуясь неравенствами (2.24) и (2.20) докажем теперь, что $\lambda_k(-1) = \lambda_k^*(-1)$, т. е. $T(z)$ и $T^*(z)$ имеют одинаковые корни. Доказательство проведем по индукции для $k = \overline{1, s}$, т. е. для отрицательных λ. Примем для λ_k^* такой же принцип нумерации, как для λ_k, т. е. если $\lambda_j^* < \lambda_k^*$, то $j < k$, а если $\hat{\lambda}_{k-1}^* = \varkappa_k = \hat{\lambda}_k^*$, то $(\lambda_{k-1}^*)^{-1} = \varkappa_k = \lambda_k^*$. Мы имеем из (2.24) и (2.20); $\varkappa_1 < \lambda_1 \leqslant \varkappa$ и $\varkappa_1 < \lambda_1^* \leqslant \varkappa$, где $\varkappa = \varkappa_2$ или $\varkappa = -2$. Тогда либо имеют место одновременно оба равенства: $\lambda_1 = \varkappa$ и $\hat{\lambda}_1^* = \varkappa$, либо одно из них не выполнено. В первом случае $\lambda_1^{-1} = (\lambda_1^*)^{-1} = \varkappa_2 = \lambda_2 = \lambda_2^*$ при $\varkappa = \varkappa_2$ или $\lambda_1 = \lambda_1^* = -1$ при $\varkappa = -2$. Во втором случае из неравенства $\lambda_1 < \varkappa$ $(\lambda_1^* < \varkappa)$ следует, что $T^*(\lambda_1)\, T(\lambda_1^{-1}) = 0$, $T(\lambda_1^{-1}) \neq 0$ $(T(\lambda_1^*) \times T^*(\lambda_1^{*-1}) = 0$, $T(\lambda_1^{*-1}) \neq 0)$ и, значит, $T^*(\lambda_1) = 0$ $(T(\lambda_1^*) = 0)$. Пусть равенства $\lambda_j = \lambda_j^*$ доказаны для отрицательных λ_j $(j = \overline{1, k-1})$. Отметим, что если $\lambda_{k-1} = \varkappa_k$, то сразу получим $\lambda_{k-1} = \varkappa_k = \lambda_k$, и $\lambda_{k-1} = \varkappa_k = \hat{\lambda}_k^*$, откуда $\lambda_{k-1}^{-1} = \varkappa_k = \lambda_k = \lambda_k^*$. Поэтому нуждается в рассмотрении только ситуация, когда

$$\lambda_{k-1} < \varkappa_k < \lambda_k \leqslant \varkappa, \quad \lambda_{k-1} < \varkappa_k < \lambda_k^* \leqslant \hat{\varkappa},$$

где $\varkappa = \varkappa_{k+1}$ или $\varkappa = -2$. Имеем две возможности: $\hat{\lambda}_k = \varkappa = \hat{\lambda}_k^*$ (и тогда $\lambda_k^{-1} = \varkappa = (\lambda_k^*)^{-1}$) или $\lambda_k < \varkappa$ $(\lambda^* < \varkappa)$. Во втором случае $T^*(\lambda_k)\, T(\lambda_k^{-1}) = 0$, $T(\lambda_k^{-1}) \neq 0$ $(T(\lambda_k^*)\, T^*(\lambda_k^{*-1}) = 0$, $T^*(\lambda_k^{*-1}) \neq 0)$ и, значит, $T^*(\lambda_k) = 0$ $(T(\lambda_k^*) = 0)$.

Наконец, все доказательство для положительных λ проводится аналогично, начиная с λ_N.

Мы показали, что $\lambda_j(-1) = \lambda_j^*(-1)$.

Положим

$$\alpha_k = \lambda_k(-1) \frac{\prod\limits_{j=1}^{N} (\lambda_k(-1) - \lambda_j(0))}{\prod\limits_{j \neq k} (\lambda_k(-1) - \lambda_j(-1))}.$$

Тогда, по лемме 2.3,

$$\prod_{j=1}^{N} (w - \varkappa_j) = \prod_{j=1}^{N} (w - \lambda_j(-1)) \left(1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{\lambda_j(-1)\,(w - \lambda_j(-1))}\right).$$

С другой стороны, по построению,

$$\prod_{j=1}^{N} (w - \varkappa_j) = \prod_{j=1}^{N} (w - \lambda_j^*(-1)) \left(1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{\lambda_j^*(-1)\,(w - \lambda_j^*(-1))}\right).$$

Так как равенства $\lambda_j(-1) = \lambda_j^*(-1)$ уже доказаны, из двух последних соотношений следует, что

$$1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j^*}{\lambda_j(-1)\,(w - \lambda_j(-1))} = 1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{\lambda_j(-1)\,(w - \lambda_j(-1))}.$$

В случае $\hat{\lambda}_k(-1) \neq \hat{\lambda}_j(-1)$ $(j \neq k)$, отсюда следует, что $\alpha_k = \alpha_k^*$. Если $\lambda_k(-1) \neq \lambda_{k'}^{-1}(-1)$, то

$$\frac{\alpha_k}{\lambda_k(-1)} + \frac{\alpha_{k'}}{\lambda_{k'}(-1)} = \frac{\alpha^*}{\lambda_k(-1)} + \frac{\alpha_{k'}^*}{\lambda_{k'}(-1)},$$

и согласно (2.23) и (2.26)

$$\left(\frac{\alpha_k}{\lambda_k(-1)}\right)^{-1}\left(\frac{\alpha_{k'}}{\lambda_{k'}(-1)}\right) = \left(\frac{\alpha_k^*}{\lambda_k^*(-1)}\right)^{-1}\left(\frac{\alpha_{k'}}{\lambda_{k'}(-1)}\right).$$

Следовательно, и в этом случае $\alpha_k = \alpha_k^*$ и $\alpha_{k'} = \alpha_{k'}^*$. По определению чисел α_k и α_k^* и с учетом равенств $\lambda_j(-1) = \lambda_j^*(-1)$, $\alpha_j = \alpha_j^*$ $(j = \overline{1, N})$ мы получаем

$$\prod_{j=1}^{N} (\lambda_k(-1) - \lambda_j^*(0)) = \prod_{j=1}^{N} (\lambda_k(-1) - \lambda_j(0)) \; (k = \overline{1, N}),$$

поэтому полиномы

$$S_N(z) \overset{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^{N} (z - \lambda_j(0)) = z^N + c_{N-1}z^{N-1} + \cdots + c_0 \text{ и}$$

$$S_N^*(z) \overset{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^{N} (z - \lambda_j^*(0)) = z^N + c_{N-1}^* z^{N-1} + \cdots + c_0^*$$

совпадают в N точках. Следовательно, $S_N(z) = S_N^*(z)$, откуда $\lambda_j(0) = \lambda_j^*(0)$ $(j = \overline{1, N})$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Для того чтобы произвольная матрица Якоби была безотражательной, необходимо и достаточно, чтобы ее функция Вейля была рациональна.*

Доказательство. Необходимость доказана в следствии 2.1. *Достаточность.* Пусть функция Вейля некоторой матрицы J рациональна. Тогда из свойств функции Вейля (лемма 1.1) следует, что, во-первых, $m(z)$ — функция Неванлинны, а во-вторых, $\lim\limits_{z\to 0}\frac{m(z)}{z} = \lim\limits_{z\to\infty}\frac{z}{m(z)} = C$. Последнее позволяет представить функцию $z^{-1}m(z)$ в виде отношения двух полиномов одинаковой степени. Пусть $\lambda_k^*(0)$ и $\lambda_k^*(-1)$ — их нули. Тогда

$$m(z) = zC\prod_{j=1}^{N}\frac{1 - z\lambda_j^{*-1}(0)}{1 - z\lambda_j^{*-1}(-1)} = Cz\prod_{j=1}^{N}\frac{\lambda_j^*(-1)}{\lambda_j^*(0)}\prod_{j=1}^{N}\frac{z - \lambda_j^*(0)}{z - \lambda_j^*(-1)}$$

и

$$C = \lim_{z\to\infty}\frac{z}{m(z)} = \frac{1}{C}\prod_{j=1}^{N}\frac{\lambda_j^*(0)}{\lambda_j^*(-1)} \Rightarrow C^2 = \prod_{j=1}^{N}\frac{\lambda_j^*(0)}{\lambda_j^*(-1)}.$$

Из того, что $m(z)$ — функция Неванлинны, следует, что, ее нули $\{\lambda_k^*(0)\}_{k=1}^N \cup \{0\}$ и полюсы $\{\lambda_k^*(-1)\}_{k=1}^N$ вещественные, простые и перемежаются. Значит, набор чисел $\{\lambda_r(-1), \lambda_r(0)\}_{r=1}^N$ удовлетворяет условию теоремы 2.1 и поэтому является спектральными данными безотражательной матрицы. Функция Вейля этой матрицы совпадает с $m(z)$.

Замечание. Из доказательства видно, что верно утверждение: для того, чтобы некоторая рациональная функция $m(z)$ была функцией Вейля, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Im} m(z) \operatorname{Im} z > 0$ ($\operatorname{Im} z \neq 0$) и $\lim\limits_{z\to 0} \frac{m(z)}{z} = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{z}{m(z)} = C > 0$.

3. Приложение[1].

При изучении спектральных свойств оператора Штурма—Лиувилля на полуоси и на всей оси эффективным техническим средством являются операторы преобразования [4]. В этом приложении строится дискретный оператор преобразования для якобиевых матриц. Роль ядра оператора преобразования здесь будет играть бесконечная треугольная матрица. Кроме этого, даются оценки для элементов матрицы преобразования через элементы исходной якобиевой матрицы. В качестве следствия будет доказано существование решений $e^{\pm}(z, n)$.

Рассмотрим конечноразностное уравнение:

$$b(n-1)\psi(n-1) + b(n)\psi(n+1) + a(n)\psi(n) = (z + z^{-1})\psi(n), \quad (3.1)$$

где $b(n) > 0$ и коэффициенты $a(n)$ достаточно быстро стремятся к нулю, а $b(n)$ — к единице при $n \to \pm\infty$.

Сделав замену

$$\psi(n) = \frac{\varphi(n)}{\beta^+(n)}, \quad \beta^+(n) = \prod_{k=n}^{\infty} b(n),$$

приведем уравнение (4.1) к виду: $\varphi(n-1) + b^2(n)\varphi(n+1) + a(n)\varphi(n) = (z + z^{-1})\varphi(n)$. Полагая $f(n) = a(n)\varphi(n) + (b^2(n) - 1) \times \varphi(n+1)$, получим:

$$\varphi(n-1) + \varphi(n+1) - (z + z^{-1})\varphi(n) = -f(n). \quad (3.2)$$

Если $a(n) = 0$, $b(n) = 1$ при $|n| > N$, то $f(n) = 0$ при $|n| > N$ и уравнение (3.2) становится однородным: $\varphi(n-1) + \varphi(n+1) - (z + z^{-1})\varphi(n) = 0$. Последнее, очевидно, имеет решения z^n и z^{-n}. Это позволяет предположить, что существует решение уравнения (3.2), имеющее вид:

$$\varphi(n) = z^n + \sum_{m=n+1}^{\infty} K(n, m) z^m. \quad (3.3)$$

Считая правую часть $-f(n)$ уравнения (3.2) известной, мы можем записать формальное частное решение неоднородного уравнения следующим образом:

$$\varphi(n) = z^n - \sum_{k=n+1}^{\infty} f(n+k) S(k), \quad S(k) = \frac{z^k - z^{-k}}{z - z^{-1}}.$$

---

[1] К сожалению, мы не нашли в литературе строгого доказательства существования решений $e^{\pm}(z, n)$ и поэтому для полноты изложения приводим его здесь.

Подставляя выражение (3.3) в это уравнение, получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} K(n, n+m) z^m = -\sum_{k=1}^{\infty} a(n+k)\left(z^k + z^k \sum_{m=1}^{\infty} K(n+k, m+n+k) z^m\right) \times$$
$$\times S(k) - \sum_{k=1}^{\infty} (b^2(n+k)-1)\left(z^{k+1} + z^{k+1}\sum_{m=1}^{\infty} K(n+k+1,\right.$$
$$\left. m+n+k+1) z^m\right) S(k).$$

Раскладывая $S(k)$ по степеням z, перемножая соответствующие ряды и приравнивая коэффициенты, получим

$$K(n, n+2l) = -\sum_{k=n+l+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{l} a(k-j) K(k-j,\ k+j-1) -$$
$$-\sum_{k=n+l+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{l-1} (b^2(k-j-1)-1) K(k-j, k+j) - \sum_{k=n+l}^{\infty} (b^2(k)-1),$$
$$K(n, n+2l+1) = \sum_{k=n+l+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{l} a(k-j) K(k-j, k+j) -$$
$$-\sum_{k=n+l+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{l} (b^2(k-j)-1) K(k-j+1, k+j+1) - \sum_{k=n+l+1}^{\infty} a(k).$$

Сделав в этих соотношениях подстановку:

$$K_1(n, j) = K(n-j,\ n+j+1),$$
$$K_2(n, j) = K(n-j,\ n+j)$$

и заменяя $n+l$ на n, мы приходим к следующей системе рекуррентных формул:

$$K_2(n, l) = -\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{l} a(k-j) K_1(k-1, j-1) -$$
$$-\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{l-1} (b^2(k-j-1)-1) K_2(k, j) - \sum_{k=n}^{\infty} (b^2(k)-1), \quad (3.5)$$
$$K_1 = (n, l) = -\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{l} a(k-j) K_2(k, j) -$$
$$-\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{l} (b^2(k-j)-1) K_1(k, j-1) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a(k). \quad (3.6)$$

Поясним последнее утверждение. Полагая $l=0$ в (3.5), имеем:

$$K_1(n, 0) = -\sum_{k=n+1}^{\infty} a(k).$$

Теперь если при всех $n \in \mathbf{Z}$ известны коэффициенты $K_1(n, j)$ для $j=0, 1, \ldots, l-1$ и известны $K_2(n, j)$ для $j=1, \ldots, l-1$, то можно вычислить $K_2(n, l)$, пользуясь (3.5) и $K_2(n, j)$, пользуясь (3.6). При этом, если для всех $n \in Z$ соответствующие ряды будут сходиться, мы будем говорить, что система (3.5)—(3.6) разрешима.

Для того чтобы получить оценки элементов $K_i(n, l)$ $(i=1, 2)$, нам потребуется одно простое утверждение, которое мы приведем без доказательства.

Лемма 3.1. *Пусть $q(n)$ — последовательность неотрицательных чисел, такая, что $\sum^{\infty} nq(n) < \infty$, $Q(n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} q(k)$. Тогда 1) ряд $\sum^{\infty} Q(n)$ сходится; 2) ряд $\sum q(n) \exp Q(n)$ сходится и имеет место оценка*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} q(k) \exp Q(k) \leqslant \exp Q(n) - 1.$$

Пользуясь леммой 3.1, получим теперь нужные нам неравенства для $K_i(n, l)$.

Пусть

$$\sum^{\infty} k|a(k)| < \infty \text{ и } \sum^{\infty} k|b^2(k) - 1| < \infty. \tag{3.7}$$

Введем обозначения

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a(k)| \overset{\text{def}}{=} q(n) \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} q(k) \overset{\text{def}}{=} Q(n),$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} |b^2(k) - 1| \overset{\text{def}}{=} p(n) \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho(k) \overset{\text{def}}{=} P(n).$$

В силу условий (3.7) последовательности q, $Q(n)$ и p, $P(n)$ определены при всех n. Кроме того, они монотонно не возрастают и стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Лемма 3.2. *Если коэффициенты $a(n)$ и $b(n)$ удовлетворяют условию (3.7), то система рекуррентных формул (3.5)—(3.6) разрешима и имеет место оценка:*

$$|K_i(n, l)| \leqslant (q(n) + p(n)) \exp(Q(n - l) + P(n - l)) \quad i = 1,\ 2. \tag{3.8}$$

Для доказательства применим индукцию по l. При $l = 0$ имеем

$$|K_1(n, 0)| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} a(k)\right| \leqslant q(n).$$

Пусть оценка (3.8) доказана для $K_1(n, j)$ при $j = 0, \ldots, l - 1$ и для $K_2(n, j)$ при $j = 1, \ldots, l - 1$ $(n \in \mathbf{Z})$. Тогда $|K_2(n, l)| \leqslant$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{l} |a(k - j)| (q(k - 1) + p(k - 1)) \times$$

$$\times \exp(Q(k - j) + P(k - j)) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{l-1} |b^2(k - j - 1) - 1| \times$$

$$\times (q(k) + p(k)) \exp(Q(k - j) - P(k - j)) + p(n) \leqslant$$

$$\leqslant (q(n) + p(n)) \sum_{k=n+1}^{\infty} q(k - l) \exp(Q(k - l) + P(k - l)) +$$

$$+ (p(n + 1) + q(n + 1)) \sum_{k=n+1}^{\infty} p(k - l) \exp(Q(k - l + 1) + P(k - l + 1)) +$$

$$+ p(n) \leqslant (q(n) + p(n)) \sum_{k=n+1}^{\infty} (q(k - l) + p(k - l)) \times$$

$$\times \exp(Q(k - l) + P(k - l)) + p(n)$$

и по лемме 3.1, $|K_2(n, l)| \leqslant (q(n)+p(n))(\exp(Q(n-l)+P(n-l)-1)+$ $+p(n) \leqslant (q(n)+p(n))\exp(Q(n-l)+P(n-l))$.

Точно так же получается неравенство $K_1(n, l) \leqslant (q(n)+p(n)) \times$ $\times \exp(Q(n-l)+P(n-l))$.

Делая обратную замену в (3.8), получим

$$|K(n, m)| \leqslant q\left(\left[\frac{n+m}{2}\right]\right) + p\left(\left[\frac{n+m}{2}\right]\right)\exp(Q(n)+P(n)). \qquad (3.9)$$

Из этих оценок и из условий (3.9) видно, что все формально записанные ряды сходятся в круге $|z| < 1$ и поэтому представление (3.3) имеет место в этом круге. Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 3.1. *При условиях (3.7) и* $|z| \leqslant 1$ *уравнение (3.1) имеет решение вида*

$$\psi(z, n) = \frac{1}{\beta^+(n)}\left(z^n + \sum_{m=n+1}^{\infty} K(n, m) z^m\right),$$

$$\beta^+(n) = \prod_{k=1}^{\infty} b(k), \qquad (3.10)^*$$

где элементы матрицы K удовлетворяют неравенству (3.9).

Следствие. *Пусть J — быстроубывающая якобиева матрица в Z, т. е.*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} n|a(n)| < \infty \quad и \quad \sum_{-\infty}^{\infty} n|b^2(n)-1| < \infty.$$

Тогда уравнение $(J\psi)(z, n) = (z+z^{-1})\psi(z, n)$ имеет решения $e^+(z, n)$ и $e^-(z, n)$, голоморфные соответственно внутри и вне единичного круга, непрерывные вплоть до его границы, причем

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{|z|<1}\left|e^+(z, n) - \frac{z^n}{\beta^+(n)}\right| = 0,$$

$$\lim_{n\to-\infty}\sup_{|z|>1}\left|e^-(z, n) - \frac{z^n}{\beta^-(n)}\right| = 0,$$

$$\lim_{z\to 0}\sup_{n>N}\left|z^{-n-1}\left(e^+(z, n) - \frac{z^n}{\beta^+(n)}\right)\right| < \infty,$$

$$\lim_{z\to\infty}\sup_{n<N} z^{-n+1}\left(e^-(z, n) - \frac{z^n}{\beta^-(n)}\right)\Big| < \infty,$$

где

$$\beta^+(n) = \prod_{k=n}^{\infty} b(k), \qquad \beta^-(n) = \prod_{k=-\infty}^{n-1} b(k).$$

---

* Сходимость ряда $\sum^{\infty} k|b^2(k)-1|$ уже означает абсолютную сходимость бесконечного произвеедения $\beta^+(n) = \prod_{k=n}^{\infty} b(k)$.

Существование решения $e^+(z, n)$ вытекает непосредственно из теоремы 3.1. Рассмотрим матрицу J' с коэффициентами $a'(n) = a(-n)$, $b'(n) = b(-n-1)$. Тогда для $\psi(n) = \psi'(n)$ $(J'\psi') = (z + z^{-1})\psi \leftrightarrow J\psi = (z + z^{-1})\psi$. Для доказательства существования решения $e^-(z, n)$ достаточно теперь применить теорему 3.1 к матрице J' и заменить z на z^{-1}.

Список литературы: 1. *Марченко В. А.* Задача Коши для уравнения КдФ с неубывающими начальными данными // Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. К., 1990. С. 168—213. 2. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. М., 1961. 310 с. 3. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. М., 1980. 320 с. 4. *Марченко В. А.* Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. К., 1977. 332 с.

Поступила в редколлегию 10.12.90

УДК 517

А. Л. РОНКИН

ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ИЗ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СУММ (СЛУЧАЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ)

В статье автора [1] рассматривалась целая функция $f(\xi)$, $\xi \in C$, такая, что некоторая натуральная степень l ее представима в виде конечной экспоненциальной суммы:

$$(f(\xi))^l = \sum_{k=0}^{r} c_k(\xi) \exp(a_k \xi^p), \tag{1}$$

где $p \in N$, $a_k \in C$ и коэффициенты $c_k(\xi)$ — целые функции не более чем минимального типа при порядке p. Было доказано, что такая функция $f(\xi)$ сама является конечной суммой типа (1).

В настоящей заметке обобщается приведенное утверждение на случай функций нескольких переменных. При доказательстве основных результатов будет использована следующая теорема.

Теорема А [1]. *Пусть целая функция $f(\xi)$, $\xi \in C$ такова, что*

$$(f(\xi))^l = \sum_{k=0}^{r} a_k(\xi) \exp(\lambda_k \xi^p),$$

где l, $p \in N$; $a_k(\xi)$ — целые функции не более чем минимального типа при порядке p. Пусть далее $\operatorname{Re}\lambda_0 > \operatorname{Re}\lambda_k$ при $k > 0$.

Тогда существует такая целая функция $\varphi(\xi)$, что $(\varphi(\xi))^l = a_0(\xi)$ и

$$f(\xi) = \varphi(\xi) \exp\left(\frac{1}{l}\lambda_0 \xi^p\right)\left(\sum_{k=0}^{R} d_k(\xi) \exp(\gamma_k \xi^p)\right), \tag{2}$$

где $\sum_{k=0}^{R} d_k(\xi)\exp(\gamma_k \xi^p)$ — отрезок* ряда, полученного путем подстановки суммы $\sum_{k=0}^{r} d_k(\xi)(a_0(\xi))^{-1}\exp((\lambda_k-\lambda_0)\xi^p)$ в биномиальный ряд

$$(1+u)^l = 1+\frac{1}{l}u+\frac{\frac{1}{l}\left(\frac{1}{l}-1\right)}{2!}u^2+\cdots+C^k_{\frac{1}{l}}u^k+\cdots \qquad (3)$$

и последующим упорядочиванием получаемых при этом слагаемых по убыванию действительных частей показателей экспонент γ_k.

Замечание. Нетрудно видеть, что в представлении (2) показатели γ_k являются линейными комбинациями чисел $\{\lambda_j\}_{j=0}^{r}$ с целыми коэффициентами, а функции $d_k(\xi)$ получены из функций $\{a_j(\xi)\}_{j=0}^{r}$ и $(\varphi(\xi))^{-1}$ при помощи конечного числа операций сложения, умножения и умножения на рациональное число.

Для облегчения изложения и записи в дальнейшем мы будем придерживаться следующих обозначений и определений: $\xi \in C$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in C^n$, G_p^n — множество целых функций $f(z)$ не более чем минимального типа при порядке p, т. е. таких, что либо $f(z) \equiv 0$, либо $\overline{\lim\limits_{z\to\infty}}|z|^{-p}\ln|f(z)| = 0$. Назовем G_p^n-квазиполиномом целую функцию, представимую в виде конечной суммы $\sum a_k(z)\exp(\lambda_k(z))$, где $a_k(z) \in G_p^n$, а $\lambda_k(z)$ — полиномы степени не более чем p.

Очевидно, что каждый G_p^n-квазиполином имеет представление $\sum a_k(\xi)\exp(\lambda_k(z))$, где $a_k \in G_p^n$, $\lambda_k(z)$ — различные однородные полиномы степени p. Таким образом, G_p^1 — квазиполином от переменной ξ имеет вид $\sum a_k(\xi)\exp(\lambda_k\xi^p)$, что совпадает с определением, данным в [1]. С другой стороны, если фигурирующие в определении G_p^n-квазиполинома коэффициенты $c_k(z)$ являются полиномами, то такой G_p^n-квазиполином принадлежит специальному классу A_n экспоненциальных сумм, рассмотренному в [3], и для которого был поставлен и остался открытым вопрос о возможности извлечения корня в классе.

Основному результату заметки теореме 2 предпошлем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* Ω — *область в* C^n *и* $f(z,\xi)$ — *голоморфная в* $\Omega\times C$ *функция. Пусть далее* l, $p \in N$ *и*

$$(f(z,\xi))^l = \sum_{k=0}^{r} a_k(z,\xi)\exp(\lambda_k(z)\xi^p), \qquad (4)$$

где $a_k(z,\xi)$, $\lambda_k(z)$ — *голоморфные функции соответственно в* $\Omega\times C$ *и* C, *причем* $\lambda_j(z)\not\equiv\lambda_i(z)$ *при* $j\neq i$, *а* $a_k(z,\xi)$ *при каждом фиксированном* z, *как функция* ξ *принадлежит* G_p^1

* Доказательство того, что остаток $\sum_{k>R} d_k(\xi)\exp(\gamma_k\xi^p)$ соответствующего ряда тождественно равен нулю, опирается на теорию специальных асимптотических рядов, изложенную в [3].

Тогда существует такой номер m и такая голоморфная в $\Omega\times C$ функция $\varphi(z, \xi)$, что $(\varphi(z, \xi))^l = a_m(z, \xi)$ и $f(z, \xi) = \sum_{k=0}^{R} b_k(z, \xi) \times \exp(\beta_k(z)\xi^p)$, где функции $b_k(z, \xi)$ получены из функций $\{a_j(z, \xi)\}$ и $(\varphi(z, \xi))^{-1}$ с помощью конечного числа операций умножения, сложения, умножения на скаляр, а $\beta_k(z)$ — линейные комбинации показателей $\lambda_k(z)$ с рациональными коэффициентами.

Доказательство. Поскольку $\lambda_i(z) \not\equiv \lambda_j(z)$ при $i \neq j$, то существуют такие индекс m, область $\Omega_1 \subset \Omega$ и положительное число d, что $\operatorname{Re}\lambda_m(z) - \operatorname{Re}\lambda_k(z) > d$ при $m \neq k$ и $z \in \Omega_1$. Не уменьшая общности, можно считать, что $m=0$ и $\lambda_0(z) \equiv 0$. Тогда $\operatorname{Re}\lambda_k(z) < -d$ при $k \geqslant 1$, $z \in \Omega_1$. С учетом сделанных упрощающих предположений перепишем равенство (4) в виде

$$(f(z, \xi))^l = a_0(z, \xi)\left(1 + \sum_{k=1}^{r} \frac{a_k(z, \xi)}{a_0(z, \xi)} \exp(\lambda_k(z)\xi^p\right).$$

Зафиксировав в этом равенстве $z \in \Omega_1$, мы попадаем в ситуацию, описанную в условиях теоремы 1. Значит, существует такая целая (по переменной ξ) функция $\varphi_z(\xi) = \varphi(z, \xi)$, что $(\varphi(z, \xi))^l = a_0(z, \xi)$ и $f(z, \xi) = \varphi(z, \xi)\left(\sum_{k=0}^{R(z)} d_k(z, \xi)\exp(\gamma_k(z)\xi^p)\right)$, где $\sum_{k=0}^{R(z)} \ldots$ — отрезок ряда, полученного после формальной подстановки $\sum_{k=1} \frac{a_k(z, \xi)}{a_0(z, \xi)} \times \exp(\lambda_k(z)\xi^p)$ в ряд (3) и упорядочивания членов по убыванию действительных частей показателей $\gamma_k(z)$. Покажем, что множество V всех возможных конечных экспоненциальных сумм такого типа (суммы сложным образом зависят от зафиксированного z) не более чем счетно.

Обозначим через V_L множество конечных сумм, возникающих при применении теоремы A, показатели $\gamma_k(z)$ которых удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\gamma_k(z) > -L$. Очевидно, что $V = \bigcup_{L=0}^{\infty} V_L$. Поэтому для доказательства счетности множества V достаточно доказать конечность каждого из множеств V_L.

Понятно, что для любого L найдется такое $M \in N$, что $dM > L$. Все возможные слагаемые, составляющие суммы из V_L, содержатся в экспоненциальной сумме:

$$\sum_{k=0}^{M} C_{\frac{1}{l}}^{k} \left(\sum_{j=1}^{r} \frac{a_j(z, \xi)}{a_0(z, \xi)} \exp(\lambda_k(z)\xi)^p\right)^k. \tag{5}$$

Действительно, подстановка $\sum \frac{a_j}{a_0}\exp(\lambda_j\xi^p)$ в остальные члены ряда (3) будет давать слагаемые с показателями $\gamma_s(z)$, удовлетворяющими условию $\operatorname{Re}\gamma_s(z) < M(-d) < -L$.

В сумме (5) число слагаемых, полученных после возведений в степени, конечно (не более чем Mr^M). Значит, и число различных выборок конечно (не более чем 2^{Mr^M}), т. е. множества V_L — конечны при любом L и, следовательно, множество V — не более чем счетно. Значит, существует такой шар $\Omega_2 \subset \Omega_1$ и такое число $R \in N$, что на плотном в Ω_2 множестве Ω_3 значений z тождественно по ξ выполняется равенство

$$f(z, \xi) = \varphi(z, \xi) \left(\sum_{k=0}^{R} d_k(z, \xi) \exp(\gamma_k(z) \xi^p) \right), \tag{6}$$

где функции $d_k(z, \xi)$, $\gamma_k(z)$ получены описанным ранее способом. Рассмотрим теперь мероморфную в $\Omega \times C$ функцию $\psi(z, \xi)$, определенную равенством

$$\psi(z, \xi) = \frac{f(z, \xi)}{\sum\limits_{k=0}^{R} d_k(z, \xi) \exp(\gamma_k(z) \xi^p)}. \tag{7}$$

Согласно (6) при $(z, \xi) \in \Omega_3 \times C$ имеем $\varphi(z, \xi) = \psi(z, \xi)$. Поскольку $(\varphi(z, \xi))^l = a_0(z, \xi)$ при $(z, \xi) \in \Omega_3 \times C \subset \Omega_1 \times C$, то

$$(\psi(z, \xi))^l = a_0(z, \xi) \tag{8}$$

при $(z, \xi) \in \Omega_3 \times C$. Но $\Omega_3 \times C$ — множество единственности. Следовательно, последнее равенство выполняется при $(z, \xi) \in \Omega \times C$. Таким образом, равенство (7) с учетом справедливости (8) дает нам искомое представление функции $f(z, \xi)$. Требуемые свойства показателей $\gamma_k(z)$ и коэффициентов $d_k(z, \xi)$ легко вытекают из замечания к теореме А. Теорема 1 доказана.

Следующая теорема является непосредственным обобщением на случай многих переменных теоремы А.

Теорема 2. *Если $f(z)$ — целая функция в C^n и $(f(z))^l$ — G_p^n-квазиполином, то и сама функция $f(z)$ является G_p^n-квазиполиномом.*

Доказательство. G_p^n-квазиполином $(f(z))^l$ представим в виде $(f(z))^l = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k(z) \exp \lambda_k(z)$, где $a_k(z) \in G_p^n$, $\lambda_k(z)$ — различные однородные полиномы степени p. Заменим в этом равенстве z на произведение $z\xi$, где $\xi \in C$. Тогда имеем

$$(f(z\xi))^l = \sum_{k=0}^{r} a_k(z\xi) \exp(\lambda_k(z) \xi^p).$$

Ясно, что

$$\varlimsup_{|\xi| \to \infty} \frac{\ln |a_k(z\xi)|}{|\xi|^p} = \varlimsup_{|z\xi| \to \infty} |z|^p \frac{\ln |a_k(z\xi)|}{|z\xi|^p} = 0$$

и, значит, коэффициенты $a_k(z\xi)$ при любом фиксированном $z \in C^n$ как функции от ξ принадлежат G_p^1. Поэтому, согласно теореме 1, существует такой индекс m и такая целая функция $\varphi(z, \xi)$, что $(\varphi(z, \xi))^l = a_m(z\xi)$. Полагая в этом равенстве $z = z\xi$, $\xi = 1$, получим $(\varphi(z\xi, 1))^l = a_m(z\xi)$. Значит, $(\varphi(z\xi, 1))^l = (\varphi(z, \xi))^l$ и поскольку

$\varphi(z, \xi)$ — целая функция, то последнее возможно лишь при условии, что $\varphi(z, \xi) = \varphi(z\xi, 1)\, e^{\frac{2\pi k}{l}i}$, $k \in \{0, 1, \ldots, l-1\}$. Беря в этом равенстве $\xi = 1$, получаем $k = 0$ и, следовательно,

$$\varphi(z, \xi) = \varphi(z\xi, 1). \tag{9}$$

Далее, согласно теореме 1,

$$f(z\xi) = \varphi(z, \xi) \exp\left(\frac{1}{l} \lambda_m(z)\, \xi^p\right) \left(\sum_{k=0}^{R} d_k(z, \xi) \exp(\gamma_k(z)\, \xi^p)\right),$$

где функции $d_k(z, \xi)$ получены из функций $\{\overline{a}_j(z\xi)\}_{j=0}^{r}$, $(\varphi(z, \xi))^{-1}$ с помощью конечного числа операций умножения, сложения и умножения на скаляр. Учитывая (9), заключаем, что $d_k(z, \xi) \equiv d_k(z\xi, 1)$. Наконец, ввиду того что $\lambda_k(z)$ — однородные полиномы, а по теореме 1 $\gamma_j(z)$ — их линейные комбинации, то $\gamma_k(z)\, \xi^p \equiv \gamma_k(z\xi)$. Таким образом,

$$f(z\xi) = \varphi(z\xi, 1) \exp\left(\frac{1}{l} \lambda_m(z\xi)\right) \left(\sum_{k=0}^{R} d_k(z\xi, 1) \exp(\gamma_k(z\xi))\right).$$

Проводя в этом равенстве обратную подстановку $z\xi \to z$, получаем представление

$$f(z) = \sum_{k=0}^{R} \hat{d}_k(z) \exp(\gamma_k(z)).$$

Для завершения доказательства теоремы 2 остается доказать, что $d_k(z)$ — целые функции.

Нетрудно понять, что $\hat{d}_k(z)$ — мероморфные функции и более того, что

$$\hat{d}_k(z) = \frac{\overline{d}_k(z)}{(\varphi(z))^{m_k}}, \tag{10}$$

где $\overline{d}_k(z) \in G_p^n$ и $m_k \in N$. Предположим, что какой-то коэффициент $\hat{d}_j(z)$ не является целой функцией. Обозначим тогда через Γ какую-нибудь неприводимую компоненту полярного множества функции $\hat{d}_j(z)$. Ввиду (10) $\varphi(z) = 0$ на Γ. Теперь из известных теорем о связи между ростом объема дивизора и ростом целой функции с заданным дивизором (см., например, [4]) следует, что существует функция $g(z) \in G_p^n$, нулевое множество которой совпадает с Γ. Таким образом, $\varphi(z) = (g(z))^s \Phi(z)$, где $s \in N$; целая функция $\Phi(z)$ принадлежит G_p^n и не обращается в ноль в какой-нибудь точке z_0, принадлежащей Γ. Значит, коэффициенты $\hat{d}_k(z)$ представимы в виде

$$\hat{d}_k(z) = \frac{d_k(z)}{(g(z))^{t_k} (\Phi(z))^{m_k}},$$

где $t_k \in N$; $\overline{d}_k(z) \in G_p^n$ и нулевое множество функций $\overline{d}_k(z)$ не содержит Γ. Поскольку Γ — компонента полярного множества функции

$\tilde{d}_l(z)$, то $T = \max_{0<k<R} t_k \geq 1$. Обозначим также $\max_{0<k<R} m_k$ через M. Теперь сумма $\sum_{k=0}^{R} d_k(z) \exp(\gamma_k(z))$ после соответствующей перегруппировки и преобразования может быть представлена в виде

$$\frac{1}{(g(z))^{T-1}(\Phi(z))^M}\left(\sum_{i \in I} \tilde{d}_i(z) \exp(\tilde{\gamma}_i(z)) + \sum_{k \in J} \frac{\tilde{d}_k(z)}{g(z)} \exp(\tilde{\gamma}_k(z))\right),$$

где $\tilde{d}_k(z) \in G_p^n$; I, J — непересекающиеся множества индексов, причем J не пусто и $\tilde{d}_k(z) \neq 0$ на Γ для любого $k \in J$. Следовательно, домножая обе части равенства

$$\left(\sum_{k=0}^{R} \hat{d}_k(z) \exp(\hat{\gamma}_k(z))\right)^l = \sum_{k=0}^{r} a_k(z) \exp(\lambda_k(z))$$

на функцию $F(z) = ((g(z))^{T-1}(\Phi(z))^M)^l \in G_p^n$, получим

$$\left(\sum_{i \in I} \tilde{d}_i(z) \exp(\tilde{\gamma}_i(z)) + \sum_{k \in J} \frac{\tilde{d}_k(z)}{g(z)} \exp(\tilde{\gamma}_k(z))\right)^l =$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \tilde{a}_k(z) \exp(\tilde{\lambda}_k(z)). \qquad (11)$$

Не уменьшая общности, можно считать, что найдется такой индекс j_0, для которого при любых $k \in J$, $j_0 \neq k$ неравенство $\operatorname{Re} \tilde{\gamma}_{j_0}(z) > \operatorname{Re} \tilde{\gamma}_k(z)$ выполняется в некоторой области $V \subset C^n$.

После возведения в степень и приведения подобных (слагаемых с равными показателями экспонент) в левой части равенства (11) справа и слева окажутся экспоненциальные суммы, которые должны совпадать почленно. Рассмотрим коэффициент при показателе $l\tilde{\gamma}_{j_0}(z)$ в левой части равенства. Ввиду соотношения между $\operatorname{Re} \tilde{\gamma}_k(z)$ и $\operatorname{Re} \tilde{\gamma}_{j_0}(z)$ при $k \in J$ этот коэффициент, являясь целой функцией (см. правую часть равенства), в то же время может быть представлен в виде

$$\left(\frac{\tilde{d}_{j_0}(z)}{g(z)}\right)^l + \frac{D(z)}{(g(z))^{l-1}},$$

где $D(z) \in G_p^n$. Но в этом случае целой должна быть и функция

$$\frac{(\tilde{d}_{j_0}(z))^l}{g(z)} + D(z),$$

которая имеет полюсы на Γ, поскольку $\tilde{d}_{j_0}(z) \not\equiv 0$ на Γ. Значит, предположение о наличии полюсов у функций $d_k(z)$ ложно.

Теорема 2 доказана.

Список литературы: 1. *Ронкин А. Л.* Об извлечении корня из экспоненциальных сумм//Сиб. мат. журн. 1987. **XXVIII**, № 3. С. 193—198. 2. *Henson C. W., Rubel L. A., Singer M. E.* Algebraic Properties of the Rings of General Exponential Polynomials. 1987. Preprint. 3. *Левин Б. Я., Ронкин А. Л.* Асимптотические ряды и алгеброидные функции//Докл. АН СССР. 1985. **280**, № 2. С.288—291. 4. *Lelong P., Gruman L.* Entire Function of Several Complex Variables. Berlin Heidelberg, 1986. 120 S.

Поступила в редколлегию 20.12.90

УДК 519

Л. А. САХНОВИЧ

О СИНГУЛЯРНЫХ ЯВНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ МКдФ

Модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза (МКдФ) имеет следующие две формы;

$$R_t = -\frac{1}{4} R_{xxx} + \frac{3}{2} |R|^2 R_x; \tag{0.1}$$

$$R_t = -\frac{1}{4} R_{xxx} - \frac{3}{2} |R|^2 R_x. \tag{0.2}$$

Хорошо известны [1] N-солитонные решения уравнения (0.2). Уравнение (0.1) не имеет N-солитонных решений [1]. В данной статье методом обратной спектральной задачи [2, 3] построены классы явных решений уравнения (0.1). Далее в этих классах выделены подклассы решений (0.1), которые преобразование Миуры [4] переводит в N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ):

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{0.3}$$

Поведение сингулярностей построенных решений во многом аналогично поведению горбов соответствующих N-солитонных решений уравнений КдФ (0.3).

Существенную роль в статье играет выяснение связи между спектральными данными и данными рассеяния вспомогательных линейных задач, сопоставляемых уравнениям МКдФ и КдФ.

§ 1. Построение явных решений уравнения МКдФ

1. Уравнению (0.1) поставим в соответствие вспомогательную линейную систему:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = izJH(x, t)\, w, \quad w(0, t, z) = E_2, \tag{1.1}$$

где

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad H(x, t) = JA^{-1}(x, t)\, jA(x, t), \tag{1.2}$$

при этом матрица $A(x, t)$ определяется соотношениями

$$j\frac{\partial A}{\partial x} = -\xi A, \qquad A(0, t) = U^*, \tag{1.3}$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 & R(x, t) \\ -\overline{R(x, t)} & 0 \end{bmatrix}, \quad j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

Функцию Вейля—Титчмарша $v(t, z)$ системы (1.1) при $\operatorname{Im} z > 0$ введем с помощью неравенства

$$\int_0^\infty [1, iv^*(t, z)]\, w^*(x, t, z)\, H(x, t)\, w(x, t, z) \begin{bmatrix} 1 \\ -iv(t, z) \end{bmatrix} dx < \infty. \tag{1.5}$$

Из [2] следует

Лемма 1.1. *Пусть $R(x, t)$ — решение уравнения (0.1), а $v(t, z)$ — функция Вейля—Титчмарша соответствующей системы (1.1)—(1.4). Тогда $v(t, z)$ удовлетворяет уравнению Риккати*

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \left(-z^3 - z^2 \operatorname{Im} R_0 - \frac{z}{2}|R_0|^2 + \frac{z}{2}\operatorname{Re} b_0 + \frac{1}{4}a_0 i + \frac{1}{4}\operatorname{Im} c_0\right) + \\ &+ \left(-2z^2 \operatorname{Re} R_0 - z \operatorname{Im} b_0 + \frac{1}{2}\operatorname{Re} c_0\right) v + \\ &+ \left(-z^3 + z^2 \operatorname{Im} R_0 - \frac{z}{2}|R_0|^2 - \frac{z}{2}\operatorname{Re} b_0 + \frac{1}{4}a_0 i - \frac{1}{4}\operatorname{Im} c_0\right) v^2, \end{aligned} \tag{1.6}$$

где приняты обозначения

$$R_0(t) = R(0, t), \; a_0(t) = R_x(0, t)\overline{R(0, t)} - R(0, t)\overline{R_x(0, t)}, \tag{1.7}$$

$$b_0(t) = R_x(0, t), \; c_0(t) = R_{xx}(0, t) - 2|R(0, t)|^2 R(0, t). \tag{1.8}$$

2. Остановимся на случае, когда

$$v_0(z) = v(0, z) = i + \sum_{k=1}^N \beta_{k,0}/(z - \alpha_{k,0}), \tag{1.9}$$

где $\alpha_{k,0} \neq \alpha_{l,0}$ $(k \neq l)$; $\operatorname{Im}\alpha_{k,0} < 0$. Будем искать решение уравнения (1.6) в виде

$$v(t, z) = i + \sum_{k=1}^N \beta_k(t)/[z - \alpha_k(t)], \tag{1.10}$$

где $\alpha_k(t) \neq \alpha_l(t)$ $(k \neq l)$; $\operatorname{Im}\alpha_k(t) < 0$. Подставляя (1.10) в уравнение (1.6), получаем

$$\sum_{k=1}^N \beta_k = -\overline{R}_0, \qquad 2i\sum_{k=1}^N \alpha_k\beta_k = \overline{b}_0 + \overline{R}_0^2, \tag{1.11}$$

$$4\left(\sum_{k=1}^N \beta_k\alpha_k^2\right) - 2\overline{b}_0\overline{R}_0 - 2|R_0|^2\overline{R}_0 + 2i(\operatorname{Im}\overline{R}_0)^2 = \overline{c}_0, \tag{1.12}$$

$$\alpha_k' = \left(-\alpha_k^3 + \alpha_k^2 \operatorname{Im} R_0 - \frac{\alpha_k}{2}|R_0|^2 - \frac{\alpha_k}{2}\operatorname{Re} b_0 + \frac{1}{4}a_0 i - \frac{1}{4}\operatorname{Im} c_0\right)\beta_k, \tag{1.13}$$

$$\beta_k' = \varphi_k(\alpha, \beta, R_0, b_0, c_0), \quad 1 \leqslant k \leqslant N, \tag{1.14}$$

где $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N]$; $\beta = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N]$. Конкретный вид функций φ_k нам не понадобится и мы его из-за громоздкости опускаем. Решая систему (1.11)—(1.14) с неизвестными α, β, R_0, b_0, c_0 методом последовательных приближений, выводим

Утверждение 1.1. При достаточно малом T $(0 \leqslant t \leqslant T)$ уравнение (1.6) имеет одно и только одно решение вида (1.10), удовлетворяющее условию (1.9).

Приводя к общему знаменателю, перепишем (1.9) в виде

$$v(t, z) = i p_2(t, z)/p_1(t, z). \tag{1.15}$$

Обозначив через $\nu_k(t)$ корни $p_2(t, z)$, имеем

$$p_1(t, z) = \prod_{k=1}^{N} [z - \alpha_k(t)], \qquad p_2(t, z) = \prod_{k=1}^{N} [z - \nu_k(t)]. \tag{1.16}$$

Запишем теперь разложение в окрестности $z = \infty$:

$$p_2(t, z)/p_1(t, z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(\alpha, \nu)/z^m, \quad a_0(\alpha, \nu) = 1. \tag{1.17}$$

Из интерполяционной формулы Лагранжа

$$p_2(t, z)/p_1(t, z) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \left\{ \left[p_2(t, z) \Big/ \frac{\partial}{\partial z} p_1(t, z) \right]_{z=\alpha_k(t)} \right\} \Big/ [z - \alpha_k(t)]$$

и равенства

$$\beta_k(t) = i \left[p_2(t, z) \Big/ \frac{\partial}{\partial z} p_1(t, z) \right]_{z=\alpha_k(t)} \tag{1.18}$$

вытекает соотношение

$$a_m(\alpha, \nu) = -i \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^{m-1}(t) \beta_k(t). \tag{1.19}$$

3. Обозначим через $\sigma_{k,N}(\alpha)$ элементарную симметрическую форму N переменных $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N]$ веса k. Из (1.13) и (1.17)—(1.19) выводим, что

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt} \sigma_{k,N}(\alpha) = -i \Big\{ [\sigma_{k+3,N}(\nu) - \sigma_{k+3,N}(\alpha)] + [(\operatorname{Im} R_0) \sigma_{k+2,N}(\nu) + \\ + i (\operatorname{Re} R_0) \sigma_{k+2,N}(\alpha)] + \frac{1}{2} [(|R_0|^2 + \operatorname{Re} b_0) \sigma_{k+1,N}(\nu) - \\ - i (\operatorname{Im} b_0) \sigma_{k+1,N}(\alpha)] + \frac{1}{4} [(a_0 i - \operatorname{Im} c_0) \sigma_{k,N}(\nu) - i (\operatorname{Re} c_0) \sigma_{k,N}(\alpha)] \Big\}, \\ 1 \leqslant k \leqslant N. \end{gathered} \tag{1.20}$$

Аналогично получаем соотношения

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt} \sigma_{k,N}(\nu) = -i \Big\{ [\sigma_{k+3,N}(\alpha) - \sigma_{k+3,N}(\nu)] - [i (\operatorname{Re} R_0) \sigma_{k+2,N}(\nu) + \\ + (\operatorname{Im} R_0) \sigma_{k+2,N}(\alpha)] - \frac{1}{2} [|R_0|^2 - \operatorname{Re} b_0) \sigma_{k+1,N}(\alpha) + \\ + i (\operatorname{Im} b_0) \sigma_{k+1,N}(\nu)] + \frac{1}{4} [(a_0 i + \operatorname{Im} c_0) \sigma_{k,N}(\alpha) + \\ + i (\operatorname{Re} c_0) \sigma_{k,N}(\nu)] \Big\}. \end{gathered} \tag{1.21}$$

Заметим, что $\sigma_{m,N} = 0$ при $m > N$.

4. Введем теперь многочлен

$$Q(iz) = (-1)^N [\overline{p_1(\bar{z})}\, p_2(z) + p_1(z)\, \overline{p_2(\bar{z})}]. \qquad (1.22)$$

Существенную роль в дальнейшем играет

Лемма 1.1. *Если $v(t, z)$ имеет вид (1.15) и удовлетворяет системе (1.11)—(1.14), то коэффициенты многочлена $Q(iz)$ не зависят от t.*

Доказательство. Дифференцируя обе части (1.22) и учитывая отношения (1.20), (1.21), выводим, что $\frac{\partial}{\partial t} Q(t, iz) = 0$, откуда следует утверждение леммы.

Положим теперь

$$\varkappa_k(t) = p_1(t, -\lambda_k)/\overline{p_1(t, -\bar{\lambda}_k)}, \quad \eta_k(t) = p_2(t, -\lambda_k)/\overline{p_2(t, -\bar{\lambda}_k)}, \quad (1.23)$$

где $\lambda_k = i\omega_k$, а ω_k — корень многочлена $Q(z)$.

Лемма 1.2. *Справедливы равенства*

$$\varkappa_k(t) = \varkappa_k(0) \exp(2\omega_k^3 t), \quad \eta_k(t) = \eta_k(0) \exp(2\omega_k^3 t). \qquad (1.24)$$

Доказательство. Полагая $\varkappa(t, \lambda) = p_1(t, \lambda)/p_2(t, \lambda)$ и пользуясь равенствами (1.20)—(1.22), имеем

$$\frac{d}{dt} \varkappa(t, \lambda) = 2i\lambda^3 \varkappa(t, \lambda) - i\Big[\lambda^3 + \lambda^2 \operatorname{Im} R_0 + \frac{\lambda}{2}(|R_0|^2 + \operatorname{Re} b_0) + \frac{1}{4}(a_0 i - \operatorname{Im} c_0)\Big] Q(-i\lambda)/\overline{p_1(-\bar{\lambda})}^2,$$

откуда следует первая из формул (1.23). Аналогично доказывается вторая формула (1.23).

5. Опишем теперь процедуру построения $R(x, t)$ по $v(t, z)$ [2]. Для этого положим

$$r(t, \lambda) = \frac{1}{\pi}[\operatorname{Im} v(t, \lambda) - 1], \qquad k(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} r(t, \lambda)\, d\lambda \quad (1.25)$$

и введем в $L^2(0, \zeta)$ оператор

$$S_\zeta g = 2g(x) + \int_0^\zeta g(u)\, k(x-u, t)\, du. \qquad (1.26)$$

Тогда оператор S_ζ^{-1} имеет вид

$$S_\zeta^{-1} g = \frac{1}{2} g(x) + \int_0^\zeta g(u)\, \Gamma_\zeta(x, u, t)\, du, \qquad (1.27)$$

причем справедливо равенство

$$\frac{1}{2} k(x-u, t) + 2\Gamma_\zeta(x, u, t) + \int_0^\zeta k(x-v, t)\, \Gamma_\zeta(v, u, t)\, dv = 0. \quad (1.28)$$

Из (1.28) согласно [2, 3] следует окончательная формула:

$$R(x, t) = -4\Gamma_{2x}(2x, 0, t). \qquad (1.29)$$

Отметим, что формула, эквивалентная (1.29), содержится в статье М. Г. Крейна [5].

6. Применяя формулы (1.25) к случаю (1.10), выводим, что

$$\overline{\underset{x>0}{k(-x,\ t)}} = k(x,\ t) = -\sum_{j=1}^{N} \overline{\beta_j(t)} \exp[\overline{i\alpha_j(t)}\, x]. \tag{1.30}$$

Обозначим через $p(z)$ многочлен $p(z) = \prod_{j=1}^{N} [(z - i\overline{\alpha}_j)(z - i\alpha_j)]$, а через $\mathscr{D}$ — оператор дифференцирования по x. Действуя на обе части (1.28) оператором $p(\mathscr{D})$, получаем соотношение

$$Q(\mathscr{D})\, \Gamma_\zeta(x,\ u,\ t) = 0. \tag{1.31}$$

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 1.1. *Пусть даны наборы чисел* $\omega = [\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots\ \omega_{2N}]$, $\alpha_0 = [\alpha_{1,0},\ \alpha_{2,0},\ \ldots,\ \alpha_{N,0}]$, *причем* ω_j *попарно различны и* $\omega_j = \overline{\omega}_{j+N}$ $(1 \leqslant j \leqslant N)$. *Тогда уравнение* (0.1) *имеет решение*

$$R(x,\ t) = -2(-1)^N \Delta_1(x,\ t)/\Delta_2(x,\ t), \tag{1.32}$$

где

$$\Delta_1(x,\ t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots\cdots & \omega_{2N} \\ \hline \omega_1^{N-2} & \omega_2^{N-2} & \cdots\cdots & \omega_{2N}^{N-2} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots\cdots & \gamma_{2N} \\ \omega_1\gamma_1 & \omega_2\gamma_2 & \cdots\cdots & \omega_{2N}\gamma_{2N} \\ \hline \omega_1^{N}\gamma_1 & \omega_2^{N}\gamma_2 & \cdots\cdots & \omega_{2N}^{N}\gamma_{2N} \end{vmatrix}, \tag{1.33}$$

$$\Delta_2(x,\ t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots\cdots & \omega_{2N} \\ \hline \omega_1^{N-1} & \omega_2^{N-1} & \cdots\cdots & \omega_{2N}^{N-1} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots\cdots & \gamma_{2N} \\ \omega_1\gamma_1 & \omega_2\gamma_2 & \cdots\cdots & \omega_{2N}\omega_{2N} \\ \hline \omega_1^{N-1}\gamma_1 & \omega_2^{N-1}\gamma_2 & \cdots\cdots & \omega_{2N}^{N-1}\gamma_{2N} \end{vmatrix}, \tag{1.34}$$

$$\gamma_k = \{\prod_{j=1}^{N} [(i\omega_k + \overline{\alpha}_{j,0})/(i\omega_k + \alpha_{j,0})]\} \exp 2(\omega_k x - \omega_k^3 t). \tag{1.35}$$

Доказательство. Из формулы (1.31) следует, что

$$\Gamma_\zeta(x,\ 0,\ t) = \sum_{k=1}^{2N} c_k(\zeta,\ t) \exp(\omega_k x). \tag{1.36}$$

Подставляя (1.30) и (1.36) в (1.28), получаем систему линейных алгебраических уравнений для нахождения $c_k(\zeta,\ t)$. Повторяя выкладки из [8] и пользуясь формулами (1.24), (1,29), получаем утверждение теоремы.

7. Отметим, что набором чисел ω и α_0 соответствуют многочлены

$$Q(z) = 2\prod_{j=1}^{N}(z-\omega_j)(z+\overline{\omega}_j),\quad p_1(z) = \prod_{k=1}^{N}(z-\alpha_{k,0}). \tag{1.37}$$

Из формулы (1.22) получаем, что

$$p_2(\alpha_{k,0}) = (-1)^N Q(i\alpha_{k,0})/\overline{p_1(\overline{\alpha}_{k,0})}. \tag{1.38}$$

В силу интерполяционной формулы Лагранжа

$$v_0(z) = i\,[1 + \sum_{k=1}^{N} p_2(\alpha_{k,0})/(z-\alpha_{k,0})\,p_1'(\alpha_{k,0}). \tag{1.39}$$

Таким образом, формулы (1.37) — (1.39) дают способ восстановления $v_0(z)$ по наборам ω и α_0.

§ 2. Спектральные задачи

1. В статье [3] система (1.1) приведена к виду

$$\begin{cases} \dfrac{d\Phi(x,\lambda)}{dx} = -\lambda\Psi(x,\lambda) - a(x)\Phi(x,\lambda) + b(x)\Psi(x,\lambda), \\ \dfrac{d\Psi(x,\lambda)}{dx} = \lambda\Phi(x,\lambda) + b(x)\Phi(x,\lambda) + a(x)\Psi(x,\lambda) \end{cases} \tag{2.1}$$

где

$$\Phi(0,\lambda) = 1,\quad \Psi(0,\lambda) = 0; \tag{2.2}$$

$$a(x) = \operatorname{Re} R(x),\quad b(x) = -\operatorname{Im} R(x). \tag{2.3}$$

(зависимость от параметра t мы опускаем). Системе (2.1) посвящена известная работа М. Г. Крейна [5]. Обозначим через $\sigma(\lambda)$ и $\tilde{\sigma}(\lambda)$ спектральные функции систем соответственно (1.1) и (2.1) (определения см. [2 и 5]). Легко выводится равенство

$$\sigma(\lambda) = 2\tilde{\sigma}(\lambda). \tag{2.4}$$

2. Далее будем рассматривать случай вещественных $R(x)$, т. е.

$$b(x) = 0. \tag{2.5}$$

В этом случае, как извество [5],

$$\sigma(\lambda) = -\sigma(-\lambda), \tag{2.6}$$

а функции $\Psi(x,\lambda)$ и $\Phi(x,\lambda)$ таковы, что

$$\Psi'' - [a^2(x) + a'(x)]\Psi + \lambda^2\Psi = 0,\quad \Psi(0,\lambda) = 0, \tag{2.7}$$

$$\Phi'' - [a^2(x) - a'(x)]\Phi + \lambda^2\Phi = 0,\quad \Phi'(0,\lambda) + a(0)\Phi(0,\lambda) = 0. \tag{2.8}$$

(Функция $a(x)$ предполагается абсолютно непрерывной). Обозначим через $\sigma_1(\lambda)$ и $\sigma_2(\lambda)$ спектральные функции задач Штурма — Лиувилля соответственно (2.7) и (2.8) (см. определение [7]). При этом принята нормировка $\Psi'(0,\lambda) = 1$ и $\Phi(0,\lambda) = 1$. Сопоставляя определения спектральных функций, получаем

$$d\sigma_1(\lambda) = 2\lambda d\sigma(\sqrt{\lambda}),\ \lambda > 0;\quad d\sigma_1(\lambda) = 0,\ \lambda < 0, \tag{2.9}$$

$$d\sigma_2(\lambda) = 2d\sigma(\sqrt{\lambda}),\ \lambda > 0;\quad d\sigma_2(\lambda) = 0,\ \lambda < 0. \tag{2.10}$$

3. Следуя [7], через $\varphi_\alpha(x, z)$ и $\theta_\alpha(x, z)$ обозначим решения уравнения

$$-y'' + q(x)y = zy, \quad -\infty < x < \infty, \tag{2.11}$$

такие, что

$$-\varphi_\alpha(0, z) = \theta_\alpha(0, z) = \sin\alpha, \quad \varphi'_\alpha(0, z) = \theta_\alpha(0, z) = \cos\alpha. \tag{2.12}$$

В силу (2.12) функция $\varphi_\alpha(x, z)$ удовлетворяет краевому условию

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0. \tag{2.13}$$

Функции Вейля — Титчмарша $m_\alpha^+(z)$ и $m_\alpha^-(z)$ задачи (2.11), (2.12) соответственно на участках $(0, \infty)$ и $(-\infty, 0)$ определяются соотношениями

$$J_\alpha^+(x, z) = \theta_\alpha(x, z) + m_\alpha^+(z)\varphi_\alpha(x, z) \in L^2(0, \infty), \tag{2.14}$$

$$J_\alpha^-(x, z) = \theta_\alpha(x, z) + m_\alpha^-(z)\varphi_\alpha(x, z) \in L^2(-\infty, 0), \tag{2.15}$$

где $\operatorname{Im} z > 0$.

4. Вернемся снова к случаю (1.15), (1.16), причем будем дополнительно предполагать, что выполняется условие перемежаемости

$$0 > \tilde{\alpha}_1 > \tilde{\nu}_1 > \ldots > \tilde{\alpha}_N > \tilde{\nu}_N, \tag{2.16}$$

где $\alpha_k = i\tilde{\alpha}_k$, $\nu_k = i\tilde{\nu}_k$.

Из (2.9) следует, что задаче (2.7) соответствует функция Вейля—Титчмарша:

$$m_0^+(z) = \sqrt{z}\, v(\sqrt{z}) - ia_1(\alpha, \nu), \quad \operatorname{Im}\sqrt{z} > 0. \tag{2.17}$$

Функцию $m_0^-(z)$ определим равенством

$$m_0^-(z) = -i\sqrt{z}\, \overline{p_2(\sqrt{\bar{z}})}/\overline{p_1(\sqrt{\bar{z}})} + ia_1(\alpha, \nu), \quad \operatorname{Im}\sqrt{z} > 0. \tag{2.18}$$

В силу (1.15), (1.22) (2.17), (2.18) справедливо равенство

$$i\sqrt{z}(-1)^N Q(i\sqrt{z})/[\overline{p_1(\sqrt{\bar{z}})}\, p_1(\sqrt{z})] = m_0^+(z) - m_0^-(z). \tag{2.19}$$

Пользуясь формулой (1.16), из (2.16) выводим, что

$$\beta_k < 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant N. \tag{2.20}$$

Теорема 2.1. *Если выполняются условия (2.16), то функции* $v(z)$, $m_0^+(z)$ и $[-m_0^-(z)]$ принадлежат классу Неванлинны, а многочлен $Q(z)$ имеет N положительных корней ω_j и N отрицательных корней $(-\omega_j)$, причем

$$\omega_j \in (-\alpha_j, -\nu_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant N. \tag{2.21}$$

Доказательство. Непосредственным подсчетом убеждаемся, что $\operatorname{Im} v(z) > 0$, $\operatorname{Im} m_0^+(z) > 0$, $\operatorname{Im}[-m_0^-(z)] > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$, т. е. эти функции принадлежат классу Неванлинны.

В силу (1.22) многочлен $Q(z)$ на вещественной оси принимает вещественные значения, $Q(z) = \overline{Q(-\bar{z})}$ и

$$Q(-\tilde{\alpha}_j) = (-1)^N \overline{P_1(-i\tilde{\alpha}_j)}\, P_2(i\tilde{\alpha}_j), \quad Q(-\tilde{\nu}_j) = (-1)^N p_1(i\tilde{\nu}_j)\, \overline{p_2(-i\tilde{\nu}_j)}.$$

Легко убедиться, учитывая (2.16), что $Q(-\tilde{\alpha}_j)$ и $Q(-\tilde{\nu}_j)$ имеют разные знаки. Значит, верно утверждение теоремы.

5. Заданной функции $v(z)$ согласно формулам (1.32) — (1.35) соответствует функция $R(x)$. Решая обратную задачу для уравнения (2.11) (см. [7]), по функциям $m_0^+(z)$, $m_0^-(z)$, определяемым формулами (2.17), (2.18), находим $q(x)$. При этом, учитывая (2.3), (2.7), имеем

$$q(x) = R^2(x) + R'(x), \quad 0 < x < \infty. \tag{2.22}$$

Как известно [7], матрица-функция Вейля — Титчмарша $M(z) = \{M_{ij}(z)\}_{i,j=1}^2$ уравнения (2.11) на всей оси $(-\infty, \infty)$ имеет вид

$$M_{11}(z) = [m_0^+(z) - m_0^-(z)]^{-1}, \quad M_{22}(z) = m_0^+(z)\, m_0^-(z)/[m_0^+(z) - m_0^-(z)], \tag{2.23}$$

$$M_{12}(z) = M_{21}(z) = \frac{1}{2}[m_0^+(z) + m_0^-(z)]/[m_0^+(z) - m_0^-(z)]. \tag{2.24}$$

Из (2.17) — (2.19) и (2.23), (2.24) вытекает

Теорема 2.2. *Если выполняются условия (2.16), то задача (2.11) имеет N отрицательных собственных чисел:*

$$z_j = -\omega_j^2, \quad 1 \leqslant j \leqslant N. \tag{2.25}$$

6. Выясним теперь связь спектральных характеристик $m_0^+(z)$, $m_0^-(z)$ с данными рассеяния задачи (2.11) на непрерывном спектре. Заметим, что из (2.17), (2.18) вытекает неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)\,|q(x)|\,dx < \infty. \tag{2.26}$$

Тогда уравнение (2.11) имеет решения $\psi(x, k)$ и $\varphi(x, k)$ такие, что (см. [7])

$$\psi(x, k) = \exp(-ikx) + O(1), \quad x \to +\infty, \quad z = k^2, \quad k > 0, \tag{2.27}$$

$$\varphi(x, k) = \exp(-ikx) + O(1), \quad x \to -\infty, \quad z = k^2, \quad k > 0. \tag{2.28}$$

При $\operatorname{Im} z \to +0$ из (2.14), (2.15) и (2.27), (2.28) выводим равенства

$$J_0^+(x, k^2) = c(k)\,\psi(x, k), \quad J_0^-(x, k^2) = d(k)\,\overline{\varphi(x, k)}. \tag{2.29}$$

В силу (2.27), (2.28) верно также равенство

$$\varphi(x, k) = a(k)\,\psi(x, k) + b(k)\,\overline{\psi(x, k)}. \tag{2.30}$$

Заметим, что $a(k)$ и $b(k)$ являются характеристиками задачи рассеяния для уравнения (2.11). Полагая в (2.30) $x = 0$ и учитывая (2.14), (2.15) и (2.29), имеем

$$\begin{cases} d^{-1}(k) = a(k)/\overline{c(k)} + b(k)/c(k), \\ m_0^-(k^2)/d(k) = a(k)\,\overline{m_0^+(k^2)}/\overline{c(k)} + b(k)\,m_0^+(k^2)/c(k). \end{cases} \tag{2.31}$$

Решая систему (2.31), находим

$$b(k) = c(k)\,[m_0^-(k^2) - \overline{m_0^+(k^2)}]/d(k)\,[m_0^+(k^2) - \overline{m_0^+(k^2)}]. \tag{2.32}$$

Из (2.17), (2.18), (2.32) и равенства $b(-k) = \overline{b(k)}$ следует, что

$$b(k) = 0, \quad k = \bar{k}. \tag{2.33}$$

Теорема 2.3. *Потенциал $q(x)$, соответствующий матрице-функции Вейля — Титчмарша (2,23), (2.24), является безотражательным, причем равенство (2.22) верно при всех $x \in (-\infty, \infty)$.*

Доказательство. Безотражательность потенциала эквивалентна равенству (2.33), а справедливость (2.22) при $x \in (-\infty, \infty)$ следует из голоморфности безотражательного потенциала $q(x)$ и мероморфности $R(x)$.

Следствие 2.1. *Все вещественные особые точки $R(x)$ в случае (2.16) являются полюсами первого порядка, а соответствующие вычеты равны 1.*

7. Рассмотрим теперь случай, когда выполняется не (2.16), а следующее правило перемежаемости:

$$0 > \tilde{\nu}_1 > \tilde{\alpha}_1 > \ldots > \tilde{\nu}_N > \tilde{\alpha}_N. \tag{2.34}$$

В этом случае верны неравенства $\beta_j > 0,\ 1 \leqslant j \leqslant N$. Выберем α так, что

$$a(0)/\sqrt{1 + a^2(0)} = \cos\alpha,\ 1/\sqrt{1 + a^2(0)} = \sin\alpha. \tag{2.35}$$

Через $m_\alpha^+(z)$ обозначим функцию Вейля — Титчмарша задачи (2.8) на полуоси $(0, \infty)$. Тогда $m_0^+(z)$ для уравнения (2.8) имеет вид

$$m_0^+(z) = [\sin\alpha + m_\alpha^+(z)\cos\alpha]/[\cos\alpha - m_\alpha^+(z)\sin\alpha]. \tag{2.36}$$

Повторяя рассуждения пп. 4—6, приходим к равенству

$$q(x) = R^2(x) - R'(x),\ -\infty < x < \infty. \tag{2.37}$$

При этом остаются верными утверждения теорем 2.1, 2.2, соответствующий потенциал $q(x)$ является безотражательным и справедливо

Следствие 2.2. *Все вещественные особые точки $R(x)$ в случае (2.34) являются полюсами первого порядка, а соответствующие вычеты равны (-1).*

8. Наряду с $v(z)$ вида (1.15) рассмотрим функцию $v_1(z) = -v^{-1}(z)$. Решая обратные задачи для системы (2.1) — (2.3), по $v(z)$ и $v_1(z)$ находим $R(x)$ и $R_1(x)$. Верна

Теорема 2.4. *Функции $R(x)$ и $R_1(x)$, соответствующие функциям Вейля — Титчмарша $v(z)$ и $v_1(z)$, связаны равенством*

$$R(x) = -R_1(x). \tag{2.38}$$

Доказательство. В силу формулы (1.22) функциям $v(z)$ и $v_1(z)$ соответствует один и тот же многочлен $Q(z)$. Если ω_k — корень $Q(z)$, то из (1.22) следует, что

$$p_1(-i\omega_k)/\overline{p_1(i\overline{\omega}_k)} = -p_2(-i\omega_k)/\overline{p_2(i\overline{\omega}_k)}. \tag{2.39}$$

Из теоремы 1.1 и (2.39) следует доказываемое утверждение.

§ 3. Область регулярности и связь с N-солитонными решениями

1. В данном параграфе существенную роль играет исследование зависимости $v(t, z)$ и $R(x, t)$ от параметра t. Пользуясь соотношениями (1.11) — (1.13), имеем

$$\tilde{\alpha}_k'(t) = \tilde{\alpha}_k(t)\beta_k(t)[\tilde{\alpha}_k^2(t) + \sum_{j=1}^{N}\tilde{\alpha}_j(t)\beta_j(t)],\ 1 \leqslant k \leqslant N, \tag{3.1}$$

где $\alpha_k(t) = i\tilde{\alpha}_k(t)$. Запишем $v^{-1}(t, z)$ в виде

$$v^{-1}(t, z) = -i + \sum_{k=1}^{N} \delta_k(t)/[z - i\tilde{\nu}_k(t)].$$

Аналогично (3.1) выводим, что

$$\tilde{\nu}_k'(t) = -\tilde{\nu}_k(t)\,\delta_k(t)\,[\nu_k^2(t) - \sum_{j=1}^{N} \tilde{\nu}_j(t)\,\delta_j(t)]. \qquad (3.2)$$

Из (3.1), (3.2) методом последовательных приближений доказывается

Лемма 3.1. *Если в момент t_0 выполняется одно из соотношений (2.16) или (2.34), то это соотношение выполняется и при $t \in (t_0 - T, t_0 + T)$, где T достаточно мало.*

Из (2.16) (2.34) и (3.1), (3.2) вытекает

Теорема 3.1. *Если выполняется условие (2.16), то функции $\tilde{\alpha}_k(t)$ монотонно возрастают. Если выполняется условие (2.34), то функции $\tilde{\nu}_k(t)$ монотонно возрастают.*

Здесь учтено, что при условии (2.16) верно неравенство $\beta_k < 0$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$, а при условии (2.34) верно неравенство $\delta_k > 0$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$.

В силу (1.23), (1.24) из теоремы 3.1 вытекает важное

Следствие 3.1. *Пусть в момент t_0 выполняется одно из двух соотношений (2.16) или (2.34). Тогда это соотношение остается верным и при всех $t \leqslant t_0$, а решение $R(x, t)$ уравнения (0.1), определенное формулами (1.32) — (1.35), является регулярным в области $0 \leqslant x < \infty$, $t \leqslant t_0$, причем*

$$\lim_{t \to -\infty} \tilde{\alpha}_k(t) = \lim_{t \to -\infty} \tilde{\nu}_k(t) = -\omega_k, \ 1 \leqslant k \leqslant N.$$

2. Запишем преобразование Миуры [4]:

$$v_{\pm}(x, t) = -\frac{1}{2}\left[R^2(x, t) \pm \frac{\partial R(x, t)}{\partial x}\right], \ u_{\pm}(x, t) = v_{\pm}(x/\sqrt{2}, t\sqrt{2}). \qquad (3.3)$$

Преобразование Миуры переводит вещественное решение уравнения МКдФ (0.1) в решение уравнения КдФ (0.3). Из теорем 2.2, 2.3 следует

Теорема 3.2. *Пусть выполнено при $t = 0$ условие (2.16). Тогда функция $u_+(x, t)$, определенная формулами (1.32) — (1.35) и (3.3), является N-солитонным решением уравнения КдФ (0.3) при $-\infty < x < \infty$. Если выполнено условие (2.34), то функция $u_-(x, t)$ является N-солитонным решением уравнения КдФ (0.3).*

Список литературы: 1. *Солитоны* / Под ред. Р. Буллаф, Ф. Кодри. М., 1983. 408 с. 2. *Сахнович Л. А.* Задачи факторизации и операторные тождества // Успехи мат. наук. 1986. **41**, № 1. С. 3—55. 3. *Сахнович Л. А.* Нелинейные уравнения и обратные задачи. К., Ин-т мат.: препринт. 1987. 56 с. 4. *Ньюэлл А.* Солитоны в математике и физике. М., 1989. 323 с. 5. *Крейн М. Г.* Континуальные аналоги предложений о многочленах, ортогональных на единичной окружности // Докл. АН СССР, 1955. **105**, № 4. С. 673—640. 6. *Сахнович Л. А.* Procedure of solving nonlinear equations on half-axis. Nonlinear world, **2**. 1989. С. 314—317. 7. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма — Лиувилля. М., 1984. 239 с. 8. *Сахнович Л. А., Тыднюк И. Ф.* Об одном классе интегральных уравнений статистической радиотехники // Сб. науч. тр. ОЭИС. Одесса, 1989. С. 94—98.

Поступила в редколлегию 23.10.90

УДК 519.21.5

А. М. УЛАНОВСКИЙ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ МЕРЫ ПО СУЖЕНИЮ ЕЕ n-КРАТНЫХ СВЕРТОК НА МАССИВНОЕ МНОЖЕСТВО

1. Обозначим $M(\boldsymbol{R})$, $P(\boldsymbol{R})$ — соответственно множества всех конечных комплекснозначных борелевских и вероятностных мер на прямой $\boldsymbol{R}$; μ^n — n-кратная свертка меры μ; $\mu|_E$ — сужение μ на множество E.

В 70-х годах возникла область, изучающая меры, однозначно определяющиеся сужением на массивное множество (см. [1, 2] и указанную там литературу). В ряде работ были указаны случаи, когда меры из $M(\boldsymbol{R})$ и $P(\boldsymbol{R})$ однозначно определяются по сужению их n-кратной свертки на полупрямую. Приведем наиболее общий результат в этом направлении, принадлежащий И. В. Островскому.

Теорема А [3]. *Пусть $n \geqslant 3$ — натуральное число; меры μ, $\nu \in M(\boldsymbol{R})$ удовлетворяют условиям:*

(A) $\inf \operatorname{supp} \mu = -\infty$;

(B) $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-1} \ln \{1/|\mu|((-\infty, -r))\} = \infty$; $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-1} \ln \{1/|\nu|((-\infty, -r))\} = \infty$. *Справедлива импликация:*

$$(\exists a : \mu^n|_{(-\infty,-a)} = \nu^n|_{(-\infty,-a)}) \Rightarrow (\mu = \varepsilon\nu),$$

где ε — некоторый корень n-й степени из единицы.

Отметим [3], что ограничения (A) и (B) в теореме А ослабить нельзя. Возникает вопрос: можно ли произвольную меру μ определить по сужению на полупрямую ее нескольких n-кратных сверток? Для вероятностных мер этот вопрос можно переформулировать так. Пусть $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\Sigma_n = Y_1 + \ldots + Y_n$ — случайные блуждания на $\boldsymbol{R}$, распределения которых совпадают на полупрямой при некоторых n. Когда отсюда следует, что распределения X_1 и Y_1 совпадают всюду? Частичный ответ дает следующая

Теорема 1. *а) Пусть μ, $\nu \in P(\boldsymbol{R})$; $T = \{1, n_1, n_2, \ldots\}$ — бесконечное подмножество натуральных чисел, содержащее единицу. Справедлива импликация:*

$$(\mu|_{(-\infty,0)} \neq 0;\ \mu^n|_{(-\infty,0)} = \nu^n|_{(-\infty,0)},\ n \in T) \Rightarrow (\mu = \nu). \tag{1}$$

б) *Пусть μ, $\nu \in M(\boldsymbol{R})$; $T = \{1, 2, n_2, \ldots\}$ — бесконечное подмножество натуральных чисел, содержащее единицу и двойку. Справедлива импликация (1).*

Покажем, что, вообще говоря, вероятностная мера не определяется по любому фиксированному числу сужений $\mu^n|_{(-\infty,0)}$.

Пример 1. *Пусть N — произвольное натуральное число. Обозначим c_k — коэффициенты в разложении*

$$z(1+z)^N (1-z)^{-N-1} = \sum_{k=0}^{N+1} c_k (1-z)^{-k},$$

$I = \{k : c_k > 0\}$. *Положим*

$$f_1(t) = \sum_{k\in I} \frac{c_k}{(1-it)^k}\left(\sum_{k\in I} c_k\right)^{-1}; \quad f_2(t) = -\sum_{k\notin I} \frac{c_k}{(1-it)^k}\left(\sum_{k\in I} c_k\right)^{-1}.$$

Очевидно, функции $\hat{\mu}(t) = (1+it)^{-1} f_1$, $\hat{\nu}(t) = (1+it)^{-1} f_2(t)$ являются преобразованиями Фурье вероятностных мер μ, ν и $\mu|_{(-\infty,0)} \neq 0$. Замечая, что $f_1(t) - f_2(t) = it(1+it)^N(1-it)^{-1-N}$, $(\sum_{k\in I} c_k)^{-1}$, имеем

$$\hat{\mu}^n(t) - \hat{\nu}^n(t) = \frac{f_1^n(t) - f_2^n(t)}{(1+it)^n} = \frac{it(1+it)^{N-n}}{(1-it)^{N+1}}\{f_1^{n-1}(t) + \ldots + f_2^{n-1}(t)\}.$$

Функция $it(1+it)^{N-n}(1-it)^{-1-N}$ при $n \leqslant N$ и функции $f_j(t)$ являются преобразованиями Фурье мер, сосредоточенных на $[0, \infty)$. Значит, это же верно и для разности $\hat{\mu}^n - \hat{\nu}^n$. Следовательно, $\mu^n|_{(-\infty,0)} = \nu^n|_{(-\infty,0)}$ при $n = 1, 2, \ldots, N$, но $\mu \neq \nu$.

Таким образом, для определения вероятностной меры μ необходимо знать бесконечно много сужений $\mu^n|_{(-\infty,0)}$, $n \in T$. Ввиду п. а) теоремы 1 это является и достаточным условием, если только $1 \in T$. В отличие от вероятностных, комплекснозначные меры μ, вообще говоря, не определяются по бесконечному числу сужений $\mu^n|_{(-\infty,0)}$, $T = \{1, n_1, \ldots\}$, если только $2 \notin T$.

Пример 2. *Положим*

$$\hat{\nu}(t) = \begin{cases} \dfrac{i}{1-i}\left(\dfrac{1-e^{it}}{t}\right)^2, & |t| < 2\pi, \\ \left(-1 - \dfrac{i}{1-i}\right)\left(\dfrac{1-e^{it}}{t}\right)^2, & |t| > 2\pi \end{cases}; \quad \hat{\mu}(t) = \hat{\nu}(t) + \left(\frac{1-e^{it}}{t}\right)^2.$$

Поскольку функции $\hat{\mu}(t)$, $\hat{\nu}(t)$, $\hat{\mu}'(t)$, и $\hat{\nu}'(t)$ лежат в $L^2(\boldsymbol{R})$, то, очевидно, $\hat{\mu}$ и $\hat{\nu}$ есть преобразования Фурье некоторых мер μ, $\nu \in M(\boldsymbol{R})$. Замечая, что при всех натуральных $n \neq 4k+2$ выполняется

$$\left(1 + \frac{i}{1-i}\right)^n - \left(\frac{i}{1-i}\right)^n = \left(-\frac{i}{1-i}\right)^n\left(-1 - \frac{i}{1-i}\right)^n,$$

получаем

$$\hat{\mu}^n(t) - \hat{\nu}^n(t) = \left[\left(1 + \frac{i}{1-i}\right)^n - \left(\frac{i}{1-i}\right)^n\right]\left(\frac{1-e^{it}}{t}\right)^{2n} = \frac{1-i^n}{(1-i)^n}\hat{\chi}^{2n}(t),$$

где $\chi = \chi(E) = \int\limits_{E\cap(0,1)} dx$. Значит, $\mu^n|_{(-\infty,0)} = \nu^n|_{(-\infty,0)}$ при всех $n \neq 4k+2$, но $\mu \neq \nu$.

Пример 3. *Положим* $\hat{\mu}(t) = \sqrt{2e^{it}-1} + 1$; $\hat{\nu}(t) = \sqrt{2e^{it}-1} - 1$. *Легко видеть, что* $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$ *являются преобразованиями Фурье некоторых мер* μ, $\nu \in M(\boldsymbol{R})$ *и* $\mu|_{(-\infty,0)} \neq 0$. *При всех* $n = 2k+1$ *имеем* $\hat{\mu}^n(t) - \hat{\nu}^n(t) = 2\sum C_{2k}^{2s}(2e^{it}-1)^{k-s}$ — *преобразование Фурье меры, сосредоточенной на* $[0, \infty]$. *Следовательно,* $\mu^n|_{(-\infty,0)} = \nu^n|_{(-\infty,0)}$ *при всех* $n = 2k+1$, *но* $\mu \neq \nu$.

В связи с теоремой А и теоремой 1 возникает вопрос: пусть мера удовлетворяет некоторым, более слабым, чем в теореме А, ограничениям. Для каких множеств T мера μ определяется по сужениям $\mu^n|_{(-\infty, 0)}$, $n \in T$? Приведем два результата в этом направлении.

Теорема 2. *Пусть* μ, $\nu \in M(\boldsymbol{R})$ *и выполнено условие* (C). *Найдется равномерно непрерывная на* $(-\infty, -1)$ *функция* $K(x) \geqslant 0$, *такая, что* $\int\limits_{-\infty}^{-1} x^{-2} K(x)\, dx = \infty$, $\int\limits_{(-\infty, 1)} \exp\{K(x)\}\, d|\mu|(x) < \infty$. *Импликация 1 справедлива для любого бесконечного подмножества* $T = \{1, n_1, n_2, \ldots\}$, *содержащего хотя бы одно четное число.*

Условие (C) означает, что либо вариация μ достаточно быстро убывает на $-\infty$ (но медленнее, чем в условии (B)), либо массы μ имеют «большие» лакуны при $x \to -\infty$. Легко видеть, что мера μ в примере 3 удовлетворяет условию (C) с $K(x) = r|x|$ при $r < \ln 2$. Следовательно, условие теоремы 2 «множество T содержит хотя бы одно четное число» ослабить нельзя.

Следующий результат указывает ограничение на меру μ, при котором две свертки μ^n и μ^m определяются по сужениям.

Теорема 3. *Пусть* μ, $\nu \in M(\boldsymbol{R})$ *и выполнено условие* (D). *Внутренность множества* $\{t \in \boldsymbol{R} : \hat{\mu}(t) = 0\}$ *пусто и*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|)^{-2} \ln |\hat{\mu}(t)|\, dt = -\infty.$$

Для любых $1 \leqslant n < m$ *справедлива импликация*

$$(\mu^n|_{(-\infty, 0)} = \nu^n|_{(-\infty, 0)},\ \mu^m|_{(-\infty, 0)} = \nu^n|_{(-\infty, 0)}) \Rightarrow (\mu^n = \nu^n,\ \mu^m = \nu^m). \quad (2)$$

Отметим, что условию (D) удовлетворяет широкий класс мер, в частности, невырожденная гауссова мера Φ. Пример $\hat{\nu} = (2 + \hat{\Phi}^n)^{1/n}$, $\nu^n - \Phi^n = 2\delta$, где δ — единичная мера, сосредоточенная в нуле, показывает, что Φ не определяется по сужению одной n-кратной свертки в классе $M(\boldsymbol{R})$ (Φ определяется по сужению $\Phi^n|_{(-\infty, 0)}$ в классе $P(\boldsymbol{R})$).

2. Введем обозначения: $C[z_1, \ldots, z_n]$ — кольцо всех многочленов с комплексными коэффициентами от переменных $z_1, \ldots, z_n$; $C(S_1, \ldots, S_n)$, $S_j \in C[z]$, — поле рациональных функций вида $R_1(S_1(z), \ldots, S_n(z))/R_2(S_1(z), \ldots, S_n(z)$; R_1, $R_2 \in C[z_1, \ldots, z_n]$. В дальнейшем через $P_k(z)$ обозначаем многочлен $P_k(z) = (1 + z)^k - z^k$.

Для доказательств теорем понадобится ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть* S, R_n, $R_m \in C[z]$ *удовлетворяют тождествам*

$$P_j(z) \equiv R_j(S(z));\ j = n,\ m;\ 1 < n < m. \quad (3)$$

Тогда $\deg S \leqslant 2$. *Если к тому же одно из чисел* n, m — *четно, то* $\deg S = 1$.

Доказательство. Поскольку $m > n$, то $\deg R_m \geqslant 2$. Дифференцируя (3), имеем $P'_m = R'_m(S) S'$, $\deg R'_m \geqslant 1$. Пусть $R'_m(z_0) = 0$. Обозначим z_j, $j = 1, 2, \ldots$ — корни уравнения $S(z) = z_0$. Многочлен $P'_m(z) = m[(1 + z)^{m-1} - z^{m-1}] = R'_m(S) \cdot S'$ не имеет кратных корней.

Поэтому $S'(z_j) \neq 0$, т. е. уравнение $S(z) = z_0$ имеет ровно $\deg S$ различных корней z_j. В точках z_j выполнены равенства

$$(z_j+1)^{m-1} - z_j^{m-1} = \frac{1}{m} R'_m(S(z_j))\, S'(z_j) = 0;$$

$$(z_j+1)^m - z_j^m = R_m(S(z_j)) = R_m(S(z_0)) = (z_k+1)^m - z_k^m.$$

Отсюда $(z_j+1)^m = (z_j+1)\, z_j^{m-1}$; $(z_j+1)^m - z_j^m = z_j^{m-1} = z_k^{m-1}$. Таким образом, $|z_j+1| = |z_j| = |z_k|$. Значит, окружности в комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$, $\{z \in \boldsymbol{C} : |z| = |z_1|\}$ и $\{z \in \boldsymbol{C} : |z| = |z_1+1|\}$ имеют пересечения в точках z_j, $j = 1, \ldots, \deg S$, что возможно только если $\deg S \leqslant 2$.

Из (3) видно, что $n - 1 = \deg P_n = \deg R_n \deg S$; $m - 1 = \deg P_m = \deg R_m \deg S$. Значит, если одно из чисел n, m — четно, то $\deg S$ — нечетно, т. е. $\deg S = 1$.

Лемма 2. *Для любых натуральных чисел $1 < n < m$ найдутся многочлены $Q_1, Q_2 \in C[z_1, z_2]$, такие, что $(z^2+z)\, Q_1(P_n(z), P_m(z)) \equiv Q_2(P_n(z), (P_m(z))$. Если к тому же хотя бы одно из чисел n, m — четно, то многочлены $Q_1, Q_2 \in C[z_1, z_2]$ можно выбрать так, что $zQ_1(P_n(z), P_m(z)) \equiv Q_2(P_n(z), P_m(z))$.*

Доказательство леммы опирается на теорему Люрота [4, с. 252], в силу которой для любого поля $C(S_1, \ldots, S_k)$, $S_j \in C[z]$, найдется рациональная функция $S \in C(z)$, такая, что $C(S_1, \ldots, S_k) = C(s)$. В частности, $C(P_n, P_m) = C(Q)$, $\exists Q \in C(z)$, откуда $P_n, P_m \in C(Q)$. Следовательно, найдутся $G_j \in C(z)$, такие, что $P_j = G_j(Q)$, $j = n, m$.

Для любого обратимого дробно-линейного преобразования $S = (b_0 Q + b_1)(b_2 Q + b_3)^{-1}$ имеем $C(S) = C(Q)$, при этом равенства $P_j = G_j(Q)$ переходят в равенства $P_j = R_j(S)$, $\exists R_j \in C(z)$. Покажем, что найдется такое дробно-линейное преобразование $S = S(Q)$, что S, R_n и R_m будут многочленами. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \overline{\boldsymbol{C}} \arrow[rr, "P_j"] \arrow[dr, "Q"'] & & \overline{\boldsymbol{C}} \\ & \overline{\boldsymbol{C}} \arrow[ur, "G_j"'] & \end{tikzcd}$$

где $\overline{\boldsymbol{C}}$ — замкнутая комплексная плоскость (сфера Римана). Рациональная функция отображает $\overline{\boldsymbol{C}}$ на себя, т. е. каждая точка в $\overline{\boldsymbol{C}}$ имеет непустой прообраз. Поэтому из равенств $\{\infty\} = \{P_j^{-1}\{\infty\}\} = \{Q^{-1}\{G_j^{-1}\{\infty\}\}\}$ следует, что полный прообраз $\{G_j^{-1}\{\infty\}\}$ содержит ровно одну точку a_j, $j = n, m$. Кроме того, $\{\infty\} = \{Q^{-1}\{a_n\}\} = \{Q^{-1}\{a_m\}\}$, откуда $a_n = a_m$. Предположим, что $a_n = \infty$. Это означает, что Q, G_n и G_m не имеют полюсов, т. е. являются многочленами. Если же $a_n \neq \infty$, то положим $S = (Q - a_n)^{-1}$. Тогда $P_j = R_j(S)$, $\exists R_j \in C(z)$. Поскольку $\{S^{-1}\{\infty\}\} = \{Q^{-1}\{a_n\}\} = \{\infty\}$, то и $\{R_j^{-1}\{\infty\}\} = \{\infty\}$, $j = n, m$. Значит, $S, R_n, R_m \in C[z]$.

Таким образом, выполняются условия леммы 1, в силу которой $S(z) = \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$. Поскольку $S \in C(S) = C(P_n, P_m)$, то найдутся $S_1, S_2 \in C[z_1, z_2]$, такие, что $\alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 \equiv S_1(P_n(z), P_m(z))/S_2 \times (P_n(z), P_m(z))$, откуда $(\alpha_2 z^2 + \alpha_1 z)\, S_2(P_n(z), P_m(z)) \equiv S_1(P_n(z),$

$P_m(z)) - \alpha_0 S_2(P_n(z), P_m(z))$. Если одно из чисел n, m — четно, то, ввиду леммы 1, $\deg S = 1$, т. е. $\alpha_2 = 0$ и второе из утверждений в лемме 2 доказано. Пусть оба числа n, m — нечетны. Поскольку для нечетных j выполняется $P_j(z) = P_j(-1-z)$, то имеем $\alpha_2 z^2 + \alpha_1 z \equiv \alpha_2(-1-z)^2 - \alpha_1(1+z)$, откуда $\alpha_1 = \alpha_2$, что доказывает первое утверждение леммы 2.

Лемма 3. *Пусть* $\mu, \nu \in M(\boldsymbol{R})$ *и пусть* $0 > \inf \operatorname{supp} \mu > -\infty$. *Импликация (1) справедлива для любого бесконечного множества* $T = \{1, n_1, \dots\}$.

Доказательство. Обозначим $a = \inf \operatorname{supp} \mu > -\infty$. Поскольку $\mu|_{(-\infty, 0)} = \nu|_{(-\infty, 0)}$, то $\inf \operatorname{supp}(\mu - \nu) \geqslant 0$ и для любого $\varepsilon \neq 1$, $\inf \operatorname{supp}(\mu - \varepsilon\nu) = a$. В силу теоремы Титчмарша «о свертках», при $j \in T$ имеем

$$0 \leqslant \inf \operatorname{supp}(\mu^j - \nu^j) = \inf \operatorname{supp}[(\mu - \nu)(\mu - \varepsilon_{j1}\nu) \dots (\mu - \varepsilon_{jj-1}\nu)] =$$

$$= \inf \operatorname{supp}(\mu - \nu) + \sum_{k=1}^{j-1} \inf \operatorname{supp}(\mu - \varepsilon_{jk}\nu), \ \varepsilon_{jk} = \exp\{2\pi i k/j\},$$

откуда $\inf \operatorname{supp}(\mu - \nu) \geqslant -(j-1)a$. Устремляя $j \to \infty$, $j \in T$, получаем $\inf \operatorname{supp}(\mu - \nu) = \infty$, $\mu = \nu$.

Лемма 4. *Пусть преобразование Фурье* $\hat{\mu}$ *меры* $\mu \in M(\boldsymbol{R})$ *представляется в виде* $\hat{\mu}(t) = (h_1/h_2)(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$, *где* h_1, h_2 — *аналитические ограниченные в полуплоскости* $\boldsymbol{C}_+ = \{t \in \boldsymbol{C} : \operatorname{Im} t > 0\}$ *непрерывные в* $\boldsymbol{C}_+ \cup R$ *функции, частное которых аналитично в* $\boldsymbol{C}_+$. *Тогда* $\inf \operatorname{supp} \mu > -\infty$.

Доказательство. Для любой функции h, аналитической и ограниченной в $\boldsymbol{C}_+$, найдутся [5] постоянная $a > 0$ и открытое множество $E \subset (1, \infty)$, $\int_E r^{-1} dr < \infty$, для которых оценка $|h(z)| \leqslant \exp\{-a|z|\}$ выполняется при $z \in \boldsymbol{C}_+$, $|z| \notin E$. Следовательно, справедлива оценка $|(h_1/h_2)(z)| \leqslant \exp\{b|z|\}$, $\exists b$, $z \in \boldsymbol{C}_+$, $|z| \notin E_1$, $\int_{E_1} r^{-1} dr < \infty$. Множество E_1 может содержать лишь конечное число интервалов $(N, 2N)$, поэтому из аналитичности в $\boldsymbol{C}_+$ функции h_1/h_2 и принципа максимума получаем оценку $|(h_1/h_2)(z)| \leqslant c\exp\{c|z|\}$, $\exists c$, $z \in \boldsymbol{C}_+$. Отсюда видно, что функция $\exp\{icz\}(h_1/h_2)(z)$ ограничена на мнимом луче, а ввиду $\exp\{icz\}(h_1/h_2)(z) = \exp\{icz\}\hat{\mu}(z)$, $z \in R$, — и на вещественной оси. Значит, по принципу Фрагмена — Линделефа [6, с. 67], эта функция ограничена в $\boldsymbol{C}_+$, что влечет оценку $|(h_1/h_2)(z)| \leqslant d\exp\{d \operatorname{Im} z\}$, $\exists d > 0$. Отсюда стандартным образом показывается, что $\mu|_{(-\infty, -d)} = 0$.

Доказательство теоремы 1. а) Докажем такое, эквивалентное п. а) утверждение. Пусть $\mu, \nu \in P(\boldsymbol{R})$; $T = \{1, n_1, \dots\}$ — бесконечное множество. Тогда справедлива импликация

$$(\mu \neq \nu; \ \mu^j|_{(-\infty, 0)} = \nu^j|_{(-\infty, 0)}, \ j \in T) \Rightarrow (\mu|_{(-\infty, 0)} = 0). \qquad (4)$$

Рассмотрим два случая: (i) множество T не содержит ни одного четного числа; (ii) множество T содержит четное число n.

(i) Положим $\chi_j = \nu^j - \mu^j$, $j \in T$. Поскольку $\chi_j|_{(-\infty, 0)} = 0$, то преобразование Фурье $\hat{\chi}_j(t)$ аналитически продолжается в $\boldsymbol{C}_+$ и ограниено там. Замечая, что $\chi_1 = \nu - \mu \neq 0$, $\chi_j = \nu^j - \mu^j = (\mu + \chi_1)^j - \mu^j$, получаем равенство

$$(\hat{\chi}_j/\hat{\chi}_1^j)(t) = (1 + (\hat{\mu}/\hat{\chi}_1)(t))^j - (\hat{\mu}/\hat{\chi}_1)^j(t) = P_j((\hat{\mu}/\hat{\chi}_1)(t)), \qquad (5)$$

которое выполняется в точках $t \in \boldsymbol{R}$, $\hat{\chi}_1(t) \neq 0$. Условимся для краткости иногда опускать аргумент в записи функций, считая, что равенства выполняются в точках непрерывности. Ввиду леммы 2 при $1 < n < m$; $n, m \in T$ выполняется

$$\left[\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right)^2 + \frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right] Q_1\left(P_n\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right), P_m\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right)\right) = Q_2\left(P_n\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right) P_m\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right)\right), \ \exists Q_1, Q_2. \quad (6)$$

Покажем, что

$$Q_1\left(P_n\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right), P_m\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right)\right) \not\equiv 0. \qquad (7)$$

Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_N$ — корни многочлена $Q_1(P_n(z), P_m(z))$. Тогда

$$Q_1\left(P_n\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right), P_m\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right)\right) = \beta \prod_{k=1}^{N}\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1} - \beta_k\right) = \beta \hat{\chi}_1^{-N} \prod_{k=1}^{N} (\hat{\mu} - \beta_k \hat{\chi}_1).$$

Поскольку μ, ν — вероятностные меры, то $\hat{\mu}(0) = \hat{\nu}(0) = 1$, $\hat{\chi}_1(0) = \hat{\nu}(0) - \hat{\mu}(0) = 0$. По граничной теореме единственности для аналитических в $\boldsymbol{C}_+$ и непрерывных в $\boldsymbol{C}_+ \cup \boldsymbol{R}$ функций найдется последовательность $t_k \to 0$, $t \in \boldsymbol{R}$, такая, что $\hat{\chi}_1(t_k) \neq 0$. Поэтому, $\prod_{k=1}^{N} (\hat{\mu}(t_k) - \beta_k \hat{\chi}_1(t_k)) \neq 0$ при достаточно малых t_k, что доказывает (7).

Из (5), (6) и (7) получаем

$$\left[\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right)^2 + \frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right] = Q_2\left(P_n\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right), P_m\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right)\right) \Big/ Q_1\left(P_n\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right), P_m\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right)\right) =$$

$$= Q_2\left(\frac{\hat{\chi}_n}{\hat{\chi}_1^n}, \frac{\hat{\chi}_m}{\hat{\chi}_1^m}\right) \Big/ Q_1\left(\frac{\hat{\chi}_n}{\hat{\chi}_1^n}, \frac{\hat{\chi}_m}{\hat{\chi}_1^m}\right).$$

Отсюда

$$\hat{\mu} = -\frac{\hat{\chi}_1}{2} \pm \frac{\hat{\chi}_1}{2}\sqrt{1 + 4(Q_2/Q_1)(\hat{\chi}_n/\hat{\chi}_1^n, \hat{\chi}_m/\hat{\chi}_1^m)};$$

$$\hat{\nu} = \frac{\hat{\chi}_1}{2} \pm \frac{\hat{\chi}_1}{2}\sqrt{1 + 4(Q_2/Q_1)(\hat{\chi}_n/\hat{\chi}_1^n, \hat{\chi}_m/\hat{\chi}_1^m)}.$$

Таким образом, при нечетных $j = 2k + 1 \in T$ получаем

$$\hat{\chi}_j = \hat{\nu}^j - \hat{\mu}^j = \hat{\chi}_1^j 2^{1-j} \sum_{s=0}^{k} C_j^{2s} (1 + 4(Q_2/Q_1)(\hat{\chi}_n/\hat{\chi}_1^n, \hat{\chi}_m/\hat{\chi}_1^m)).$$

Так как $\hat{\chi}_j$ — аналитичны в $\boldsymbol{C}_+$, $j \in T$, то функция $(\hat{\mu} + \hat{\nu})^2 = \hat{\chi}_1^2 (1 + 4(Q_2/Q_1)(\hat{\chi}_n/\hat{\chi}_1^n, \hat{\chi}_m/\hat{\chi}_1^m)$ — мероморфна в $\boldsymbol{C}_+$. Предположим, что она имеет полюс в точке $z_0 \in \boldsymbol{C}_+$. Обозначим $p \geqslant 0$ — кратность нуля χ_1 в точке z_0. Тогда, очевидно, функция χ_j должна иметь в точке z_0 полюс кратности $\geqslant k - p = (j-1)/2 - p$, что при $j > 2p + 1$ противоречит аналитичности χ_j. Следовательно, функция

$(\hat{\mu}+\hat{\nu})^2$, а, значит, [6, гл. 11, § 2], и функции $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$ аналитичны в $\boldsymbol{C}_+$. Отсюда следует [6, гл. 11, § 2], что μ и ν удовлетворяют условию (B) теоремы A. Если бы было $\inf \operatorname{supp} \mu = -\infty$, то ввиду теоремы A было бы $\mu = \nu$, что противоречит сделанному предположению $\mu \neq \nu$; то же, в силу леммы 3, происходит, если $0 > \inf \operatorname{supp} \mu > -\infty$. Таким образом, в случае (*i*) импликация (4) доказана.

(*ii*) Пусть $m > n$, $m \in T$. Ввиду леммы 2, (5) и (7), получаем

$$\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1} = (Q_2/Q_1)\left(P_n\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}}\right),\ P_m\left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\chi}_1}\right)\right) = (Q_2/Q_1)\left(\frac{\hat{\chi}_n}{\hat{\chi}_1^n},\ \frac{\hat{\chi}_m}{\hat{\chi}_1^m}\right), \tag{8}$$

откуда $\hat{\mu} = \hat{\chi}_1 (Q_2/Q_1)(\hat{\chi}_n/\hat{\chi}_1^n,\ \hat{\chi}_m/\hat{\chi}_1^m)$. Как и в случае (*i*), показываем, что $\hat{\mu}$ и ν — аналитичны в $\boldsymbol{C}_+$ и затем, что верна импликация (4).

Для доказательства п. б) теоремы 1 покажем, что импликация (4) верна для любых μ, $\nu \in M(\boldsymbol{R})$ и бесконечного множества $T = \{1,\ 2,\ n_2,\ \ldots\}$. Действительно, из $\chi_1 = \nu - \mu$, $\chi_2 = \nu^2 - \mu^2 = (\chi_1 + \mu)^2 - \mu^2$ получаем, что $\hat{\mu} = (\hat{\chi}_2 - \hat{\chi}_1^2)/2\hat{\chi}_1$. Отсюда, как и в случае а), получаем, что функция $(\hat{\chi}_2 - \hat{\chi}_1^2)/2\hat{\chi}_1$ аналитична в $\boldsymbol{C}_+$. Поэтому из леммы 4 следует, что $\inf \operatorname{supp} \mu > -\infty$. Применение леммы 3 завершает доказательство.

Доказательство теоремы 2. Достаточно доказать (4) для μ, $\nu \in M(\boldsymbol{R})$, где μ удовлетворяет условию (C), и бесконечного множества $T = \{1,\ 2,\ \ldots\}$, содержащего некоторое четное число n. Докажем справедливость (7) для любых $m > n$, $Q_1 \in C[z_1,\ z_2]$. По известной теореме из [7, с. 251], если ненулевая мера μ удовлетворяет условию (C), то ее преобразование Фурье не обращается в нуль ни на каком интервале. Поскольку $\chi_1|_{(-\infty,\,0)} = 0$, то условию (C) удовлетворяют все меры $\mu - \beta_k \chi_1$, где β_k — нули $Q_1(P_n(z),\ P_m(z))$. Отсюда и из леммы 2 получаем (8). Далее рассуждаем, как при доказательстве п. б) теоремы 1.

Доказательство теоремы 3. Предположим, что теорема неверна, т. е. одна из мер $\chi_n = \nu^n - \mu^n$, $\chi_m = \nu^m - \mu^m$ — ненулевая. Из равенств $\nu^{nm} = (\chi_n + \mu^n)^m = (\chi_m + \mu^m)^n$ получаем $0 = (\chi_n + \mu^n) - (\chi_m + \mu^m)^n = \sum \varphi_j \mu^j$, где через φ_j обозначены соответствующие ненулевые меры в разложении $(\chi_n + \mu^n)^m - (\chi_m + \mu^m)^n$. Поскольку $\chi_n|_{(-\infty,\,0)} = \chi_m|_{(-\infty,\,0)} = 0$, то и $\varphi_j|_{(-\infty,\,0)} = 0$. Ввиду [7, с. 30], $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+t^2)^{-1} |\ln|\hat{\varphi}_j(t)|| < \infty$. Поэтому из условия (*D*) следует, что на некоторой последовательности $t_k \in \boldsymbol{R}$, $|t_k| \to \infty$, выполняется $|\ln| \times \Pi\varphi_j(t_k)|| = o|\ln|\hat{\mu}(t_k)||$, $k \to \infty$. Значит, при $j > l$ имеем $(\hat{\varphi}_j \hat{\mu}^j) \times (t_k) = o((\hat{\varphi}_l \hat{\mu}^l)(t_k))$, $k \to \infty$, что противоречит тождеству $\sum \hat{\varphi}_j \hat{\mu}^j \equiv 0$.

Замечание. Пусть $M(\boldsymbol{R}_+)$ — подкласс $M(\boldsymbol{R})$ мер, сосредоточенных на $[0,\ \infty]$. Будем говорить, что мера $\mu \in M(\boldsymbol{R})$ трансцендентна над $M(\boldsymbol{R}_+)$, если из любого равенства $\sum\limits_{j=0}^{N} \varphi_j \mu^j = 0$ $\varphi_j \in M(\boldsymbol{R}_+)$, следует, что все $\varphi_j = 0$. При доказательстве теоремы 3 было показано фактически, что если μ удовлетворяет условию (D), то μ трансцендентна над $M(\boldsymbol{R}_+)$. Оказывается, теорему 3 можно усилить следующим образом.

Теорема 4. *Пусть* $\mu, \nu \in M(\boldsymbol{R})$ *и пусть* μ *трансцендентна над* $M(\boldsymbol{R}_+)$. *Тогда справедлива импликация (2).*

Доказательство. Из равенств $\chi_n = \nu^n - \mu^n$, $\chi_m = \nu^m - \mu^m$ вытекает, что $0 = (\mu^n + \chi_n)^m - (\mu^m + \chi_m)^n$. Если хотя бы одна из мер χ_n, $\chi_m \neq 0$, то были бы ненулевые меры φ_j в разложении $(\mu^n + \chi_n)^m - (\mu^m + \chi_m)^n = \sum \varphi_j \mu^j$, что, ввиду $\varphi_j \in M(\boldsymbol{R}_+)$ противоречит трансцендентности μ над $M(\boldsymbol{R}_+)$.

Список литературы: 1. *Rossberg H.-J, Jesiak B., Siegel G.* Analytical methods of probability theory. Berlin, 1984. 120 S. 2. *Островский И. В., Улановский А. М.* Классы комплекснозначных борелевских мер, в которых имеет место однозначная определенность сужениями//Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1989. 170. С. 233—253. 3. *Ostrovsky T. V.* Generalization of the Titchmarsh convolution theorem and the complex-valued measures uniquely determined by their restriction to a half-line//Lecture Notes in Math. 1985. 1155. P. 256—283. 4. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М., 1979. 80 с. 5. *Hayman W.* K. Questions of regularity connected with the Phragmen—Lindelöf principle//J. Math. Pures Appl. (9). 35. 1956. P. 115—126. 6. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов. М., 1972. 110 с. 7. *Louis de Brangec.* Hilbert spaces of entire functions. Prentice—Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J. 1968. 76 p. 8. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956. 350 с.

Поступила в редколлегию 11.12.90

УДК 517.532

Н. К. РАДЯКИН

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАЛЫХ ДВИЖЕНИЙ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ

1. Постановка задачи. Пусть сверхтекучий гелий (He II) частично заполняет осесимметричный сосуд, который равномерно вращается вокруг оси симметрии Oz с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \boldsymbol{k}$, где $\boldsymbol{k}$ — орт оси симметрии. Будем считать, что нормальная составляющая He II вращается вместе с сосудом, а сверхтекучая компонента не участвует в твердотельном вращении. Это возможно при достаточно малых ω_0, когда отсутствуют вихри в He II. Таким образом, в состоянии относительного равновесия поля скоростей $\boldsymbol{u}_n$ и $\boldsymbol{u}_s$ для нормальной и сверхтекучей компонент будут: $\boldsymbol{u}_n^0 = \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{u}_s^0 = 0$, где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор в неподвижной цилиндрической системе координат (r, θ, z).

Рассмотрим задачу о малых движениях сверхтекучей жидкости относительно этого равновесия. Будем пренебрегать силами диссипации и жидкость считать несжимаемой.

Сверхтекучая жидкость при относительном равновесии занимает осесимметричную область Ω, ограниченную смоченной твердой стенкой сосуда Σ и свободной поверхностью жидкости Γ. Поместим начало координат в точке пересечения оси симметрии и поверхности Γ, а ось z направим вверх по оси симметрии.

Для определения полей скоростей $\boldsymbol{u}_n$ и $\boldsymbol{u}_s$ и поля давления в жидкости $p(r, t)$ имеем следующую систему уравнений [1, 2]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{u}_s}{\partial t} + (u_s\nabla)\,\boldsymbol{u}_s = -\nabla\mu_1 - g\boldsymbol{k} + \boldsymbol{f}_1, \\ &\frac{\partial \boldsymbol{u}_n}{\partial t} + (\boldsymbol{u}_n\nabla)\,\boldsymbol{u}_n = -\frac{1}{\rho_n}\nabla p + \frac{\rho_s}{\rho_n}\nabla\mu_1 - g\boldsymbol{k} + \boldsymbol{f}_1 \\ &\nabla\cdot\boldsymbol{u}_n = 0,\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}_s = 0 \end{aligned}\right\}(\boldsymbol{r}\in\Omega), \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{u}_s\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u}_n\cdot\boldsymbol{n} = 0\ (\boldsymbol{r}\in\Sigma),\ p = \mathrm{const},\ \boldsymbol{u}_s\cdot\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{u}_n\cdot\boldsymbol{n}_1 = \frac{\partial\zeta}{\partial t}\,(\boldsymbol{r}\in\Gamma'),$$

$$\zeta|_{t=0} = \zeta^0,\ \boldsymbol{u}_s|_{t=0} = \boldsymbol{u}_s^0,\ \boldsymbol{u}_n|_{t=0} = \boldsymbol{u}_n^0. \tag{1.2}$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, μ_1 — химический потенциал, $\rho_s = \mathrm{const}$; $\rho_n = \mathrm{const}$ — плотности сверхтекучей и нормальной компонент соответственно, Γ' — «движущаяся» свободная поверхность жидкости, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{n}_1$ — нормали к Σ и Γ', внешние по отношению к Ω, $\zeta(r, t)$ — отклонение по нормали $\boldsymbol{n}_1$ поверхности Γ' от ее равновесного состояния Γ, $\boldsymbol{f}$ — заданное малое поле внешних сил.

Искомые функции $\boldsymbol{u}_n$, p и μ_1 представим в виде $\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{u}_n^0 + \boldsymbol{u}_1$, $p = p^0 + p$, $\mu_1 = \mu^0 + \mu$, где величины, обозначенные ноликом, относятся к равновесному состоянию; $\boldsymbol{u}_n^0 = \boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{r}$, $p^0 = \rho_n/2\,(\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{r})^2 + (\rho_n + \rho_s)\,gz + \mathrm{const}$, $\mu^0 = -gz + \mathrm{const}$, а $\boldsymbol{u}_1$, p, μ — малые добавки к ним.

Пренебрегая квадратами величин $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_s$, p, μ и ζ, а также их смешанными произведениями (после перехода к безразмерным переменным), вместо задачи (1.1)—(1.2), получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial t} + 2\omega_0\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u}_1 + (\omega_0\times\boldsymbol{r})\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_1 = -\frac{1}{\rho_n}\nabla p + \frac{\rho_s}{\rho_n}\nabla\mu + \boldsymbol{f} \\ &\frac{\partial \boldsymbol{u}_s}{\partial t} = -\nabla\mu + \boldsymbol{f},\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}_1 = 0,\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}_s = 0 \end{aligned}\right\}(\boldsymbol{r}\in\Omega) \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{u}_s\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{n} = 0\ (\boldsymbol{r}\in\Sigma),$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \boldsymbol{u}_s\cdot\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{n}_1,\ \ p = (\rho_n + \rho_s)\,g\zeta\,(\boldsymbol{r}\in\Gamma),$$

$$\zeta|_{t=0} = \zeta^0,\ \boldsymbol{u}_s|_{t=0} = \boldsymbol{u}_s^0,\ \boldsymbol{u}_1|_{t=0} = (-\omega_0\times\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{u}_n^0. \tag{1.4}$$

2. Проектирование системы (1.3)—(1.4) на ортогональные подпространства. Будем считать при каждом $0 \leqslant t \leqslant T$ неизвестные ∇p, $\nabla\mu$, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_s$ элементами векторного пространства $L_2(\Omega)$, а $\zeta\in L_2(\Gamma)$. Причем в силу условия несжимаемости имеем $\int\limits_\Gamma \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{n}_1\,d\Gamma = 0$, т. е. $\zeta\in L_2(\Gamma)\ominus\{1\}\equiv H$ со скалярным произведением $(\eta, \zeta)_0 = \int\limits_\Gamma \eta\cdot\zeta^*\,d\Gamma$, где ζ^* — функция, комплексно-сопряженная с ζ.

Как известно [3, 4], пространство вектор-функций $L_2(\Omega)$, суммируемых с квадратом по Ω, можно разложить на ортогональные подпространства: $L_2(\Omega) = G_\Gamma(\Omega) \oplus J_\Sigma(\Omega) \oplus J_0(\Omega)$, где $G_\Gamma(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in L_2(\Omega): \boldsymbol{v} = \nabla\varphi,\ \varphi \in W_2^1(\Omega),\ \ \varphi = 0$ (на $\Gamma)\}$; $J_\Sigma(\Omega) = \{\boldsymbol{w} \in L_2(\Omega): \boldsymbol{w} = \nabla\Phi,\ \ \Phi \in W_2^1(\Omega);\ \Delta\Phi = 0 (в\Omega),\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$ (на $\Sigma)\}$; $W_2^1(\Omega)$ — пространство С. Л. Соболева для скалярных функций. $J_0(\Omega)$ получается замыканием в норме $L_2(\Omega)$ множества $\dot{J}_0(\Omega)$ гладких соленоидальных векторов:

$$\dot{J}_0(\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in L_2(\Omega): u_i \in C^1(\Omega),\ i = 1, 2, 3;\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0\ (\text{в } \Omega),$$
$$u_n \equiv \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0\ \ (\text{на } \Sigma),\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}_1 = 0\ \ (\text{на } \Gamma)\}.$$

Тогда из (1.3)—(1.4) следует, что $\boldsymbol{u}_1 \in J_\Sigma(\Omega) \oplus J_0(\Omega)$, $\boldsymbol{u}_s \in J_\Sigma(\Omega) \oplus J_0(\Omega)$, ∇p, $\nabla\mu \in G_\Gamma(\Omega) \oplus J_\Sigma(\Omega)$. Поэтому будем разыскивать эти функции в виде

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}_1 = \nabla\Phi + \boldsymbol{u} && \nabla\Phi \in J_\Sigma(\Omega), && \boldsymbol{u} \in J_0(\Omega),\\
&\boldsymbol{u}_s = \nabla\Phi_s + \boldsymbol{v}_s && \nabla\Phi_s \in J_\Sigma(\Omega), && \boldsymbol{v}_s \in J_0(\Omega),\\
&\nabla p = \nabla\varkappa + \nabla\varphi && \nabla\varkappa \in G_\Gamma(\Omega), && \nabla\varphi \in J_\Sigma(\Omega),\\
&\nabla\mu = \nabla\mu_\Gamma + \nabla\mu_\Sigma && \nabla\mu_\Gamma \in G_\Gamma(\Omega), && \nabla\mu_\Sigma \in J_\Sigma(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в уравнения (1.3)—(1.4) и проектируя эти уравнения на подпространства $L_2(\Omega)$, получим

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + 2\omega_0 P_0[\boldsymbol{k}\times\nabla\Phi + \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u} + \boldsymbol{a}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{u}] = P_0\boldsymbol{f}; \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial\nabla\Phi}{\partial t} + 2\omega_0 P_\Sigma[\boldsymbol{k}\times\nabla\Phi + \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u} + \boldsymbol{a}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{u}] =$$
$$= -\frac{1}{\rho_n}\nabla\varphi + \frac{\rho_s}{\rho_n}\nabla\mu_\Sigma + P_\Sigma\boldsymbol{f}; \tag{2.3}$$

$$2\omega_0 P_\Gamma[\boldsymbol{k}\times\nabla\Phi + \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u} + \boldsymbol{a}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{u}] = -\frac{1}{\rho_n}\nabla\varkappa + \frac{\rho_s}{\rho_n}\nabla\mu_\Gamma + P_\Gamma\boldsymbol{f}; \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}_s}{\partial t} = P_0\boldsymbol{f},\ 0 = -\nabla\mu_\Gamma + P_\Gamma\boldsymbol{f}; \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial\nabla\Phi_s}{\partial t} = -\nabla\mu_\Sigma + P_\Sigma\boldsymbol{f}, \tag{2.6}$$

где $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r})/2$; P_0, P_Σ, P_Γ — ортопроекторы соответственно на $J_0(\Omega)$, $J_\Sigma(\Omega)$ и $G_\Gamma(\Omega)$.

Функции $\boldsymbol{v}_s$ и $\nabla\mu_\Gamma$ находятся сразу из (2.5), тогда уравнение (2.4) может служить для определения величины $\nabla\varkappa$, а уравнение (2.6) — для нахождения $\nabla\mu_\Sigma$ по известным функциям $\nabla\Phi$, $\boldsymbol{u}$ и $\nabla\Phi_s$. Так как $\nabla\Phi$ и $\nabla\Phi_s \in J_\Sigma(\Omega)$ и согласно граничным условиям (1.4) $\frac{\partial\Phi}{\partial n_1} = \frac{\partial\Phi_s}{\partial n_1}$ (на Γ), то $\nabla\Phi = \nabla\Phi_s$ (в Ω).

Поэтому в дальнейшем будем рассматривать лишь уравнения (2.2) и (2.3), несколько переписав их:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + 2\omega_0 P_0[\boldsymbol{k}\times\nabla\Phi + \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u} + \boldsymbol{a}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{u}] = P_0\boldsymbol{f}, && (2.7)\\
&\frac{\partial\Phi}{\partial t} + 2\omega_0(\psi + \Psi + \Psi_1) = -\frac{1}{\rho_n + \rho_s}\varphi + F. && (2.8)
\end{aligned}\right\}(\text{в}\Omega)$$

Здесь $\nabla\varphi = \frac{\rho_n}{\rho_n+\rho_s} P_\Sigma(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u})$, $\nabla\Psi = \frac{\rho_n}{\rho_n+\rho_s} P_\Sigma(\boldsymbol{k}\times\nabla\Phi)$, $\nabla\Psi_1 = \frac{\rho_n}{\rho_n+\rho_s} P_\Sigma(\boldsymbol{a}\times \operatorname{rot}\boldsymbol{u})$, $\nabla F = P_\Sigma \boldsymbol{f}$. Граничные условия на Γ(см. (1.4)) принимают вид

$$\varphi|_\Gamma = (\rho_n+\rho_s)\, g\zeta \text{ и } \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial n} \text{ (на } \Gamma). \quad (2.9)$$

Рассматривая уравнение (2.8) при $\boldsymbol{r}\in\Gamma$ и учитывая значение $\varphi|_\Gamma$, получим следующую систему уравнений для определения функций $\boldsymbol{u}$, $\Phi|_\Gamma$ и ζ:

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + 2\omega_0 P_0[\boldsymbol{k}\times V\Phi|_\Gamma + \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u} + \boldsymbol{a}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{u}] = P_0\boldsymbol{f} \text{ (в } \Omega); \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial\Phi|_\Gamma}{\partial t} + 2\omega_0(\psi + \Psi_1 + \Psi) = -g\zeta + F \text{ (на } \Gamma); \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = C^{-1}\Phi|_\Gamma \text{ (на } \Gamma). \quad (2.12)$$

Здесь оператор V определен соотношением $V\Phi|_\Gamma = \nabla\Phi$, $\nabla\Phi\in J_\Sigma(\Omega)$, а оператор C^{-1}: $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n_1}\right|_\Gamma = C^{-1}\Phi|_\Gamma$.

3. Вспомогательные предложения. Для того чтобы $\nabla\Phi\in J_\Sigma(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы $\Phi|_\Gamma\in W_2^{1/2}(\Gamma)\cap H \equiv H_+$. Это следует из теоремы вложения Гальярдо [4]. Тогда оператор V действует из пространства H_+ в $J_\Sigma(\Omega)$. По функции $\Phi|_\Gamma\in W_2^{1/2}(\Gamma)$ однозначно восстанавливается функция $\Phi\in W_2^1(\Omega): \nabla\Phi\in J_\Sigma(\Omega)$, при этом $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n_1}\right|_\Gamma \in H_- = (H_+)'$ — пространству функций с негативной нормой [5]. Таким образом, оператор C^{-1} действует из пространства H_+ в пространство H_-.

Лемма 1. Оператор C^{-1} является неограниченным положительно определенным самосопряженным оператором в пространстве $H_+(\Gamma)$.

Действительно, пусть ψ и $\varphi\in H_+$, тогда $(C^{-1}\varphi, \psi)_0 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_1}, \psi\right)_0 = (\nabla\varphi, \nabla\psi)_2 = \left(\varphi, \frac{\partial\psi}{\partial n_1}\right)_0 = (\varphi, C^{-1}\psi)_0$. При $\varphi=\psi$ имеем $(C^{-1}\varphi,\varphi)_0 = (\nabla\varphi,\nabla\varphi)_2$. По теореме вложения С. Л. Соболева $\|\nabla\varphi\|^2 = (\nabla\varphi,\nabla\varphi)_2 \geqslant c_1\|\varphi\|_0^2$, где $c_1>0$, а $\varphi\in H_+$. Тогда $(C^{-1}\varphi,\varphi)\geqslant c_1\|\varphi\|_0^2$, что и требовалось доказать.

Из леммы следует, что существует ограниченный оператор C, который является обратным к оператору C^{-1}.

Рассмотрим в пространстве $J_0(\Omega)$ оператор S: $S\boldsymbol{u} = -iP_0(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{u}\in J_0(\Omega)$.

Лемма 2. Оператор $S: J_0(\Omega)\to J_0(\Omega)$ — самосопряжен и ограничен.

Действительно: Пусть $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{u}\in J_0(\Omega)$, тогда

$$(S\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_2 = (-iP_0(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v})_2 = (-i(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v})_2 = \\ = (\boldsymbol{u}, -i(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}))_2 = (\boldsymbol{u}, S\boldsymbol{v})_2.$$

При $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$ имеем $|(S\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})| \leqslant \|\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u}\|\cdot\|\boldsymbol{u}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}\|_2^2$, т. е. $\|S\|\leqslant 1$.

В пространстве $H_+(\Gamma)$ введем оператор S_1: $iS_1\Phi = \Psi|_\Gamma$, где $\nabla\Psi = P_\Sigma(\boldsymbol{k} \times V\Phi)$. Так как $\nabla\Psi \in J_\Sigma(\Omega)$, то по теореме вложения $\Psi|_\Gamma \in W_2^{1/2}(\Gamma) \cap H \equiv H_+$, т. е. оператор S_1 действует из H_+ в H_+.

Лемма 3. Оператор $S_1: H_+(\Gamma) \to H_+(\Gamma)$ — самосопряжен и ограничен.

Доказательство: Пусть Φ и $\Phi_1 \in H_+(\Gamma)$, тогда $(\Phi, S_1\Phi_1)_+ = (\nabla\tilde{\Phi}, -i\nabla\Psi_1)_2 = (\nabla\tilde{\Phi}, -iP_\Sigma(\boldsymbol{k} \times V\Phi_1))_2 = (-iP_\Sigma(k \times \nabla\tilde{\Phi}), V\Phi_1)_2 = (S_1\Phi, \Phi_1)_+$.

Здесь $\Delta\tilde{\Phi} = 0$, $\tilde{\Phi}|_\Gamma = \Phi$, $\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial n} = 0$ (на Σ). При $\Phi = \Phi_1$ имеем $(\Phi, S_1\Phi)_+ = (\nabla\tilde{\Phi}, -iP_\Sigma(\boldsymbol{k} \times \nabla\tilde{\Phi}))_2 \leqslant \|\nabla\tilde{\Phi}\|_2^2 = \|\Phi\|_+^2$, т. е. $\|S_1\| \leqslant 1$.

4. Переход к операторному уравнению. Введем в уравнениях (2.10)—(2.12) новые искомые функции:

$$\eta = C^{1/2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n_1}\right)_\Gamma = C^{-1/2}\Phi|_\Gamma, \ \theta = C^{1/2}\zeta \tag{4.1}$$

и подействуем оператором $C^{-1/2}$ на уравнения (2.11) и (2.12). В результате вместо системы уравнений (2.10)—(2.12) мы придем к системе уравнений для функций $\boldsymbol{u}(t) \in J_0(\Omega)$, $\eta(t) \in H_0$ и $\theta(t) \in H_0$.

Будем считать, что вектор функция $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ с компонентами $= \boldsymbol{u}(t) \in J_0(\Omega)$, $\eta(t) \in H_0(\Gamma)$ и $\theta(t) \in H_0(\Gamma)$ принадлежит пространству $= J_0(\Omega) \oplus H_0(\Gamma) \oplus H_0(\Gamma)$. Тогда исследуемую систему уравнений можно переписать в виде одного операторного уравнения в пространстве $\boldsymbol{H}$ для искомого вектор-столбца $v(t)$. Соответствующим образом преобразуются и начальные условия:

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + i2\omega_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + B\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}, \ \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}^0, \tag{4.2}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & gC^{-1} \\ 0 & -I & 0 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} P_0 f \\ C^{-1/2}F \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \eta \\ \theta \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}^0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^0 \\ \eta^0 \\ \theta^0 \end{pmatrix},$$

$$A_{11}\boldsymbol{u} = -iP_0[\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{a} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{u}], \ A_{12}\eta = -iP_0[\boldsymbol{k} \times VC^{1/2}\eta],$$

$$A_{21}\boldsymbol{u} = S_0\boldsymbol{u} = -iC^{-1/2}(\psi + \Psi_1), \ A_{22}\eta = S_1\eta = -iC^{-1/2}\Psi;$$

$$\nabla\psi = P_\Sigma(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u}), \ \nabla\Psi_1 = P_\Sigma(\boldsymbol{a} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{u}), \ \nabla\Psi = P_\Sigma(\boldsymbol{k} \times VC^{1/2}\eta).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Задача (2.10)—(2.12) равносильна задаче Коши (4.2) в пространстве* $\boldsymbol{H}$.

5. Исследование задачи Коши (4.2). Докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 3. *Однородное операторное уравнение (4.2) в пространстве H есть абстрактное параболическое уравнение.*

Доказательство леммы разбивается на две части. Рассмотрим сначала уравнение

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + B_1\boldsymbol{v} = 0, \ \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}^0 \tag{5.1}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & gC^{-1} \\ 0 & -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \varphi \\ \varphi_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}^0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^0 \\ \varphi^0 \\ \varphi_1^0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = I + gC^{-1},$$

где T_1 — неограниченный самосопряженный оператор. Пусть $\boldsymbol{v}^0 \in D(B_1)$. Тогда легко доказать, что уравнение (5.1) является параболическим, а задача Коши для него равномерно корректна на каждом конечном интервале $[0, T]$. Задача (5.1) распадается на две независимые задачи для компоненты $\boldsymbol{u}$ искомого вектор-столбца и скалярных функций φ и φ_1:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + T_1 \boldsymbol{u} = 0, \ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}^0; \tag{52}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + T_2 \varphi + gC^{-1}\varphi_1 = 0, \ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \varphi = 0 \ \varphi(0) = \varphi^0, \ \varphi_1(0) = \varphi_1^0. \tag{5.3}$$

Решение задачи (5.2) легко находится через полугруппу $W(t)$, порожденную самосопряженным положительно определенным оператором T_1. $W(t)$ можно построить с помощью спектрального разложения, как функцию $W(t) = e^{-T_1 t}$ от оператора T_1. Тогда $\boldsymbol{u} = W(t)\,\boldsymbol{u}^0$.

Решение задачи (5.3) можно получить, используя полугруппу $U(t)$, построенную с помощью спектрального разложения через оператор C^{-1}: $U(t) = e^{-gC^{-1}t}$.

Тогда

$$\varphi = e^{-t}\varphi^0 - \int_0 e^{\tau - t} gC^{-1} U(t)(\varphi^0 + \varphi_1^0)\,d\tau, \ \varphi_1 = U(t)(\varphi^0 + \varphi_1^0) - \varphi.$$

Рассмотрим теперь оператор $B_2 = i2\omega_0 A + B$ из (4.2) и сравним его с оператором B_1. Во-первых, область определения оператора B_2 не у́же области определения оператора B_1, во-вторых, существует ограниченный обратный оператор B_1^{-1}, который равен:

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ 0 & g^{-1}C & g^{-1}CT_2 \end{pmatrix},$$

а оператор B_2 допускает замыкание, тогда согласно лемме 7.1 из [6] имеем, что оператор B_2 подчинен оператору B_1. Согласно теореме 7.2 из [6] и замечания к ней получаем, что однородное уравнение (4.2) является абстрактным параболическим. Задача Коши для него равномерно корректна. Соответствующая полугруппа $V(t)$ аналитична в секторе, содержащем положительную полуось. Таким образом, лемма доказана.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение в (4.2). Через полугруппу $V(t)$, отвечающую оператору B_2, решение этого уравнения будем искать в виде [6, 7]:

$$\boldsymbol{v}(t) = V(t)\,\boldsymbol{v}^0 + \int_0^t V(t-\tau)\,\boldsymbol{F}(t)\,d\tau. \tag{5.4}$$

Теорема 2. *Если в (1.3)—(1.4) выполнены условия:*

$$\boldsymbol{f}(t) \in L_2(\Omega), \ \forall t \in [0, T], \ \boldsymbol{u}_s^0 \in L_2(\Omega), \ \boldsymbol{u}_n^0 \in L_2(\Omega), \ \zeta^0 \in H_-(\Gamma), \tag{5.5}$$

то задача (1.3)—(1.4) корректно разрешима и имеет обобщенное решение (5.4) на интервале $[0, T]$, $\forall T > 0$.

Доказательство. Согласно теореме 1 задача Коши (4.2) эквивалентна исходной задаче (1.3)—(1.4), а ее обобщенное решение дается формулой (5.4). При $\boldsymbol{v}^0 \in \mathcal{H}$ и $F(t) \in \mathcal{H}$ это решение $\boldsymbol{v}(t)$ будет непрерывной функцией от t [6, 7]. Остается проверить, что условия (5.5) на данные исходной задачи обеспечивают требования на $\boldsymbol{v}^0$ и $F(t)$. Если $f(t) \in L_2(\Omega)$, то $P_0 f \in J_0(\Omega)$, а $P_\Sigma f \in \nabla F \in J_\Sigma(\Omega)$, но тогда $F \in W_2^1(\Omega)$, а $F|_\Gamma \in H_+$ и поэтому $C^{1/2}F \in H_0$, т. е. $F(t) \in \mathcal{H} = J_0(\Omega) \oplus \oplus H_0 \oplus H_0$. При $\boldsymbol{u}_n^0 \in L_2(\Omega)$ имеем $P_0 \boldsymbol{u}_n^0 = \boldsymbol{u}^0 \in J_0(\Omega)$, а при $\zeta^0 \in H_-$ получаем $C^{1/2}\zeta \in H_0$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial n_1} \in H_-$, но $C^{1/2}\frac{\partial \Phi}{\partial n_1} \in H_0$, т. е. $\boldsymbol{v}^0 \in \mathcal{H}$. Таким образом, теорема доказана.

Список литературы: 1. *Патерман С.* Гидродинамика сверхтекучей жидкости. М., 1978. 520 с. 2. *Халатников И. М.* Теория сверхтекучести. М., 1971. 120 с. 3. *Копачевский Н. Д.* Малые движения и собственные колебания идеальной вращающейся жидкости // Препринт. ФТИНТ АН УССР. Х., 1978. С. 38—77. 4. *Копачевский Н. Д.* О малых колебаниях идеальной жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости // Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. 1980. Вып. 6. С. 98—134. 5. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным фукциям самосопряженных операторов. К., 1965. 800 с. 6. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967. 464 с. 7. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. М., 1989. 416 с.

Поступила в редколлегию 18.12.90

УДК 517.982

М. И. ОСТРОВСКИЙ

ПОДПРОСТРАНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ БАЗИСОВ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

Будем пользоваться терминологией книг [1—3].

1. Определение 1. *Пусть X — банахово пространство с (безусловным) базисом. Подпространство $M \subset X^*$, не обязательно замкнутое, назовем (безусловно) базисным, если оно содержит все биортогональные функционалы некоторого (безусловного) базиса в X.*

Теорема 1. *Пусть X — нерефлексивное банахово пространство с безусловным базисом. Тогда в X^* найдется базисное подпространство, не являющееся безусловно базисным.*

Доказательство. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ — безусловный базис в пространстве X. Рассмотрим отдельно случаи, когда базис $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ является ограниченно полным и когда нет.

В первом случае, согласно [1, с. 9], пространство X после эквивалентной перенормировки является сопряженным к $N = [x_i^*]_{i=1}^\infty \subset X^*$ в естественной двойственности. (Квадратными скобками обозначаем замыкание линейной оболочки).

Ясно, что пространство N является нерефлексивным банаховым пространством с натягивающим безусловным базисом. В силу известных результатов Джеймса [1, с. 9, 22] этот базис не является ограниченно полным, и пространство N содержит последовательность блоков

$$m_i = \sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} a_k x_k^*; \ \| m_i \| = 1,$$

эквивалентную каноническому базису пространства c_0. Пусть векторы

$m_i^* = \sum \sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} b_k x_k$ таковы, что $m_i^*(m_i) = 1$ и $\sup_i \| m_i^* \| = C < \infty$.
Нетрудно видеть, что оператор $P: N \to N$, определенный равенством

$P(m) = \sum_{i=1}^{\infty} m_i^*(m)\, m_i$, является оператором проектирования на подпространство, изоморфное c_0.

Используя рассуждения работы [4], нетрудно построить натягивающий базис $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ в $\ker P$. Будем иметь $X = ([q_i]_{i=1}^{\infty})^* \oplus ([m_i]_{i=1}^{\infty})^*$.

Ясно, что второе слагаемое изоморфно l_1.

Напомним, что для любого ординала α через $c(\alpha)$ обозначается пространство непрерывных функций на множестве всех ординалов, не превосходящих α, снабженном порядковой топологией. Для счетного ординала α имеем $(c(\alpha))^* = l_1$ и $c(\alpha)$ имеет натягивающий базис [5, с. 177, 213; 1, с. 10].

Пусть $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ — некоторый натягивающий базис в пространстве $L := c(\omega^{\omega^2})$ и пусть $\{s_i^*\}_{i=1}^{\infty} \subset l_1$ — его биортогональные функционалы. Система

$$\{q_i^*\}_{i=1}^{\infty} \cup \{s_i^*\}_{i=1}^{\infty} \tag{1}$$

после ее произвольной перенумерации с сохранением порядка внутри каждой из последовательностей образует ограниченно полный базис в X [1, с. 9]. Пусть $M \subset X^*$ — замыкание линейной оболочки биортогональных функционалов базиса (1). Из того, что базис (1) является ограниченно полным, вытекает, что M не содержит собственных замкнутых тотальных подпространств. Ясно также, что M изоморфно $[q_i]_{i=1}^{\infty} \oplus L$.

Очевидно, что M является базисным подпространством. Покажем, что M не является безусловно базисным. Предположим противное, пусть $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ — безусловный базис в X, биортогональные функционалы $\{u_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ которого содержатся в M. Из сделанного выше замечания вытекает, что $M = [u_i^*]_{i=1}^{\infty}$ и, следовательно, M имеет безусловный базис. С другой стороны, в силу теоремы Марэ — Розенталя (см. [3, с. 737]), в L, а, следовательно, и в M найдется нормированная слабо сходящаяся к нулю последовательность, не содержащая безусловных подпоследовательностей. В пространстве с безусловным базисом это невозможно [1, с. 7, 19]. Тем самым в случае, когда базис $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ограниченно полон, теорема доказана.

Пусть базис $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ не является ограниченно полным. Обозначим через N замыкание линейной оболочки биортогональных функционалов этого базиса. Нетрудно видеть, что в этом случае найдется функционал $x^{**} \in X^{**}$, для которого $x^{**}|_N \neq 0$ и подпространство $M = \ker x^{**} \cap N$ является тотальным подпространством в X^*. Подпространство $M \subset X^*$ является базисным в силу теоремы 3 из [6], но не является безусловно базисным[1]. Теорема доказана.

2. Определение 2. *Подпространство $M \subset X^*$ называется нормирующим, если найдется такое $c > 0$, что*

$$\forall x \in X \sup_{0 \neq f \in M} |f(x)| / \|f\| \geqslant c \|x\|.$$

Замечание. Известно[2], что для сепарабельных банаховых пространств класс нормирующих подпространств совпадает с классом подпространств, содержащих биортогональные функционалы нелинейных операторных базисов.

Определение 3. *Подпространство $M \subset X^*$ называется квазибазисным, если найдется последовательность линейных непрерывных конечномерных операторов $v_n: X \to X$, $n \in N$, такая, что*

1) $\forall x \in X, \lim\limits_{n \to \infty} \|v_n(x) - x\| = 0;$

2) $\forall n \in N \operatorname{im} v_n^* \subset M$, *где v_n^* — операторы, сопряженные к v_n.*

Замечание. Нетрудно видеть, что класс квазибазисных подпространств совпадает с классом подпространств, содержащих биортогональные функционалы линейных операторных базисов.

Определение 4. *Говорят, что банахово пространство X обладает сплошным свойством ограниченной аппроксимации (ССОА), если каждое нормирующее подпространство $M \subset X^*$ является квазибазисным (символически записывается: $X \in$ ССОА).*

ССОА (без использования этого термина) впервые рассматривалось Ф. С. Вахер и И. Зингером, и в дальнейшем исследовалось многими авторами (см. [3, с. 776—779, 865]). В настоящей работе мы дополним эти исследования.

Ясно, что из $X \in$ ССОА следует, что X сепарабельно и что X имеет свойство ограниченной аппроксимации (СОА). Мы будем искать условия, при которых верно и обратное.

Определение 5. *Пусть X_1, X_2 — конечномерные подпространства в банаховом пространстве X и $X_1 \subset X_2 \subset X$ и пусть $\lambda > 0$. Пару (X_1, X_2) назовем λ-аппроксимируемой, если существует линейный непрерывный оператор $u: X \to X_2$ с $\|u\| \leqslant \lambda$ и $u|_{X_1} = I|_{X_1}$. Последовательность $(X_1^i, X_2^i)_{i=1}^{\infty}$ пар подпространств в X назовем равномерно аппроксимируемой, если найдется такое $0 < \lambda < \infty$, что все пары $(X_1^i, X_2^i)_{i=1}^{\infty}$ являются λ-аппроксимируемыми.*

---

[1] *Островский М. И.* Регуляризуемость обратных линейных операторов в банаховых пространствах с базисом // Сиб. мат. журн. 1992. 33, № 3. С. 123—130.

[2] *Фонф В. П.* Операторные базисы и обобщенные базисы суммирования // Докл. АН УССР. 1986. № 11. С. 16—18.

Определение 6. *Пусть U и V — подпространства банахова пространства X. Наклоном подпространства U к подпространству V назовем величину* $\delta(U, V) = \inf\{\|x - y\| : x \in S(U),\ y \in V\}$.

Пусть M — подпространство в X^*, а $M^\perp := \{x^{**} \in X^{**} : (\forall x^* \in M)(x^{**}(x^*) = 0)\}$. Известно [2, с. 32], что подпространство $M \subset X^*$ является нормирующим тогда и только тогда, когда $\delta(M^\perp, X) > 0$. (Здесь и в дальнейшем мы отождествляем X с его каноническим образом в X^{**}.)

Обозначим через $\varphi : X^{**} \to X^{**}/M^\perp$ естественное фактор-отображение. Отметим, что пространство $X^{**}/M^\perp$ естественным образом изометрично M^*. В случае, когда M — нормирующее подпространство, отображение $\varphi|_X$ является изоморфизмом.

Теорема 2. *Пусть X — сепарабельное банахово пространство (СБП) с СОА. Для того чтобы нормирующее подпространство $M \subset X^*$ было квазибазисным, необходимо и достаточно, чтобы для любой равномерно аппроксимируемой последовательности пар $(X_1^i, X_2^i)_{i=1}^\infty$ в X последовательность $(\varphi X_1^i, \varphi X_2^i)_{i=1}^\infty$ была равномерно аппроксимируемой в M^*.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть M — квазибазисно и $(X_1^i, X_2^i)_{i=1}^\infty$ — равномерно аппроксимируемая последовательность в X. Пусть $\{v_n\}$ — последовательность операторов, для которой выполнены условия определения 3. В силу теоремы Банаха — Штейнгауза имеем $\sup\limits_n \|v_n\| = \beta < \infty$. Поэтому в последовательности $\{v_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{v_{n_i}\}$, для которой $(\forall x \in X_1^i)$ $(\|v_{n_i}(x) - x\| < \|v_{n_i}(x)\|/\dim X_1^i$. Стандартными рассуждениями (см. [7]) находим такие операторы $A_i : X \to X$, что $\|A_i\| \leqslant 2$ и $(\forall x \in X_1^i)$ $(A_i v_{n_i}(x) = x)$.

Так как последовательность $(X_1^i, X_2^i)_{i=1}^\infty$ — равномерно аппроксимируемая, то для некоторого $\lambda < \infty$ найдется такая последовательность операторов $u_i : X \to X$, что

$$(\forall i \in \mathbf{N})(\operatorname{im} u_i \subset X_2^i);\ \sup_i \|u_i\| = \lambda < \infty;\ u_i|_{X_1^i} = I_{X_1^i};$$

Введем операторы $T_i = u_i A_i v_{n_i}$. Для них имеем

$$T_i|_{X_1^i} = I_{X_1^i}; \tag{2}$$

$$\operatorname{im} T_i \subset X_2^i; \tag{3}$$

$$\operatorname{im} T_i^* = \operatorname{im} v_{n_i}^* A_i^* u_i^* \subset \operatorname{im} v_{n_i}^* \subset M; \tag{4}$$

$$\|T_i\| \leqslant 2\lambda\beta. \tag{5}$$

Условия (3) и (4) означают, что операторы T_i можно представить в виде $T_i(x) = \sum_{k=1}^{n(i)} f_k^i(x)\, x_k^i$ с $x_k^i \in X_2^i$; $f_k^i \in M$. Введем операторы $R_i : M^* \to M^*$ равенствами $R_i(m^*) = \sum_{k=1}^{n(i)} m^*(f_k^i)\, \varphi(x_k^i)$. Легко видеть, что операторы R_i являются $\sigma(M^*, M)$-непрерывными, а также, что множество $\varphi(B(X))$ (где $B(X)$ — единичный шар пространства X) $\sigma(M^*, M)$—плотно в шаре некоторого ненулевого радиуса пространства

M^* [2, с.32]. Отсюда и из (5) вытекает, что R_i — равномерно ограниченные операторы в M^*. Из (2) вытекает, что $R_i|_{\varphi X_1^i} = I_{\varphi X_1^i}$, а из (3) — что $\operatorname{im} R_i \subset \varphi X_2^i$. Необходимость доказана.

Достаточность. Если X имеет СОА и сепарабельно, то очевидно, что можно найти такую последовательность $\{X^i\}_{i=1}^{\infty}$ подпространств в X, что $X^1 \subset X^2 \subset \cdots \subset X^n \subset \cdots$; $\operatorname{cl}(\bigcup_{n=1}^{\infty} X^n) = X$ и пары $(X_1^i, X_2^i) = (X^i, X^{i+1})$ образуют равномерно аппроксимируемую последовательность. По предположению, пары $(\varphi X_1^i, \varphi X_2^i)$ образуют равномерно аппроксимируемую последовательность в M^*. Пусть $R_i : M^* \to M^*$ — операторы, для которых $\sup_i \| R_i \| < \infty$; $\operatorname{im} R_i \subset \varphi X_2^i$; $R_i|_{\varphi X_1^i} = I_{\varphi X_1^i}$.

Лемма 1 [7, с. 494]. *Пусть L и N — банаховы пространства и $\dim N < \infty$. Пусть F — конечномерное подпространство в L^*, Q — оператор из L^* в N, $\varepsilon > 0$. Тогда найдется слабо* непрерывный оператор R из L^* в N, такой, что $R|_F = Q|_F$ и $\| R \| \leqslant \| Q \| (1+\varepsilon)$.*

В силу этой леммы операторы R_i можно, без ущерба общности, считать слабо* непрерывными, т. е. имеющими вид

$$R_i(m^*) = \sum_{k=1}^{n(i)} m^*(f_k^i)\, \varphi x_k^i,$$

где $f_k^i \in M$; $x_k^i \in X_2^i$. Введем операторы $T_i : X \to X$ равенствами $T_i(x) = \sum_{k=1}^{n(i)} f_k^i(x)\, x_k^i$. Для них будем иметь

$$\sup_i \| T_i \| < \infty; \tag{6}$$

$$T_i|_{X_1^i} = I_{X_1^i}; \tag{7}$$

$$\operatorname{im} T_i^* \subset M. \tag{8}$$

Из (6), (7) и того, что $\operatorname{cl}(\bigcup_{n=1}^{\infty} X^n) = X$ следует, что $(\forall x \in X)$ $(\lim_{n\to\infty} \| T_n(x) - x \| = 0)$.

Отсюда и из (8) получаем, что M — квазибазисное подпространство. Теорема доказана.

Из этой теоремы можно вывести следующий результат работы [8].

Следствие. *Если X — СБП с СОА, M — нормирующее подпространство в X^*, то для того чтобы M было квазибазисным, достаточно, чтобы нашлось такое дополнение Y к подпространству $M^\perp$ в X^{**}, что $Y \supset X$.*

Доказательство. Покажем, что в этом случае для подпространства $M \subset X^*$ выполнено условие теоремы 2. Пусть Y — дополнение к $M^\perp$ в X^{**}, для которого $Y \supset X$. Сужение отображения φ на Y является изоморфизмом. Поэтому достаточно показать, что последовательность пар $(X_1^i, X_2^i)_{i=1}^{\infty}$; $X_1^i \subset X_2^i \subset X$, являющаяся равномерно аппроксимируемой в X, является равномерно аппроксимируемой и в Y. Это же непосредственно вытекает из рассмотрения вторых сопряженных тех операторов, которые осуществляют аппроксимацию пар $(X_1^i, X_2^i)_{i=1}^{\infty}$ в X.

Замечания. 1) Условие следствия не является необходимым для квазибазисности M[1].

2) Без требования $Y \supset X$ сформулированное в следствии утверждение неверно (см. замечание после теоремы 3).

Теорема 2 сводит задачу характеризации ССОА к такой: для каких СБП X с СОА в X^{**} можно найти слабо* замкнутое подпространство H с $\delta(H, X) > 0$ и такое, что факторизацией по нему некоторая равномерно аппроксимируемая в X последовательность переходит в последовательность, не являющуюся равномерно аппроксимируемой в X^{**}/H. Мы изложим один из подходов к решению этой задачи.

Определение 7. *Пусть задано некоторое отображение $f: N \to (0, +\infty)$. Последовательность $(Z_1^i, Z_2^i)_{i=1}^{\infty}$ пар конечномерных подпространств в банаховом пространстве Z, для которых $Z_1^i \subset Z_2^i$, назовем f-аппроксимируемой, если найдется такая последовательность линейных непрерывных операторов $u_i: Z \to Z_2^i$, что $u_i|_{Z_1^i} = I_{Z_1^i}$ и $\sup_i (\|u_i\|/f(i)) < \infty$.*

Предложение. *Пусть H — слабо* замкнутое подпространство в X^{**} и $\delta(H, X) > 0$. Обозначим через φ фактор-отображение $\varphi: X^{**} \to X^{**}/H$. Предположим, что в X найдется такая равномерно аппроксимируемая последовательность $(X_1^i, X_2^i)_{i=1}^{\infty}$, что для некоторой последовательности $(Y_1^i, Y_2^i)_{i=1}^{\infty}$ пар подпространств в X^{**} выполнены условия*

$$\varphi X_1^i = \varphi Y_1^i; \ \varphi X_2^i = \varphi Y_2^i; \tag{9}$$

$$(\forall i \in N)(\delta(Y_2^i, H) > 0), \tag{10}$$

и, кроме того, последовательность $(Y_1^i, Y_2^i)_{i=1}^{\infty}$ не является f-аппроксимируемой в X^{**} для функции $f(i) = 1/\delta(Y_2^i, H)$.

Тогда подпространство $H_\perp \subset X^*$ (где $H_\perp := \{x^* \in X^*: (\forall x^{**} \in H)(x^{**}(x^*) = 0)\}$) *является нормирующим не квазибазисным подпространством.*

Доказательство. Предположим противное и воспользуемся теоремой 2. Из нее вытекает, что последовательность пар $(\varphi X_1^i, \varphi X_2^i)_{i=1}^{\infty}$ является равномерно аппроксимируемой в X^{**}/H. Это означает, что для некоторого $0 < \lambda < \infty$ найдутся такие операторы $u_i: X^{**}/H \to \varphi X_2^i$, что

$$u_i|_{\varphi X_1^i} = I_{\varphi X_1^i} \tag{11}$$

[1] *Вахер Ф. С., Пличко А. Н.* Свойство ограниченной аппроксимации и линейная конечномерная регуляризуемость // Укр. мат. журн. 1981. **33**, № 2. С. 167—171.

и $\| u_i \| \leqslant \lambda$. Рассмотрим операторы $v_i : X^{**} \to Y^i_2$, определенные равенствами $v_i = (\varphi|_{Y^i_2})^{-1} u_i \varphi$. Эти операторы определены корректно, так как, во-первых, $\operatorname{im} u_i \subset \varphi X^i_2 = \varphi Y^i_2$, и, во-вторых, из $\delta(Y^i_2, H) > 0$ вытекает, что оператор, обратный к $\varphi|_{Y^i_2}$, существует. Легко видеть, что $\|(\varphi|_{Y^i_2})^{-1}\| = f(i)$. Поэтому $(\forall i \in N)(\|v_i\| \leqslant \lambda f(i))$.

Кроме того, из (9) и (11) вытекает, что $v_i|_{Y^i_1} = I_{Y^i_1}$. Мы пришли в противоречие с тем, что последовательность пар $(Y^i_1, Y^i_2)^\infty_{i=1}$ не является f-аппроксимируемой. Предложение доказано.

Проверка выполнимости условий предложения в конкретных ситуациях является довольно трудоемкой. Поэтому представляет интерес следующий критерий.

Теорема 3. *Пусть в X^{**} существует рефлексивное недополняемое подпространство Y, изоморфное дополняемому подпространству Z в X, и такое, что $\delta(Y, X) > 0$. Тогда $X \not\ni$ CCOA.*

Доказательство. Пусть $T : Y \to Z$ — изоморфизм. Рассмотрим в X^{**} подпространство $H = \{y - Ty : y \in Y\}$. Проверим, что для него выполнены все условия предложения с $f(i) \equiv C > 0$.

Так как $\delta(X, Y) > 0$, то подпространство H изоморфно Y и, следовательно, рефлексивно. Поэтому, в силу теоремы Крейна — Шмульяна, пространство H является слабо* замкнутым. Легко видеть, что $\delta(H, X) > 0$ и, следовательно, [2, с. 29 — 34], подпространство $M := H_\perp \subset X^*$ является нормирующим.

Очевидно, что мы можем ограничиться случаем, когда X является СБП с СОА. В этом случае и Z является СБП с СОА. Пусть $Z^1 \subset Z^2 \subset \ldots \subset Z^n \subset \ldots$ — такая последовательность конечномерных подпространств в Z, что

$$\operatorname{cl}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z^n\right) = Z \tag{12}$$

и последовательность пар (Z^i, Z^{i+1}) является равномерно аппроксимируемой в Z, а, следовательно, и равномерно аппроксимируемой в X.

Введем следующие последовательности подпространств: $X^i_1 = Z^i$, $X^i_2 = Z^{i+1}$, $Y^i_1 = T^{-1}Z^i$, $Y^i_2 = T^{-1}Z^{i+1}$.

Покажем, что последовательность $(Y^i_1, Y^i_2)^\infty_{i=1}$ не является равномерно аппроксимируемой в X^{**}. Действительно, если предположить, что найдутся такие $u_i : X^{**} \to Y^i_2$, что $\sup_i \|u_i\| < \infty$ и

$$u_i|_{Y^i_1} = I_{Y^i_1}, \tag{13}$$

то, в силу рефлексивности пространства Y, корректно определен оператор $u : X^{**} \to Y$; $u(x) = w - \lim_A u_i(x)$, где A — некоторый ультрафильтр на N. Этот оператор, в силу (12) и (13), будет проектором на Y, что противоречит недополняемости подпространства Y.

То, что для определенных выше объектов выполнены остальные условия предложения, очевидно. Теорема доказана.

Следствие. *Существует СБП X с базисом, изометричное своему второму сопряженному, но без ССОА.*

Доказательство. Положим $X = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus J\right)_p (p \neq 1, 2, \infty)$, где J — пространство Джеймса (нерефлексивное пространство, имеющее коразмерность 1 в J^{**} и изометричное J^{**}, (см. [1, с. 25])).

Очевидно, что X — тоже пространство с базисом, изометричное своему второму сопряженному. Кроме того, $X^{**} = X \oplus l_p$. В силу известных результатов (см. [9]), в $l_p (p \neq 1, 2, \infty)$ найдется недополняемое подпространство, изоморфное l_p. С другой стороны, в X есть дополняемое подпространство, изоморфное l_p. Мы находимся в условиях теоремы 3.

Замечание. Если для пространства X, рассматриваемого в следствии, проводить конструкцию теоремы 3, то подпространство H будет дополняемым в X^{**}.

Действительно, пусть $P: X \to Z$ — проектор, существующий по условию и пусть $Q: X^{**} \to X$ — проектор, соответствующий разложению $X^{**} = X \oplus l_p$. Тогда PQ проектирует пространство X^{**} на Z и $PQ|_Y = 0$. Поэтому оператор $(I_{X^{**}} - T^{-1}) PQ$ проектирует X^{**} на H.

Условия теоремы 3 не являются необходимыми для того, чтобы СБП X с СОА не имело ССОА.

Теорема 4. *Существует СБП X с базисом, для которого $X^{**} = X \oplus Y$, пространство Y не содержит бесконечномерных подпространств, изоморфных подпространствам в X, но $X \notin$ ССОА.*

Доказательство. Нам понадобится полученный в [10] вариант доказательства теоремы Джеймса — Линденштраусса. Нужный нам частный случай конструкции работы [10] состоит в следующем.

Пусть $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ — расширяющаяся последовательчость конечномерных подпространств банахова пространства Z и пусть $\mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right) = Z$. Для упрощения дальнейших обозначений будем предполагать, что $X_0 = \{0\}$.

Пусть $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ — последовательность с $x_i \in X_i$. Для последовательностей $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ с конечным числом ненулевых членов определим норму $\|\cdot\|_J$ следующим образом:

$$2 \left\| (x_i)_{i=0}^{\infty} \right\|_J^2 = \sup \left(\sum_{i=1}^{k-1} \| x_{p(i)} - x_{p(i+1)} \|^2 + \| x_{p(k)} \|^2 \right),$$

где sup берется по всем последовательностям целых чисел $(p(i))_{i=1}^{k}$ с $0 \leqslant p(1) < p(2) < \ldots < p(k)$.

Пополнение пространства всех последовательностей $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ с конечным числом ненулевых членов по этой норме обозначим $J(X_n)$.

Пространство всех асимптотически постоянных последовательностей снабдим полунормой $\|(x_i)_{i=0}^{\infty}\|_{\Omega} = \lim\limits_{k \to \infty} \| x_k \|$ и обозначим $\Omega(X_n)$. Пространство всех последовательностей $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ с $x_i \in X_i$, для которых конечна норма

$$\|(x_i)_{i=0}^{\infty}\|_K = \sup_n \|(x_0, \ldots, x_n, 0, \ldots)\|_J,$$
обозначим через $K(X_n)$. Ясно, что $K(X_n) \supset \Omega(X_n)$.

Теорема 5. [10]. *Пусть последовательность $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ такова, как указано выше. Имеем*

(I) *$\Omega(X_n)$ плотно в $K(X_n)$.*

(II) *Если $Y = \dot{J}(X_n)$, то $Y^{**} = K(X_n)$ и Y^{**}/Y изометрично Z.*

(III) *Если X_n имеют равномерно ограниченные базисные постоянные, то $J(X_n)$ имеет базис.*

Вернемся к доказательству теоремы 4. Зафиксируем некоторое $1 < p < 2$. Положим $Z = l_p$, в качестве X_n возьмем линейные оболочки первых n элементов канонического базиса l_p. Введем пространство $X = \dot{J}(X_n) \oplus l_2$.

То, что X имеет базис, вытекает из части III теоремы 3.

Лемма 2. *Пространство X^{**} представимо в виде прямой суммы: $X^{**} = X \oplus l_p$.*

Доказательство. Обозначим через $\{e_i^n\}_{i=1}^{n}$ векторы канонического базиса в пространстве X_n. Введем векторы $f_i = (0, \ldots, 0, e_i^i, e_i^{i+1}, \ldots) \in K(X_n)$. Покажем, что последовательность $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ эквивалентна каноническому базису пространства l_p. Имеем

$$\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i\|_K = \|(0, a_1 e_1^1, a_1 e_1^2 + a_2 e_2^2, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^n, \ldots)\|_K.$$

Вспомним определение K-нормы и выберем $p(1) = 0$, $p(2) = n$. Имеем

$$\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i\|_K \geqslant \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i^n\| = (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{1/p}.$$

Поскольку это верно для любого n, то

$$\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i\|_K \geqslant (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p)^{1/p}.$$

С другой стороны, имеем

$$\|\sum a_i f_i\|_K = 2^{-1/2} \sup_{(p(i))} (\sum_{i=1}^{k-1} (\sum_{s=p(i)+1}^{p(i+1)} |a_s|^p)^{2/p} +$$

$$+ (\sum_{s=1}^{p(k)} |a_s|^p)^{2/p})^{1/2} \leqslant 2^{-1/2} \sup_{(p(i))} (\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{s=p(i)+1}^{p(i+1)} |a_s|^p +$$

$$+ \sum_{s=1}^{p(k)} |a_s|^p)^{1/p} \leqslant 2^{1/2} \sup_{(p(k))} (\sum_{s=1}^{p(k)} |a_s|^p)^{1/p} =$$

$$= 2^{1/2} (\sum_{s=1}^{\infty} |a_s|^p)^{1/p}.$$

Отсюда и из доказательства теоремы 5 в [10] вытекает, что сужение фактор-отображения $K(X_n) \to K(X_n)/\dot{J}(X_n)$ на замыкание линейной оболочки векторов $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ является изоморфизмом. Лемма доказана.

Лемма 3. *Любое бесконечномерное подпространство в X содержит подпространство, изоморфное l_2.*

Доказательство. Так как $X = \dot{J}(X_n) \oplus l_2$, то ясно, что достаточно доказать, что любое бесконечномерное подпространство в $\dot{J}(X_n)$ содержит подпространство, изоморфное l_2.

Нетрудно показать (в этом состоит доказательство части III теоремы 5), что векторы $f_i^n = (0, \ldots, 0, e_i^n, 0, \ldots)$ образуют базис в $\dot{J}(X_n)$.

Из сепарабельности $(\dot{J}(X_n))^*$ (которая вытекает из $(\dot{J}(X_n))^{**} = \dot{J}(X_n) \oplus l_p$) следует, что в любом бесконечномерном подпространстве в $\dot{J}(X_n)$ можно выделить слабо, но не сильно сходящуюся к нулю последовательность $(x_k)_{k=1}^{\infty}$. Хорошо известными рассуждениями [1, с. 7] можно показать, что в последовательности (x_k) можно выделить подпоследовательность $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, которая эквивалентна последовательности вида

$$h_k = \sum_{n=r(k)+1}^{r(k+1)-1} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^n f_i^n \Big).$$

Непосредственно проверяем, что последовательность такого вида эквивалентна каноническому базису пространства l_2. Лемма доказана.

Лемма 4. $X \notin CCOA$.

Доказательство. Известно [9], что в l_p $(1 < p < 2)$ найдется последовательность конечномерных подпространств W_i, для которых выполнены условия: $\dim W_i = i$; $\sup_i d(W_i, l_2^i) = C < \infty$;

$$(\exists 0 < c_1 \leqslant c_2 < \infty)\,(\forall \{w_i\}_{i=1}^{\infty};\ w_i \in W_i)$$
$$(c_1 (\Sigma \| w_i \|^p)^{1/p} \leqslant \| \Sigma w_i \| \leqslant c_2 (\Sigma \| w_i \|^p)^{1/p})$$

и последовательность пар $(W_i, W_i)_{i=1}^{\infty}$ не является равномерно аппроксимируемой в l_p.

Введем обозначение $W = \mathrm{cl\,lin}\,(\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i)$. В силу леммы 2 имеем $X^{**} = X \oplus l_p = \dot{J}(X_n) \oplus l_2 \oplus l_p$. Представим l_2 в виде суммы $l_2 = (\sum_{i=1}^{\infty} \oplus U_i)_2$, где U_i — пространства, изометричные l_2^i. Пусть $T_i : W_i \to U_i$ — такие изоморфизмы, что

$$\| T_i \| \leqslant 1;\ \| T_i^{-1} \| \leqslant C. \tag{14}$$

Определим оператор $T : W \to l_2$ равенством $T((w_i)_{i=1}^{\infty}) = (T_i w_i)_{i=1}^{\infty}$. Ясно, что T — ограниченный оператор и что

$$T W_i = U_i. \tag{15}$$

Положим $H = \{x - Tx : x \in W\} \subset X^{**}$. Проверим, что для H выполнены все условия предложения.

То, что H слабо* замкнуто, вытекает из рефлексивности W. Очевидно также, что $\delta(H, X) > 0$. Введем $X_1^i = X_2^i = U_i$; $Y_1^i = Y_2^i = W_i$.

Ясно что $(X_1^i, X_2^i)_{i=1}^{\infty}$ — равномерно аппроксимируемая последовательность пар, а $(Y_1^i, Y_2^i)_{i=1}^{\infty}$ — нет. Из (15) вытекает, что выполнено условие (9), а из (14) — что выполнено условие (10). При этом $\inf_i \delta(Y_2^i, H) > 0$. Лемма доказана.

Теорема 4 непосредственно вытекает из лемм 2 — 4.

3. Определение 8. *Пусть X — подпространство в банаховом пространстве Z, M — подпространство в X^*. Оно называется ограниченно продолжаемым на Z, если существует изоморфное вложение $\pi: M \to Z^*$, для которого $(\forall f \in M)(\forall x \in X)((\pi(f))(x) = f(x))$.*

Теорема 6. *Пусть СБП X имеет СОА. Для $X \notin$ ССОА необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое банахово пространство Z, содержащее X в качестве подпространства, что подпространство $X^{\perp}$ недополняемо в Z^*, но в X^* найдется нормирующее подпространство M, ограниченно продолжаемое на Z.*

Достаточность доказана в [11]. Нашей целью будет доказательство необходимости. Пусть $X \notin$ ССОА, $M \subset X^*$ — нормирующее подпространство, не являющееся квазибазисным. Введем $Z = M^*$. Ясно, что X естественным образом изоморфно вкладывается в Z и после соответствующей перенормировки X можно считать подпространством Z. При этом M является нормирующим подпространством в X^*, естественным образом ограниченно продолжаемым на Z. Нам остается доказать, что $X^{\perp}$ недополняемо в Z^*. Предположим противное. В этом случае $M^{**} = Z^*$ представимо в виде $X^{\perp} \oplus U$, причем U естественным образом изоморфно X^*. Так как $X \in$ СОА, то найдутся такие векторы $\{x_{i,n}\}_{i=1}^{p(n)} \subset X$ и $\{x_{i,n}^*\}_{i=1}^{p(n)} \subset X^*$, что

$$(\forall x \in X)\left(x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p(n)} x_{i,n}^*(x)\, x_{i,n}\right).$$

Обозначим через $S: X^* \to U$ естественный изоморфизм. Введем последовательность операторов $T_n: Z \to Z$ равенствами

$$T_n(z) = \sum_{i=1}^{p(n)} (Sx_{i,n}^*)(z)\, x_{i,n}.$$

Эта последовательность равностепенно непрерывна и на подпространстве $X \subset Z$ сильно сходится к тождественному оператору. Воспользовавшись леммой 1 и сепарабельностью пространства X, находим последовательность слабо* непрерывных операторов в $M^* = Z$, которая на X будет сильно сходиться к тождественному оператору. Нетрудно видеть, что это означает квазибазисность подпространства $M \subset X^*$. Теорема доказана.

4. Из процитированного после теоремы 2 результата работы [8] вытекает, что СБП X с СОА, для которого любое нормирующее подпространство $M \subset X^*$ имеет конечную коразмерность, обладает ССОА.

Возникает естественная задача описания класса таких пространств и его сравнения с классом квазирефлексивных СБП с СОА. (Напомним, что банахово пространство X называется квазирефлексивным, если $\dim(X^{**}/X) < \infty$).

Примеры неквазирефлексивных СБП, для которых любое нормирующее подпространство $M \subset X^*$ имеет конечную коразмерность, приведены в работе [12]. Конструкция работы [12] основана на том, что достаточным условием для этого является такое: фактор-пространство X^{**}/X не содержит бесконечномерных подпространств, изоморфных сопряженным. (Доказательство достаточности этого условия очень просто: если M — нормирующее подпространство в X^*, то для $M^\perp \subset X^{**}$ имеем а) $M^\perp$ изоморфно подпространству в X^{**}/X; б) $M^\perp = (X^*/M)^*$.)

Целью заключительной части настоящей статьи является доказательство того, что сформулированное условие не является необходимым.

Теорема 7. *Существует такое банахово пространство Y с базисом, что фактор-пространство Y^{**}/Y является бесконечномерным рефлексивным СБП, но в Y^* нет нормирующих подпространств бесконечной коразмерности.*

Доказательство. Обратимся к приведенной выше конструкции работы [10]. Зафиксируем некоторое $p > 2$ и возьмем в качестве Z пространство l_p, а в качестве X_n линейные оболочки первых n элементов канонического базиса в l_p. Пусть $Y = J(X_n)$.

Лемма 5. Пространство Y^{**} не содержит подпространств, изоморфных l_p.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ — базисная последовательность в Y^{**}, эквивалентная каноническому базису в l_p. Так как Y^{**} изометрично $K(X_n)$, то f_i можно записывать в виде

$$f_i = (x_0^i, x_1^i, \ldots, x_n^i, \ldots), \tag{16}$$

где $x_n^i \in X_n$. В силу части I теоремы 5 можно считать последовательности (16) асимптотически постоянными. Пусть $f_1 = (x_0^1, \ldots, x_{n_1-1}^1, x^1, \ldots, x^1, \ldots)$. Так как последовательность $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ слабо сходится к нулю, то для любого $\varepsilon_2 > 0$ можно найти такое натуральное число m_2, чтобы для f_{m_2} имело место $\|x_0^{m_2}\| + \ldots + \|x_{n_1+1}^{m_2}\| < \varepsilon_2$. Запишем $f_{m_2} = (x_0^{m_2}, \ldots, x_{n_2-1}^{m_2}, x^{m_2}, \ldots, x^{m_2}, \ldots)$. При этом, очевидно, можно считать, что $n_2 - 1 > n_1 + 1$. Пусть $\varepsilon_3 > 0$. Находим такое натуральное число m_3, чтобы для f_{m_3} имело место $\|x_0^{m_3}\| + \ldots + \|x_{n_2+1}^{m_3}\| < \varepsilon_3$. Запишем $f_{m_3} = (x_0^{m_3}, \ldots, x_{n_3-1}^{m_3}, x^{m_3}, \ldots, x^{m_3}, \ldots)$, и т.д.

Последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ выбираем такой, чтобы последовательность

$$g_1 = f_1;$$

$$g_2 = (0, \ldots, 0, x_{n_1+2}^{m_2}, \ldots, x_{n_2-1}^{m_2}, x^{m_2}, \ldots);$$

$$g_3 = (0, \ldots, 0, x_{n_2+2}^{m_3}, \ldots, x_{n_3-1}^{m_3}, x^{m_3}, \ldots)$$

. . . .

тоже была эквивалентна каноническому базису l_p. В дальнейшем для единообразия обозначений будем считать $m_1 = 1$, $n_0 = -1$.

Пусть $\{p(k, i)\}_{k=1}^{\infty}, {}_{i=1}^{s(k)}$ — такой набор целых чисел, что $n_{k-1} + 1 = p(k, 1) < \ldots < p(k, s(k)) = n_k$ и

$$\sum_{i=1}^{s(k)-1} \| x_{p(k, i+1)}^{m_k} - x_{p(k, i)}^{m_k} \|^2 \geqslant \| g_k \|_K^2.$$

Оценим снизу норму $\| \Sigma a_k g_k \|_K$. Для этого рассмотрим набор $(p(i))$ целых чисел, состоящий из следующих чисел:

$$\begin{gathered} p(1, 1) < p(1, 2) < \ldots < p(1, s(1)) < \\ < p(2,1) < p(2, 2) < \ldots < p(2, s(2)) < \ldots < \\ < p(r, 1) < p(r, 2) < \ldots < p(r, s(r)). \end{gathered}$$

Получим

$$2 \| \sum_{k=1}^{r} a_k g_k \|_K^2 \geqslant \sum_{k=1}^{r} a_k \| g_k \|_K^2.$$

Так как $p > 2$, то мы приходим в противоречие с тем, что последовательность $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ эквивалентна каноническому базису пространства l_p. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 7. Пространство Y имеет базис в силу части III теоремы 5. Из части II теоремы 5 вытекает, что Y^{**}/Y изометрично l_p.

Предположим, что в Y^* найдется нормирующее подпространство M бесконечной коразмерности. Тогда $M^{\perp} \subset Y^{**}$ изоморфно подпространству в Y^{**}/Y, т.е. подпространству в l_p и, следовательно, [1, с. 53], содержит подпространство, изоморфное l_p, что противоречит лемме 5. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces, I. Berlin, 1977. 188 p. 2. *Петунин Ю. И., Пличко А. Н.* Теория характеристик подпространств и ее приложения. К., 1980. 216 с. 3. *Singer I.* Bases in Banach spaces, II. Berlin, 1981. 880 p. 4. *Zippin M.* A remark on bases and reflexivity in Banach spaces//Isr. J. Math. 1968. 6, № 1. P. 74—79. 5. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. Berlin, 1973. 243 p. 6. *Домонский Е. Н., Кадец В. М.* О базисной регуляризуемости обратных операторов//Сиб. мат. журн. 1988. 29, № 5. С. 104—108. 7. *Johnson W. B., Rosenthal H. P., Zippin M.* On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces//Isr. J. Math. 1971. 9. № 4. P. 488—506. 8. *Менихес Л. Д., Пличко А. Н.* Условия линейной и конечномерной регуляризуемости линейных обратных задач//ДАН СССР. 1978. 241, № 5. С. 1027—1030. 9. *Bennett G., Dor L. E., Goodman V., Johnson W. B., Newman C. M.* On uncomplemented subspaces of L_p, $1<p<2$//Isr. J. Math. 1977. V. 26, № 2. P. 178—187. 10. *Bellenot S. F.* The J-sum of Banach spaces//J. Funct. Anal. 1982. 48, № 1. P. 95—106. 11. *Вохер Ф. С.* Свойство ограниченной аппроксимации в сепарабельных банаховых пространствах//ДАН СССР. 1980. 255, № 6. С. 1301—1306. 12. *Davis W. J., Johnson W. B.* Basic sequences and norming subspaces in non-quasi-reflexive Banach spaces//Isr. J. Math. 1973. 14. P. 353—367.

Поступила в редколлегию 26.11.90

УДК 517

А. Е. ФРЫНТОВ

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ РЯДОВ ДИРИХЛЕ С ЛАКУНАМИ ФЕЙЕРА

В 1952 г. Макинтайром была доказана такая теорема единственности:

Теорема А (*Macintyre* [1]). Пусть $f(z)=\sum c_k z^{\lambda_k}$, $\lambda_k \in N^+$, *целая функция и* $\sum \lambda_k^{-1}<\infty$. *Если* $|f(z)|<C$ *для некоторого* $C>0$ *при всех* $z \in R^+$, *то* $f(z)\equiv 0$.

Верна также аналогичная теорема для целых функций представимых абсолютно сходящимися рядами Дирихле с положительными коэффициентами, а именно:

Теорема В (*Евграфов* [2]). *Пусть* $f(z)=\sum c_k e^{\lambda_k z}$, $\lambda_k \in R^+$, *целая функция и* $\sum \lambda_k^{-1}<\infty$. *Если* $|f(z)|<C$ *для некоторого* $C>0$ *при всех* $z \in R^+$, *то* $f(z)\equiv 0$.

Эти теоремы точны в следующем смысле.

Теорема С (*Евграфов* [2]). *Если* $\lambda_k>0$ *таковы, что* $\sum \lambda_k^{-1}=+\infty$, *то существует отличная от нуля целая функция вида* $f(z)=\sum c_k e^{\lambda_k z}$, *ограниченная на действительной оси.*

Макинтайром был поставлен вопрос, можно ли в теореме А требование ограниченности на вещественной оси заменить требованием ограниченности функции на произвольной неограниченной кривой. Этот вопрос до сих пор не имеет полного ответа и известен как гипотеза Макинтайра. Подробный обзор по этому вопросу можно найти в работе Korevaar'a [4], там же приведена обширная библиография по исследованию этой проблемы и представлены результаты, дающие положительный ответ на поставленный вопрос при некоторых дополнительных ограничениях на последовательность λ_k.

В настоящей работе мы дадим одно обобщение теоремы Макинтайра. Заменив требование ограниченности функции на луче требованием ограниченности на другом более редком множестве, мы покажем, что утверждение теоремы остается в силе. В качестве такого множества у нас будет выступать объединение отрезков фиксированной длины и произвольно ориентированных в комплексной плоскости, или, другими словами, множество Ω, такое, что

$$\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,$$

где $I_k=[a_k,\ b_k]$; $a_k, b_k \in C$; $|a_k-b_k|=\delta>0$ и $\overline{\lim}\ \mathrm{Re}\ a_k=+\infty$.

Теорема. *Пусть* $f(z)=\sum c_k e^{\lambda_k z}$ — *целая функция, где* $\lambda_k \in R^+$ *и* $\sum \lambda_k^{-1}<\infty$. *Если для некоторого* $C>0$ *выполнено* $|f(z)|<C$, *как только* $z\in\Omega$, где Ω — *множество, определенное выше, то* $f(z)\equiv 0$.

Наиболее интересным в этой теореме, на наш взгляд, является тот факт, что на расположение отрезков, образующих множество Ω, не накладывается никаких ограничений кроме естественного, что множество Ω должно быть неограниченным справа, они могут быть расположены как угодно редко и произвольно ориентированы в C-плоскости.

Вкратце приведем схему доказательства теоремы. Условимся через I'_k обозначать отрезок $I_k - z_k$, где $z_k = (a_k + b_k)/2$. Рассмотрим пространство $L^2(I'_k, |dz|)$. Система функций $\{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит этому пространству. Допустим, что мы доказали для этой системы функций ее неполноту и минимальность в $L^2(I'_k, |dz|)$. Тогда существует биортогональная система функций $\{\varphi_m^{(k)}\}_{m=1}^{\infty}$ (k — номер отрезка I'_k), т.е.

$$(e^{\lambda_n z}, \varphi_k^{(k)}) = \int\limits_{I'_k} e^{\lambda_k z}\overline{\varphi_m^{(k)}(z)}\, d|z| = \delta_{n,m},$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера. Из абсолютной сходимости ряда, представляющего функцию $f(z)$, имеем

$$f(z + z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z} e^{\lambda_n z_k}. \tag{1}$$

Далее заметим, что $f(z + z_k) \in L^2(I'_k, |dz|)$ и сходимость имеет место в $L^2(I'_k, |dz|)$, поэтому применение биортогонального функционала $\varphi_m^{(k)}$ к обеим частям равенства (1) нам дает

$$(f(z + z_k), \varphi_m^{(k)}) = c_m e^{\lambda_m z_k}$$

или

$$|(f(z + z_k), \varphi_m^{(k)})| = |c_m| e^{\mathrm{Re}\lambda_m z_k}.$$

Из неравенства Шварца имеем

$$|(f(z + z_k), \varphi_m^{(k)})| \leqslant \|f(z + z_k)\| \cdot \|\varphi_m^{(k)}\| \leqslant C\sqrt{2\delta}\, \|\varphi_m^{(k)}\|$$

(неравенство $\|f(z + z_k)\| \leqslant C\sqrt{2\delta}$ следует из того, что функция $f(z)$ ограничена на отрезке I_k константой C по условию теоремы). Из последнего неравенства следует, что

$$|c_m| \leqslant C\sqrt{2\delta}\, e^{-\mathrm{Re}\lambda_m z_k} \|\varphi_m^{(k)}\|.$$

Теперь сделаем предположение о том, что нам удалось оценить норму биортогонального функционала $\varphi_m^{(k)}$ некоторой величиной, не зависящей от номера отрезка I_k, обозначив эту величину через α_m, получим

$$|c_m| \leqslant C\sqrt{2\delta}\, e^{-\mathrm{Re}\lambda_m z_k} \alpha_m.$$

Устремляя теперь $k \to +\infty$ по той подпоследовательности, где $\mathrm{Re} z_k \to +\infty$, имеем $c_m = 0$, т.е все коэффициенты c_m разложения функции $f(z)$ в ряд по системе $\{e^{\lambda_m z}\}_{m=1}^{\infty}$ равны нулю, а следовательно, и $f(z) \equiv 0$.

Доказательство теоремы. Для доказательства теоремы мы реализуем приведенную выше схему: а именно мы докажем наличие биортогональной системы $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ для системы экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $L^2(I, |dz|)$, где I — произвольный отрезок в комплексной плоскости длины 2δ, середина которого совпадает с началом координат, а затем оценим норму m-го элемента этой биортогональной системы некоторой величиной α_m, не зависящей от ориентации отрезка l.

Построим функцию $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right).$$

Функция $\psi(z) = \Phi(\sqrt{z})$ является целой функцией порядка не выше 1/2 и так как ее корни λ_k^2 принадлежат классу сходимости при порядке 1/2 (не целое число), т.е. $\sum (\lambda_k^2)^{1/2} < \infty$, то и сама функция $\psi(z)$ принадлежит классу сходимости при порядке 1/2, т.е.

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln M(r, \psi)}{r^{1+1/2}}\, dr < \infty,$$

где $M(r, \psi) = \max\limits_{|z|=r} |\psi(z)|$. Из последнего неравенства следует, что

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln M(r, \Phi)}{r^2}\, dr < \infty,$$

т.е. функция $\Phi(z)$ принадлежит классу сходимости при порядке 1. Таким образом, при любом θ, $|\theta| = 1$, функция $\Phi(\theta z)$ принадлежит классу Картрайт, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+ |\Phi(\theta x)|}{1 + x^2}\, dx < \infty,$$

так как справедлива оценка ($x \in R$)

$$|\Phi(\theta x)| \leqslant \Phi(ix) = M(x, \Phi). \tag{2}$$

Теперь нам понадобится теорема Берлинга — Малявена о мультипликаторе [3]. Напомним ее.

Теорема (Beurling, Malliavin [3]). Пусть $u(z)$ — функция экспоненциального типа σ, которая удовлетворяет условию Картрайт:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+ |u(x)|}{1 + x^2}\, dx < \infty.$$

Тогда для любого $\delta > 0$ найдется целая функция $g_\delta(z)$, такая, что $u(z) \cdot g_\delta(z) \in W(\sigma + \delta)$, где $W(a)$ — класс Винера типа a. Или, другими словами, $u(z) \cdot g_\delta(z)$ — функция экспоненциального типа не выше $\sigma_+\delta$ и $u(z)\, g_\delta(z) \in L^2(-\infty, \infty)$.

Воспользовавшись этой теоремой, мы и построим биортогональную систему $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ к системе экспонент $\{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $L^2(l, |dz|)$. Зафиксируем m и рассмотрим функцию $\Phi_m(iz) = \Phi(iz)/ /\Phi'(-\lambda_m) \cdot \Phi'(\lambda_m)(\lambda_m^2 + z^2)$. Это функция не выше экспоненциального типа 0, принадлежащая классу Картрайт и по теореме Берлинга — Малявена найдется такая целая функция $g_\delta(z)$, что, $\Phi_m(iz)\, g_\delta(z) \in \in W(\delta)$, не ограничивая общности, можно считать, что на окружности $|z| = \lambda_m$ нет корней функции $g_\delta(z)$ (если они имеются, то вместо $g_\delta(z)$ можно взять функцию

$$g_\delta^1(z) = \frac{\Pi\,(z - e^{i\theta_k}(\lambda_m + \varepsilon))}{\Pi\,(z - e^{i\theta_k})}\, g_\delta(z),$$

где $e^{i\theta_k}\lambda_m$ — корни функции $g_\delta(z)$ на окружности $|z| = \lambda_m$). В силу неравенства (2) имеем оценку ($z \in R$)

$$\left|\varphi_m(\theta z)\frac{g_\delta(z)}{g_\delta(\theta\lambda_m)}\right| \leqslant \frac{|\Phi_m(iz)\, g_\delta(z)|}{|g_\delta(\theta\lambda_m)|}.$$

А это значит, что в $L^2(-\infty, \infty)$

$$\left\|\Phi_m(\theta z)\frac{g_\delta(z)}{g_\delta(\theta\lambda_m)}\right\| \leqslant \|\Phi_m(iz)\, g_\delta(z)\| \cdot \frac{1}{\min\limits_{|z|=\lambda_m} |g_\delta(z)|}.$$

Так как $\Phi_m(iz)\, g_\delta(z) \in W(\delta)$, то, по теореме Винера — Пели, существует функция $\varphi_m(t)$, такая, что

$$\Phi_m(\theta z)\frac{g_\delta(z)}{g_\delta(\theta\lambda_m)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{izt}\varphi_m(t)\, dt. \tag{3}$$

А из равенства Парсеваля следует, что $\varphi_m(t) \in L^2(-\delta, \delta)$

$$\|\varphi_m(t)\| \leqslant \|\Phi_m(iz)\, g_\delta(z)\| \cdot \frac{1}{\min\limits_{|z|=\lambda_m} |g_\delta(z)|} \leqslant \alpha_m,$$

причем α_m не зависит от θ. Из соотношения (3) имеем

$$\delta_{m,j} = \Phi_m(\lambda_j)\frac{g_\delta(-\theta\lambda_j)}{g_\delta(-\theta\lambda_m)} = \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-i\lambda_j\theta t}\varphi_m(t)\, dt =$$

$$= \int\limits_{i\theta\delta}^{-i\theta\delta} e^{\lambda_j z}\varphi_m\left(\frac{z}{-i\theta}\right) d|z|.$$

Таким образом, функция $\left\{\varphi_m\left(\frac{z}{-i\theta}\right)\right\}_{m=1}^{\infty}$ образуют биортогональную систему к системе экспонент $\{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $L^2(I, |dz|)$, где $I = (i\theta\delta, -i\theta\delta)$ и их нормы оцениваются величинами α_m, не зависящими от θ. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Macintype A. I.* Asymptotic paths of integral functions with gap power sipies//Proc. London Math. Soc. 1952. 2, № 3. P. 268—296. 2. *Евграфов М. А.* Об одной теореме единственности для рядов Дирихле//Успехи мат. наук. 1962. 17, № 3. С. 169—175. 3. *Beurling A., Malliavin P.* On fourier transforms of measupes with compact support//Acta Math. 1962. 107. P. 291—309. 4. *Korevaap I.* Muntz-type theorems for ares and for R^n//J. Canadian Math. Society. 1980. 3. P. 199—225.

Поступила в редколлегию 25.12.90

СОДЕРЖАНИЕ