

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

**ПРИКЛАДНИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
ТА ЕЛЕМЕНТИ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ**

Методичні вказівки до практичних занять
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за спеціальністю Еб «Прикладна фізика та наноматеріали»

У 2 частинах

Частина 1

Електронний ресурс

Харків – 2025

УДК (517, 519.6) (075.8)

П 75

Рецензенти:

В. О. Катрич – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри фізичної і біомедичної електроніки і комплексних інформаційних технологій Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна;

І. К. Кузьмичов – доктор фізико-математичних наук, професор завідувач відділу вакуумної електроніки Інституту радіофізики та електроніки ім. О. Я. Усикова НАН України.

*Затверджено до розміщення в мережі Інтернет рішенням Науково-методичної ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол № 11 від 25 червня 2025 року)*

Прикладний математичний аналіз та елементи комп'ютерної математики :
П 75 методичні вказівки до практичних занять для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю Е6 «Прикладна фізика та наноматеріали». У 2 ч. Ч. 1 [Електронний ресурс] / уклад. М. Є. Каліберда, С. О. Погарський. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2025. – (PDF 81 с.)

Методичні вказівки призначено для студентів, які вивчають курс «Прикладний математичний аналіз та елементи комп'ютерної математики» на факультеті радіофізики, біомедичної електроніки та комп'ютерних систем. Посібник охоплює теми з теорії множин, аналізу функцій, границь, похідних та диференціалів, містить стислий теоретичний матеріал, приклади та завдання для самостійного розв'язання. Розглянуто алгоритми обчислення границь та похідних за скінченно-різницею схемою з реалізацією на Java. Запропоновані завдання формують навички, необхідні для вирішення прикладних задач у радіофізиці.

УДК (517, 519.6) (075.8)

© Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, 2025

© Каліберда М. Є., Погарський С. О., уклад, 2025

ЗМІСТ

Зміст.....	1
Вступ.....	5
Розділ 1. Теорія множин. Логічна символіка	6
Теоретичні відомості	6
Логічна символіка	6
Таблиці істинності	7
Операції над множинами.....	7
Приклади розв’язання задач.....	8
Задачі для самостійного розв’язання	10
Розділ 2. Функції	13
Загальні теоретичні відомості.....	13
Деякі “нові” функції.....	14
Виділення повного квадрату	17
Загальний алгоритм.....	17
Приклади розв’язання задач.....	18
Побудова графіків шляхом елементарних перетворень.....	19
Загальні відомості	19
Приклади розв’язання задач.....	24
Параметричний спосіб задання функції	26
Задачі для самостійного розв’язання	27
Розділ 3. Границя функції	30
Теоретичні відомості	30
Основні поняття	30
Розв’язання квадратного рівняння	31
Біном Ньютона	31
Неперервна функція. Точки розриву функції	32
Реалізація числового методу обчислення границі мовою Java	33
Приклади розв’язання задач.....	35
Степеневі функції.....	35
Тригонометричні функції.....	39
Інші трансцендентні функції.....	41

Показникові функції	41
Неперервність функції.....	41
Задачі для самостійного розв'язання	42
Відповіді.....	51
Розділ 4. Похідна і диференціал	53
Теоретичні відомості	53
Основні поняття	53
Фізичний та геометричний сенс похідної.....	54
Похідні вищих порядків. Формула Лейбніца.....	55
Формула Тейлора	56
Формула Макларéна.....	56
Правило Лопіталя обчислення границі.....	56
Скінченно-різницева схема для обчислення значення похідної	57
Приклади розв'язання задач.....	58
Задачі для самостійного розв'язання	62
Відповіді.....	72
Розділ 5. Дослідження функцій з використанням диференційного числення	73
Стислий алгоритм	73
Задачі для самостійного розв'язання	74
Тригонометричні формули.....	75
Таблиця еквівалентних функцій.....	77
Таблиця похідних	78
Правила диференціювання	79
Розкладення деяких елементарних функцій за формулою Макларена	80

ВСТУП

Методичні вказівки призначено для студентів факультету радіофізики, біомедичної електроніки та комп'ютерних систем, що вивчають курс «Прикладний математичний аналіз та елементи комп'ютерної математики».

У методичних вказівках розглянуто теми, пов'язані з логічною символікою, теорією множин, аналізом і побудовою графіків функцій з використанням елементарних перетворень, границями функцій, похідною і диференціалом. В кожному розділі наводяться стислі теоретичні відомості, приклади розв'язання задач, а також завдання для самостійного опрацювання. Це дозволяє не лише закріпити теоретичні знання, а й набути практичних навичок аналізу. Для деяких завдань надано відповіді, що сприяє самоперевірці. Окрім того, розглянуто алгоритм обчислення значень границі функції і алгоритм обчислення значення похідної функції у точці з використанням скінченно-різницевої схеми, які пропонується реалізувати мовою Java. Практичне застосування програмування для розв'язання математичних задач дає можливість студентам здобути навички, які є актуальними для їхньої професійної діяльності.

Запропоновані завдання є основою для опанування ключових методів аналізу. Набуті практичні навички допоможуть студентам у майбутньому розв'язувати складніші прикладні задачі, що виникають у радіофізиці та суміжних галузях.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРІЯ МНОЖИН. ЛОГІЧНА СИМВОЛІКА

Теоретичні відомості

Логічна символіка

1) \in – належить.

2) \Rightarrow – слідування (імплікація).

$\alpha \Rightarrow \beta$ – складне висловлювання. З α випливає β ; β – наслідок α ; β – необхідна умова для α ; α – достатня умова для β ; якщо α , то β .
Зверніть увагу, що якщо α достатньо для β , то β необхідно для α .

3) \Leftrightarrow – рівносильність, еквівалентність.

$\alpha \Leftrightarrow \beta \equiv \alpha \Rightarrow \beta$ и $\beta \Rightarrow \alpha$. Інший спосіб запису:

$$(\alpha \Leftrightarrow \beta) \Leftrightarrow (\alpha \Rightarrow \beta \text{ и } \beta \Rightarrow \alpha)$$

4) \wedge – кон'юнкція, логічне множення, “і”.

$\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \alpha$ "і" β – вираз істинний тоді і лише тоді, коли істинними є обидва вирази α і β .

5) \vee – диз'юнкція, логічне додавання, “або”.

$\alpha \vee \beta \Leftrightarrow \alpha$ "або" β – вираз хибний тоді і лише тоді, коли хибними є обидва вирази α і β .

6) \forall – квантор загальності, “для всіх”, “для кожного”.

7) \exists – квантор існування, “існує”, “знайдеться”.

8) $\exists!$ – квантор існування і єдиності, “існує єдиний”, “існує лише один”.

9) $\bar{\quad}$, \lceil – заперечення, “не”.

\equiv

$\alpha = \alpha$ – заперечення заперечення співпадає з вихідним твердженням.

Правило. При запереченні виразу з кванторами, квантори загальності і існування замінюються на протилежні, а останній вираз заперечується.

$$\overline{(\forall x)(\exists y)(\exists z)(\forall t)(P(x, y, z, t))} \equiv (\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists t)(\bar{P}(x, y, z, t))$$

Правило перестановки кванторів. Однакові квантори у складному виразі можна переставляти.

а) $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$

б) $\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$

При перестановці різних кванторів не виходить рівносильного твердження

$$\forall x \exists y P(x, y) \not\equiv \exists y \forall x P(x, y)$$

Таблиці істинності

Нехай $\alpha = 1$ – істино, $\alpha = 0$ – хибно

а) $\bar{\alpha}$, таблиця істинності для заперечення

α	$\bar{\alpha}$
1	0
0	1

б) $\alpha \wedge \beta$, таблиця істинності для кон'юнкції

α	β	$\alpha \wedge \beta$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

в) $\alpha \vee \beta$, таблиця істинності для диз'юнкції

α	β	$\alpha \vee \beta$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

г) $\alpha \Rightarrow \beta$ – таблиця істинності для слідування

α	β	$\alpha \Rightarrow \beta$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Зауваження. З хибного твердження випливає все, що завгодно.

Операції над множинами

1) \subset – включення

$A \subset B, B \supset A$ – A міститься у B , B містить A .

$$A \subset B \equiv (\forall x \in A)(x \in B) \equiv (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Кожен елемент множини A належить множині B .

2) $=$ – рівність

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A). \quad A = B \equiv (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Для будь-якого x , x належить A тоді і лише тоді, коли x належить B .

3) \cup – об'єднання

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ – це така множина, до якої входять всі елементи з множин A і B .

4) \cap – перетин

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ – це множина елементів, спільних для A і B .

5) \setminus – різниця

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ – це множина таких елементів, які входять до A , а до B не входять

6) Δ – симетрична різниця

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Визначення. Нехай ϵ множини I і A : $A \subset I$. Тоді $C_I A = I \setminus A$ називається доповнення A в I . Нехай $x \in I$, тоді

$$x \notin A \Leftrightarrow x \in C_I A$$

7) \times – декартовий добуток

Визначення. Декартовий добуток множини X і Y – множина всіх впорядкованих пар, які можна створити з елементів множини X і Y .

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$$

Приклади розв'язання задач

Приклад 1.

$(\forall x \in \mathbb{R}) (x^2 = 1)$ – **хибне** твердження. Щоб довести хибність, достатньо навести один приклад, для якого воно не виконується. Наприклад, $x = 0$.

$(\exists x \in \mathbb{R}) (x^2 = 1)$ – **істинне**. Наприклад, $x = 1$.

$(\exists! x \in \mathbb{R}) (x^2 = 1)$ – **хибне**. Наприклад, $x = 1$ і $x = -1$ – два x , не єдиний.

$(\exists x \in R) (2^x = 1)$ – істинне. Наприклад, $x = 0$.

Приклад 2. З використанням таблиці істинності довести правило контрапозиції $(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv (\bar{\beta} \Rightarrow \bar{\alpha})$.

Запишемо таблицю істинності

α	β	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\bar{\beta} \Rightarrow \bar{\alpha}$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Приклад 3. Довести правило де Моргана для множин $C_I(A \cup B) = C_I A \cap C_I B$

Спочатку доведемо “ \Rightarrow ”. Нехай $x \in C_I(A \cup B)$. Необхідно показати, що і $x \in C_I A \cap C_I B$.

$$\begin{aligned} & (\forall x)(x \in C_I(A \cup B)) \Rightarrow (\forall x)(x \notin (A \cup B)) \Rightarrow (\forall x)(\overline{(x \in A \cup B)}) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\forall x)(\overline{(x \in A) \vee (x \in B)}) \Rightarrow (\forall x)(\overline{(x \in A)} \wedge \overline{(x \in B)}) \Rightarrow (\forall x)((x \notin A) \wedge (x \notin B)) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\forall x)((x \in C_I A) \wedge (x \in C_I B)) \Rightarrow (\forall x)(x \in C_I A \cap C_I B) \end{aligned}$$

Тепер доведемо “ \Leftarrow ”. Нехай $x \in C_I A \cap C_I B$. Необхідно показати, що і $x \in C_I(A \cup B)$.

$$\begin{aligned} & (\forall x)(x \in C_I A \cap C_I B) \Rightarrow (\forall x)((x \in C_I A) \wedge (x \in C_I B)) \Rightarrow (\forall x)((x \notin A) \wedge (x \notin B)) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\forall x)(\overline{(x \notin A) \wedge (x \notin B)}) \Rightarrow (\forall x)(\overline{(x \in A) \vee (x \in B)}) \Rightarrow (\forall x)(\overline{(x \in A \cup B)}) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\forall x)(x \notin A \cup B) \Rightarrow (\forall x)(x \in C(A \cup B)) \end{aligned}$$

Зауваження. Насправді, при доведенні використовувалися лише визначення. Значить всюди можна було поставити знак еквівалентності “ \Leftrightarrow ” і провести доведення в один етап.

Приклад 4. Знайти декартовий добуток множин $X \times Y$ і $Y \times X$, $X = \{1, 2\}$, $Y = \{2, 3\}$.

$$X \times Y = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$$

$$Y \times X = \{(2, 1), (3, 1), (2, 2), (3, 2)\}$$

Приклад 5 до правила перестановки кванторів

Нехай є два числа $x, y \in R$ і твердження $P(x, y) \equiv y > x$. Визначити, яке з тверджень є вірним, а яке – невірним:

а) $\forall x \exists y P(x, y)$ б) $\exists y \forall x P(x, y)$.

а) $\forall x \exists y (y > x)$ – вірно. Нам тут для будь-якого дійсного числа x необхідно вказати хоча б одне число y , для якого виконується $P(x, y)$. Наприклад, візьмемо $y \equiv x + 1$.

б) $\exists y \forall x (y > x)$ – невірно. Доведемо це. Візьмемо будь-який $\forall y$ і візьмемо $x = y + 1 \not< y$ – ? Нехай $y + 1 < y$. Тоді, скоротивши y зліва і справа $y + 1 < y$, отримаємо $1 < 0$ – не вірно. Отже показали, що $\forall y \exists x (x > y)$.

Задачі для самостійного розв'язання

У задачах великими літерами позначено множини. Кожна з них є підмножиною деякої множини I .

I. Визначте хибність чи істинність тверджень

1) Нехай α – твердження, 1 – істинне, 0 – хибне.

а) $\alpha \wedge 0$ б) $\alpha \vee 0$ в) $\alpha \wedge 1$ г) $\alpha \vee 1$

2) Нехай p : “число 174 ділиться на 3”, q : “йде сніг”

а) p б) q в) $p \vee q$ г) $p \wedge q$ д) \bar{p}
е) $q \Rightarrow \bar{p}$, є) $q \Rightarrow p$

3) Нехай x – задача з підручника, y – учень у класі.

а) $\forall x \exists y (y \text{ розв'язав } x) \Rightarrow \exists y \forall x (y \text{ розв'язав } x)$

б) $\exists y \forall x (y \text{ розв'язав } x) \Rightarrow \forall x \exists y (y \text{ розв'язав } x)$

II. З використанням таблиці істинності доведіть

1) Правило силогізму $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$

2) Заперечення імплікації $\overline{(\alpha \Rightarrow \beta)} \equiv \alpha \wedge \bar{\beta}$

3) Правила де Моргана

а) $\overline{(\alpha \vee \beta)} \equiv \bar{\alpha} \wedge \bar{\beta}$

$$\text{б) } \overline{(\alpha \wedge \beta)} \equiv \overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$$

4) Дистрибутивність

$$\text{а) } (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \equiv (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$$

$$\text{б) } (\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \equiv (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$$

5)

$$\text{а) } \alpha \wedge (\overline{\alpha} \vee \beta) = \alpha \wedge \beta$$

$$\text{б) } \overline{\alpha} \wedge (\alpha \vee \beta) = \overline{\alpha} \wedge \beta$$

$$\text{в) } (\alpha \vee \beta) \equiv \overline{\overline{\alpha} \wedge \overline{\beta}}$$

$$\text{г) } (\alpha \wedge \beta) \equiv \overline{\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}}$$

III Доведіть

$$1) A \cup B = B \cup A \text{ – комутативність}$$

$$2) A \cap B = B \cap A \text{ – комутативність}$$

$$3) A \Delta B = B \Delta A \text{ – комутативність}$$

$$4) (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \text{ – дистрибутивність (використати П.4)}$$

$$5) (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \text{ – дистрибутивність (використати П.4)}$$

б) Правила де Моргана

$$\text{а) } C_i(A \cup B) = C_i A \cap C_i B \text{ (див. приклад)}$$

$$\text{б) } C_i(A \cap B) = C_i A \cup C_i B$$

$$7) C_i C_i A = A$$

$$8) (A \subset C) \wedge (B \subset C) \Leftrightarrow (A \cup B) \subset C$$

IV Проілюструйте геометрично декартовий добуток

1) двох відрізків

2) двох прямих

3) прямої і границі кола

4) прямої і кола

V Перевірте вірність

$$1) A \setminus B \stackrel{?}{=} B \setminus A$$

$$2) (A \setminus B) \cup B \stackrel{?}{=} A \cup B$$

$$3) A \setminus (A \setminus B) \stackrel{?}{=} A \cap B$$

VI Знайдіть

$$1) \overline{\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \wedge \delta}$$

$$2) \overline{\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta}$$

$$3) \overline{(\alpha \wedge \beta) \vee (\gamma \wedge \delta)}$$

$$4) \overline{(\alpha \vee \beta) \wedge (\gamma \vee \delta)}$$

РОЗДІЛ 2. ФУНКЦІЇ

Загальні теоретичні відомості

Визначення. Нехай є дві множини X і Y . Функція (відображення), яка відображає множину X у множину Y – це деяке правило або закон, згідно якому **кожному** елементу множини X ставиться у відповідність **єдиний** елемент множини Y .

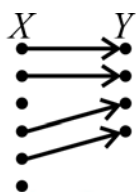
Позначення. Нехай $x \in X$, $y \in Y$.

$$y = f(x)$$

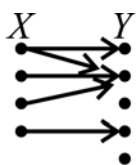
$$f : X \rightarrow Y$$

$$X \xrightarrow{f} Y$$

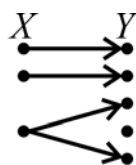
$$x \rightarrow f(x)$$



не відображення



відображення



не відображення

Визначення

$X \equiv D_f$ – область визначення функції f .

Y – область значень.

Множина $E_f = f(X)$ – множина значень функції $f(x)$ – це множина таких $y \in Y$, що існує $x \in X$, для яких $y = f(x)$.

$$E_f = \{y \in Y \mid \exists x \in X, y = f(x)\}.$$

Якщо $y = f(x)$, тоді x – прообраз, а y – образ x .

x – аргумент функції.

Зауваження. $E_f \subset Y$.

Приклад

1) $\sin x : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ – множина значень.

2) $\sin x : [-\pi, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ – область значень.

Визначення. Графік функції $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$.

Визначення.

1) Функція $f(x)$ (строго) монотонно зростаюча на X (\uparrow) \Leftrightarrow
 $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in X) (x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1))$

2) Функція $f(x)$ (строго) монотонно спадна на X (\downarrow) \Leftrightarrow
 $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in X) (x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1))$

3) Функція $f(x)$ монотонно неспадна на X (\nearrow) \Leftrightarrow
 $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in X) (x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1))$

4) Функція $f(x)$ монотонно незростаюча на X (\searrow) \Leftrightarrow
 $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in X) (x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1))$

1), 2) визначають строго монотонні функції.

3), 4) визначають нестрого монотонні функції.

Деякі “нові” функції

1) $y = \operatorname{sign} x$ ($\operatorname{sgn} x$ – західний варіант позначення) $= \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

Функція

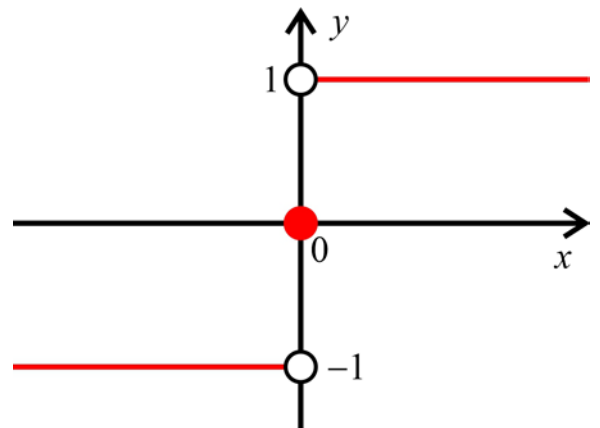
а) визначена на всій дійсній осі,

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$,

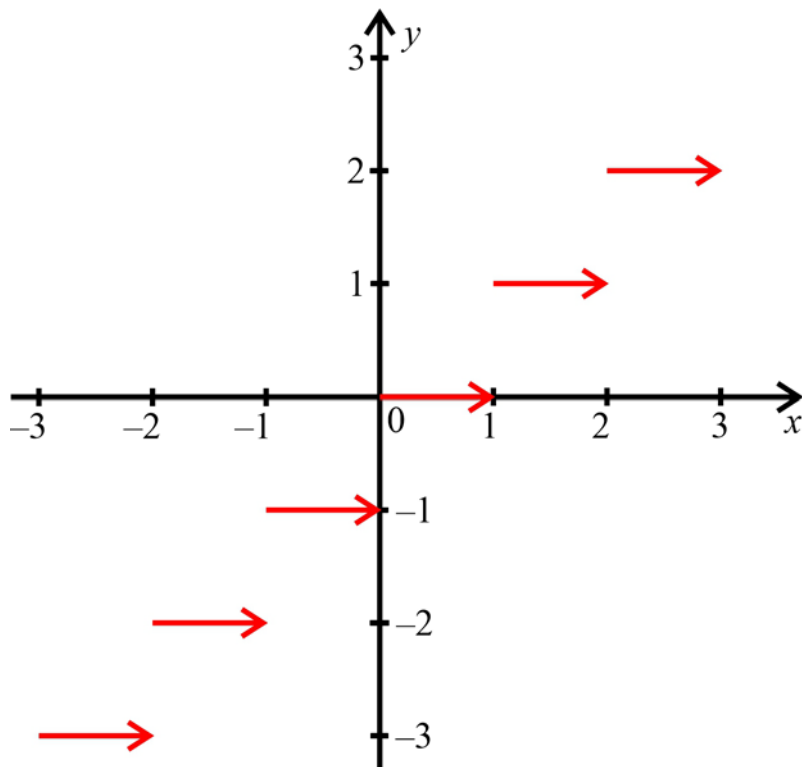
б) є непарною, $\operatorname{sign}(-x) = -\operatorname{sign} x$,

в) неперіодична,

г) неперервна всюди, за винятком нуля, $\operatorname{sign} x \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. У нулі має стрибок.

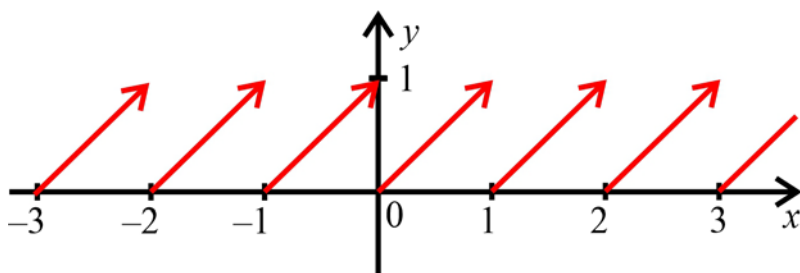


2) $y = [x]$ – ціла частина x . Цілою частиною називається найбільше ціле число, що не більше за x .



Функція:

- а) визначена на всій дійсній осі, ОДЗ: $x \in R$,
 - б) не є ні парною, ні непарною,
 - в) неперіодична,
 - г) неперервна всюди, за винятком цілих значень аргумента, $[x] \in C(R \setminus Z)$. У цілих значеннях має стрибок.
- 3) $y = \{x\}$ – дробова частина, $y = x - [x]$.



Функція:

- а) визначена на всій дійсній осі, ОДЗ: $x \in R$,
- б) не є ні парною, ні непарною,
- в) періодична, період $L = 1$
- г) неперервна всюди, за винятком цілих значень аргумента, $\{x\} \in C(R \setminus Z)$. У цілих значеннях має стрибок.

$$4) D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathcal{Q}, \\ 0, & x \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q} \end{cases} \text{ – функція Діріхле. Має розрив у кожній точці}$$

числової осі.

$$5) \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ (sinh } x \text{ – західний варіант}$$

позначення) – синус гіперболічний.

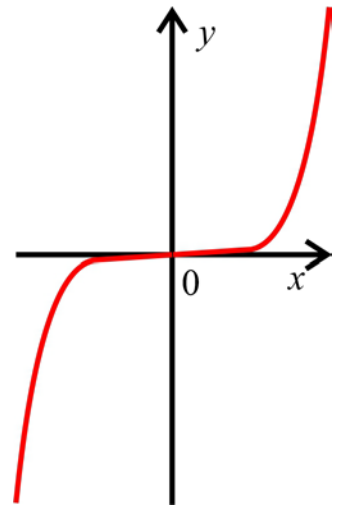
Функція:

а) визначена на всій дійсній осі, ОДЗ: $x \in \mathcal{R}$,

б) є непарною, $\operatorname{sh} x = -\operatorname{sh}(-x)$,

в) неперіодична,

г) неперервна всюди, $\operatorname{sh} x \in C(\mathcal{R})$.



$$6) \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ (cosh } x \text{ – західний варіант позначення) – косинус}$$

гіперболічний.

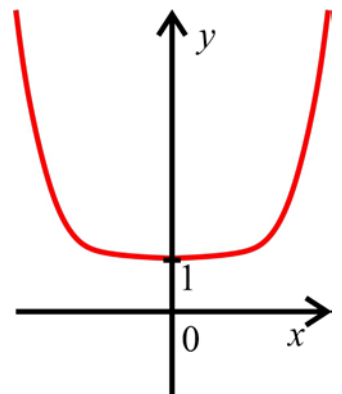
Функція:

а) визначена на всій дійсній осі, ОДЗ: $x \in \mathcal{R}$,

б) є парною, $\operatorname{ch} x = \operatorname{ch}(-x)$,

в) неперіодична,

г) неперервна всюди, $\operatorname{ch} x \in C(\mathcal{R})$.



$$7) \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \text{ (tanh } x \text{ – західний варіант позначення) – тангенс}$$

гіперболічний.

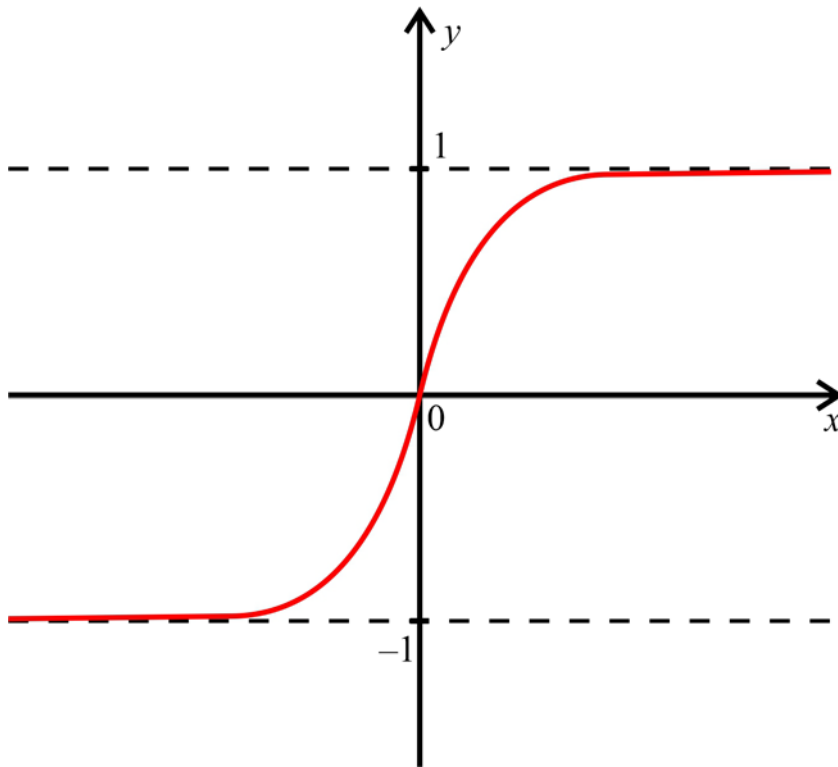
Функція:

а) визначена на всій дійсній осі, ОДЗ: $x \in \mathcal{R}$,

б) є непарною, $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$,

в) неперіодична,

г) неперервна всюди, $\operatorname{th} x \in C(\mathcal{R})$.



$$8) \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \quad (\operatorname{coth} x -$$

західний варіант позначення)
– котангенс гіперболічний.

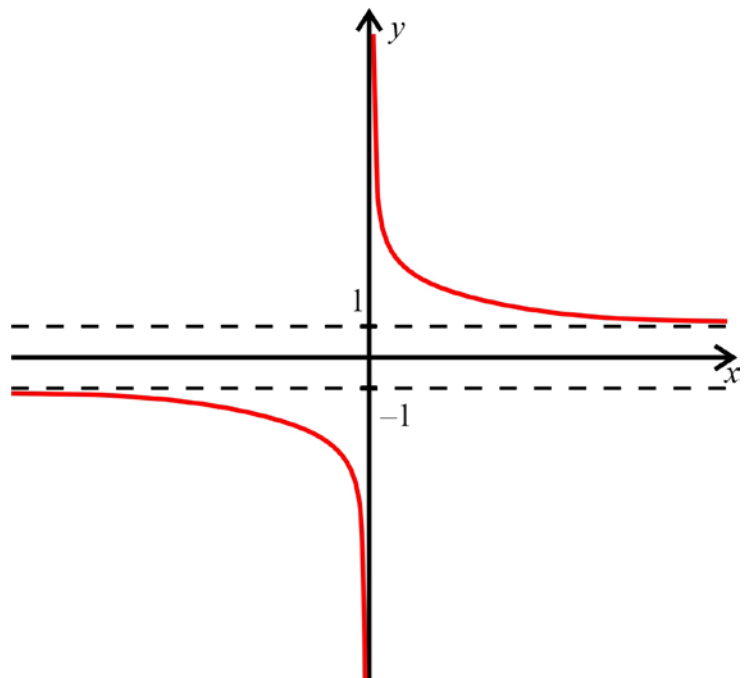
Функція:

а) визначена на всій
дійсній осі, ОДЗ: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

б) є непарною,
 $\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$,

в) неперіодична,

г) неперервна всюди, за
винятком точки $x = 0$,
 $\operatorname{cth} x \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.



Виділення повного квадрату

Загальний алгоритм

Задачею виділення повного квадрату є подання функції
 $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ як $f(x) = A(x + B)^2 + C$, де A , B , C – сталі.

При розв'язанні задачі використовуються формули скороченого множення

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Нехай $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Крок 1. Виносимо α : $f(x) = \alpha \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} \right)$. Порівняємо з формулою скороченого множення. Тоді:

$$a^2 = x^2 \text{ або } a = x,$$

$$2ab = \frac{\beta}{\alpha} x, \text{ або } 2b = \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow b = \frac{\beta}{2\alpha}$$

Крок 2. Додаємо і віднімаємо $b^2 = \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2$:

$$f(x) = \alpha \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} \right) = \alpha \left(\underbrace{x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2}_{\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2} + \frac{\gamma}{\alpha} - \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \right)$$

Крок 3. Перші три доданки у дужках згортаємо за формулою скороченого множення:

$$f(x) = \alpha \left(\underbrace{x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2}_{\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2} + \frac{\gamma}{\alpha} - \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \right) = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \alpha \left(\frac{\gamma}{\alpha} - \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \right)$$

Приклади розв'язання задач

Виділити повний квадрат.

Приклад 1. $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

$$f(x) = x^2 - \underset{6=2 \cdot 3}{6} x + 8 = x^2 - \underset{2ab}{2 \cdot 3} x + 8 = (\text{додамо і віднімемо } b^2 = 3^2)$$

$= x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 + 8 - 3^2 =$ (перші три доданки згортаємо за формулою скороченого множення) $= (x - 3)^2 + 8 - 9 = (x - 3)^2 - 1$.

Приклад 2. $f(x) = 9x^2 - 12x + 2$.

$$f(x) = 9x^2 - 12x + 2 = 9 \left(x^2 - \frac{12}{9}x + \frac{2}{9} \right) = 9 \left(x^2 - \underbrace{\frac{4}{3}}_{2ab}x + \frac{2}{9} \right) = 9 \left(x^2 - 2 \cdot \underbrace{\frac{2}{3}}_{2ab}x + \frac{2}{9} \right) =$$

$$\left(\text{додамо і віднімемо } b^2 = \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right) = 9 \left(x^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}x + \underbrace{\left(\frac{2}{3} \right)^2}_{2ab} + \frac{2}{9} - \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right) = \text{(перші три}$$

доданки згортаємо за формулою скороченого множення)

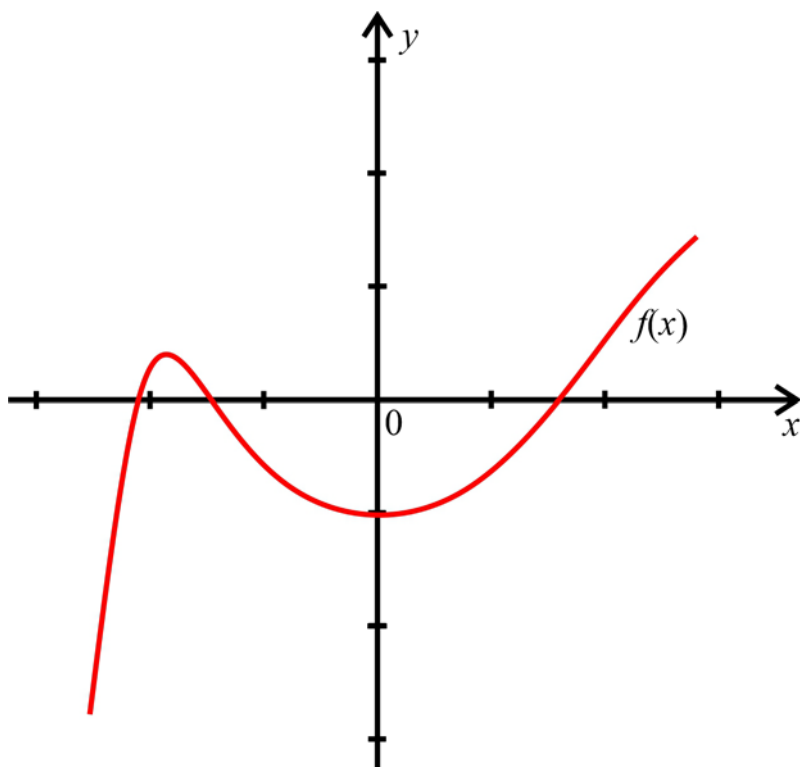
$$= 9 \left(\left(x - \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{2}{9} - \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right) = 9 \left(\left(x - \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{2}{9} - \frac{4}{9} \right) = 9 \left(\left(x - \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{2}{9} \right) =$$

$$= 9 \left(x - \frac{2}{3} \right)^2 - 2.$$

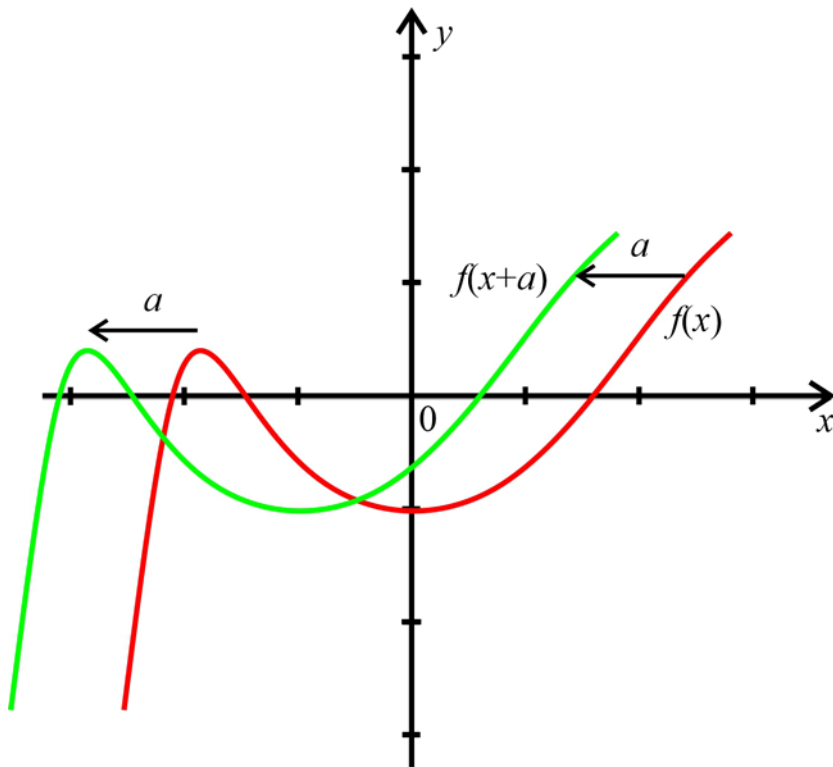
Побудова графіків шляхом елементарних перетворень

Загальні відомості

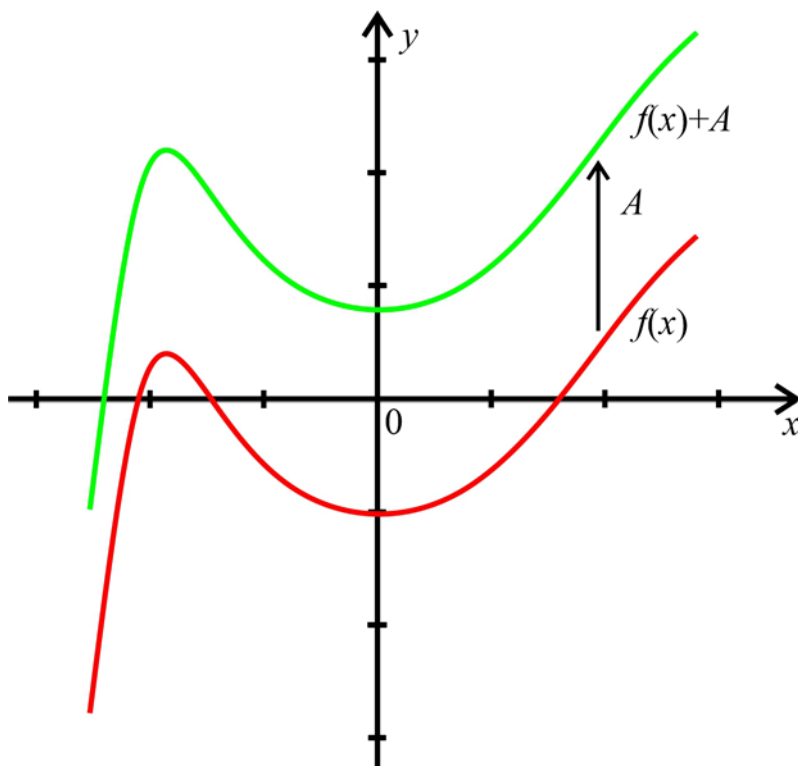
Нехай є функція $f(x)$.



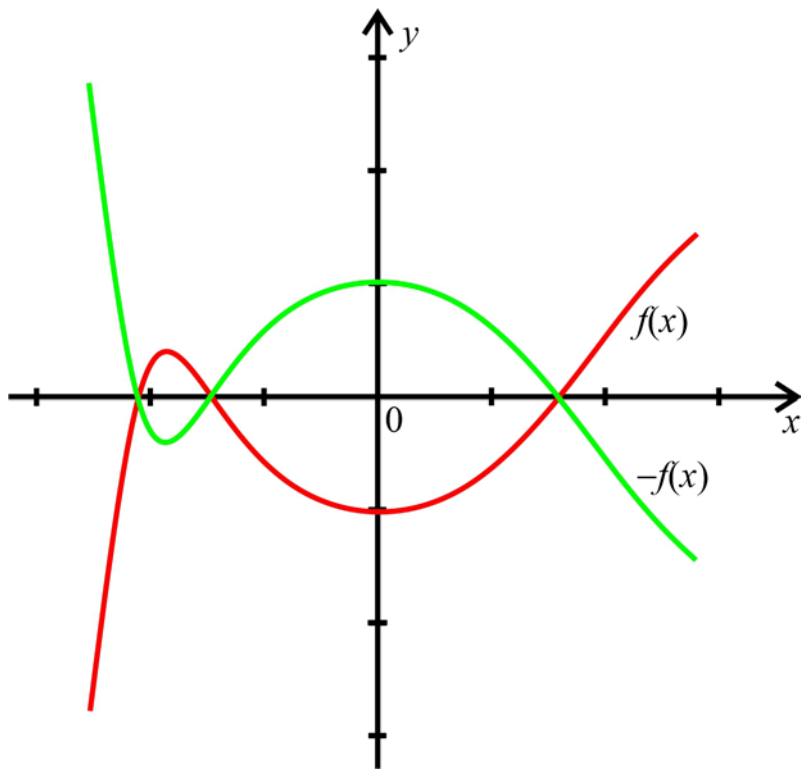
1) $y = f(x + a)$ – переміщення вліво (якщо $a > 0$) або вправо (якщо $a < 0$).



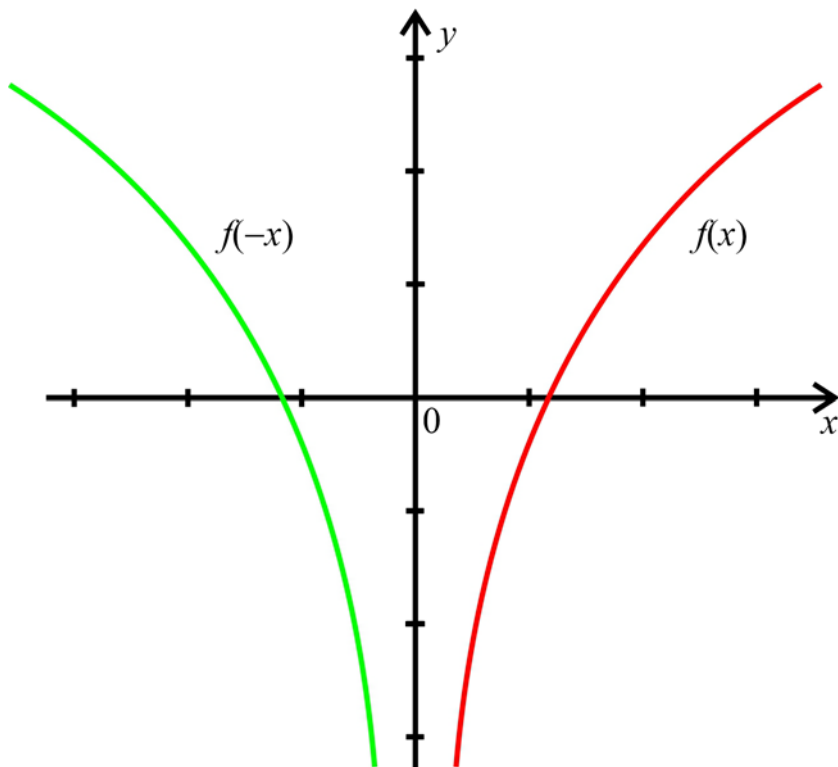
2) $y = f(x) + A \Leftrightarrow y - A = f(x)$ – переміщення вгору (якщо $A > 0$) або вНИЗ (якщо $A < 0$)



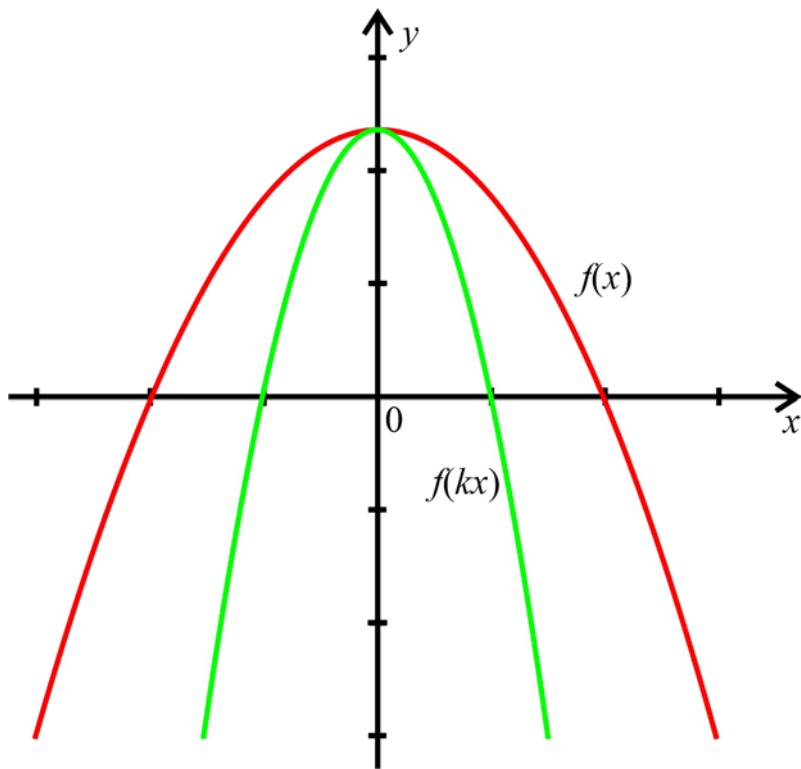
3) $y = -f(x)$ – симетричне відображення відносно Ox



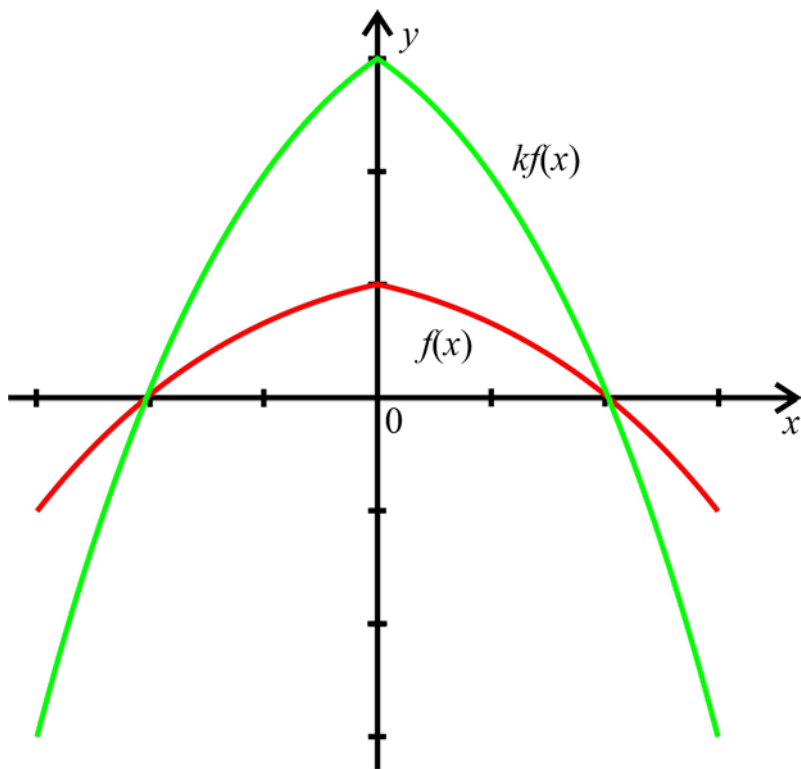
4) $y = f(-x)$ – симетричне відображення відносно Oy



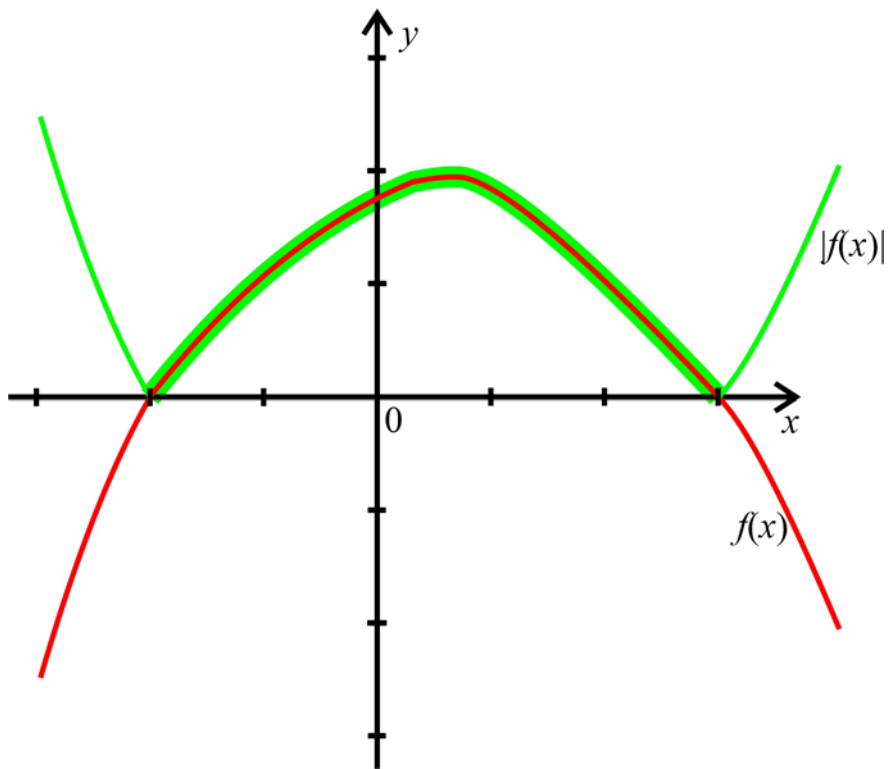
5) $y = f(kx)$ – стискання вздовж осі Ox у k разів ($k > 1$).



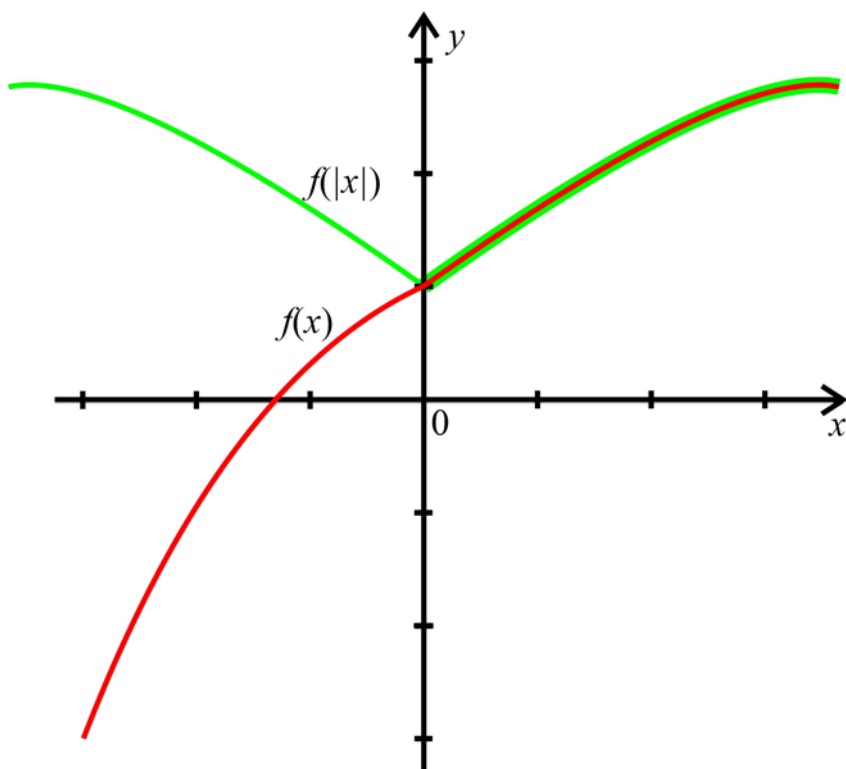
6) $y = kf(x) \Leftrightarrow \frac{y}{k} = f(x)$ – розтягнення вздовж осі Oy у k разів ($k > 1$).



7) $y = |f(x)|$ – частини кривої, які були нижче осі Ox відображаються симетрично відносно неї.



8) $y = f(|x|)$ – частини кривої лівіше осі Oy відкидаються, а частини кривою правіше осі Oy залишаються і симетрично відображаються відносно неї.



Приклади розв'язання задач

Приклад 1. $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$.

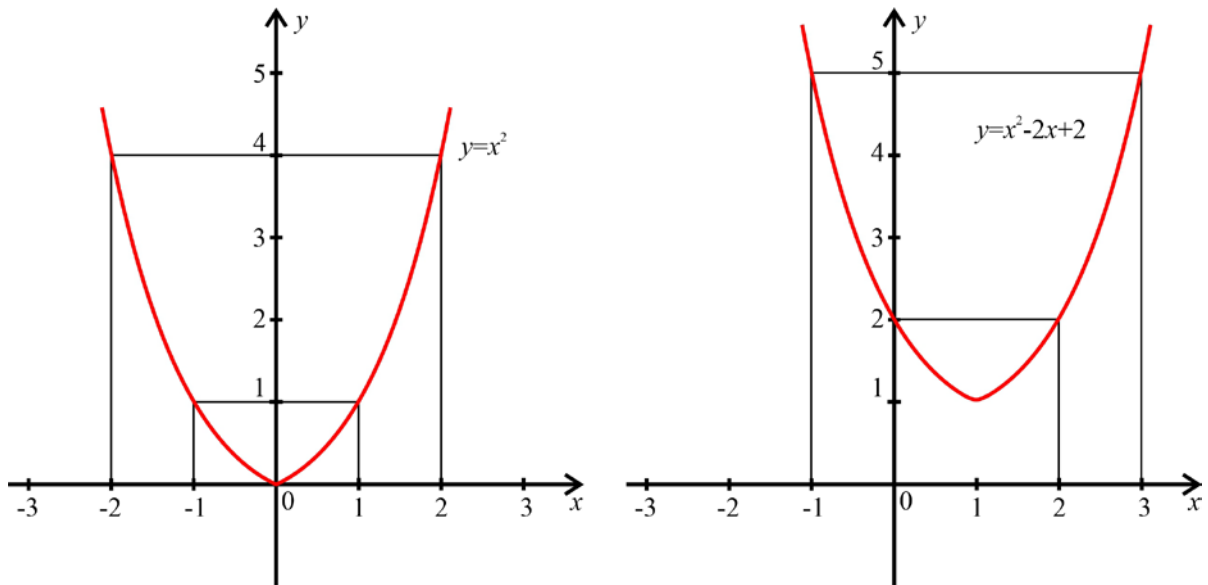
Парність/непарність: функція не парна і не непарна.

Періодичність: неперіодична.

Виділимо повний квадрат: $f(x) = x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 2 - 1 =$

$= (x-1)^2 + 1$ – це парабола з гілками вгору, зсунута вздовж осі Ox вправо і вздовж осі Oy вгору на 1. Вершина у точці $(1, 1)$.

Точки перетину з осями координат. $x=0 \Rightarrow y=f(0)=2$. Точка перетину з віссю Oy $(0, 2)$. $y=0 \Rightarrow (x-1)^2 = -1$ – неможливо.



Приклад 2. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

ОДЗ: $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. Функція визначена при $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Парність/непарність: функція не парна і не непарна.

Періодичність: неперіодична.

Перетворимо функція $f(x)$ так, щоб звести її до елементарної функції

$\frac{1}{x}$:

$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ (виділимо у чисельнику вираз знаменника, для цього додамо і віднімемо у чисельнику 1) $= \frac{x+1-1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{-2}{x+1} = \frac{-2}{x+1} + 1$.

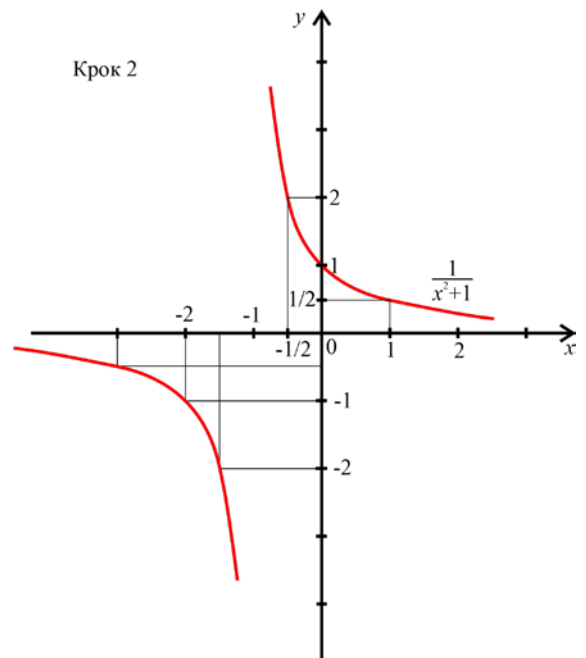
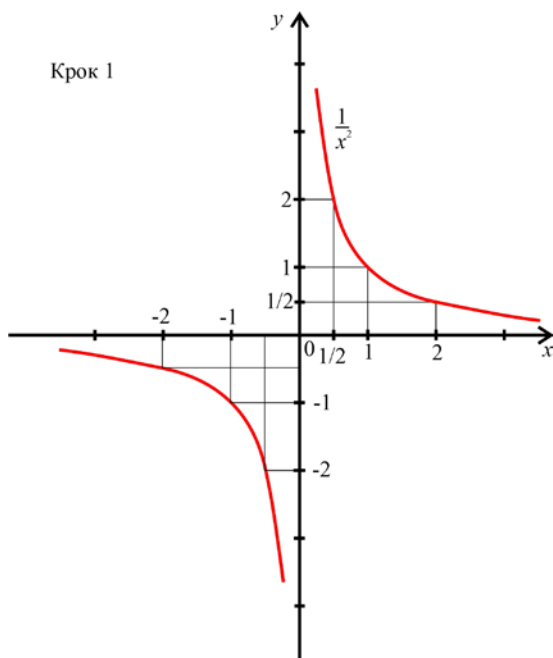
Крок 1. Будуємо графік функції $y = \frac{1}{x}$.

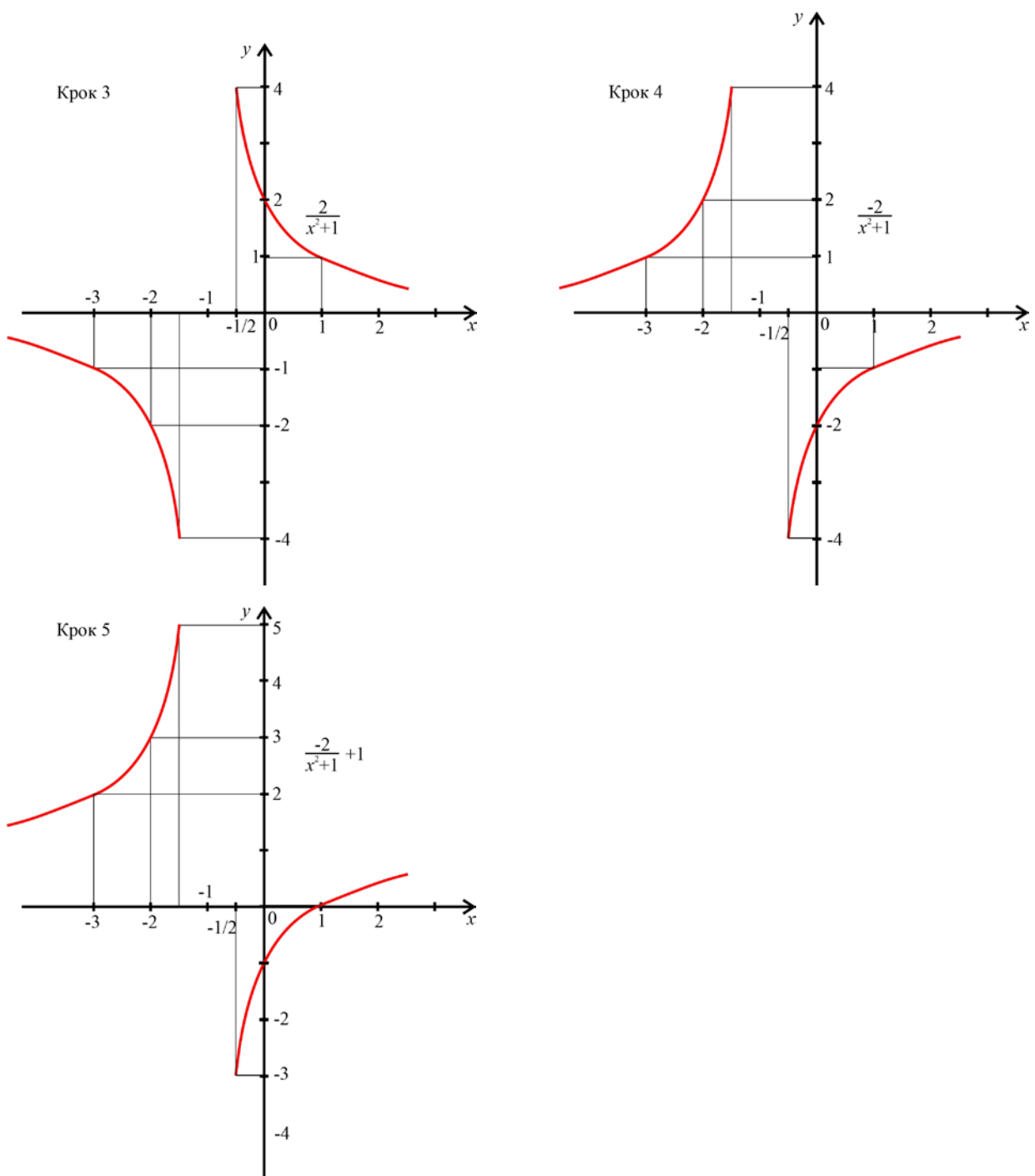
Крок 2. Будуємо графік функції $y = \frac{1}{x+1}$ – зміщення вздовж осі Ox вліво на 1.

Крок 3. Будуємо графік функції $y = \frac{2}{x+1}$ – розтягнення у 2 рази вздовж осі Oy .

Крок 4. Будуємо графік функції $y = -\frac{2}{x+1}$ – симетричне відображення відносно осі Ox .

Крок 5. Будуємо графік функції $y = \frac{-2}{x+1} + 1$ – зміщення вздовж осі Oy вгору.





Параметричний спосіб задання функції

Нехай змінна $t \in [a, b]$ – параметр. Розглянемо дві функції цієї змінної:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Визначення за Жорданом. Нехай $x(t)$ та $y(t)$ неперервні на $[a, b]$. Тоді образ відрізка $[a, b]$ називається неперервною плоскою кривою, заданою *параметрично*.

Визначення. Образ точки a – початок кривої. Образ точки b – кінець кривої.

Приклад

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t. \end{cases} \text{ Перевіримо, що це коло з радіусом } R \text{ і центром у початку}$$

координат. Піднесемо до квадрату x і y і додамо їх: $\begin{cases} x^2 = R^2 \cos^2 t, \\ y^2 = R^2 \sin^2 t, \end{cases} \Rightarrow$

$$x^2 + y^2 = R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t = R^2 \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_1 = R^2. \text{ Отримали } x^2 + y^2 = R^2 \text{ –}$$

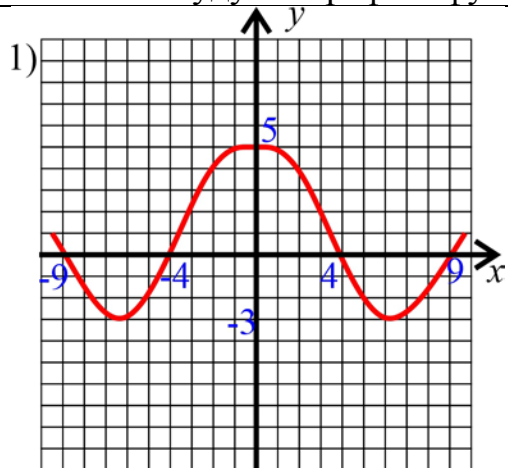
рівняння кола.

Визначення. Якщо кінець і початок кривої співпадають, а інших точок перетину немає, то крива проста замкнена.

Задачі для самостійного розв’язання

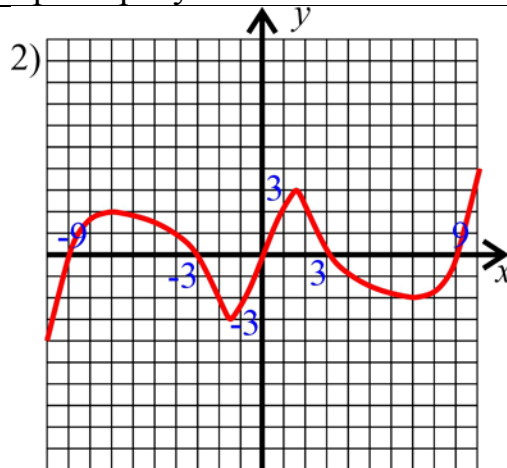
Класне завдання	Домашнє завдання
	I Доведіть, що $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$, де f – це функція.
II Доведіть, що	
1) множина цілих чисел зчисленна ($Z \sim N$).	2) множина цілих невід’ємних чисел зчисленна ($Z \setminus N = N \cup \{0\} \sim N$).
3) $[a, b] \sim [a, \infty)$.	4) $[a, b] \sim R$.
III Виділіть повний квадрат, подайте функцію як $f(x) = A(x + B)^2 + C$, де A, B, C – сталі.	
1) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ 3) $f(x) = x^2 - 6x + 7$ 5) $f(x) = 9x^2 + 12x + 5$ 7) $f(x) = 4x^2 + 4x - 3$	2) $f(x) = x^2 + 6x + 7$ 4) $f(x) = x^2 + 4x - 4$ 6) $f(x) = 3x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{16}$ 8) $f(x) = 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{34}{9}$

IV Побудуйте графіки функцій, охарактеризуйте вказані точки.



$(-9, 0), (-6, -3), (-4, 0), (0, 5),$
 $(4, 0), (6, -3), (9, 0)$

а) $f(2x)$, б) $f(2x) + 5$,



$(-9, 0), (-7, 2), (-3, 0), (-1.5, -3),$
 $(0, 0), (1.5, 3), (3, 0), (7, -2),$
 $(9, 0)$

в) $\frac{f(2x)+5}{2}$, г) $|f(2x)|$.

3) $f(x) = 1 + 4x - x^2$,

5) $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$,

7) $f(x) = x^2 - 6x + 10$,

а) $f(-x)$,

б) $-f(x)$,

в) $f(2x)$,

г) $f(2x) + 1$

4) $f(x) = -2x^2 - 6x + 6$

6) $f(x) = x^2 - 4x + 2$,

8) $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$,

9) $y = \frac{x-1}{x+2}$,

10) $y = \frac{x+2}{x-1}$,

11) $y = \frac{x+1}{x-2}$,

12) $y = \frac{x-2}{x+1}$,

13) $y = 3\sin(2x)$,

14) $y = \sin^2 x$,

15) $y = 3\cos(2x)$,

16) $y = \cos^2 x$,

17) $y = 2\ln(x)$,

18) $y = \ln(x^2)$,

19) $y = \ln(x^3) + 1$,

20) $y = \ln(-2x^3)$.

V Побудуйте графіки функцій і обернених до них. Чи існує обернена функція на всій осі? На якому інтервалі існує обернена функція?

1) $y = \sin x$,

2) $y = \cos x$,

5) $y = \operatorname{sh} x$,

6) $y = \operatorname{ch} x$,

3) $y = \operatorname{tg} x$,

4) $y = \operatorname{ctg} x$,

7) $y = \operatorname{th} x$,

8) $y = \operatorname{cth} x$.

9) $y = \sin(\arcsin x)$,

11) $y = \arcsin(\sin x)$,

10) $y = \cos(\arccos x)$

12) $y = \arccos(\cos x)$

13) $y = \frac{x}{x}$,

14) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$, вказівка:
перетворить котангенс на тангенс.

15) $y = |x|$.

VI. Спростить вираз

1) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

2) $\sin(x + \pi)$,

5) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

6) $\cos(x + \pi)$,

3) $\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$, 4) $\sin(x + \pi n)$,	7) $\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$, 8) $\cos(x + \pi n)$.
---	---

Відповіді. III 1. $(x+1)^2$, 2. $(x+3)^2 - 2$, 3. $(x-3)^2 - 2$, 4. $(x+2)^2 - 8$,
5. $9(x+2/3)^2 + 1$, 6. $3(x+1/4)^2 - 1$, 7. $4(x+1/2)^2 - 4$, 8. $2(x+1/3)^2 - 4$.

РОЗДІЛ 3. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Теоретичні відомості

Основні поняття

Визначення за Коші. Нехай $a, A \in \bar{R}$, нехай ϵ функція $f(x)$, область значень якої $X = D_f$. Нехай a – гранична точка множини X . Тоді A – границя функції $f(x)$, коли x наближається до a , $x \rightarrow a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, x \in \dot{U}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in U_\epsilon(A)$

Визначення за Гейне. $\lim_{x \rightarrow a \in \bar{R}} f(x) = A \in \bar{R} \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A$

Теорема про три функції

Нехай ϵ три функції $f(x), g(x), h(x)$, визначені на X . Нехай $\exists \delta_0 > 0, \forall x \in X \cap \dot{U}_{\delta_0}(a)$ виконується нерівність $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Нехай існують границі $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in R, \exists \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A \in R \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$.

Теорема про арифметичні дії над границями функцій

Нехай ϵ дві функції $f(x), g(x)$, визначені на X . Нехай $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in R, \exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \in R \Rightarrow$

- 1) $\exists \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B,$
- 2) $\exists \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B,$
- 3) Якщо $B \neq 0$, то $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$

Теорема про границю композиції функцій (про заміну змінних)

Нехай $X, Y \subset R, a$ – гранична точка X, A – гранична точка $Y, a, A \in \bar{R}$. ϵ дві функції $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow R$. Нехай

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A,$
- 2) $\lim_{y \rightarrow A} g(y) = B \in \bar{R},$
- 3) $\exists \delta_0 > 0, \forall x \in X \cap \dot{U}_{\delta_0}(a), f(x) \neq A$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = B$$

Визначення. Розглянемо дві функції $f, g : X \rightarrow R$. Нехай $a \in \bar{R}$ – гранична точка множини X . Кажуть, що “ f еквівалентна g , при $x \rightarrow a$ ”, “функція f асимптотично поводить себе як функція g ” $f \sim g$, якщо $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Теорема про заміну на еквівалентну

Границя вигляду $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x))$ або $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ не зміниться, якщо одну з функцій $f(x)$ або $g(x)$ замінити на еквівалентну їй, при $x \rightarrow a$.

Правило. Якщо якийсь множник у добутку або частці має скінченну, проте не нульову границю, його можна замінити на цю границю.

Приклад. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\cos x \cdot \sin x}^{\rightarrow 1 \neq 0}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Розв’язання квадратного рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0:$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \text{ – якщо } D \geq 0.$$

Біном Ньютона

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k =$$

$$= \underbrace{C_n^0}_1 a^n + \underbrace{C_n^1}_n a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + \underbrace{C_n^{n-1}}_n a b^{n-1} + \underbrace{C_n^n}_1 b^n.$$

$$n = 2: \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$n = 3: \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$\text{Різниця вигляду } a^n - b^n =$$

$$= (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

$$n = 2: \quad a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b),$$

$$n = 3: \quad a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2),$$

$$n = 4: \quad a^4 - b^4 = (a - b) \cdot (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3).$$

Неперервна функція. Точки розриву функції

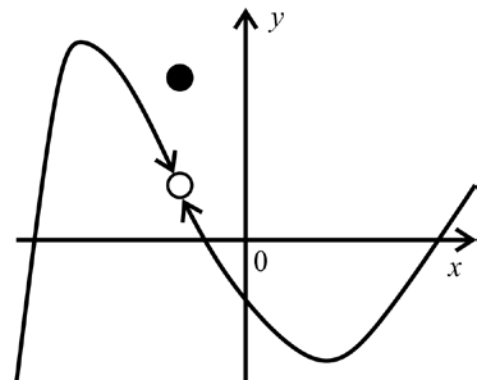
Визначення. Нехай $f : X \rightarrow R$, $a \in X \cap X'$ (де X' – множина всіх граничних точок X). $f(x)$ є неперервною в точці $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Визначення. Якщо функція в даній точці не є неперервною, то вона називається розривною або має розрив $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ (тобто границі або не існує, або, якщо вона існує, то не дорівнює значенню функції у точці a).

I Розрив *першого роду* $\Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) \in R$

1) *Усувний розрив.* Границя існує, проте не дорівнює значенню функції:
 $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a) \Leftrightarrow$ (за критерієм існування границі функції) \Leftrightarrow

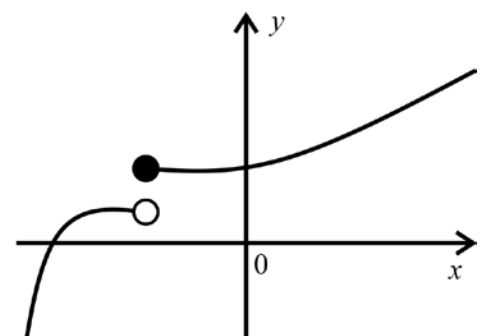
$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \in R \wedge \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq f(a).$$



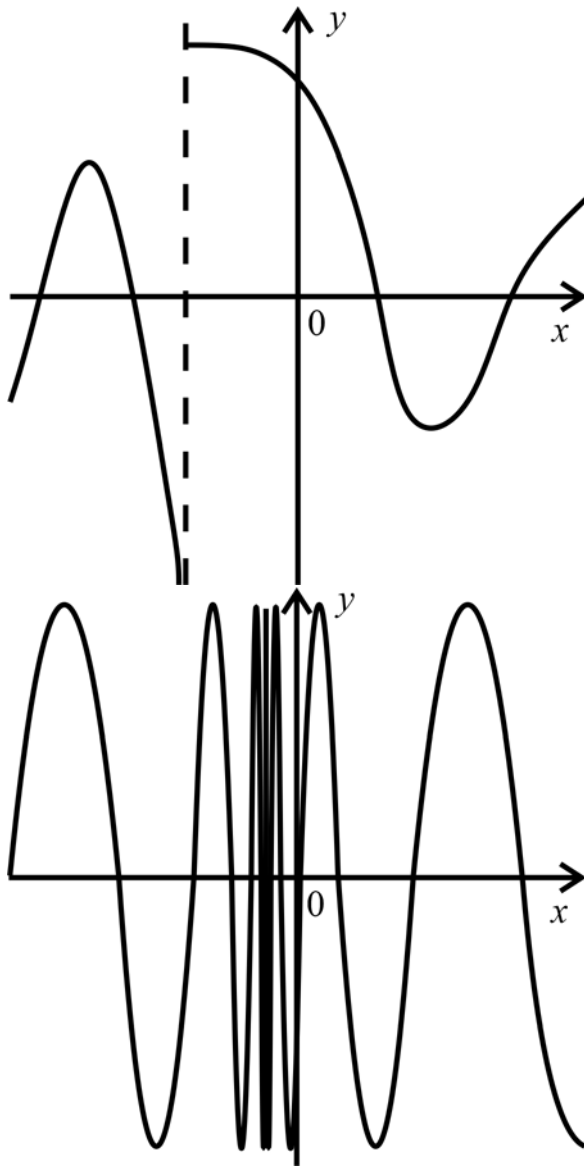
2) *Стрибок або не усувний розрив.* Односторонні границі існують, проте не дорівнюють одна одній:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \in R, \exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \in R \wedge$$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a-0} f(x).$$



II Розрив *другого роду* – у всіх інших випадках, тобто коли не існує або дорівнює нескінченності хоча б одна з односторонніх границь. Якщо $f(a-0) = \infty$ або $f(a+0) = \infty$, то кажуть, що має місце *нескінченний розрив* другого роду.



Зауваження. Якщо точка a є **лише** лівою або **лише** правою граничною точкою, то стрибок, в принципі, не може тут спостерігатися. Всі інші випадки класифікуються за тим самим принципом, але розглядається лише одна одностороння границя.

Реалізація числового методу обчислення границі мовою Java

Розглянемо числовий метод обчислення границі на комп'ютері за допомогою мови програмування Java.

Введемо дві числові змінні $\varepsilon > 0$ і $E > 0$. Поки не будемо конкретизувати, які саме значення вони містять. Під нескінченно малим будемо розуміти будь-яке число, яке за модулем є менше або дорівнює ε . Під нескінченно великим будемо розуміти будь-яке число, яке за модулем є більше або дорівнює E .

Нехай є функція $f(x)$.

1) Необхідно наближено обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. У якості границі можна взяти значення, наприклад $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \approx f(2\varepsilon)$. Зауважимо, що насправді цей вираз дає односторонню границю, границю справа, при $x \rightarrow +0$. Якщо необхідно розглянути і границю зліва, тоді можна використати $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) \approx f(-2\varepsilon)$.

2) Необхідно наближено обчислити границю $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Виконаємо заміну змінної $y = x - a$, тоді $y \rightarrow 0$ і $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(y + a) \approx f(a + 2\varepsilon)$ або $f(a - 2\varepsilon)$.

Алгоритм

- 1) Оголосити змінні *eps* і *_EPS* типу *double*, привласнити їм значення.
- 2) Описати метод *func*, який буде приймати змінну *x* типу *double* і повертати значення функції типу *double*.
- 3) Описати метод *lim*, який буде приймати змінну типу *double* (граничну точку) і повертати значення границі.

Приклад реалізації алгоритму, обчислення першої чудової границі $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$. Опишемо клас *Limits*, який буде безпосередньо реалізовувати алгоритм. Опишемо функцію *main* – точку входу у програму, з якої будемо викликати метод обчислення границі і виводити результати у консоль.

```
public class Limits { // клас Границя
    double eps = 1e-10; // для скінченної
    double _EPS = 1e10; // для нескінченної

    double func(double x) { // функція, границю якої будемо обчислювати
        double res;
        res = Math.sin(x)/x; // sin -- це статичний метод класу Math
        return res;
    }

    double lim(double a) { // метод обчислення границі
        double res;
        res = func(a + 2*eps);
        return res;
    }

    public static void main(String[] args) {
```

```

// TODO Auto-generated method stub
double res, // значення границі
a; // гранична точка
Limits ourLimit = new Limits(); // об'єкт класу Limits
a=0; // обчислюємо границю, коли x наближається до a=0
res=ourLimit.lim(a); // виклик методу обчислення границі
System.out.println(res); // вивід у консоль
}
}

```

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 13x + 2}{x^2 - 2x + 1}$.

Підставляємо замість змінної x граничне значення 2:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 13x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^2 - 13 \cdot 2 + 2}{2^2 - 2 \cdot 2 + 1} = \frac{4 - 26 + 2}{4 - 4 + 1} = \frac{-20}{1} = -20.$$

Зауваження. У випадку виникнення невизначеності $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^0 , 0^∞ , ∞^0 необхідно виконувати додаткові перетворення. Далі буде розглянуто приклади, у яких виникають невизначеності.

Степеневі функції

I. Нехай x наближається до **скінченного** числа, $x \rightarrow a \in R$. Необхідно знайти границю **співвідношення поліномів**.

Приклад 2. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 26x + 80}{x^2 - 18x + 65} =$

(підставляємо $x = 5$) $= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 \cdot 5^2 - 26 \cdot 5 + 80}{5^2 - 18 \cdot 5 + 65} = \frac{0}{0}$ – невизначеність. Для обчислення границі **розкладемо чисельник і знаменник на множники**.

Чисельник. Винесемо “2” за дужки і прирівняємо нулю:
 $2x^2 - 26x + 80 = 2 \cdot (x^2 - 13x + 40)$.

Прирівняємо нулю: $x^2 - 13x + 40 = 0$ – квадратне рівняння, $a = 1$, $b = -13$, $c = 40$. $D = b^2 - 4ac = 13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40 = 169 - 160 = 9$. Тоді $\sqrt{D} = 3$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{13 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{16}{2} = 8 \\ \frac{10}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot (x^2 - 13x + 40) = 2 \cdot (x - 5) \cdot (x - 8).$$

Знаменник. $x^2 - 18x + 65 = 0$ – квадратне рівняння, $a = 1$, $b = -18$, $c = 65$. $D = b^2 - 4ac = 18^2 - 4 \cdot 1 \cdot 65 = 324 - 260 = 64$. Тоді $\sqrt{D} = 8$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{18 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{26}{2} = 13 \\ \frac{10}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 18x + 65 = (x - 5) \cdot (x - 13).$$

Підставляємо у границю і скорочуємо на $(x - 5)$:

$$\begin{aligned} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 \cdot (x - 5) \cdot (x - 8)}{(x - 5) \cdot (x - 13)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 \cdot (x - 8)}{x - 13} = (\text{знову підставляємо } x = 5) \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 \cdot (5 - 8)}{5 - 13} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8x^2 + 21x - 18}{x^2 - 6x + 8} =$

(підставляємо $x = 2$) $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^3 - 8 \cdot 2^2 + 21 \cdot 2 - 18}{2^2 - 6 \cdot 2 + 8} = \frac{0}{0}$ – невизначеність. Для обчислення границі **зробимо заміну** $y = x - a$, тоді $y \rightarrow 0$:

$$\left. \begin{array}{l} y = x - 2 \\ y \rightarrow 0 \\ x = y + 2 \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y + 2)^3 - 8(y + 2)^2 + 21(y + 2) - 18}{(y + 2)^2 - 6(y + 2) + 8} =$$

Розкладаємо вирази у дужках за біномом Ньютона.

$$\begin{aligned} &\text{Чисельник. } (y + 2)^3 - 8(y + 2)^2 + 21(y + 2) - 18 = \\ &= y^3 + 3 \cdot 2y^2 + 3 \cdot 2^2 y + 2^3 - 8(y^2 + 4y + 4) + 21(y + 2) - 18 = \\ &= y^3 + \underline{6y^2} + \underline{12y} + 8 - \underline{8y^2} - \underline{32y} - 32 + \underline{21y} + 42 - 18 = \\ &= y^3 - 2y^2 + y = (\text{виносимо } y \text{ за дужки}) = y(y^2 - 2y + 1). \end{aligned}$$

Знаменник. $(y + 2)^2 - 6(y + 2) + 8 =$

$$= y^2 + 4y + 4 - 6(y + 2) + 8 = y^2 + \underline{4y} + 4 - \underline{6y} - 12 + 8 = y^2 - 2y = \text{(виносимо } y \text{ за дужки)} = y(y - 2).$$

Підставляємо у границю і скорочуємо на y

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y(y^2 - 2y + 1)}{y(y - 2)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 - 2y + 1}{y - 2} = \text{(підставляємо } y = 0)$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0^2 - 2 \cdot 0 + 1}{0 - 2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

Правило. При обчисленні границі у вигляді співвідношення поліномів, коли x наближається до скінченного значення, у випадку невизначеності $\frac{0}{0}$ розкладаємо чисельник і знаменник на множники або робимо заміну $y = x - a$

II. Границя співвідношень з радикалами (містять корені).

Приклад 4. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x-6} =$

$$\text{(підставляємо } x = 6) = \frac{\sqrt{6-2} - 2}{6-6} = \frac{0}{0} \text{ - невизначеність. Для обчислення}$$

границі домножаємо чисельник і знаменник на величину, спряжену до чисельника. Після чого згортаємо чисельник за формулою скороченого множення:

$$= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(\sqrt{x-2} - 2) \cdot (\sqrt{x-2} + 2)}{(x-6) \cdot (\sqrt{x-2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(\sqrt{x-2})^2 - 2^2}{(x-6) \cdot (\sqrt{x-2} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-2-4}{(x-6) \cdot (\sqrt{x-2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{(x-6) \cdot (\sqrt{x-2} + 2)} = \text{(скорочуємо на } x-6)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{(\sqrt{x-2} + 2)} = \text{(знову підставляємо } x = 6) = \frac{1}{\sqrt{6-2} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Правило. Якщо границя містить корені і має місце невизначеність $\infty - \infty$, то домножаємо і ділимо вираз на спряжену величину. У більш загальному випадку, використовуємо формулу скороченого множення $a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

Приклад 5. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} =$

(підставляємо $x = 1$) $= \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$ – невизначеність. Розкладаємо чисельник за

формулою скороченого множення $a^n - b^n =$

$= (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, де $a = x$, $b = 1$:

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + 1)}{x-1} =$ (скорочуємо на $x-1$, після чого

підставляємо $x = 1$) $= \lim_{x \rightarrow 1} \overbrace{(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + 1)}^{n \text{ доданків}} = n$.

III. Нехай x наближається до **нескінченності**, $x \rightarrow \infty$. Необхідно знайти границю **співвідношення поліномів**.

Приклад 6. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 13x + 40}{x^2 - 18x + 65} =$

(підставляємо $x = \infty$) $= \frac{\infty}{\infty}$ – невизначеність. Для обчислення границі **ділимо**

чисельник і знаменник на x у максимальному степені, на x^2 .

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x^2}{x^2}\right)^{\rightarrow 1} - \left(\frac{13x}{x^2}\right)^{\rightarrow 0} + \left(\frac{40}{x^2}\right)^{\rightarrow 0}}{\left(\frac{x^2}{x^2}\right)^{\rightarrow 1} - \left(\frac{18x}{x^2}\right)^{\rightarrow 0} + \left(\frac{65}{x^2}\right)^{\rightarrow 0}} = \frac{1}{1} = 1.$$

IV. Загальний випадок. Нехай x наближається до **нескінченності**, $x \rightarrow \infty$. Виникає невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$ (і не виникає невизначеності $\infty - \infty$).

Приклад 7. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2 + \sqrt{4x^4 - 1}}{2x^2 + \sqrt[4]{x^6 + 2}} =$

(підставляємо $x = \infty$) $= \frac{\infty + \infty}{\infty + \infty} = \frac{\infty}{\infty}$ – невизначеність. Для обчислення границі

ділимо чисельник і знаменник на x у максимальному степені. Визначимо максимальний степінь.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{(x+1)^2}^{x^2} + \overbrace{\sqrt{4x^4-1}}^{\sqrt{x^4}=x^2}}{\underbrace{2x^2}_{x^2} + \underbrace{\sqrt[4]{x^6+2}}_{4\sqrt{x^6}=x^{6/4}=x^{3/2}}} = \text{(максимальний степінь 2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(x+1)^2}{x^2} + \frac{\sqrt{4x^4-1}}{x^2}}{\left(\frac{2x^2}{x^2}\right)^{\rightarrow 2} + \underbrace{\sqrt[4]{\frac{x^6+2}{x^8}}}_{\rightarrow 0}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x^{-1}}{x} + \frac{1^{-0}}{x}\right)^2 + \sqrt{\frac{2x^{4 \rightarrow 4}}{x^4} - \frac{1}{x^4}}}{\left(\frac{2x^2}{x^2}\right)^{\rightarrow 2} + \underbrace{\sqrt[4]{\frac{x^6}{x^8} + \frac{2}{x^8}}}_{\rightarrow 0}} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Правило. Якщо у випадку границі поліномів виникає невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$, то ділимо чисельник і знаменник на x у максимальному степені.

Тригонометричні функції

Приклад 8. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x^2}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x^2} = \frac{0}{0}$ – невизначеність. Застосовуємо еквівалентності,

$\sin x \sim x \Rightarrow \sin x^2 \sim x^2, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}. \quad \text{Отримуємо}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 9. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2} = \frac{0}{0}$ – невизначеність.

Варіант 1. Розпишемо тангенс за визначенням і приведемо чисельник до спільного знаменника:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x - \sin x \cos x}{\cos x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^2 \cos x} =$$

1. $\cos x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ у знаменнику не створює невизначеності, значить можна замінити $\cos x$ на 1,

2. скористаємось еквівалентностями $\sin x \sim x$ і $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, при $x \rightarrow 0$. Це можна зробити за теоремою про заміну на еквівалентну, так як стоїть добуток і частка:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{2x^2} = (\text{скоротимо } x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0.$$

Варіант 2 (не вірний!). Застосуємо еквівалентність одразу, $\operatorname{tg} x \sim x$, $\sin x \sim x$, при $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = ?$$

Нуль, який стоїть у чисельнику, неможна розуміти як число 0. Немає теореми, яка б дозволяла, у загальному випадку, застосовувати еквівалентності до границі різниці. Нуль у чисельнику необхідно інтерпретувати як якусь нескінченно малу функцію, яка наближається до нуля, коли $x \rightarrow 0$. І у цьому випадку важливим є швидкість, з якою чисельник наближається до нуля: швидше, повільніше, ніж знаменник, чи з такою самою швидкістю.

Приклад 10. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 6x - \sin 7x} =$

$= \frac{0}{0}$ – невизначеність. Застосуємо o -символіку Ландау,

$\sin x \sim x \Rightarrow \sin x = x + o(x)$. $\sin 6x \sim 6x \Rightarrow \sin 6x = 6x + o(x)$. $\sin 7x \sim 7x \Rightarrow \sin 7x = 7x + o(x)$, при $x \rightarrow 0$:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x)}{6x + o(x) - 7x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x)}{-x + o(x)} = (\text{розділимо на } x \text{ чисельник і знаменник}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x} + \frac{o(x)}{x}}{-\frac{x}{x} + \frac{o(x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + o(1)}{-1 + o(1)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Інші трансцендентні функції

Приклад 11. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(x+1)} =$

$= \frac{1-1}{\ln 1} = \frac{0}{0}$ – невизначеність. Застосуємо еквівалентності $e^x - 1 \sim x$,
 $\ln(x+1) \sim x$:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Показникові функції

Правило. Нехай необхідно обчислити границю вигляду $\lim_{x \rightarrow a} (u(x))^{v(x)}$, має місце невизначеність 1^∞ , або 0^∞ , або ∞^0 . Застосовуємо властивості експоненти і логарифму: $a = e^{\ln a}$ (якщо $a > 0$) і $\ln a^b = b \ln a$.

$$\lim_{x \rightarrow a} (u(x))^{v(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln(u(x))^{v(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{v(x) \ln u(x)}.$$

Приклад 12. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} =$

$$= 1^\infty = (\text{невизначеність}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \exp \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right).$$

Розглянемо окремо границю показника експоненти. Зауважимо, що якщо $x \rightarrow \infty$, то $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ і можна застосовувати еквівалентність для логарифму $\ln(1+y) \sim y$, $y \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x \cdot \underbrace{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}_{\sim 1/x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x \cdot \frac{1}{x}\right) = 2 \text{ – підставляємо у вихідну границю:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left(\underbrace{2x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}_2\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(2) = e^2.$$

Неперервність функції

Приклад 13.

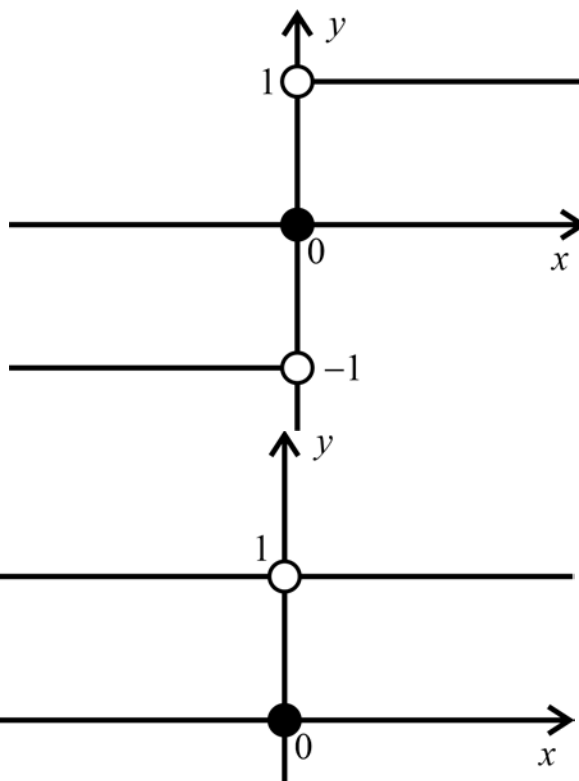
$f(x) = \sqrt{x}$. $a = 0$. Функція є неперервною у точці $a = 0$, так як $a = 0$ – права гранична точка області визначення, значить будемо розглядати лише границю справа, $\exists \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0 \in R$

Приклад 14.

$$\text{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad a = 0.$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow -0} \text{sign} x = -1 \in R, \quad \exists \lim_{x \rightarrow +0} \text{sign} x = +1 \in R.$$

$\lim_{x \rightarrow -0} \text{sign} x \neq \lim_{x \rightarrow +0} \text{sign} x$ У точці $a = 0$ має місце розрив першого роду стрибок.



Приклад 15.

$$\text{sign} |x| = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad a = 0.$$

$\exists \lim_{x \rightarrow 0} \text{sign} |x| = 1 \neq \text{sign} |0| = 0$. У точці $a = 0$ має місце розрив першого роду, усувний розрив.

Задачі для самостійного розв'язання

I Знайдіть границі послідовності ($a \in R, p \in R$)

Класне завдання	Домашнє завдання
1) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n$, 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$,	9) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n$, 10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n}$,
3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^n$, 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$,	11) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3$, 12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}$.
5) $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$,	
6) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2$, 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2}$,	
8) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p$.	

II Знайдіть границі степеневих функцій, при $x \rightarrow a \in R$

Класне завдання	Домашнє завдання
1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x}$, 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}$, 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^4}$,	24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2}$, 25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x}$, 26) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3}$,

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 8x + 6}$	27) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{-x^2 - 7x - 6}{-5x^2 - 20x + 60}$
5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 4x - 16}{-2x^2 - 2x + 12}$	28) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{5x^2 - 50x + 120}{x^2 - 36}$
6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x^2 + 4x}{-x^2 + 7x - 10}$	29) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{4x^2 - 28x + 40}{-2x^2 + 18x - 40}$
7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + x}{x^2 - 5x + 4}$	30) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x^2 + 16x}{-x^2 - 2x}$
8) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 27x + 54}{-x^2 + 5x - 6}$	31) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x^2 + 8x - 15}{-2x^2 + 10x}$
9) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x^2 + 2x + 12}{x^2 + 7x + 10}$	32) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{-5x^2 - 45x - 100}{x^2 + 7x + 12}$
10) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 7x + 6}{-2x^2 - 6x + 36}$	33) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2x^2 + 4x + 6}{2x^2 - 12x + 18}$
11) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 - 15x - 20}{3x^2 - 9x - 12}$	34) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x^2 - 36x + 80}{-5x^2 + 15x + 20}$
12) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2 + 24x + 45}{4x^2 + 16x + 12}$	35) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-4x^2 + 4x + 48}{-5x^2 + 5x + 60}$
13) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{4x^2 - 8x - 96}{-4x^2 + 28x - 24}$	36) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{-5x^2 - 50x - 120}{5x^2 + 15x - 90}$
14) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$	37) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2 - 6x - 45}{4x^2 + 16x + 12}$
15) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$	38) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$
16) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x - 4}$	39) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 + x^2 - x - 1}$
17) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-3}}{x - 4}$	40) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{x - 2}$
18) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+4}}{x - 1}$	41) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{4x+1}}{x - 1}$
19) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{2x-3}}$	42) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{6-x} - 1}{3 - \sqrt{4+x}}$
20) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$	43) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{-x^2 + 2x + 7} - \sqrt{x^2 + x + 1}}{-x^2 + 2x}$
21) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}}$	44) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 2}{x - 7}$

22) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$	45) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[4]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$
23) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 1}{x^9 - 1}$	46) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$
	47) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^5 - 1}$
	48) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^k - 1}$

III Знайдіть границі степеневих функцій, при $x \rightarrow \infty$

Класне завдання	Домашнє завдання
1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x}$, 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x}$, 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^4}$,	23) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2}$, 24) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x}$, 25) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^3}$,
4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{2x^2 - 3x + 3}$	26) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 2}{2x^2 + x - 4}$
5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6 + 3x^5 - 2x^2 + 4}{2x^6 - 5x^4 + 3x + 3}$	27) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^6 - 2x^5 + x^4 - x^2 + 8}{3x^6 + 7x^3 - 2x + 5}$
6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^4 + 6x^2 + x + 2}{4x^2 - 5x - 3}$	28) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 + 7x^3 - 4x^2 + 3x - 7}{4x^7 + 5x^6 - 4x^5 - 4x^4 + 2x^2 + 4x}$
7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^6 + 4x^5 - 2x^3 + x + 1}{3x^3 + 4x^2 + x + 3}$	29) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2}$
8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 2}{2x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 3x + 1}$	30) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^7 + 5x^6 - 4x^5 - 4x^4 + 2x^2 + 4x}{2x^5 + 7x^3 - 4x^2 + 3x - 7}$
9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{3x^2}}$	31) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2}}{\sqrt{x^4}}$
10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{4x^3}}$	32) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^4}}{\sqrt{x^4}}$
11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{\sqrt{4x^3 + 1}}$	33) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^4 + 2}}{\sqrt{x^4 + 3}}$
12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1} + 2}{\sqrt{4x^3 + 1} + 3}$	34) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^4 + 2} + 1}{\sqrt{x^4 + 3} + 2}$
13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt{4x^3 + 1} + \sqrt{2x}}$	35) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^4 + 2} + x}{\sqrt{x^4 + 3} + \sqrt{x}}$
14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}{\sqrt{4x^2 - 3x + 3}}$	36) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^3 + 3x^2 + 2x + 6}}{\sqrt{4x^3 + 4x^2 + 1}}$

15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^7 - 2x^6 + 3x^5} + \sqrt{x^6 - 2}}{\sqrt{3x^3 - 4x + 2} + 1}$	37) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^3 - x^2 + 5} + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{5x^3 + 7x} + \sqrt{x^2 - 1}}$
16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 - 2x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{4x^2 - 3x} + \sqrt{9x^3 - 3x + 4}}$	38) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x^4 + x - 3}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{4x^4 + 2x^2 - 7} + \sqrt{x^3 + 2}}$
17) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^8 - 2x^6 + 3x^5} + \sqrt{x^6 - 2}}{\sqrt[4]{3x^8 - 4x + 2}}$	39) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^9 + 4x^8 + 2x^6 - 3} + \sqrt{x^8 + x - 1}}{\sqrt[3]{2x^9 + 5x^5 + 2x^2 - 1}}$
18) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 3} + \sqrt[3]{x^2 + 2x - 1}}{\sqrt[4]{x^8 + x^4} - \sqrt[5]{x^4 + 2x}}$	40) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4 + 2x^2 - 4} + \sqrt[3]{3x^2 + x - 2}}{\sqrt[4]{x^8 + 3x^5 - 3x^2} - \sqrt[5]{4x^3 + 2x - 1}}$
19) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + \sqrt[3]{x^9 + 1}} + \sqrt[3]{x^4 - \sqrt{x^{12} + 1}}}{\sqrt[4]{x^8 + \sqrt{x^{20} + 2}} - \sqrt[5]{x^8 + \sqrt{x^{24} + 4}}}$	41) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + \sqrt{2x^{12} + x}} + \sqrt{9x^4 + \sqrt[3]{x^9 + 1}}}{\sqrt[4]{x^8 + \sqrt{2x^{20} + 1}} - \sqrt[5]{x^7 + \sqrt{2x^{24} + x^{12}}}}$
20) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x+5})$	42) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+7})$
21) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 3} - \sqrt{2x + 4})$	43) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-3} - \sqrt{x^2 + 2x + 3})$
22) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{4x+4}}{\sqrt{9x+1} - \sqrt{x+1}}$	44) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x+5} - \sqrt{x+4}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{9x-2}}$

IV Знайдіть границі **тригонометричних функцій**, використовуючи еквівалентності та *o*-символіку

Класне завдання	Домашнє завдання
1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	39) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$
2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$	40) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x}$
3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x^3}$	41) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^3 x}{\operatorname{tg} x}$
4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\operatorname{tg} x}$	42) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\arcsin 2x}$
5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3}$	43) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin x \cdot \arcsin x}$
6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x^3}$	44) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin x \cdot \arcsin x}$
7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 8x}$	45) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\arcsin 2x)}{\operatorname{tg}(\arcsin x)}$
8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{\sin 8x}$	

<p>9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{\sin x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \arcsin x}$</p> <p>10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x^3}$</p> <p>11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x}$</p> <p>12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sin x \cdot \cos x}$</p> <p>13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg}(\sin x)}$</p> <p>14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(\sin x)}{\arcsin(\operatorname{tg} x)}$</p> <p>15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(\cos x)}{\arcsin(\operatorname{tg} x)}$</p> <p>16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \arcsin x}{2x + \operatorname{arctg} x}$</p> <p>17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \arcsin x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{arctg} 2x}$</p> <p>18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \arcsin x^3}{x + \operatorname{tg}^2 x}$</p>	<p>46) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(\sin x^2)}{\operatorname{tg}(\sin x)}$</p> <p>Використати o-символіку:</p> <p>47) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x + \sin 2x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} 2x}$</p> <p>48) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - \sin x}{\arcsin x + 3x}$</p> <p>49) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin x}{x}$</p> <p>50) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^3 x^2 - \sin^2 x}{x^2 + \operatorname{tg} x}$</p>
<p>19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$</p> <p>20) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin 3x}$</p> <p>21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\sin x}$</p> <p>22) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$</p> <p>23) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}$ $(\alpha, \beta - \text{const})$</p>	<p>51) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$</p> <p>52) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x}$</p> <p>53) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\arcsin x^2}$</p> <p>54) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin x} \right)$</p> <p>55) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 2x}{\sin 2x^2}$</p>
<p>24) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$</p>	<p>56) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}$</p> <p>57) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{\pi - x}$</p>

<p>25) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}}$</p> <p>26) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg}(x - \pi)}{\pi - x}$</p> <p>27) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{ctg}(x - \pi)}{\pi - x}$</p> <p>28) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$</p> <p>29) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x}$</p> <p>30) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{ctgx} - \operatorname{ctgx}_0}{x - x_0}$</p> <p>31) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$</p>	<p>58) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\arcsin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$</p> <p>59) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg}(x - \pi)}{\pi - x}$</p> <p>60) $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^2}$</p> <p>61) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\frac{1}{2} - \cos x}$</p> <p>62) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{(x - \pi)^2}$</p> <p>63) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tgx} - \operatorname{tgx}_0}{x - x_0}$</p>
<p>32) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$</p> <p>33) $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgx}$</p> <p>34) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{\sin 4x}$</p> <p>35) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ (чи є функція обмеженою?)</p> <p>36) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$</p> <p>37) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$</p> <p>38) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctgx}}{x}$</p>	<p>64) $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$</p> <p>65) $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{ctgx}$</p> <p>66) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \operatorname{sgn} x$ ($\operatorname{sgn} x$ – функція-знак)</p> <p>67) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x}$</p> <p>68) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arccctg} \frac{1}{x}$</p> <p>69) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctgx}}{x}$</p> <p>70) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$ (відповідь 1)</p>

V Знайдіть границі **трансцендентних функцій**, використовуючи еквівалентності та o -символіку

Класне завдання	Домашнє завдання
1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$	27) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

<p>2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$</p> <p>3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$</p> <p>4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[4]{1-x}}{\sqrt[5]{1+x} - \sqrt[4]{1-x}}$</p> <p>5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x}$</p> <p>6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \arctg^2 x} - \sqrt{\cos x}}{x}$</p> <p>7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1 + \operatorname{tg} x} - 1}{\sqrt[3]{\cos x} - 1}$</p> <p>8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin 3x}$ (використати еквівалентності для степеня)</p> <p>9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\sin x}$ (використати еквівалентності для степеня)</p>	<p>28) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$</p> <p>29) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+x} - 1}{x}$</p> <p>30) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^3 - 1}{x}$</p> <p>31) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \cos x}{x^2}$</p> <p>32) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \cos x}{\sin x}$</p> <p>33) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{\cos x} - 1}{\sqrt{1 + \arctg x} - 1}$</p> <p>34) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{\cos x} - 1}{\sqrt{1 + \sin^2 x} - 1}$</p>
<p>10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$</p> <p>11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{x^2}$</p> <p>12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \cos x}{\sin x}$</p> <p>13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arcsin x} - 1}{\operatorname{tg}^2 x}$</p> <p>14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^{\operatorname{tg} x} - 1)}{1 - \cos(\arctg x)}$</p> <p>15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$</p> <p>16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$</p> <p>17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{\ln(1 + \arctg x)}$</p> <p>18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{x^2}$</p>	<p>35) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$</p> <p>36) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$</p> <p>37) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - \cos x}{\operatorname{tg} x}$</p> <p>38) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2\sin x} - \cos x}{\sin x}$</p> <p>39) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^{\arctg^2 x} - 1)}{1 - \cos(\sin x)}$</p> <p>40) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x^2}$</p> <p>41) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\arcsin x + \cos x)}{x}$</p> <p>42) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \ln(\cos x)}{\arcsin x}$</p> <p>43) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0}$</p>

19) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2^x - 2^{x_0}}{x - x_0}$	
20) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+2} \right)^{x+1}$	44) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{x+3}$
21) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1} \right)^x$	45) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 1} \right)^x$
22) $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{2x^3 + 1}{x^3 + 1} \right)^x$	46) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^3 - 1} \right)^x$
23) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\arcsin^2 x}}$	47) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x$
24) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$	48) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x$
25) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{\arcsin x}{\sin x - x}}$	49) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$
26) $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin 3x + \cos 4x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x}}$	50) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$
	51) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{\operatorname{arctg} x}{\sin x - x \cos x}}$
	52) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin^2 x + \cos x)^{\frac{1}{\ln \cos x}}$

VI Знайдіть головний член асимптотики функції. Чи є функція нескінченно великою, чи нескінченно малою? Вкажіть порядок

Класне завдання	Домашнє завдання
Нехай $x \rightarrow 0$	Нехай $x \rightarrow 0$
1) $f(x) = x^3 + x^2 + 2x$	25) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x$
2) $f(x) = x^{20} + 3x^{10} - 4x^5$	26) $f(x) = x^{13} - 3x^{18} + 2x^4$
3) $f(x) = \sin x$	27) $f(x) = \operatorname{tg} x$
4) $f(x) = x \sin x$	28) $f(x) = x \arcsin x$
5) $f(x) = 2x - \sin x$	29) $f(x) = 3x - \operatorname{tg} x$
6) $f(x) = \sin^4 x \cdot (1 - \cos x^2)$	30) $f(x) = \sin x - \operatorname{tg} x + 2 \arcsin x$
7) $f(x) = \operatorname{tg}(\ln(1 + \arcsin(e^{\sin x} - 1)))$	31) $f(x) = \operatorname{tg}^4 x \cdot \sin x$
8) $f(x) = e^{x^2} - \cos x$	32) $f(x) = \sin(\sin(\ln(e^{\sin x})))$
9) $f(x) = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\sin x}$	33) $f(x) = \operatorname{tg}(\arcsin(\ln(3 \sin x + 1)))$
10) $f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$	34) $f(x) = e^x - \cos x$

11) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sin^2 x}$ 12) $f(x) = (\cos x)^{\arcsin x} - 1$ 13) $f(x) = \sqrt{1 + \sin^2 x} - 1$	35) $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctgx}$ 36) $f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{ctgx}$ 37) $f(x) = (\cos x)^{\arcsin x} - 1$ 38) $f(x) = \sqrt{1 + \sin^2 x} - 1$
14) $f(x) = x^3 + x^2 + 2x, x \rightarrow 1$ 15) $f(x) = \sin(5x), x \rightarrow \pi$ 16) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{(x+1)^3}, x \rightarrow -1$	39) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x, x \rightarrow 1$ 40) $f(x) = \sin(7x), x \rightarrow \pi$
17) $f(x) = x^3 + x^2 + 2x, x \rightarrow \infty$ 18) $f(x) = x^{20} + 3x^{10} - 4x^5, x \rightarrow \infty$ 19) $\sqrt{x^4 + 3} + \sqrt[3]{x^2 + 2x - 1}, x \rightarrow \infty$ 20) $\sqrt[4]{x^8 + x^4} - \sqrt[5]{x^4 + 2x}, x \rightarrow \infty$ 21) $\sqrt{x^4 + \sqrt[3]{x^9 + 1}} + \sqrt[3]{x^4 - \sqrt[4]{x^{12} + 1}}, x \rightarrow \infty$ 22) $\sqrt[4]{x^8 + \sqrt[5]{x^{20} + 2}} - \sqrt[5]{x^8 + \sqrt[6]{x^{24} + 4}}, x \rightarrow \infty$ 23) $f(x) = \left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}} - 1, x \rightarrow \infty$ 24) $f(x) = \frac{x}{(x^3 - 1)\operatorname{arcctgx}}$ при а) $x \rightarrow 0$, б) $x \rightarrow 1$, в) $x \rightarrow \pm\infty$ ($\operatorname{arcctgx} \sim \frac{1}{x}$, при $x \rightarrow +\infty$)	41) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x, x \rightarrow \infty$ 42) $f(x) = x^{13} - 3x^{18} + 2x^4, x \rightarrow \infty$ 43) $\sqrt{x^4 + 3} + \sqrt[3]{x^2 + 2x - 1}, x \rightarrow \infty$ 44) $\sqrt[4]{x^8 + x^4} - \sqrt[5]{x^4 + 2x}, x \rightarrow \infty$ 45) $f(x) = \left(\frac{x+3}{x}\right)^{\frac{1}{x+1}} - 1, x \rightarrow \infty$

VII Знайдіть точки розриву функції. Визначте їх характер. Побудуйте ескіз графіка поблизу точок розриву

Класне завдання	Домашнє завдання
1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 2) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ 3) $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$	14) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ 15) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 16) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

4) $f(x) = \operatorname{sgn} x$	17) $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2-1}$
5) $f(x) = x \operatorname{ctg} x$	18) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg}(x-1)}$
6) $f(x) = \frac{1}{x-1}$	19) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
7) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x^3-1)}$	20) $f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
8) $f(x) = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}$	
9) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x+2}$	
10) $f(x) = \frac{1}{\arccos(x-1)}$	
11) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$	
12) $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$	
13) $f(x) = \frac{x-1}{e^{\frac{x-1}{x+1}} - 1}$	

Відповіді

II

- 1) 1, 2) 0, 3) ∞ , 4) $-\frac{3}{4}$, 5) $-\frac{6}{5}$, 6) $-\frac{4}{3}$, 7) $\frac{1}{3}$, 8) 9, 9) $\frac{10}{3}$, 10) $-\frac{5}{18}$, 11) $\frac{5}{3}$,
 12) $-\frac{3}{4}$, 13) -2, 14) $-\frac{2}{3}$, 15) ∞ ,
- 16) $\frac{1}{3}$, 17) $-\frac{\sqrt{5}}{10} = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$, 18) $\frac{\sqrt{5}}{10} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$, 19) $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 20) $\frac{1}{3}$, 21) $\frac{5}{3}$, 22) $\frac{2}{3}$,
 23) $\frac{7}{9}$
- 24) 1, 25) 0, 26) ∞ , 27) $\frac{1}{8}$, 28) $\frac{5}{6}$, 29) -6, 30) -8, 31) $\frac{1}{5}$, 32) 5, 33) ∞ , 34) $\frac{4}{25}$,
 35) $\frac{4}{5}$, 36) $-\frac{2}{9}$, 37) 3, 38) 4, 39) ∞ ,

$$40) \frac{1}{3}, 41) -\frac{3\sqrt{5}}{10} = -\frac{3}{2\sqrt{5}}, 42) 3, 43) \frac{\sqrt{7}}{4}, 44) \frac{1}{12}, 45) \frac{3}{4}, 46) \frac{3}{2}, 47) \frac{4}{5}$$

III

$$1) 1, 2) \infty, 3) 0, 4) \frac{1}{2}, 5) \frac{3}{2}, 6) \infty, 7) \infty, 8) 0, 9) \infty, 10) \frac{1}{2}, 11) \frac{1}{2}, 12) \frac{1}{2}, 13) \frac{1}{2},$$

$$14) \frac{1}{2}, 15) \infty, 16) \frac{1}{3}, 17) \infty, 18) 1, 19) 1,$$

$$20) 0, 21) \infty, 22) -\frac{1}{2},$$

$$23) 1, 24) \infty, 25) 0, 26) \frac{3}{2}, 27) 2, 28) 0, 29) 0, 30) \infty, 31) 0, 32) 3, 33) 3, 34) 3,$$

$$35) 3, 36) \frac{3}{2}, 37) 1, 38) \frac{1}{2}, 39) \infty, 40) 2, 41) 3,$$

$$42) 0, 43) \infty, 44) -\frac{1}{2}$$

IV

$$52) 0, 53) \frac{3}{2}, 54) 0, 55) -\frac{21}{4}, 56) -\frac{2}{5}, 57) -1, 58) 1, 59) -1, 60) \frac{1}{2}, 61)$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}, 62) -6, 63) \frac{1}{\cos^2 x_0}, 66) \infty$$

V

$$27) \frac{1}{2}, 28) 0, 29) \frac{1}{5}, 30) 3, 31) \infty, 32) \frac{1}{2}, 33) 0, 34) -1,$$

$$35) 1, 36) 1, 37) 1, 38) 2, 39) 2, 40) \infty, 41) 1, 42) 0, 43) \frac{1}{x_0},$$

$$44) e^{-3}, 45) e, 46) 1, 47) 0, 48) \infty, 49) e^{-1}, 50) 1, 51) e, 52) e^{-1}$$

РОЗДІЛ 4. ПОХІДНА І ДИФЕРЕНЦІАЛ

Теоретичні відомості

Основні поняття

Визначення. *Похідною* функції $f(x)$ в точці x_0 називається (скінченна) границя відношення приросту функції до відповідного приросту аргументу, коли приріст аргументу наближається до нуля.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Позначення. $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = f'_x(x_0)$

Теорема про зв'язок між похідною та диференціалом

Функція $f(x)$ диференційовна в точці $x_0 \Leftrightarrow \exists f'(x_0)$.

$df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$ – диференціал функції $f(x)$ в точці x_0 .

Теорема. Необхідна умова диференційовності функції

Для того, щоб функція була диференційованою в точці x_0 необхідно, щоб вона була неперервною в цій точці.

$$\exists f'(x_0) \begin{matrix} \Rightarrow \\ \Leftarrow \end{matrix} f \in C(\{x_0\})$$

Теорема про похідну параметрично заданої функції

Нехай є параметрично задана функція $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$ Нехай $x(t) \uparrow$, $\exists x'(t)$,

$$\exists y'(t), x'(t) \neq 0 \Rightarrow$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Друга похідна параметрично заданої функції:

$$y''_x = \frac{y''_{xt}}{x'_t}.$$

Теорема про похідну оберненої функції

Нехай є функція $f(x)$ на X , де X – проміжок:

1) $f(x)$ строго монотонна на X ,

2) $\exists f'(x)$ для всіх $x \in X$,

3) $x_0 \in X$, $f'(x_0) \neq 0$.

Нехай $g = f^{-1}$ і $y_0 = f(x_0) \Rightarrow$

$$\exists g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Фізичний та геометричний сенс похідної

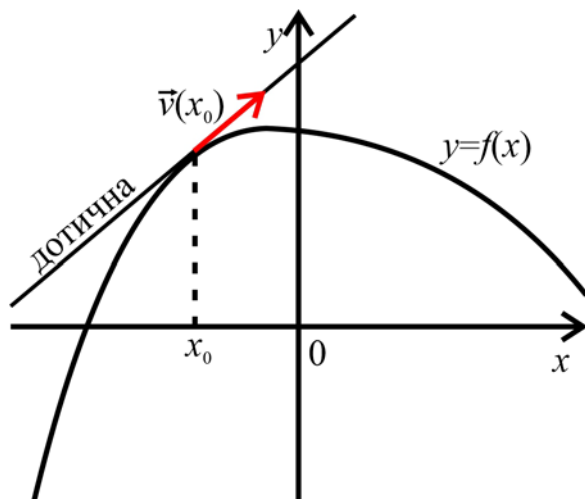
Фізичний сенс. Нехай закон руху точки описується виразом $S = S(t)$, де S – шлях. Тоді $S'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = v(t)$, похідна шляху за часом – миттєва швидкість в момент t . $v'(t) = a(t)$, похідна миттєвої швидкості за часом – прискорення в момент t .

Зауваження. Похідну за часом позначають через точку над функцією: $v(t) = \dot{S}(t)$, $a(t) = \dot{v}(t)$. Це позначення ввів Ньютон. Він широко використовується і зараз багатьох напрямках науки для опису динамічних систем.

У випадку, якщо траєкторію руху точки задано параметрично $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то вектор миттєвої швидкості також є похідною за часом $\vec{v} = \vec{r}'(t)$. Розпишемо по координатах:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = x'(t), \\ v_y = y'(t), \\ v_z = z'(t). \end{cases}$$

Миттєва швидкість направлена по дотичній до траєкторії руху у заданій точці.



Геометричний сенс

Визначення. Нехай ϵ функція $y = f(x)$ і точка $x_0 \in X$, (x_0, y_0) , де $y_0 = f(x_0)$. Дотичною до кривої в точці (x_0, y_0) називається така **пряма**, яка проходить через точку (x_0, y_0) , причому різниця координат на графіку функції і на цій прямій є $o(\Delta x)$, $y_{\text{дотична}} - y_{\text{крива}} = o(\Delta x)$, при $\Delta x \rightarrow 0$.

Зауваження. Дотична – це пряма, яка найкращим чином апроксимує криву поблизу даної точки.

Теорема

Крива $f(x)$ має дотичну у точці $(x_0, y_0) \Leftrightarrow f(x)$ – диференційовна у даній точці ($\exists f'(x_0)$).

Рівняння дотичної в точці (x_0, y_0) : $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Визначення. Нормаллю до кривої у даній точці називається пряма, яка є перпендикулярною до дотичної у даній точці.

Рівняння нормалі в точці (x_0, y_0) : $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Якщо $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ рівняння нормалі $x = x_0$.

Кут α між прямими $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$: $\text{tg } \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$.

Похідні вищих порядків. Формула Лейбніца

$$y'' = (y')', \quad y''' = (y'')', \dots, \quad y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$$

Позначення

$$f' = f'_x = \frac{df}{dx},$$

$$f'' = f''_{xx} = \frac{d^2 f}{dx^2},$$

$$f''' = f'''_{xxx} = \frac{d^3 f}{dx^3},$$

...

$$f^{(n)} = f^{(n)}_x = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Формула Лейбніца

$$\begin{aligned}(f \cdot g)^{(n)} &= \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)} = \\ &= \underbrace{C_n^0}_{1} f^{(n)} g + \underbrace{C_n^1}_n f^{(n-1)} g' + C_n^2 f^{(n-2)} g'' + \dots + C_n^{n-2} f'' g^{(n-2)} + \underbrace{C_n^{n-1}}_n f' g^{(n-1)} + \underbrace{C_n^n}_1 f \cdot g^{(n)}\end{aligned}$$

Формула Тейлора

$$\begin{aligned}P_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{\underbrace{1!}_{=1}} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \dots + \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n\end{aligned}$$

Залишковий член у формі Піано

$$\exists f^{(n)}(x_0) \Rightarrow R_n(x) = o(x - x_0)^n.$$

$$\text{Зауваження. } R_n(x) = O(x - x_0)^{n+1}.$$

Залишковий член у формі Лагранжа

Нехай $\exists f^{(n+1)}(x)$, при $x \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow \exists \theta \in (0, 1)$:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Формула Макларéна

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x) = \\ &= f(0) + \frac{f'(0)}{\underbrace{1!}_{=1}} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + R_n(x).\end{aligned}$$

Правило Лопітала обчислення границі

Нехай є границя $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ і має місце невизначеність $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\text{якщо похідні мають сенс}).$$

Іншими словами, якщо у границі $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ має місце невизначеність $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, то можна окремо знайти похідну чисельника, окремо знайти похідну знаменника, взяти їх співвідношення і знайти границю такої функції. Якщо знову виникає невизначеність $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, для обчислення цієї границі можна знову застосувати правило Лопітала. І так далі. Взагалі, знайти $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$, причому виконувати диференціювання, поки невизначеність не зникне. Якщо при виконанні цієї процедури отримали, що границі не існує, значить правило Лопітала не підходить, або необхідно виконати додаткові перетворення перед тим, як його застосувати.

Скінченно-різницева схема для обчислення значення похідної

Нехай є функція $f(x)$ і точка x_0 . Наближено значення похідної функції $f'(x)$ можна знайти, застосувавши скінченно-різницеву схему за формулою:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

де h – невелике число.

Причому, $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \rightarrow f'(x_0)$, коли $h \rightarrow 0$.

Зауваження. Скінченно-різницева схема, а також числові методи, які на ній базуються, є нестійкими. При обчисленнях на комп'ютері використовуються числові типи, які передбачають наявність похибки. Наприклад, тип *double* зберігає 16 знаків. Всі інші – відкидаються. Як результат, з'являється похибка навіть при реалізації точних методів.

Нехай похибка обчислення функції $f(x)$ обмежується величиною ε . Тоді похибка чисельника $|f(x_0 + h) - f(x_0)|$ буде обмежуватись величиною $0 < C \cdot \varepsilon$, де C – константа. Похибку всього дроби можна оцінити як $\frac{C \cdot \varepsilon}{h}$. При наближенні h до нуля, зважаючи на те, що h стоїть у знаменнику, похибка $\frac{C \cdot \varepsilon}{h}$ скінченно-різницевої схеми може нескінченно зростати!

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Знайти похідну функції $f(x) = x^5$. Застосуємо формулу 2) з таблиці похідних,

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \text{ Тут } n = 5. \text{ Тоді } (x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $f(x) = (\sin x + \cos x)$. Застосуємо правило диференціювання суми 2) і формули 7), 8) з таблиці похідних,

$$(\sin x + \cos x)' = \sin' x + \cos' x \stackrel{7),8)}{=} \cos x + (-\sin x) = \cos x - \sin x$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $f(x) = x^2 \cdot e^x$. Застосуємо правило диференціювання добутку 3) і формули 2), 4) з таблиці похідних,

$$\underbrace{(x^2)}_f \cdot \underbrace{e^x}_g' = \underbrace{(x^2)'}_{f' \cdot g} \cdot e^x + \underbrace{(e^x)'}_{g' \cdot f} \cdot x^2 = 2x^{2-1} \cdot e^x + e^x \cdot x^2 = 2x \cdot e^x + e^x \cdot x^2$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$. Застосуємо правило диференціювання частки 4) і формули 2), 6) з таблиці похідних,

$$\left(\frac{x^2}{\ln x} \right)' = \frac{(x^2)' \ln x - (\ln x)' x^2}{(\ln x)^2} = \frac{2x^{2-1} \ln x - \frac{1}{x} \cdot x^2}{\ln^2 x} = \frac{2x \ln x - x}{\ln^2 x}$$

Приклад 5. Знайти похідну функції $f(x) = \sin(2x)$. Тут складена функція. Тому застосуємо правило 5), після чого правило 1) і формулу 7) з таблиці похідних,

$$(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot (2x)' = \cos(2x) \cdot 2 \cdot (x)' = 2 \cos(2x)$$

Приклад 6. Знайти похідну функції $f(x) = \sin(x^2 + 1) \cdot e^x$. Тут стоїть добуток двох функцій, причому перший множник – складена функція. Тому застосуємо правило 4), після чого правило 5) і 2) і формули 1), 4), 7) з таблиці похідних,

$$\begin{aligned} \underbrace{(\sin(x^2 + 1))}_f \cdot \underbrace{e^x}_g' &= \underbrace{(\sin(x^2 + 1))'}_{f'} \cdot \underbrace{e^x}_g + \underbrace{(e^x)'}_{g'} \cdot \underbrace{\sin(x^2 + 1)}_f = \\ &= \cos(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1)' \cdot e^x + e^x \cdot \sin(x^2 + 1) = \cos(x^2 + 1) \cdot ((x^2)' + 1') \cdot e^x + e^x \cdot \sin(x^2 + 1) = \\ &= \cos(x^2 + 1) \cdot (2x^{2-1} + 0) \cdot e^x + e^x \cdot \sin(x^2 + 1) = \cos(x^2 + 1) \cdot 2x \cdot e^x + e^x \cdot \sin(x^2 + 1) \end{aligned}$$

Приклад 7. Знайти похідну функції $f(x) = x^{2x}$. Застосуємо властивість експоненти і логарифма $e^{\ln a} = a$, $\ln a^b = b \ln a$. Маємо,

$$f(x) = x^{2x} = e^{2x \ln x}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{2x \ln x})' = e^{2x \ln x} \cdot (2x \ln x)' = e^{2x \ln x} \cdot (2x' \ln x + \ln' x \cdot 2x) = \\ &= e^{2x \ln x} \cdot \left(2 \ln x + \frac{1}{x} \cdot 2x \right) = e^{2x \ln x} \cdot (2 \ln x + 2). \end{aligned}$$

Так як $x^{2x} = e^{2x \ln x}$, остаточно маємо:

$$f'(x) = x^{2x} \cdot (2 \ln x + 2).$$

Приклад 8. Нехай траєкторія руху точки задається рівнянням

$$\varphi(t) : \begin{cases} x = \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$$

Знайти вектор швидкості і прискорення в момент часу $t = 0$.

Вектор швидкості: $v_x = x'_t$, $v_y = y'_t$. Знайдемо похідні,

$$x'_t = (\cos t)' = -\sin t \Big|_{t=0} = -\sin 0 = 0,$$

$$y'_t = (2 \sin t)' = 2(\sin t)' = 2 \cos t \Big|_{t=0} = 2 \cos 0 = 2.$$

Тоді $\vec{v} = (v_x, v_y) = (0, 2)$.

Вектор прискорення: $a_x = v'_x = x''_t$, $a_y = v'_y = y''_t$. Знайдемо похідні,

$$x''_t = (-\sin t)' = -\cos t \Big|_{t=0} = -\cos 0 = 1,$$

$$y''_t = (2 \cos t)' = 2(\cos t)' = -2 \sin t \Big|_{t=0} = 2 \sin 0 = 0.$$

Таким чином $\vec{a} = (a_x, a_y) = (1, 0)$. Зауважимо, що похідні від швидкості обчислюються до того, як підставили $t = 0$.

Приклад 9. Запишіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^2$ в точці $x_0 = 2$.

Рівняння дотичної

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Знайдемо координату y_0 . Для цього підставимо $x_0 = 2$ у рівняння кривої,

$$y_0 = x_0^2 \Rightarrow y_0 = 2^2 = 4.$$

Знайдемо похідну $f'(x_0)$,

$$y' = (x^2)' = 2x \Big|_{x=x_0} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Отже $f'(x_0) = 4$. Остаточно маємо рівняння дотичної в точці (x_0, y_0)

$$y - 4 = 4 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = 4 \cdot x - 4 \cdot 2 + 4 \Leftrightarrow y = 4x - 4.$$

Рівняння нормалі

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \Rightarrow y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}(x - 2) + 4$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{x}{4} + \frac{1}{2} + 4 \Leftrightarrow y = -\frac{x}{4} + \frac{1}{2} + 4 \Leftrightarrow y = -\frac{x}{4} + \frac{9}{2}.$$

Приклад 10. Знайдіть кут між кривими $y = 2x$, $y = x^2 + 1$.

Знайдемо точку перетину кривих. Для цього прирівняємо y -координати:

$$2x = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1.$$

Знайдемо кутові коефіцієнти, похідні функцій при $x = x_0$:

$$k_1 = y'_1 = (2x)' = 2 \Big|_{x=1} = 2,$$

$$k_2 = y'_2 = (x^2 + 1)' = 2x \Big|_{x=1} = 2 \cdot 1 = 2.$$

Підставимо у формулу для кута:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \right| = \left| \frac{2 - 2}{1 + 2 \cdot 2} \right| = 0,$$

мамо $\alpha = 0$.

Приклад 11. Знайдіть похідну оберненої функції $y = x^2 + 1$.

Нехай $f(x) = x^2 + 1$. Тоді $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$ і

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}.$$

$f'(x) = (x^2 + 1)' = (x^2)' + 1' = 2x$. Тоді $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2 \cdot f^{-1}(y)}$. Виразимо “ x ” з виразу для вихідної функції $y = x^2 + 1 \Leftrightarrow y - 1 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y-1}$.
Остаточно

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{2x} = \pm \frac{1}{2\sqrt{y-1}}$$

Приклад 12. Знайдіть похідну оберненої функції $y = x^5 + 5x + 1$.

Нехай $f(x) = x^5 + 5x + 1$. Тоді $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$.

$f'(x) = (x^5 + 5x + 1)' = 5x^4 + 5$. Зауважимо, що на відміну від прикладу 9 виразити x через y тут неможна. Тому і кінцевому виразі замість x підставимо “ $f^{-1}(y)$ ”. Маємо

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{5x^4 + 5} = \frac{1}{5(f^{-1}(y))^4 + 5}$$

Приклад 13. Знайдіть похідну 1-го і 2-го порядку y'_x і y''_x параметрично заданої функції

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

Перша похідна дорівнює $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$. Знайдемо

$$x'_t = (\cos t)' = -\sin t,$$

$$y'_t = (\sin t)' = \cos t.$$

Тоді

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\cos t}{-\sin t}.$$

Друга похідна параметрично заданої функції дорівнює $y''_x = \frac{y''_{xt}}{x'_t}$.

Знайдемо y''_{xt} . Похідна y'_x нам вже відома. Необхідно продиференціювати по t :

$$y''_{xt} = (y'_x)'_t = \left(\frac{\cos t}{-\sin t} \right)'_t = - \left(\frac{\cos t}{\sin t} \right)'_t = - \frac{(\cos t)'(\sin t) - (\sin t)' \cos t}{\sin^2 t} =$$

$$= - \frac{-\sin t \cdot \sin t - \cos t \cdot \cos t}{\sin^2 t} = \frac{\overbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}^{=1}}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t}.$$

$$\text{Тоді } y''_x = \frac{y''_{xt}}{x'_t} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-\frac{\sin t}{1}} = -\frac{1}{\sin^3 t}.$$

Задачі для самостійного розв'язання

I Знайдіть похідну функції

Класне завдання	Домашнє завдання
Чому дорівнює диференціал? 1) $f(x) = x^{14}$ 2) $f(x) = x^{11}$ 3) $f(x) = x^7$ 4) $f(x) = 13$ 5) $f(x) = 5$ 6) $f(x) = 19^x$ 7) $f(x) = 15^x$ 8) $f(x) = 7^x$	Чому дорівнює диференціал? 101) $f(x) = x^3$ 102) $f(x) = x^9$ 103) $f(x) = x^7$ 104) $f(x) = x^{21}$ 105) $f(x) = 8$ 106) $f(x) = 4^x$ 107) $f(x) = 14^x$ 108) $f(x) = 12^x$
9) $f(x) = 5 \cdot \operatorname{arctg} x$ 10) $f(x) = 4 \cdot \operatorname{arctg} x$ 11) $f(x) = 6 \cdot \arccos x$ 12) $f(x) = 3 \cdot 17^x$ 13) $f(x) = 5 \cdot \sin x$ 14) $f(x) = 4 \cdot \operatorname{arcctg} x$ 15) $f(x) = 2 \cdot \operatorname{ctg} x$ 16) $f(x) = 2 \cdot \sin x$ 17) $f(x) = 5 \cdot \cos x$ 18) $f(x) = 5 \cdot \arccos x$	109) $f(x) = 4 \cdot \sin x$ 110) $f(x) = 3 \cdot \operatorname{ctg} x$ 111) $f(x) = 5 \cdot \operatorname{arcsin} x$ 112) $f(x) = 2 \cdot x^4$ 113) $f(x) = 5 \cdot x^{14}$
19) $f(x) = \operatorname{sh} x - e^x$ 20) $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{tg} x$ 21) $f(x) = \operatorname{ch} x - e^x$ 22) $f(x) = \operatorname{arcsin} x + \arccos x$ 23) $f(x) = 16^x - x^2$ 24) $f(x) = 5 \cos x + 6 \cdot 13^x$ 25) $f(x) = 6 \operatorname{arcsin} x - 2 \operatorname{arcctg} x$ 26) $f(x) = 6 \cos x + 5 \ln x$	114) $f(x) = \operatorname{arcctg} x + \operatorname{tg} x$ 115) $f(x) = \ln x + \cos x$ 116) $f(x) = \cos x + \operatorname{ctg} x$ 117) $f(x) = 5 \ln x + 2 \operatorname{sh} x$ 118) $f(x) = 4 \sin x + 5 \cos x$ 119) $f(x) = 4 \cos x + 4 \operatorname{arcsin} x$ 120) $f(x) = 5 \cdot 5^x + 2 \operatorname{tg} x$ 121) $f(x) = 6 \operatorname{arcsin} x + 21 \cdot 7^x$

<p>27) $f(x) = 3e^x + 4\text{arctg}x$ 28) $f(x) = 5x^2 - 2 \cdot 5^x$ 29) $f(x) = 5\text{arctg}x + 5\text{arcctg}x$ 30) $f(x) = 2\text{arctg}x - 6x^{20}$ 31) $f(x) = 4\text{tg}x + 4\text{sh}x$ 32) $f(x) = 4\ln x - 4\text{arcctg}x$ 33) $f(x) = 5\cos x + 5\text{ch}x$</p>	
<p>34) $f(x) = x^8 \cdot e^x$ 35) $f(x) = \cos x \cdot \text{arcsin}x$ 36) $f(x) = \ln x \cdot \text{arcsin}x$ 37) $f(x) = \text{tg}x \cdot \text{arccos}x$ 38) $f(x) = \ln x \cdot x^{16}$ 39) $f(x) = \text{sh}x \cdot \ln x$ 40) $f(x) = \text{arcctg}x \cdot 3^x$ 41) $f(x) = \text{ch}x \cdot e^x$ 42) $f(x) = \text{tg}x \cdot \text{sh}x$ 43) $f(x) = \text{arcsin}x \cdot \cos x$ 44) $f(x) = 2 \cdot e^x \cdot \text{ch}x$ 45) $f(x) = 2 \cdot e^x \cdot \text{arccos}x$ 46) $f(x) = 6 \cdot \text{arcsin}x \cdot \text{arcctg}x$ 47) $f(x) = 4 \cdot \text{arctg}x \cdot \text{sh}x$ 48) $f(x) = 5 \cdot \cos x \cdot \text{arcsin}x$ 49) $f(x) = 6 \cdot \text{ch}x \cdot \text{ctg}x$ 50) $f(x) = 2 \cdot \text{ch}x \cdot \text{ctg}x$</p>	<p>122) $f(x) = e^x \cdot \cos x$ 123) $f(x) = \text{ch}x \cdot \text{sh}x$ 124) $f(x) = x^{10} \cdot \text{sh}x$ 125) $f(x) = x^7 \cdot \text{arcctg}x$ 126) $f(x) = x^{19} \cdot \text{arcctg}x$ 127) $f(x) = 3 \cdot \sin x \cdot e^x$ 128) $f(x) = 3 \cdot x^2 \cdot \text{sh}x$ 129) $f(x) = 5 \cdot \text{tg}x \cdot \ln x$ 130) $f(x) = 2 \cdot \ln x \cdot \text{ch}x$ 131) $f(x) = 5 \cdot \text{ctg}x \cdot e^x$</p>
<p>51) $f(x) = \frac{\text{ctg}x}{\sin x}$ 52) $f(x) = \frac{\cos x}{x^{14}}$ 53) $f(x) = \frac{\text{ch}x}{\text{tg}x}$ 54) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ 55) $f(x) = \frac{\text{ch}x}{\sin x}$ 56) $f(x) = \frac{\text{ctg}x}{\text{ch}x}$ 57) $f(x) = \frac{\text{tg}x}{\cos x}$ 58) $f(x) = \frac{x^6}{\cos x}$ 59) $f(x) = \frac{\cos x}{x^{21}}$ 60) $f(x) = \frac{\text{tg}x}{\cos x}$</p>	<p>132) $f(x) = \frac{\sin x}{\text{tg}x}$ 133) $f(x) = \frac{\sin x}{\text{ctg}x}$ 134) $f(x) = \frac{\sin x}{\text{sh}x}$ 135) $f(x) = \frac{x^{15}}{\text{sh}x}$ 136) $f(x) = \frac{x^7}{\text{sh}x}$</p>
<p>61) $f(x) = \text{arctg}(6x + 5)$ 62) $f(x) = \text{arctg}(2x + 1)$</p>	<p>137) $f(x) = (4x + 7)^3$ 138) $f(x) = \text{arcsin}(8x + 5)$</p>

<p>63) $f(x) = \text{ch}(4x + 3)$ 64) $f(x) = \text{arctg}(8x + 2)$ 65) $f(x) = \text{ctg}(7x + 8)$ 66) $f(x) = 4^{(4x+7)}$ 67) $f(x) = \ln(3x + 4)$ 68) $f(x) = e^{(4x+5)}$ 69) $f(x) = \text{tg}(3x + 8)$ 70) $f(x) = \arcsin(5x + 3)$ 71) $f(x) = \text{ch}(x^3 + 2x^2 - 2x + 5)$ 72) $f(x) = \text{arctg}(-3x^3 + 3x^2 - 2x - 2)$ 73) $f(x) = \text{arctg}(2x^5 - x^3 + 3x^2 - 4x - 2)$ 74) $f(x) = \arcsin(-x^2 + 5x + 3)$ 75) $f(x) = 4^{4x^3+5x^2+4}$ 76) $f(x) = \arccos(x^2 - 3x + 4)$ 77) $f(x) = \text{tg}(5x^2 - 4)$ 78) $f(x) = \cos(4x^5 + x^4 - 4x^3 + 4x + 1)$ 79) $f(x) = (5x^4 - x^3 - x^2 - 2x - 4)^4$ 80) $f(x) = \text{ctg}(4x^2 - 4x + 2)$</p>	<p>139) $f(x) = \text{ctg}(7x + 5)$ 140) $f(x) = \text{ctg}(2x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 3)$ 141) $f(x) = \sin(-2x^3 - 2x^2 - 2x + 5)$ 142) $f(x) = \text{ctg}(-2x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 2)$ 143) $f(x) = \sin(2x^3 - 2x^2 - 2x + 2)$</p>
<p>81) $f(x) = \sqrt{5x + 9}$ 82) $f(x) = \sqrt{8x + 2}$ 83) $f(x) = \sqrt[3]{6x + 2}$ 84) $f(x) = \sqrt[4]{6x + 2}$ 85) $f(x) = \sqrt[3]{5x + 7}$ 86) $f(x) = \sqrt{-4x^2 + 2x + 2}$ 87) $f(x) = \sqrt[3]{5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x - 4}$ 88) $f(x) = \sqrt{4x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4}$ 89) $f(x) = \sqrt[4]{x^3 + 2x^2 + 3x - 3}$ 90) $f(x) = \sqrt{-2x^3 + 5x^2 - 2x + 2}$ 91) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 3x + 2}$ 92) $f(x) = \sqrt[4]{-4x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x - 2}$</p>	<p>144) $f(x) = \sqrt{3x + 8}$ 145) $f(x) = \sqrt[4]{8x + 8}$ 146) $f(x) = \sqrt[3]{4x + 2}$ 147) $f(x) = \sqrt[4]{7x + 9}$ 148) $f(x) = \sqrt[4]{4x + 8}$ 149) $f(x) = \sqrt[4]{4x^2 + 4x + 4}$ 150) $f(x) = \sqrt{-4x^3 + 2x^2 + 4x + 4}$</p>
<p>93) $f(x) = \text{ctg}(\text{sh}(\text{arctg}x))$ 94) $f(x) = \ln(\text{sh}(\text{ch}x))$ 95) $f(x) = \sin(\text{ch}(\text{sh}x))$ 96) $f(x) = \text{tg}(\cos(e^x))$</p>	<p>151) $f(x) = \text{ctg}(\sin(7^x))$ 152) $f(x) = \cos(\sin(\text{ctg}x))$ 153) $f(x) = \sin(\sin(\ln x))$ 154) $f(x) = \text{tg}(\text{sh}(e^x))$</p>

97) $f(x) = \sin(\cos(\operatorname{ch}x))$ 98) $f(x) = \cos(\operatorname{ch}(\operatorname{sh}x))$ 99) $f(x) = \cos(\operatorname{tg}(\cos x))$ 100) $f(x) = \cos(\operatorname{sh}(\operatorname{arctg}x))$, чому дорівнює диференціал функції?	155) $f(x) = \ln(\sin(\arccos x))$ Чому дорівнює диференціал функції?
---	--

II Розв'яжіть задачі на фізичний і геометричний сенс похідної

Класне завдання	Домашнє завдання
Знайдіть вектор швидкості та прискорення в момент часу t_0 , якщо траєкторію руху $\varphi(t)$ задано параметрично	
1) $\begin{cases} x = 2t^2 + 3 \\ y = \sin t \end{cases} \quad t_0 = 0$	15) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = t \end{cases} \quad t_0 = 0$
2) $\begin{cases} x = 3e^t + t \\ y = \cos t \end{cases} \quad t_0 = 1$	16) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = 4 \ln t + t^2 \end{cases} \quad t_0 = 1$
3) $\begin{cases} x = \ln t + 3t \\ y = e^t \end{cases} \quad t_0 = 2$	17) $\begin{cases} x = e^t \\ y = 2t \end{cases} \quad t_0 = 2$
4) $\begin{cases} x = t \sin t \\ y = \ln t \end{cases} \quad t_0 = 1$	18) $\begin{cases} x = t \\ y = t \cos t \end{cases} \quad t_0 = 0$
5) $\begin{cases} x = t^2 + 3t + 1 \\ y = t \ln t \end{cases} \quad t_0 = 1$	19) $\begin{cases} x = te^t \\ y = 2t + 1 \end{cases} \quad t_0 = 1$
6) $\begin{cases} x = \sin(3t^2 + 1) \\ y = 1 \end{cases} \quad t_0 = 2$	20) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \cos(5t^2 + t) \end{cases} \quad t_0 = 1$
Знайдіть швидкість $v(t)$, якщо відомо рівняння руху точки ($s(t)$ – це шлях)	
7) $s(t) = 3 \sin(5t + 4) + 2$	21) $s(t) = 8 \cos(2t - 3) + 4$
8) $s(t) = e^{-2t+4}$	22) $s(t) = e^{-4t+2}$
9) $s(t) = 2 \sin(3t + 2) + 4 \sin(2t + 1)$	23) $s(t) = 2 \cos(5t + 4) + 3 \cos(4t - 2)$
Запишіть рівняння дотичної і нормалі до кривої в точці x_0	
10) $y = x^2$, а) $x_0 = 1$, б) $x_0 = 2$	24) $y = x^3$, а) $x_0 = 1$, б) $x_0 = 2$
11) $y^2 = 2px$, x_0 , $p > 0$	25) $y = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$
12) $y = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$	26*) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, x_0
Знайдіть кут між кривими 13) $y = x^2$ і $y = x^3 + x^2 - 1$	Знайдіть кут між кривими

14) $y = \sin x$ і $y = \cos x$	27) $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$
---------------------------------	--

III Знайдіть похідні вищих порядків

Класне завдання	Домашнє завдання
1) $y = e^{8x}$, $y''' - ?$	9) $y = x^5 + 3x^2 - 8x + 1$, $y''' - ?$
2) $y = \sin x \cdot \cos x$, $y'' - ?$	10) $y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 6x - 8$, $y^{(8)} - ?$
3) $y = xe^x$, $y''' - ?$	11) $y = 2x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 5x - 2$, $y^{(100)} - ?$
4) $y = x^\alpha$, $y^{(n)} - ?$	12) $y = x \cos x$, $y''' - ?$
5) $y = a^x$, $y^{(n)} - ?$	13) $y = x^3 \ln x + 1$, $y''' - ?$
6) $y = \ln x$, $y^{(n)} - ?$	14) $y = \cos x$, $y^{(n)} - ?$
7) $y = \sin x$, $y^{(n)} - ?$	15) $y = x^3 \cdot e^{2x}$, $y^{(25)} - ?$
8) $y = x^3 \cdot \cos(2x)$, $y^{(25)} - ?$ Використати формулу Лейбніца.	Використати формулу Лейбніца.

IV Знайдіть похідну неявно заданої функції

Класне завдання	Домашнє завдання
1) $y = xy^2 + 1$, $y' - ?$	5) $y = y^3x + y^2 + 1$, $y' - ?$
2) $y = e^{xy}$, $y' - ?$	6) $y = x \cos y$, $y'' - ?$
3) $y = x \sin y$, $y' - ?$	
4) $y = x \exp(y)$, $y'' - ?$	

V Знайдіть похідну оберненої функції $x = f^{-1}(y)$

Класне завдання	Домашнє завдання
1) $y = x^3 + 4x + 1$. Чи існує обернена функція на всій осі?	3) $y = x^8 - 2x^4 + 3$
2) $y = \cos(e^x)$. Перевірте вірність отриманого виразу.	4) $y = \cos x$. Перевірте вірність отриманого виразу за таблицею похідних.

VI Знайдіть похідну 1-го і 2-го порядку y'_x , y''_{xx} параметрично заданої функції

Класне завдання	Домашнє завдання
-----------------	------------------

1) $\begin{cases} x = t \\ y = 2t^2 + 3 \end{cases}$	5) $\begin{cases} x = t \\ y = \cos t \end{cases}$
2) $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$	6) $\begin{cases} x = e^t \\ y = 2t \end{cases}$
3) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^3 \end{cases}$	7) $\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}$
4) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$	

VII Розв'яжіть задачі

1) При надуванні повітряної кульки радіус R рівномірно збільшується. З якою швидкістю збільшується площа поверхні кульки?

2) Покажіть, що рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точці (x_0, y_0) має вигляд $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

3) Знайдіть похідну 178-порядку функції $f(x) = e^x$.

4) Нехай $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – задані дійсні числа. Нехай ϵ фіксована точка x_0 . Знайдіть поліном $P_n(x)$ степені n , який у точці x_0 має похідні $P_n^{(k)}(x_0) = a_k$, для всіх $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

5) Покажіть, що криві сімейства гіпербол перетинаються під прямим кутом $xy = a$, $x^2 - y^2 = b$.

6) Дано рівняння руху точки $s(t) = t^2 + 2t$. Для моменту $t_0 = 1$ знайдіть точне значення приросту $\Delta s(t_0)$ і наближене значення $\Delta s(t_0) \approx ds(t_0)$ при а) $\Delta t = 0,1$, б) $\Delta t = 0,01$.

7) Замінюючи приріст функції її диференціалом, знайдіть наближено наступні значення

а) $\sin 5^\circ$, б) $\sqrt[3]{1,02}$, в) $\ln 3$.

VIII Знайдіть границі з використанням правила Лопітала

Класне завдання	Домашнє завдання
-----------------	------------------

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos x - 1) + x^2}{\operatorname{tg} x^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{\sin \operatorname{tg} \arcsin x^3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 7x + 6}{-2x^2 - 6x + 36}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 - 15x - 20}{3x^2 - 9x - 12}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2 + 24x + 45}{4x^2 + 16x + 12}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{4x^2 - 8x - 96}{-4x^2 + 28x - 24}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$$

12)

$$a) \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x$$

б) довести, що x наближається до 0 швидше, ніж логарифм у будь-якому натуральному степені наближається до $-\infty$.

в) довести, що x^α , при $\alpha > 0$, наближається до 0 швидше, ніж $\ln x$ наближається до $-\infty$.

13)

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$$

б) довести, що e^x зростає на $+\infty$ швидше, ніж x у будь-якому додатному степені.

14)

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\operatorname{tg} \sin x^3}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+x} - 1}{x}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^3 - 1}{x}$$

$$21) \lim_{x \rightarrow -6} \frac{-5x^2 - 50x - 120}{5x^2 + 15x - 90}$$

$$22) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2 - 6x - 45}{4x^2 + 16x + 12}$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$

$$24) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 + x^2 - x - 1}$$

б) довести, що x у будь-якому додатному степені зростає на $+\infty$ швидше, ніж логарифм.

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[4]{1-x}}{\sqrt[5]{1+x} - \sqrt[4]{1-x}}$$

IX З використанням формули Тейлора знайдіть

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$$

Зауваження: не розписувати тангенс за визначенням, а розкласти його за формулою Тейлора.

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{\sin x - x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x)}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right) \quad (\text{Вказівка: розписати}$$

котангенс за визначенням)

$$6) \text{ а) } \sin 5^0, \quad \text{б) } \sqrt[3]{1,02}, \quad \text{в) } \ln 3.$$

X Знайдіть похідну функції

$$1) f(x) = x^4$$

$$2) f(x) = 10^x$$

$$3) f(x) = 2 \cdot \operatorname{ctg} x$$

$$4) f(x) = \cos x - \operatorname{ch} x$$

$$5) f(x) = 3 \operatorname{sh} x - 6 \operatorname{arctg} x$$

$$6) f(x) = \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{sh} x$$

$$7) f(x) = 6 \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin x$$

$$8) f(x) = \frac{\sin x}{\operatorname{ctg} x}$$

$$9) f(x) = \operatorname{sh}(2x+6)$$

$$10) f(x) = \operatorname{tg}(x^2+4)$$

$$11) f(x) = \sqrt[4]{3x+7}$$

$$12) f(x) = \sqrt[3]{4x^2-2x+2}$$

$$13) f(x) = \cos(\operatorname{ch}(12^x))$$

$$14) f(x) = \frac{e^x}{\operatorname{ctg} x}$$

$$15) f(x) = \operatorname{arctg}(4x^2+2x-5+\sin x^2)$$

16) $f(x) = \operatorname{arctg}x \cdot \operatorname{tg}x$

17) $f(x) = 5 \cdot 7^x \cdot \operatorname{arcsin}x$

18) $f(x) = 4\operatorname{arctg}x - 6\operatorname{sh}x$

19) $f(x) = 3 \cdot \cos x$

20) $f(x) = x^{14}$

21) $f(x) = x^{15}$

22) $f(x) = x^{21}$

23) $f(x) = x^7$

24) $f(x) = x^5$

25) $f(x) = x^{17}$

26) $f(x) = 12$

27) $f(x) = 18$

28) $f(x) = 20^x$

29) $f(x) = 9^x$

30) $f(x) = 4 \cdot \sin x$

31) $f(x) = 5 \cdot \operatorname{ctg}x$

32) $f(x) = 3 \cdot \operatorname{ch}x$

33) $f(x) = 4 \cdot \operatorname{arccos}x$

34) $f(x) = 5 \cdot \operatorname{sh}x$

35) $f(x) = 4 \cdot \operatorname{arctg}x$

36) $f(x) = \operatorname{arccos}x - \operatorname{arctg}x$

37) $f(x) = 9^x + \operatorname{tg}x$

38) $f(x) = 10^x + \operatorname{sh}x$

39) $f(x) = x^3 - \operatorname{arctg}x$

40) $f(x) = 4 \ln x - 3e^x$

41) $f(x) = 2 \cos x - 5 \operatorname{ctg}x$

42) $f(x) = 3 \operatorname{arcsin}x + 4 \operatorname{arccos}x$

43) $f(x) = 6x^{13} + 2 \operatorname{sh}x$

44) $f(x) = \operatorname{ch}x \cdot \operatorname{arcsin}x$

45) $f(x) = \operatorname{arcsin}x \cdot \sin x$

46) $f(x) = \operatorname{ch}x \cdot 21^x$

47) $f(x) = \operatorname{arccos}x \cdot \operatorname{arcsin}x$

48) $f(x) = \operatorname{arcsin}x \cdot \sin x$

49) $f(x) = \operatorname{ch}x \cdot \sin x$

50) $f(x) = 3 \cdot \cos x \cdot e^x$

51) $f(x) = 5 \cdot \operatorname{arctg}x \cdot \ln x$

52) $f(x) = 4 \cdot \sin x \cdot \ln x$

53) $f(x) = 4 \cdot \operatorname{ch}x \cdot \operatorname{sh}x$

54) $f(x) = 4 \cdot 11^x \cdot \operatorname{arccos}x$

55) $f(x) = 5 \cdot \operatorname{arcsin}x \cdot e^x$

56) $f(x) = \frac{x^{10}}{\operatorname{ch}x}$

57) $f(x) = \frac{\operatorname{ctg}x}{x^{14}}$

58) $f(x) = \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{tg}x}$

59) $f(x) = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ctg}x}$

60) $f(x) = \frac{e^x}{\operatorname{sh}x}$

61) $f(x) = \frac{e^x}{\operatorname{ch}x}$

62) $f(x) = \operatorname{tg}(8x + 4)$

63) $f(x) = \sin(8x + 7)$

64) $f(x) = \cos(2x + 5)$

65) $f(x) = \operatorname{ctg}(2x + 8)$

66) $f(x) = e^{2x^5 + 5x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 4x + 3}$

67) $f(x) = \ln(-2x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1)$

68) $f(x) = \sqrt[4]{8x + 5}$

69) $f(x) = \sqrt[3]{9x + 5}$

70) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 2x + 3}$

71) $f(x) = \sqrt[3]{-4x^4 - x^3 - 2x^2 + x + 1}$

72) $f(x) = \cos(\operatorname{sh}(\arcsin x))$

73) $f(x) = \operatorname{sh}(\sin(\arccos x))$

74) $f(x) = (\ln x)^x$

75) $f(x) = (\operatorname{tg}x)^x$

76) $f(x) = \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ctg}x}$

77) $f(x) = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{tg}x}$

78) $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = \operatorname{tg}t \end{cases} \quad y'_x - ?$

79) $\begin{cases} x = 2t^3 \\ y = \operatorname{arctg}t \end{cases} \quad y'_x - ?$

80) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

81) $f(x) = x \ln x$

82) $f(x) = \sin^2 x$

83) $f(x) = \cos^2(3x + 5)$

84) $f(x) = \ln^2(5x)$

85) $f(x) = x^x$

86) $f(x) = (\sin x)^x$

87) $f(x) = (\cos x)^x$

88) $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$

89) $f(x) = (\cos x)^{\cos x}$

90) $f(x) = \operatorname{ctg}(\sin(7^x))$

91) $f(x) = (4x + 7)^3$

92) $f(x) = \frac{\operatorname{arcctg}x}{\operatorname{tg}x}$

Відповіді

II. 1) $\vec{v} = (0, 1)$, $\vec{a} = (4, 0)$

2) $\vec{v} = (3e + 1, -\sin 1)$, $\vec{a} = (3e, -\cos 1)$

3) $\vec{v} = \left(\frac{7}{2}, e^2\right)$, $\vec{a} = \left(-\frac{1}{4}, e^2\right)$

4) $\vec{v} = (\sin 1 + \cos 1, 1)$, $\vec{a} = (2\cos 1 - \sin 1, -1)$

5) $\vec{v} = (5, 1)$, $\vec{a} = (2, 1)$

6) $\vec{v} = (12\cos 13, 0)$, $\vec{a} = (4, -144\sin(13) + 6\cos(13))$

10) а) $y_{\text{дот}} = 2x - 1$, $y_{\text{норм}} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$; б) $y_{\text{дот}} = 4x - 4$, $y_{\text{норм}} = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$

11) $y_{\text{дот}} = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{p}{x_0}} \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{px_0} \right)$, $y_{\text{норм}} = \pm \left(-\sqrt{2} \sqrt{\frac{x_0}{p}} \cdot x + \sqrt{2} \sqrt{\frac{x_0}{p}} x_0 + \sqrt{2px_0} \right)$

12) $y_{\text{дот}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$, $y_{\text{норм}} = \sqrt{2}x + \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

15) $\vec{v} = (0, 1)$, $\vec{a} = (-1, 0)$

16) $\vec{v} = (\cos 1, 6)$, $\vec{a} = (-\sin 1, -2)$

17) $\vec{v} = (e^2, 2)$, $\vec{a} = (e^2, 0)$

18) $\vec{v} = (1, 1)$, $\vec{a} = (0, 0)$

19) $\vec{v} = (2e, 2)$, $\vec{a} = (3e, 0)$

20) $\vec{v} = (2, -11\sin 6)$, $\vec{a} = (2, -121\cos 6 - 10\sin 6)$

24) а) $y_{\text{дот}} = 3x - 2$, $y_{\text{норм}} = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$; б) $y_{\text{дот}} = 12x - 16$, $y_{\text{норм}} = -\frac{1}{12}x + \frac{49}{6}$

25) $y_{\text{дот}} = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$, $y_{\text{норм}} = -\sqrt{2} \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$

26) рівняння дотичної: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$, рівняння нормалі: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$

РОЗДІЛ 5. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ З ВИКОРИСТАННЯМ ДИФЕРЕНЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Стислий алгоритм

дослідження функції $y = f(x)$

1) ОДЗ.

2) Парність/непарність.

3) Періодичність.

4) Точки перетину з осями.

4.1. Підставляємо $x = 0$, знаходимо точки перетину з віссю Oy .

4.2. Підставляємо $y = 0$, якщо виходить, розв'язуємо рівняння $f(x) = 0$ і знаходимо точки перетину з віссю Ox .

5) Точки розриву функції – з ОДЗ.

6) Асимптоти.

6.1. Вертикальна асимптота $x = a$: $\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = \infty, +\infty, -\infty$.

6.2. Похила асимптота $y = kx + b$ існує, якщо $\exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in R$,
 $\exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b \in R$. Якщо $k = 0$, то $y = b$ – горизонтальна асимптота.

7) Обчислити першу похідну $f'(x)$.

7.1. Знайти критичні точки, такі x , для яких $f'(x) = 0$ і ОДЗ.

7.2. Знайти інтервали монотонності. Якщо $f'(x) > 0$, то функція зростає, якщо $f'(x) < 0$, то спадає.

7.3. Якщо похідна при переході через точку (яка належить ОДЗ) змінює знак з “+” на “-”, то в цій точці максимум. Якщо з “-” на “+”, то в цій точці мінімум.

8) Обчислити другу похідну $f''(x)$.

8.1. Знайти точки, у яких $f'' = 0$ і ОДЗ.

8.2. Знайти інтервали опуклості функції. Якщо $f''(x) > 0$, то функція опукла вниз (опукла). Якщо $f''(x) < 0$, функція опукла вгору (угнута).

8.3. Якщо при переході через точку функція змінює напрямок опуклості, то ця точка – точка перегину.

Задачі для самостійного розв'язання

Дослідити функцію та побудувати її графік

1) $y = \frac{x^2}{x-1}$

2) $y = -x^3 + 4x - 3$

3) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$

4) $y = \frac{x}{x-1}$

5) $y = \frac{1+x^4}{x}$

6) $y = x^3 + 4x^2 + x$

7) $y = \frac{1}{x+1} + \ln(x+1)$

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФОРМУЛИ

Основна тригонометрична тотожність і наслідки.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha \equiv \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \equiv \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

Подвійні кути	Синус/косинус суми/різниці
$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$	$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ або	$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$
$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ або	$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$
$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$	$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$
$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$
Сума/різниця синусів/косинусів	Перетворення добутку у суму
$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	$2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$
$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$	$2 \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$
$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	$2 \sin \alpha \cdot \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$
$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$	
Формули зниження степеня	Універсальна тригонометрична підстановка
$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$	$t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$
$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$	$\cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{2t}{1 - t^2}$

Значення тригонометричних функцій при деяких кутах

градуси	0	30 ⁰	45 ⁰	60 ⁰	90 ⁰	120 ⁰	135 ⁰	150 ⁰	180 ⁰
радіани	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

градуси	210 ⁰	225 ⁰	240 ⁰	270 ⁰	300 ⁰	315 ⁰	330 ⁰	360 ⁰
радіани	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

ТАБЛИЦЯ ЕКВІВАЛЕНТНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай $x \rightarrow 0$. Тоді

$$\sin x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\operatorname{tg} x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x$$

$$\operatorname{sh} x \sim x$$

$$\operatorname{ch} x - 1 \sim \frac{x^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{ch} x \sim 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$\operatorname{ctg} x \sim \frac{1}{x}$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$$

$$(1+x)^m - 1 \sim mx$$

$$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$$

ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ

Похідна	Обмеження на область зміни аргументу
1. $C' = 0$	
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$	$x > 0$ при $n \in R$, $x \in R$ при $n \in N$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$	$x \in R$ ($a > 0, a \neq 1$)
4. $(e^x)' = e^x$	
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$x \in R \setminus \{0\}$ ($a > 0, a \neq 1$)
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x \in R \setminus \{0\}$
7. $(\sin x)' = \cos x$	
8. $(\cos x)' = -\sin x$	
9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$
10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq \pi k, k \in Z$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	
14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	
15. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	
16. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$	
17. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	
18. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$x \neq 0$

ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

1. Константа виноситься

$$(Cf)' = Cf'$$

2. Похідна суми (різниці)

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

3. Похідна добутку

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$$

4. Похідна частки

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$$

5. Похідна складеної функції

$$(f(g(h(\dots j(x)\dots))))' = f'_g(g(h(\dots j(x)\dots))) \cdot g'_h(h(\dots j(x)\dots)) \cdot \dots \cdot j'_x(x)$$

**РОЗКЛАДЕННЯ ДЕЯКИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЇ ЗА ФОРМУЛОЮ
МАКЛАРЕНА**

$$1) e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$2) \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \left[\begin{array}{l} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \end{array} \right] = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \left[\begin{array}{l} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \end{array} \right]$$

$$3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \left[\begin{array}{l} o(x^{2n}) \\ o(x^{2n+1}) \end{array} \right] = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \left[\begin{array}{l} o(x^{2k}) \\ o(x^{2k+1}) \end{array} \right]$$

$$4) \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots + \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} + \left[\begin{array}{l} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \end{array} \right]$$

$$5) \operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \left[\begin{array}{l} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \end{array} \right] = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \left[\begin{array}{l} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \end{array} \right]$$

$$6) \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \left[\begin{array}{l} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \end{array} \right] = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \left[\begin{array}{l} o(x^{2k}) \\ o(x^{2k+1}) \end{array} \right]$$

$$7) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + o(x^n).$$

$$8) \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n).$$

$$9) \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + o(x^n).$$

$$10) \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{(2k)!!} x^k + o(x^n).$$

$$11) \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k + o(x^n).$$

$$12) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^{2k} + \left[\begin{array}{l} o(x^{2n}) \\ o(x^{2n+1}) \end{array} \right]$$

$$13) \arcsin x = x + \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)} x^{2k+1} + \left[\begin{array}{l} o(x^{2n+1}) \\ o(x^{2n+2}) \end{array} \right]$$

Електронне навчальне видання комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимі

Каліберда Мстислав Євгенович
Погарський Сергій Олександрович

**ПРИКЛАДНИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
ТА ЕЛЕМЕНТИ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ**

Методичні вказівки до практичних занять
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за спеціальністю Еб «Прикладна фізика та наноматеріали»

У 2 частинах

Частина 1

В авторській редакції

Підписано до розміщення 25.06.2025. Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 3,58. Обсяг 1,780 Мб. Зам. № 262/25.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009
Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна