

ОДНА ЗАДАЧА ИЗ ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЙ

А. Д. Милка

Мы рассмотрим задачу о бесконечно малом изгибании регулярной выпуклой поверхности с плоским краем. Предварительные сведения из теории изгибаний не излагаются, так как при необходимости можно обратиться к обстоятельной работе Н. В. Ефимова [1].

Пусть Φ — регулярная выпуклая поверхность с краем L , лежащим в плоскости ω . Пусть n — орт нормали к этой плоскости, направленной в то полупространство, где лежит поверхность Φ . Разобьем кривую L на две дуги L_1 и L_2 . Спрашивается, допускает ли поверхность Φ нетривиальное изгибающее поле, которое на дуге L_1 лежит в плоскости ω , а на L_2 ортогонально этой плоскости? Ответ на этот вопрос даёт следующая

Теорема. Если вдоль дуги L_1 поверхность Φ обращена выпуклостью в направлении вектора n , то эта поверхность жесткая.

Доказательство. Как и в работе [1], обозначим x — вектор точки поверхности, z — вектор изгибающего поля, y — вектор соответствующего поля вращений. Начало координат выберем в плоскости ω , внутри области, ограниченной кривой L . Векторы x , y и z удовлетворяют уравнению

$$dz = [ydx]. \quad (1)$$

Известна следующая формула Бляшке

$$\oint_L xydy = 2 \iint_{\Phi} (\beta\gamma - \alpha^2) xx_u x_v dudv, \quad (2)$$

где α , β и γ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} y_u &= \alpha x_u - \beta x_v, \\ y_v &= \gamma x_u - \alpha x_v. \end{aligned} \quad (3)$$

Формулы (1) — (3) приведены в работе [1]. Как показано в этой работе, выражение $\Delta = \beta\gamma - \alpha^2 \leq 0$, и равенство $\Delta \equiv 0$ возможно только в случае $\alpha = \beta = \gamma \equiv 0$, то есть для тривиального поля z . При соответствующей ориентации поверхности Φ величина $(xx_u x_v) > 0$. Выбрав такую ориентацию и допустив, что нетривиальное изгибающее поле z существует, получаем, что правая часть соотношения (2) отрицательна. Вместе с тем, исходя из условий теоремы, мы покажем, что контурный интеграл $\oint_L xydy \geq 0$. Полученное противоречие и докажет теорему.

Пусть $y = (a, b, c)$ и $z = (\xi, \eta, \zeta)$ — разложения соответствующих векторов в точке $x = (\varphi, \psi, 0)$ кривой L по её локальному триедру τ, ν, n . Здесь τ — орт касательной кривой L , направление которого совпадает с направлением положительного обхода кривой, ν — орт главной нормали

L . Дифференцируя в (1) по дуге кривой L и разлагая векторы по осям триедра, получаем

$$\begin{aligned}\xi' &= k\eta, \\ \eta' &= -k\xi + c, \\ \zeta' &= -b,\end{aligned}\tag{4}$$

где k — кривизна кривой L .

Контурный интеграл в (2) также преобразуем:

$$\oint_L xydy = \oint_L bc ds + 2 \oint_L \psi bc' ds - 2 \oint_L \psi ac' ds.$$

Поскольку на дуге L_2 $\xi = 0$, то из (4) получаем $c \equiv 0$, и соответствующая часть контурного интеграла в (2) пропадает. На дуге L_1 , $\zeta \equiv 0$ и из (4) $b \equiv 0$. Очевидно $\psi < 0$, и нам достаточно показать, что $ac' \geq 0$. Не нарушая ориентации поверхности, вдоль дуги L_1 можно так выбрать координаты u , v , чтобы на L_1

$$x_u = x_s = \tau, \quad x_v = r(s) (\cos \theta v + \sin \theta n),$$

где θ — угол между поверхностью Φ и плоскостью ω вдоль дуги L_1 . Первое из соотношений (3) тогда дает

$$\begin{aligned}ka &= -\beta r \cos \theta, \\ c' &= -\beta r \sin \theta.\end{aligned}\tag{5}$$

По условию теоремы $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ и из (5) следует $ac' \geq 0$. Теорема доказана.

В приведенном доказательстве не было существенным, что контур L разбит именно на две дуги. Следовательно, теорема верна и в том случае, когда контур L разбит на любое конечное число дуг, на каждой из которых поле z либо лежит в плоскости ω , либо ей ортогонально.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Ефимов. Качественные вопросы теории деформации поверхностей. «Усп. матем. наук», вып. 2 (1948).