О НАХОЖДЕНИИ АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК И ТРАЕКТОРИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. И. Кононенко

1. Рассмотрим автономную потенциальную динамическую систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{1}$$

де $x(t)$ и $f(x) = -\operatorname{grad}\Phi(x)$ — векторы евклидова пространства E_p, а потенциал $\Phi(x)$ дважды непрерывно дифференцируем, имеет в E_p единственную стационарную точку x^0 и стремится к ∞ при $\|x\| \to \infty$. Очевидно, $\Phi(x^0) = \min\limits_{x \in E_p} \Phi(x)$ и x^0 является асимптотически устойчивой особой точкой системы (1). Для этого случая в заметке И. М. Глазмана [1] был построен алгоритм градиентного спуска

$$x_{n+1} = x_n + \gamma_n f(x_n), \tag{2}$$

сходящийся к x^0. При этом последовательность множителей γ_n не задается a priori, а вырабатывается в ходе процесса и скорость сходимости алгоритма экспоненциальна, если форма $d^2\Phi(x^0)$ не вырождена [2, 3]. Процесс (2) можно рассматривать как интегрирование системы (1) методом Эйлера при специальном выборе шага γ_n.

Настоящая статья посвящена развитию методов заметки [1] на случай общей динамической системы, которая уже не предполагается потенциальной и автономной. Такая система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{3}$$

где вектор-функция $f(t, x)$ предполагается определенной в некоторой области $G \subset E_p$ и имеющей непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным, которые в каждой замкнутой области $\Omega \subset G$ равномерно ограничены относительно t $(t_0 \leqslant t < \infty)$. Предположим далее, что система имеет асимптотически устойчивое в области G решение $x^0(t)$ * (в частности, асимптотически устойчивую особую точку $x^0(t) \equiv x^0$). Роль потенциала $\Phi(x)$ для системы (3) будет играть функция Ляпунова, которая не предполагается известной, а используется лишь для исследования сходимости процесса

$$x_{n+1} = x_n + \gamma_n f(t_n, x_n). \tag{4}$$

* Это значит, что при любом начальном условии $x(t_0) = x_0 \in G$ будет $x(t) \in G$ при $t \geqslant t_0$. Такая устойчивость обычно называется устойчивостью в целом.

При построении множителей γ_n учитывается асимптотическая устойчивость искомого решения, благодаря которой устраняются ошибки, накапливаемые на каждом шаге в связи с переходом от дифференциального уравнения (3) к конечно-разностной схеме (4).

Заметим, что известная задача о нахождении седловой точки выпукло-вогнутого функционала (см. например, [4]) сводится к системе (3), в которой правая часть $f(t, x) \equiv f(x)$ имеет специальную структуру (см. далее $n^0 6$).

В настоящей статье также рассматривается обобщение процесса (4) на некоторые динамические системы со случайными элементами *.

2. Если система (3) имеет асимптотически устойчивую в области G особую точку x^0, то существует ** функция $V(t, x)$ (функция Ляпунова), обладающая следующими свойствами:

1а) существуют непрерывные функции $W_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) такие, что $W_3(x) \geqslant V(t, x) \geqslant W_1(x)$ $x \in G$, $t_0 \leqslant t < \infty$. где $W_3(x^0) \equiv 0$, $W_1(x) > 0$ при $x \neq x^0$ и $W_1(x) \to \infty$ при стремлении x к границе G или к ∞;

1б) $\frac{dV(t, x)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + (\mathrm{grad}_x V, f) \leqslant -W_2(x) < 0$ при $x \neq x^0$, $x \in G$, где $\frac{dV(t, x)}{dt}$ есть полная производная $V(t, x)$ вдоль траектории системы (3).

1в) Функция $V(t, x)$ имеет непрерывные частные производные любого порядка по всем аргументам, равномерно ограниченные по t в области $\Omega \subset G$ (каждая производная ограничена своей постоянной).

3. Пусть $x_0 = x(t_0)$ — произвольная точка области $\Omega \subset G$; $\{\alpha_n\}_0^\infty$ — некоторая последовательность неотрицательных чисел, $t_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k$. Точка x_0 порождает последовательность

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_n f(t_n, x_n) \quad (n = 0, 1, \dots). \tag{5}$$

Назовем $\gamma(\Omega) > 0$ множителем релаксации функции $V(t, x)$ для области Ω, если

$$V(t, x) > V(t + \gamma(\Omega), x + \gamma(\Omega) f(t, x)) \tag{6}$$

при $t_0 \leqslant t < \infty$ и $x \in \Omega$.

В силу того, что $\Omega \subset G$, существует такое $\gamma > 0$, что область $\Omega_{t,\gamma} = \{x + \sigma f(t, x) \mid x \in \Omega, \ 0 \leqslant \sigma \leqslant \gamma\}$ содержится в G и $x(t + \gamma) \in \Omega_{t,\gamma}$, если $x(t_0) \in \Omega$.

Лемма 1. *Для любой замкнутой области $\Omega \subset G$, не содержащей точку x^0, существует множитель релаксации функции $V(t, x)$.*

Доказательство. Пусть в момент времени $t = t_0$, $x(t_0) = x_0 \in \Omega$. За время γ вдоль траектории точка x_0 переместится в точку $x(t_0 + \gamma)$. По теореме Лагранжа существует θ ($0 < \theta < 1$) такое, что

$$V(t_0 + \gamma, x(t_0 + \gamma)) - V(t_0, x_0) = \gamma \cdot \frac{dV(t_0 + \theta\gamma, x(t_0 + \theta\gamma))}{dt}. \tag{7}$$

* Основные результаты статьи, относящиеся к детерминированным динамическим системам, были получены совместно с В. Д. Мильманом и опубликованы без доказательства в [5].

** Доказательство приводимого обращения теоремы Ляпунова см. [6, стр. 37—38].

За этот же промежуток времени γ точка x_0, по правилу (5), с множителем γ переместится в точку $x_1 = x_0 + \gamma f(t_0, x_0)$. Обозначим $A_i = \frac{df^{(i)}}{dt} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x^{(j)}} \cdot \frac{dx^{(j)}}{dt} + \frac{\partial f^{(i)}}{\partial t}$. Так как для каждой компоненты решения $x(t)$ по формуле Тейлора имеет место разложение

$$x^{(i)}(t_0 + \gamma) = x_0^{(i)} + \gamma \frac{dx^{(i)}}{dt} + \frac{\gamma^2}{2} A_i|_{x(t_0+\tilde{\theta}^{(i)}\gamma)},$$

где $0 < \tilde{\theta}^{(i)} < 1$, то для разности значений функции $V(t, x)$ в точках $x(t_0 + \gamma)$ и x_1 справедливо равенство

$$V(t_0 + \gamma, x(t_0 + \gamma)) - V(t_0 + \gamma, x_1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial V}{\partial x^{(i)}}\bigg|_{\theta_1} [x^{(i)}(t_0 + \gamma) - x_1^{(i)}] = \frac{\gamma^2}{2} (A|_{\tilde{\theta}}, \operatorname{grad}_x V|_{\theta_1}), \tag{8}$$

где $\tilde{\theta} = \{\tilde{\theta}^{(i)}\}_{i=1}^{p}$, $A = \{A_i\}_{i=1}^{p}$, а под $A|_{\tilde{\theta}}$ и $\operatorname{grad}_x V|_{\theta_1}$ понимаются значения вектор-функций A и $\operatorname{grad}_x V$ в промежуточных точках *. Вычитая (8) из (7), получим

$$V(t_0 + \gamma, x_1) - V(t_0, x_0) = \gamma \frac{dV}{dt}\bigg|_{\theta} - \frac{\gamma^2}{2} (A|_{\tilde{\theta}}, \operatorname{grad}_x V|_{\theta_1}). \tag{9}$$

Очевидно, что выражение (9) меньше нуля при

$$\gamma < \frac{2\left|\frac{dV}{dt}\big|_{\theta}\right|}{|(A|_{\tilde{\theta}}, \operatorname{grad}_x V|_{\theta_1})|}. \tag{10}$$

Заметим, что промежуточные точки, в которых рассматриваются значения вектор-функций A и $\operatorname{grad}_x V$, принадлежат $\Omega_{t,\gamma}$. Поэтому в силу вышеуказанных свойств функций $f(t, x)$ и $V(t, x)$ величины $\|A|_{\tilde{\theta}}\|$ и $\|\operatorname{grad}_x V|_{\theta_1}\|$ ограничены сверху некоторыми константами K и L.

Поскольку $x^0 \in \Omega$ и в силу свойства 1б функции $V(t, x)$ существует такое $\beta > 0$, что $\left|\frac{dV}{dt}\big|_{\theta}\right| \geqslant \beta$. Отсюда следует, что выражение (9) будет меньше нуля при

$$\gamma < \frac{2\beta}{KL}.$$

Таким образом, в качестве $\gamma(\Omega)$ можно взять любое положительное число, меньшее $\frac{2\beta}{KL}$.

Лемма 2. Если $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, *последовательность* $\{x_n\}_0^\infty$ *содержится в* Ω *и* $\inf_n W_1(x_n) > 0$, *то* $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < \infty$.

---

* В дальнейшем под $\psi|_\theta$ имеется в виду значение функции ψ в промежуточной точке.

Доказательство. Пусть пространство E_{p+1} состоит из векторов $u=\{x^{(1)}, \ldots, x^{(p)}, t\}$. Тогда $\|u_{n+1}-u_n\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{p}|x_{n+1}^{(i)}-x_n^{(i)}|^2+\alpha_n^2}$. В силу теоремы Лагранжа существует последовательность $\{z_n(\theta_n)=u_n+\theta_n(u_{n+1}-u_n)\}_0^\infty$ такая, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}|V(t_n, x_n)-V(t_{n+1}, x_{n+1})| = \sum_{n=0}^{\infty}|(u_{n+1}-$$

$$-u_n, V'(z_n(\theta_n)))| = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\left[(t_{n+1}-t_n)\frac{\partial V}{\partial t}\Big|_{z_n(\theta_n)}+\sum_{i=1}^{p}(x_{n+1}^{(i)}-x_n^{(i)})\frac{\partial V}{\partial x^{(i)}}\Big|_{z_n(\theta_n)}\right]\right| =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\left[\alpha_n\frac{\partial V}{\partial t}\Big|_{z_n(\theta_n)}+\sum_{i=1}^{p}\alpha_n f^{(i)}(t_n, x_n)\frac{\partial V}{\partial x^{(i)}}\Big|_{z_n(\theta_n)}\right]\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\left|\frac{\partial V}{\partial t}\Big|_{z_n(\theta_n)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{p}f^{(i)}(t_n, x_n)\frac{\partial V}{\partial x^{(i)}}\Big|_{z_n(\theta_n)}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\left|\frac{\partial V}{\partial t}_{z_n(\theta_n)}+\right.$$

$$\left.+(\operatorname{grad}_x V|_{z_n(\theta_n)}, f|_{z_n(\theta_n)})+(\operatorname{grad}_x V|_{z_n(\theta_n)}, f-f|_{z_n(\theta_n)})\right|.$$

Покажем, что величины, стоящие под знаком модуля, ограничены снизу положительной константой. Действительно,

$$\frac{dV(t_n+\theta_n\alpha_n, x_n+\theta_n\alpha_n f(t_n, x_n))}{dt}=\frac{dV(t_n, x_n)}{dt}+\theta_n\alpha_n\varphi|_{\theta_1},$$

где $\varphi|_{\theta_1}$ — некоторая функция, ограниченная сверху в силу свойств функций $f(t, x)$ и $V(t, x)$.

Так как $\inf_n W_1(x_n)>0$, то существует ограниченная замкнутая область $\Omega_1\subset\Omega$, для которой $x_n\in\Omega_1$, начиная с некоторого номера, и $x^0\,\bar{\in}\,\Omega_1$. Тогда в силу свойства 1б функции $V(t, x)$ существует такое число $\beta>0$, что $\left|\frac{dV(t_n, x_n)}{dt}\right|\geqslant\beta$. Ввиду условия $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ найдутся такие N и α, $0<\alpha<\beta$, что для $n>N$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{\partial V}{dt}\Big|_{z_n(\theta_n)}+(\operatorname{grad}_x V|_{z_n(\theta_n)}, f|_{z_n(\theta_n)})+(\operatorname{grad}_x V|_{z_n(\theta_n)}, f-f|_{z_n(\theta_n)})\right|\geqslant\alpha. \quad (11)$$

Поскольку $x^0\,\bar{\in}\,\Omega_1$, то по лемме 1 существует $\gamma(\Omega_1)$, следовательно, существует такое число n_0, что

$$\alpha_n<\gamma(\Omega_1) \quad (12)$$

для всех $n>n_0$. Пусть $m=\max\{N, n_0\}$.

Таким образом, с одной стороны,

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}V(t_n, x_n)-V(t_{n+1}, x_{n+1})=V(t_{m+1}, x_{m+1})-\lim_{k\to\infty}V(t_k, x_k)<\infty,$$

с другой — из (11) следует

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} V(t_n, x_n) - V(t_{m+1}, x_{m+1}) \geqslant \alpha \sum_{n=m+1}^{\infty} d_n.$$

Это показывает, что $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < \infty$.

Теорема 1. *Если последовательность* $\{x_n\}_0^\infty$ *содержится в* Ω, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$, *то* $\lim_{n\to\infty} x_n = x^0$.

Доказательство. Так как $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$, то в силу леммы 2, $\inf_n W_1(x_n) = 0$. Следовательно, существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_0^\infty$ последовательности $\{x_n\}_0^\infty$, сходящаяся к x^0.

Возьмем произвольное достаточно малое $\varepsilon > 0$ и покажем, что, начиная с некоторого номера, вся последовательность $\{x_n\}_0^\infty$ будет содержаться в круге радиуса ε с центром в точке x^0. Обозначим через $S(\varepsilon) = \{x \mid \rho(x, x^0) < \varepsilon\}$.

Так как в силу свойства 1а функция $W_3(x)$ непрерывна и $W_3(x) \to 0$ при $x \to x^0$, то существует такое число $C(\varepsilon)$, что $U = \{x \mid W_3(x) < C(\varepsilon)\} \subset S(\varepsilon)$. Возьмем ε_1 такое, что $S(\varepsilon_1) \subset U$. Из условия $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$ вытекает существование такого номера n_k, что соответствующее α_{n_k} будет релаксационным в области $M = U \setminus S\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right)$ и для всех $x \in S\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right)$ выполняется $\rho(x + \alpha_{n_k} f(t, x), x) < \frac{\varepsilon_1}{2}$. Это означает, что вся последовательность $\{x_n\}_0^\infty$, начиная с некоторого номера, содержится в $U \subset S$. Отсюда, в силу произвольности $\varepsilon \to 0$, следует сходимость всей последовательности $\{x_n\}_0^\infty$ к x.

В формулировке теоремы 1 предполагается, что последовательность $\{x_n\}_0^\infty$ содержится в некоторой ограниченной замкнутой области $\Omega \subset G$. Для применения этой теоремы необходимо следующее утверждение.

Лемма 3. *Для каждого* $x_0 \in G$ *существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что последовательность* $x_{n+1} = x_n + \gamma_0 f(n\gamma_0, x_n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *содержится в некоторой ограниченной замкнутой области* $\Omega \subset G$.

Доказательство. Возьмем любое $x_0 \in G$. Заметим, что $V(t, x_0) \leqslant W_3(x_0) = C < \infty$ в силу свойства 1а функции $V(t, x)$. Поэтому существует $\alpha > 0$ такое, что на $(p+1)$-мерной области

$$G_1(\alpha) = \{t + \alpha,\ x + \alpha f(t, x) \mid V(t, x) \leqslant V(t, x_0)\};$$
$$\sup_{(t,\,x) \in G_1(\alpha)} V(t, x) \leqslant C_1 < \infty,$$

где множество тех (t, x), для которых $V(t, x) \leqslant V(t, x_0)$, обозначим через U.

Возьмем любое $C_2 > C_1$. Пусть $U_1 = \{(t, x)/V(t, x) \leqslant C_2\}$. Очевидно, $U_1 \subset G$. В силу леммы 1 в области $U_1 \setminus U$ существует релаксационный множитель $\gamma(U_1 \setminus U)$. Пусть $\gamma_0 = \min(\alpha, \gamma(U_1 \setminus U))$. Покажем, что последовательность $\{x_n\}_0^\infty$, построенная из точки x_0 с множителем γ_0, остается в области U_1. Предположим, что это не так и на некотором n-м шаге впервые имеем

$$V(t_{n-1} + \gamma_0, x_{n-1} + \gamma_0 f((n-1)\gamma_0, x_{n-1})) \geqslant C_2.$$

Тогда точка (t_{n-1}, x_{n-1}) принадлежит области $U_1 \diagdown U$, ибо в противном случае $(t_n, x_n) \in G_1(\alpha)$ и $V(t_n, x_n) \leqslant C_1 < C_2$. Если же $(t_{n-1}, x_{n-1}) \in U_1 \diagdown U$, то, в силу релаксационности γ_0 в области $U_1 \diagdown U$, $V(t_n, x_n) < V(t_{n-1}, x_{n-1})$. Таким образом, при всех n выполняется $V(t_n, x_n) \leqslant C_2$, что и доказывает лемму.

4. Опишем вначале алгоритм $\mathfrak{R}_1(\{r_n\}_1^\infty; \{\alpha_n\}_0^\infty)$, $(0 < r_1 < r_2 < \ldots < < r_n < r_{n+1} < \ldots; \alpha_n \geqslant 0)$, который состоит из последовательного выполнения одинаково описываемых этапов. Этап с номером j состоит в образовании последовательности $\{x_n\}_0^\infty$ по правилу

$$x_{n+1}(j) = x_n(j) + \gamma_n(j) f\left(\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(j), x_n(j)\right),$$

где $x_0(j) = x_0$ (эта точка не меняется при переходе к очередному этапу), а $\gamma_n(j) = \alpha_{n+j}$. Построение этой последовательности при данном j прекращается и переход к следующему этапу осуществляется при выполнении неравенства $\|x_n(j)\| > r_j$.

5. Мы будем пользоваться также алгоритмом $\mathfrak{R}_2(\{r_n\}_1^\infty; \{s_n\}_0^\infty; \{\alpha_n\}_0^\infty)$ (здесь $0 \leqslant s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant s_{n+1} \leqslant \ldots$ при $n > 0$ и $s_0 = 0$). Этот алгоритм также состоит из одинаково описываемых этапов, а условие перехода к следующему этапу то же, что и в алгоритме $\mathfrak{R}_1$. Опишем j-й этап алгоритма $\mathfrak{R}_2$. Пусть по начальной точке $x_0(j) = x_0$ уже построены точки $\{x_k(j)\}_{k=1}^n$ и вычеркнуты* первые $i-1$ чисел s_n. Тогда, если $s_i \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|x_k(j) - x_{k-1}(j)\|$, следующая точка $x_{n+1}(j)$ строится по формуле

$$x_{n+1}(j) = x_n(j) + \gamma_i(j) f(t_n(j), x_n(j)), \tag{13}$$

где $\gamma_i(j) = \alpha_{i+j}$, $t_n(j)$ — сумма всех α по предыдущим шагам j-го этапа и s_i из последовательности вычеркивается. Если же $s_i > \sum_{k=0}^{n} \|x_k(j) - x_{k-1}(j)\|$, то в (13) вместо $\gamma_i(j)$ пишем $\gamma_{i-1}(j)$ и s_i не вычеркивается. При переходе к следующему этапу вся последовательность $\{s_i\}_0^\infty$ восстанавливается.

Отметим, что алгоритм $\mathfrak{R}_1$ является частным случаем алгоритма $\mathfrak{R}_2$ (достаточно взять $s_n = 0$ при всех n), однако мы выделили его описание, поскольку он является более простым. Докажем сходимость этих алгоритмов к x^0.

Теорема 2. *Пусть x^0 является асимптотически устойчивой во всем пространстве особой точкой системы* (3). *Тогда для любых последовательностей $\{r_n\}_1^\infty$ $(\lim_{n\to\infty} r_n = \infty)$, $\{s_n\}_0^\infty$, $\{\alpha_n\}_0^\infty$ $(\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ и любой начальной точки алгоритм $\mathfrak{R}_2(\{r_n\}_1^\infty; \{s_n\}_0^\infty; \{\alpha_n\}_0^\infty)$ стабилизуется на некотором этапе j_0 и порождает последовательность $\{x_n(j_0)\}_{n=0}^\infty$, сходящуюся к x^0.*

Доказательство. Для начальной точки x_0 в силу леммы 3 существует такое γ_0, что последовательность, порождаемая x_0 и γ_0, содержится в Ω. Если $\|x_n(j)\| > r_j$, то $\gamma_0(j)$ вычеркивается, и этот процесс повторяется до тех пор, пока $\gamma_0(j) < \gamma_0$. Поэтому на каком-то этапе j_0 алгоритм

* Правило вычеркивания чисел s_n указано ниже.

$\mathfrak{R}_2$ стабилизуется. При продолжении уже стабилизовавшегося процесса возможны два исхода:

1) либо $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n(j_0) - x_{n-1}(j_0) \| < \infty$;

2) либо $\sum_{n=0}^{\infty} \| x_n(j_0) - x_{n-1}(j_0) \| = \infty$.

В первом случае по алгоритму $\mathfrak{R}_2$ шаг $\gamma_i(j_0)$ стабилизуется по i, откуда из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \| f(t_n(j_0), x_n(j_0)) \|$ вытекает, что последовательность $\{x_n(j_0)\}_0^{\infty}$ сходится к x^0.

Во втором случае из $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n(j) - x_{n-1}(j) \| = \infty$ следует, что $\gamma_i(j_0) \to 0$ при $i \to \infty$ и $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i(j_0) = \infty$. Поэтому, в силу теоремы 1, последовательность $\{x_n(j_0)\}_0^{\infty}$ сходится к x^0 (роль Ω при этом играет $S = \{x \mid \| x \| < r_{i_0}\}$).

В п. 1 мы упомянули, что известная задача о нахождении седловой точки выпукло-вогнутого функционала сводится к задаче нахождения особой точки некоторой специальной системы. Докажем это утверждение.

Пусть $\varphi(x, y)$ — строго вогнута и дважды непрерывно дифференцируема по n-мерному вектору x $(n > 0)$, строго выпукла и дважды непрерывно дифференцируема по m-мерному вектору y; тогда, если $(x, \bar{y})$ седловая точка, то $\varphi(x, \bar{y}) < \varphi(\bar{x}, y) < \varphi(\bar{x}, y)$.

Построим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{grad}_x \varphi(x, y);$$

$$\frac{dy}{dt} = -\operatorname{grad}_y \varphi(x, y).$$

Эта система имеет асимптотически устойчивую особую точку $(\bar{x}, \bar{y})$, что легко показать, взяв в качестве функции Ляпунова функцию

$$V(x, y) = \varphi(\bar{x}, y) - \varphi(x, y).$$

Применяя к данной системе алгоритм $\mathfrak{R}_2$, согласно теореме 2 получим последовательность, сходящуюся к $(\bar{x}, \bar{y})$.

7. Предположим, что все решения $x(t)$ системы (3) при $x_0 \in \Omega$, $t_0 \geqslant 0$ и некоторых $\beta > 0$, $B > 0$ удовлетворяют условию

$$\| x(t) - x^0 \| \leqslant B \| x_0 \| \exp(-\beta(t - t_0)) \qquad (14)$$

при $t \geqslant t_0$.

Заметим, что условие (14) выполнено, например, в том случае, когда правые части системы (3) не зависят от t и у матрицы линейной части системы в особой точке все собственные значения имеют отрицательную вещественную часть.

При выполнении условия (14) в случае асимптотически устойчивой особой точки в области Ω существует функция Ляпунова $V(t, x)$, удовлетворяющая неравенствам, характерным для квадратичной формы [6, стр. 75]:

IIа) $C_1 \| x - x^0 \|^2 \leqslant V(t, x) \leqslant C_2 \| x - x^0 \|^2$;

IIб) $\frac{dV}{dt} \leqslant -C_3 \| x - x^0 \|^2$;

IIв) $\left|\frac{\partial V}{\partial x^{(i)}}\right| \leqslant C_4 \| x - x^0 \|$ для всех $i = 1, 2, \ldots, p$ (C_i — положительные константы). Обозначим такую функцию Ляпунова через $V_0(t, x)$.

Лемма 4. *Для произвольной* $\Omega \subset G$ *существует множитель нижней релаксации, т. е. такое число* $\gamma_0 > 0$, *что при любом* γ, $0 < \gamma < \gamma_0$,

$$V_0(t+\gamma,\ x+\gamma f(t, x)) > V_0(t+\gamma_0,\ x+\gamma_0 f(t, x))$$

при всех $x \in \Omega$, $t_0 \leqslant t < \infty$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x(t_0) = x_0$. В силу свойства IIб функции $V_0(t, x)$ в области Ω существует множитель $\gamma(t_0, x_0)$, такой, что в точке $x_1 = x_0 + \gamma(t_0, x_0) f(t_0, x_0)$ выполняется $V_0'(t_0+\gamma, x_1) = 0$ (производная берется по направлению от (t_0, x_0) к $(t_0+\gamma, x_1)$). Обозначим наименьшее такое $\gamma(t_0, x_0)$ через $\gamma_0(t_0, x_0)$. Полученное $\gamma_0(t_0, x_0)$ является множителем нижней релаксации в точке (t_0, x_0). Покажем, что $\gamma_0 = \inf\limits_{\substack{t_0 \geqslant 0 \\ x_0 \in \Omega}} \gamma_0(t_0, x_0) > 0$.

Напомним, что

$$V_0'(t_0+\gamma, x_1) = \gamma\left[\frac{\partial V_0(t_0+\gamma, x_1)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial V_0(t_0+\gamma, x_1)}{\partial x^{(i)}} f^{(i)}(t_0, x_0)\right].$$

Так как $\frac{dV_0}{dt} \leqslant -C_3 \| x - x^0 \|^2$, $\left\|\frac{\partial^2 V_0}{\partial t^2}\right\| \leqslant C_5 \| x - x^0 \|^2$,

$$\| f(t, x) \| \leqslant C \| x - x^0 \| \text{ и } \left\|\frac{\partial^2 V_0}{\partial t\, \partial x^{(i)}}\right\| < C_6 \| x - x^0 \|$$

(где C, C_3, C_5 и C_6 положительные постоянные), то справедливо неравенство

$$-V_0'(t_0, x_0) + \frac{1}{\gamma_0} V_0'(t_0+\gamma_0, x_1) =$$

$$= \frac{\partial V_0(t_0, x_0)}{\partial t} - \frac{\partial V_0(t_0+\gamma_0, x_1)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial V_0(t_0, x_0)}{\partial x^{(i)}} f^{(i)}(t_0, x_0) -$$

$$- \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial V_0(t_0+\gamma_0, x_1)}{\partial x^{(i)}} f^{(i)}(t_0, x_0) \Bigg| = \Bigg| \gamma_0 \left[\frac{\partial^2 V_0}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 V_0}{\partial t\, \partial x^{(i)}}\bigg|_{\theta} \cdot f^{(i)}\right] +$$

$$+ \gamma_0 \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}}\bigg|_{\theta_1} \cdot f^{(i)} \cdot f^{(j)} \Bigg| \leqslant \gamma_0 C_7 \| x - x^0 \|^2.$$

С другой стороны,

$$-V_0'(t_0, x_0) + \frac{1}{\gamma_0} V_0(t_0+\gamma_0, x_1) = -\frac{dV_0(t_0, x_0)}{dt} \geqslant C_3 \| x - x^0 \|^2.$$

Отсюда следует, что $\gamma_0 \geqslant \frac{C_3}{C_7} > 0$.

Теорема 3. *Если система (3) удовлетворяет условию (14), то в условиях теоремы 2, при дополнительном требовании* $s_n \to \infty$ *и при реализации алгоритма* $\mathfrak{R}_2$ *вычеркивается лишь конечное множество чисел* s_i, *тем самым множитель* $\gamma_i(j_0)$ *стабилизуется.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. множитель $\gamma_i(j_0)$ не стабилизуется. Это означает, что $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n(j_0) - x_{n-1}(j_0) \| = \infty$ и и $\lim_{i\to\infty} \gamma_i(j_0) = 0$. Поэтому существует такое число $N > 0$, что $\gamma_i(j_0) < \gamma_0$ при $i > N$, где γ_0 — множитель нижней релаксации в области $\| x_n(j_0) \| \leqslant r_j$, для функции $V_0(t, x)$. Согласно теореме, установленной Ю. И. Любичем [7], последовательность $\{x_n(j_0)\}_0^\infty$, построенная по правилу (13) с множителем нижней релаксации дает конечный релаксационный путь, т. е. $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n(j_0) - x_{n-1}(j_0) \| < \infty$. Получили противоречие.

8. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y(t)), \tag{15}$$

где $x = x(t)$ и $f = f(t, x, y(t))$ — векторы евклидова пространства E_p; $y(t)$ — случайная функция, которая может принимать в каждый момент времени одно значение y_i из конечного множества $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_r)$, причем вероятность $p_{ij}(\Delta t)$ смены значений $y_i \to y_j$ за время Δt удовлетворяет условию $p_{ij}(\Delta t) = a_{ij}\Delta t + 0(\Delta t)$ $(i \neq j,\ a_{ij} = \mathrm{const})$. Кроме того, будем предполагать, что вектор-функция $f(t, x, y(t))$ обладает равномерно по t $(t_0 \leqslant t < \infty)$ и $y \in Y$ ограниченными частными производными первого порядка по всем аргументам в каждой ограниченной замкнутой области Ω и при любом $y \in Y$, $t \geqslant t_0$ в некоторой точке x^0 выполняются равенства

$$f^{(i)}(t, x^0, y(t)) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Система (15) рассматривалась И. Я. Кацом и Н. Н. Красовским [8]. Приведем некоторые определения из [8], используемые дальше. Под $M[\psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n); \beta_1, \ldots, \beta_n/\beta]$ имеется в виду математическое ожидание функции $\psi(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ случайных величин $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ при условиях β, где β означает некоторую систему равенств, неравенств или каких-либо других условий. Производной $\frac{dM[V]}{dt}$ функции V в силу уравнений (15) в точке $t = \tau$, $x = \xi$, $y = \eta$ называется предел

$$\frac{dM[V]}{dt} = \lim_{t\to\tau+0} \frac{1}{t-\tau} \{M[V(t, x(t), y(t)); x(t), y(t)/_{x(\tau)=\xi,\, y(\tau)=\eta}] - V(\tau, \xi, \eta)\}.$$

В случае, когда $y \in Y$, в силу уравнения (15) производную $\frac{dM[V]}{dt}$ в точке t, x, $y = y_j$ можно вычислить по формуле

$$\frac{dM[V]}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial V}{\partial x^{(i)}} f^{(i)}(t, x, y) + \sum_{k\neq j}^{r} a_{jk}[V(t, x, y_k) - V(t, x, y_j)].$$

Решение $x = x^0$ системы (15) называется экспоненциально устойчивым в среднем, если при любых начальных условиях из Ω и $t \in [t_0, \infty)$ существуют постоянные числа B и α, такие, что при всех $t \geqslant t_0$ выполняется неравенство

$$M[\| x(t) - x^0 \|^2; x(t)/_{x_0, y_0}] \leqslant B \| x_0 \| \exp(-\alpha(t - t_0)). \tag{16}$$

Там же [8] показано, что при выполнении условия (16) в области $t \geqslant t_0$, $y \in Y$, $x \in \Omega$ существует функция $V(t, x, y)$, обладающая следующими свойствами:

III а) $C_1\|x - x^0\|^2 \leqslant V(t, x, y) \leqslant C_2\|x - x^0\|^2$;

III б) $\frac{dM[V]}{dt} \leqslant -C_3\|x - x^0\|^2$,

где $\frac{dM[V]}{dt}$ — производная функции $V(t, x, y)$ вдоль траектории $\dot{x}(t)$;

III в) функции $V(t, x, y)$ имеет непрерывные частные производные любого порядка по всем аргументам, равномерно ограниченные по t $(t_0 \leqslant t < \infty)$ и $y \in Y$ в ограниченной замкнутой области Ω.

Введем обозначение: под $\tilde{y}(t+\gamma)$ имеется в виду такая случайная величина, что если $y(t) = y_i$, то вероятность того, что $\tilde{y}(t+\gamma) = y_j$ равна $a_{ij}\gamma$. Определим последовательность $\{x_n\}_0^\infty$ равенствами

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_n f(t_n, x_n, y(t_n)), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $y(t_n) = \tilde{y}(t_{n-1} + \alpha_{n-1})$.

Лемма 5. Если $x^0 \in \Omega$, *то существует* $\gamma(\Omega) = \gamma > 0$ *такое, что для любой точки* $x \in \Omega$ и $t \geqslant t_0$

$$V(t, x, y) > M[V(t+\gamma, x + \gamma f(t, x, y), \tilde{y}(t+\gamma))].$$

Доказательство. В силу определения $\frac{dM[V]}{dt}$ и условия IIIб функции $V(t, x, y)$ имеем

$$V(t, x, y) - M[V(t+\gamma), x(t+\gamma), y(t+\gamma))] = \gamma \frac{dM[V]}{dt}\Big|_\theta \leqslant -C_3\|x - x^0\|^2.$$

Проведем следующие преобразования с некоторой выборкой случайных величин $x(t+\gamma)$, $y(t+\gamma)$ и $\tilde{y}(t+\gamma)$:

$$\begin{aligned} V(t+\gamma, x(t+\gamma), y(t+\gamma)) - V(t+\gamma, x + \gamma f(t, x, y), \tilde{y}(t+\gamma)) = \\ = V(t+\gamma, x(t+\gamma), y(t+\gamma)) - V(t+\gamma, x + \gamma f(t, x, y), y(t+\gamma)) + \\ + V(t+\gamma, x + \gamma f(t, x, y), y(t+\gamma)) - V(t+\gamma, x + \gamma f(t, x, y), \tilde{y}(t+\gamma)) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial V}{\partial x^{(i)}}\Big|_{\theta_1} [x^{(i)}(t+\gamma) - (x^{(i)} + \gamma f^{(i)}(t, x, y))] +$$

$$+ \sum_{k \neq l}^{r} [V(t, x, y_k) - V(t, x, y_l)]\, o(\gamma) = \frac{\gamma^2}{2} \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial V}{\partial x^{(i)}}\Big|_{\theta_1} \cdot \frac{df^{(i)}}{\partial t}\Big|_{\theta_2} +$$

$$+ o(\gamma) \sum_{k \neq l}^{r} [V(t, x, y_k) - V(t, x, y_l)]\,^*.$$

Так как функции $f(t, x, y)$ и $V(t, x, y)$ имеют равномерно ограниченные по t $(t_0 \leqslant t < \infty)$ и $y \in Y$ непрерывные частные производные пер-

* $o(\gamma)$ написано условно, это вероятность того, что данное слагаемое присутствует в рассматриваемой выборке После взятия математического ожидания $o(\gamma)$ будет множителем при соответствующем слагаемом.

... порядка по всем аргументам, то, взяв математическое ожидание ... писанного выше выражения, можно провести оценки, аналогичные ... кам для неравенства (10). Дальнейшие рассуждения такие же, как ... лемме 1.

Лемма 6. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, *последовательность* $\{x_n\}_0^\infty \subset x_0 \in \Omega$ *со...жится в* Ω *и* $\inf\limits_n M[\| x_n - x^0 \|^2] > 0$, *то* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n < \infty$.

Доказательство леммы 6 аналогично доказательству леммы 2, ...ует лишь заменить $(p+1)$-мерный вектор U на $(p+2)$-мерный ...тор $(x^{(1)}, \ldots, x^{(p)}, t, y(t))$ и, вначале проведя оценки для выраже... $V(t_n, x_n, y(t_n)) - V(t_{n+1}, x_{n+1}, y(t_{n+1}))$, взять математическое ожи...ие и просуммировать по n от 0 до ∞. Дальнейшие рассуждения ...кие же, как и в лемме 2.

Сформулируем остальные утверждения $n^0 3$ и $n^0 5$ для функции $V(t, x, y)$, доказательство которых аналогично.

Теорема 4. *Если* $\lim \alpha_n = 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ *и последовательность* $\{x_n\}_0^\infty$ *содержится в* Ω, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} M[\| x_n - x^0 \|^2] = 0$.

Лемма 7. Для каждого $x_0 \in G$ *существует* $\gamma_0 > 0$ *таков, что последовательность* $x_{n+1} = x_n + \gamma_0 f(n\gamma_0, x_n, y(n\gamma_0))$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *содержится в некоторой ограниченной замкнутой области.*

Теорема 5. *Пусть* x^0 *является экспоненциально устойчивой в среднем во всем пространстве особой точкой системы (15). Тогда для любых последовательностей*

$$\{r_n\}_1^\infty \ (\lim_{n\to\infty} r_n = \infty), \ \{s_n\}_0^\infty, \ \{\alpha_n\}_0^\infty \ (\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty)$$

и любой начальной точки x_0 *алгоритм* $\mathfrak{R}_2(\{r_n\}_1^\infty; \{s_n\}_0^\infty; \{\alpha_n\}_0^\infty)$ *с вероятностью, равной единице, стабилизируется на некотором этапе* j_0 *и порождает последовательность* $\{x_n(j_0)\}_0^\infty$, *сходящуюся к* x^0 *в том смысле, что* $\lim M[\| x_n - x^0 \|^2] = 0$.

9. В общем случае ограниченной асимптотически устойчивой траектории $x^0(t)$ нетрудно видеть, что для системы (3) существует функция Ляпунова $V(t, x)$, удовлетворяющая свойствам, аналогичным указанным в п. 2. Действительно, сделаем замену переменных $y = x - x^0(t)$. Тогда получим систему

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y + x^0(t)) - f(t, x^0(t)),$$

для которой существует функция $V(t, y)$, удовлетворяющая свойствам Iа—в. Положим $V(t, y) = V(t, x - x^0(t)) = V_1(t, x)$. Тогда свойство Iа выглядит так:

IVа) $W_3(x - x^0(t)) \geqslant V_1(t, x) \geqslant W_1(x - x^0(t))$ при $x \in G$, $t_0 \leqslant t < \infty$; $W_3(x - x^0(t)) \equiv 0$ при $x = x^0(t)$; $W_1(x - x^0(t)) > 0$ при любом $t \geqslant t_0$ и $x \neq x^0(t)$; $W_1(x - x^0(t)) \to \infty$ при стремлении x к границе G или к ∞.

Свойство Iб принимает вид

IVб) $\frac{dV_1(t, x(t))}{dt} \leqslant -W_2(x - x^0(t)) < 0$ при $t \geqslant t_0$ и $x \neq x^0(t)$.

Действительно, так как

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} - \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial V}{\partial y^{(i)}} \cdot \frac{dx^{0(i)}}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} - \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial V}{\partial y^{(i)}} f^{(i)}(t, x^0(t));$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial y^{(i)}} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial V}{\partial y^{(i)}} \cdot \frac{\partial y^{(i)}}{\partial x^{(j)}} = \frac{\partial V}{\partial y^{(j)}},$$

то

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{\partial V_1}{\partial t} + (\mathrm{grad}_x V_1,\ f(t, x)) = \frac{\partial V}{\partial t} - (\mathrm{grad}_y V,\ f(t, x^0(t)) +$$
$$+ (\mathrm{grad}_y V,\ f(t, x)) = \frac{\partial V}{\partial t} + (\mathrm{grad}_y V,\ f(t, x) - f(t, x^0(t))) = \frac{dV}{dt}.$$

Свойство Iв для функции $V_1(t, x)$ очевидно.

В случае ограниченной асимптотически устойчивой траектории имеет место теорема, аналогичная теореме 2. Обозначим $\Omega(x(t), t \to \infty) = \{x / \exists t_n \to \infty,\ x(t_n) \to x$ при $n \to \infty\}$; аналогичным образом будем понимать обозначение $\Omega(x_n, n \to \infty)$.

Теорема 6. *Указанный в теореме 2 процесс порождает последовательность* $\{x_n(j_0)\}_{n=0}^{\infty}$, *сходящуюся к* $x^0(t)$ *в том смысле, что*

$$\Omega(x_n(j_0),\ n \to \infty) = \Omega(x^0(t),\ t \to \infty).$$

Доказательство. Для последовательности $\{x_n(j_0)\}_{n=0}^{\infty}$, указанной в теореме, выполняется $\lim_{n\to\infty} V_1(t_n, x_n) = 0$, где $t_n = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i(j_0)$. Для доказательства этого заметим, что из свойств IVa — в функции $V_1(t, x)$ без существенных изменений в рассуждениях следуют леммы 1, 2 и 3. Использование этих лемм для доказательства того, что $\lim_{n\to\infty} V_1(t_n, x_n) = 0$, проводится так же, как и в теореме 1.

В силу того, что из $\lim_{n\to\infty} V_1(t, x) = 0$ следует $x \in \Omega(x^0(t), t \to \infty)$; соотношение $\lim_{n\to\infty} V_1(t_n, x_n) = 0$ влечет включение $\Omega(x_n(j_0), n \to \infty) \subset \Omega(x^0(t), t \to \infty)$. Покажем обратное включение. Пусть $x \in \Omega(x^0(t), t \to \infty)$, и докажем, что существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ последовательности $\{x_n(j_0)\}_0^{\infty}$, сходящаяся к x.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $V_1(t, x^0(t)) = 0$, то существует $\delta > 0$ такое, что из $V_1(t, x) < \delta$ следует $\| x - x^0(t) \| < \varepsilon$. Далее, поскольку $\lim_{n\to\infty} V_1(t_n, x_n) = 0$, то существует такое число N_1, что для $n > N_1$ неравенство $V_1(t_n, x_n) < \delta$ влечет $\| x_n - x^0(t_n) \| < \varepsilon$, где $t_n > t_{N_1} - \sum_{i=1}^{N_1-1} \gamma_i(j_0)$. В силу того, что $\gamma_i(j_0) \to 0$ и функция $f(t, x)$ имеет равномерно ограниченные по t частные производные первого порядка по всем аргументам, существует такое число N_0, что для $i > N_0$ выполняется $\|x^0(t + \gamma_i(j_0)) - x^0(t)\| = \gamma_i(j_0) \| f/_\theta \| < \varepsilon$.

Пусть $N = \max(N_0, N_1)$. Рассмотрим последовательность $\{t^{(m)}\}_0^{\infty}$, $t^{(m)} \to \infty$ при $m \to \infty$, такую, что $x^0(t^{(m)}) \to x$, $m \to \infty$. Тогда существует такое число m_0, что для $m > m_0$ будет выполняться $\| x^0(t^{(m)}) - x \| < \varepsilon$ и при этом $t^{(m)} > t_N$. Отсюда следует, что существует такое число n_0, что $\sum_{i=1}^{n_0} \gamma_i(j_0) \leqslant t^{(m)} \leqslant \sum_{i=1}^{n_0+1} \gamma_i(j_0)$. Поскольку $\| x^0(t_{n_0}) - x^0(t^{(m)}) \| < \varepsilon$ (напомним, что $n_0 > N_0$), имеем

$$\| x_{n_0} - x^0(t^{(m)}) \| \leqslant \| x_{n_0} - x^0(t_{n_0}) \| + \| x^0(t_{n_0}) - x^0(t^{(m)}) \| < 2\varepsilon.$$

Таким образом, для произвольного $x \in \Omega(x^0(t), t \to \infty)$

$$\| x_{n_0} - x \| \leqslant \| x_{n_0} - x^0(t^{(m)}) \| + \| x^0(t^{(m)} - x \| < 3\varepsilon.$$

В заключение приношу глубокую благодарность В. Д. Мильману и И. М. Глазману за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Глазман. О градиентной релаксации для неквадратичных функционалов. ДАН СССР, 154, № 5 (1964).
2. И. М. Глазман. Релаксация на поверхностях с седловыми точками. ДАН СССР, 161, № 4 (1965).
3. Ю. И. Любич. О скорости сходимости стационарной градиентной релаксации. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 6, № 2, 356—360, 1966.
4. К. Дж. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава. Исследование по линейному и нелинейному программированию. Изд-во иностр. лит., М., 1962.
5. А. И. Кононенко, В. Д. Мильман. Численный метод нахождения асимптотически устойчивых решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений. ДАН СССР, т. 167, № 4, 739—743, 1966.
6. Н. Н. Красовский. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.
7. Ю. И. Любич. Об абсолютной сходимости релаксационных процессов. «Матем. исследования», вып. 1. Изд-во АН Молдавской ССР, 1966.
8. И. Я. Кац, Н. Н. Красовский. Об устойчивости систем со случайными параметрами. «Прикл. матем. и мех.», т. 24, вып. 5, 1960.

Поступила 8 апреля 1966 г.