

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра фундаментальної математики

Кваліфікаційна робота

освітньо-кваліфікаційний рівень: *магістр*

на тему *«Деякі диференціальні рівняння у
модулі кополіномів над комутативним
кільцем»*

Виконав: студент групи М162 VI курсу
(другий магістерський рівень),
спеціальності 111
“Математика”
освітньо-професійної програми
“Математика”
Назаренко Г.В.

Керівник: кандидат фіз.-мат. наук,
доцент кафедри
фундаментальної математики
Гефтер С.Л.

Рецензент: доцент кафедри
прикладної математики
Макаров О.А.

Харків — 2023 рік

Зміст

Анотація	3
1 Вступ	4
2 Попередня інформація	5
3 Основні результати	16
Список використаних джерел	21

Анотація

Ця робота присвячена суто алгебраїчному підходу до теорії узагальнених функцій, що був запропонован у роботах С.Л. Гефтера і О.Л. Півня. Досліджується конструкція множення кополіномів, та кільце поліномів як простір "основних функцій". У цьому контексті кополіноми, розглядаються як аналоги узагальнених функцій.

Робота починається з розділу, де викладені властивості кополіномів та представлені приклади їх використання. Основна частина роботи, розділ 3, містить ключові результати. Теорема "про двійку" вказує на те, що диференціальне рівняння $T' = T^m$ має ненульовий розв'язок лише при $m = 2$. Вона також встановлює характеристику δ -функції в цьому контексті.

Другий основний результат полягає в загальній теоремі про існування ненульових розв'язків для нелінійного диференціального рівняння $T' = P(T)$, де $P(y)$ є поліномом, що задовольняє умову $P(0) = 0$.

Робота пропонує новий підхід до розуміння узагальнених функцій, де алгебраїчні методи дозволяють отримати цікаві результати, відмінні від їх класичних аналогів.

This work is dedicated to a purely algebraic approach to the theory of generalized functions proposed in the works of S.L. Gevter and O.L. Pivnya. It investigates the construction of copolynomials and the ring of polynomials as a space of "test functions." In this context, copolynomials are considered as analogs of generalized functions.

The paper starts with a section outlining the properties of copolynomials and presenting examples of their usage. The main part of the work, Section 3, contains key results. The theorem "about two" indicates that the differential equation $T' = T^m$ has a nontrivial solution only for $m = 2$. It also establishes the characteristic of the δ -function in this context.

The second main result lies in the general theorem on the existence of nontrivial solutions for the nonlinear differential equation $T' = P(T)$, where $P(y)$ is a polynomial satisfying the condition $P(0) = 0$.

The work proposes a new approach to understanding generalized functions, where algebraic methods lead to interesting results distinct from their classical analogs.

Розділ 1

Вступ

Класична теорія узагальнених функцій відіграє важливу роль в математичній фізиці, теорії лінійних диференціальних рівнянь з частковими похідними та у деяких інших розділах математики (див. наприклад, [1]). При дослідженні нелінійних диференціальних рівнянь виникають певні складності, пов'язані з необхідністю перемножати узагальнені функції. Є декілька нееквівалентних підходів до конструкції множення узагальнених функцій (див. наприклад, [5–7]). В представленій роботі розглядається суто алгебраїчний підхід до теорії узагальнених функцій. Деякі варіанти цього підходу були запропоновані в роботах ([4], [8–12]). У якості простору "основних функцій" в роботі розглядається кільце поліномів над цілісним комутативним кільцем. "Узагальнені функції" - це лінійні функціонали в у цьому кільці поліномів. Такі лінійні функціонали називають кополіномами. У другому розділі представленої роботи наведені відомі властивості кополіномів та розглянуті змістовні приклади. Основні результати дипломної роботи містяться в розділі 3. Перший основний результат - теорема "про двійку", яка говорить про те що диференціальне рівняння $T' = T^m$ має ненульовий розв'язок тільки в випадку, коли $m = 2$ (див. стор. 18). Також наведені наслідки з цієї теореми, які повністю характеризують δ -функцію (див. стор. 16-17) у кільці кополіномів. Відмітемо що ці результати дуже сильно відрізняються від відповідних результатів класичної теорії диференціальних рівнянь. Другий основний результат дипломної роботи - загальна теорема про існування ненульового розв'язку нелінійного диференціального рівняння $T' = P(T)$, де $P(y)$ поліном і $P(0) = 0$ (див. стор. 18-19).

Розділ 2

Попередня інформація

2.1.

Нехай K - це цілісне комутативне кільце нульової характеристики з 1 і $K[x]$ - кільце поліномів з коефіцієнтами з K .

Означення 1. *Кополіном над K визначається як K -лінійний функціонал, заданий на кільці $K[x]$, тобто як гомоморфізм модуля $K[x]$ у кільце K .*

Через $K[x]'$ позначимо модуль кополінома над кільцем K . Таким чином, $T \in K[x]'$ тоді і тільки тоді, коли $T : K[x] \rightarrow K$ і T має властивість K -лінійності: $T(ap + bq) = aT(p) + bT(q)$ для будь яких $p, q \in K[x]$ та $a, b \in K$. Якщо $T \in K[x]'$, то для значення T на p , ми використовуємо запис (T, p) . Також будемо записувати кополіном $T \in K[x]'$ у вигляді $T(x)$, де x розглядається як аргумент поліномів $p(x) \in K[x]$. У цьому випадку результат дії T на p можна подати у вигляді $(T(x), p(x))$. Якщо $a \in K$ та $T \in K[x]'$, то операція множення $aT \in K[x]'$ визначається наступною формулою:

$$(aT, p) = a(T, p), \quad p \in K[x].$$

Нехай

$$p(x) = \sum_{n=0}^m a_n x^n \in K[x]$$

Для довільного $x \in K$ розглянемо поліном $p(x+h) \in K[h]$:

$$p(x+h) = \sum_{n=0}^m p_n(x) h^n,$$

де $p_n(x) \in K$. Оскільки, у випадку поля з нульовою характеристикою,

$$p_n = \frac{p^{(n)}(x)}{n!},$$

ми також припускаємо, що за означенням

$$\frac{p^{(n)}(x)}{n!} = p_n(x), \quad n = 0, \dots, m,$$

це також вірно для будь-якого комутативного кільця K . Для $n > m$ ми припускаємо, що

$$\frac{p^{(n)}(x)}{n!} = 0.$$

Означення 2. Похідна T' кополінома $T \in K[x]'$ як і в класичному випадку, задається формулою

$$(T', p) = -(T, p'), \quad p \in K[x].$$

Використовуючи цей результат, отримуємо наступний вираз для похідної n -го порядку:

$$(T^{(n)}, p) = (-1)^n (T, p^{(n)}), \quad p \in K[x].$$

Отже,

$$(T^{(n)}, p) = 0, \quad \text{якщо } T \in K[x]', \quad p \in K[x], \quad n > \deg p.$$

У силу рівності

$$\left(\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} T, p \right) = \left(\frac{T^n}{n!}, p \right) = (-1)^n \left(T, \frac{p^{(n)}}{n!} \right), \quad p \in K[x],$$

кополіноми $\frac{T^{(n)}}{n!}$ добре визначені для будь-яких $T \in K[x]'$ та $n \in \mathbb{N}$.

Приклад 1. Кополіном δ -функція задається формулою

$$(\delta, p) = p(0), \quad p \in K[x].$$

Для кополінома δ -функції знаходимо похідну n -го порядку наступним чином:

$$(\delta^{(n)}, p) = (-1)^n (\delta, p^{(n)}) = (-1)^n p^{(n)}(0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.2.

Розглянемо важливий випадок, коли $K = \mathbb{R}$.

Нехай f інтегровна за Лебегом функція та

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x^k f(x)| dx < +\infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Тоді f породжує регулярний кополіном

$$(f, p) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) f(x) dx, \quad p \in \mathbb{R}[x].$$

Через $S(\mathbb{R})$ позначимо простір Шварца швидко спадних функцій, тобто множину комплексозначених функцій $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, для яких

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^n f^{(k)}(x)| < \infty, \quad k, n = 0, 1, 2, \dots$$

Нехай $D(\mathbb{R})$ - множина фінітних функцій з $S(\mathbb{R})$.

Покажемо, що на відміну від класичної теорії узагальнених функцій, у випадку кільця $K = \mathbb{R}$ всі кополіноми є регулярними. Це впливає з наступної лема.

Лема 1. *Для будь якої послідовності $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ дійсних чисел існує така дійсна функція $f \in S(\mathbb{R})$, що*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Доведення. В силу теореми Бореля [1] існує функція $\varphi \in D(\mathbb{R})$ така, що

$$\varphi^{(n)}(0) = (-i)^n a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Зворотнє перетворення Фур'є цієї функції

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

є елементом простору Шварца $S(\mathbb{R})$. Тоді $\varphi(\lambda)$ є перетворенням Фур'є функції $f_1(x)$:

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-i\lambda x} dx$$

та з урахуванням рівності (2)

$$(-i)^n a_n = \varphi^{(n)}(0) = (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_1(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n f_1(x) dx = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

Покладемо $f(x) = \operatorname{Ref}_1(x)$, тоді $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ та $f \in S(\mathbb{R})$. В силу (3) функція f відповідає умовами (1). Лемма доведена.

Відмітемо, що більш складне доведення більш загального факту можна знайти у книзі [2].

Зауваження. На відміну від класичної теорії, функція, що породжує кополіном, визначається неоднозначно. Наприклад, ненульова функція може породжувати нульвий кополіном. Наведемо відомий приклад Стілтєса.

Приклад 2. Нехай

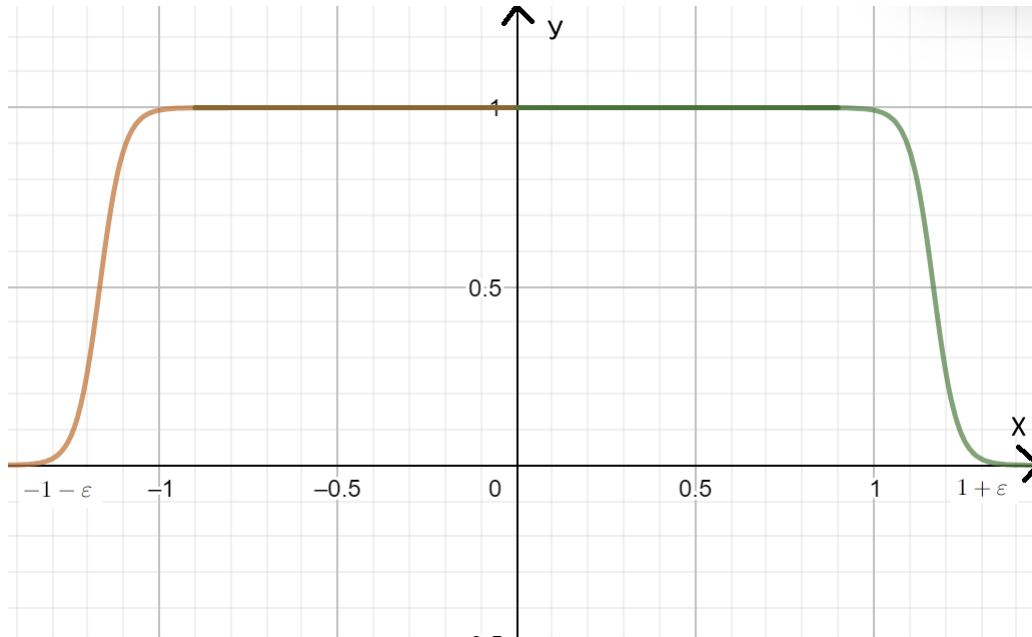
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\sqrt[4]{x}} \sin \sqrt[4]{x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

тоді, за класичним результатом Стілтєса (див. [3]), маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

тобто, f є нульвим кополіномом.

Приклад 3. Нехай $\varphi(\lambda)$ - майже характеристична функція відрізка $[-1; 1]$, що належить простору $D(\mathbb{R})$ (див. [1], теорема 1.4.1 та малюнок нижче):



Маємо: $\varphi(0) = 1$, $\varphi^{(n)}(0) = 0$, $n \geq 1$. Нехай тепер

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \varphi(\lambda) \cos \lambda x \, d\lambda.$$

Тоді $(\delta, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x) \, dx$ для всіх $p \in \mathbb{R}[x]'$ (див. доведення леми 1). Таким чином,
 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x) \, dx = p(0)$ для всіх $p \in \mathbb{R}[x]$.

Приклад 4 [4]. Нехай $K = \mathbb{R}$ і $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Знайдемо, що у просторі кополіномів суму ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^n \delta^{(n)}$$

(ця нескінченна сума є регулярним поліномом і коректно визначена, оскільки $(\delta^{(n)}, p) = 0$, якщо $n > \deg p$). Покажемо, що

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^n \delta^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} e^{-x/a}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Для цього ми зазначаємо, що

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{a}} x^k \, dx = k! a^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Нехай $p \in \mathbb{R}[x]$ і

$$p(x) = \sum_{k=0}^m \frac{p^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Якщо

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} e^{-x/a}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

тоді

$$\begin{aligned} (f, p) &= \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{a}} p(x) dx = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^m \frac{p^{(k)}(0)}{k!} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{a}} dx = \sum_{k=0}^m a^k p^{(k)}(0) \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^k a^k (\delta^{(k)}, p) = \left(\sum_{k=0}^m (-1)^k a^k \delta^{(k)}, p \right). \end{aligned}$$

2.3.

Розглянемо деякі приклади диференціальних рівнянь у просторі $K[x]'$.

1. Диференціальне рівняння $T' = 0$. Покажемо що воно має тільки нульовий розв'язок.

За означенням $(T', p) = -(T, p')$, отже ми маємо:

$$(T', 1) = -(T, 1') = -(T, 0) = 0$$

$$0 = (T', x) = -(T, x') = -(T, 1)$$

$$-2(T, x) = -(T, 2x) = -(T, (x^2)') = (T', x^2) = 0 \Rightarrow (T, x) = 0$$

...

$$-k(T, x^{k-1}) = -(T, kx^{k-1}) = -(T, (x^k)') = (T', x^k) = 0 \Rightarrow (T, x^{k-1}) = 0.$$

...

Тож ми маємо що на кожному мономі дія T дорівнює нулю, тобто $T = 0$.

2. Диференціальне рівняння $T' = \delta$. Покажемо, що це рівняння не має розв'язків. Маємо:

$$0 = -(T, 0) = (T', 1) = (\delta, 1) = 1.$$

Отримали протиріччя, значить в рівняння $T' = \delta$ нема розв'язку.

3. Розглянемо більш загальне диференціальне рівняння $T' = S$, де S - відомий ко-поліном (у попередньому прикладі показано, що це рівняння може не мати розв'язків).

Доведемо тепер єдність розв'язків цього рівняння, тобто єдність первісної. Нехай існує дві первісні S_1, S_2 до S . Розглянемо моном x^k на якому вони відрізняються

$$-(k+1)(S_1 - S_2, x^k) = -(S_1 - S_2, (k+1)x^k) = (k+1)((S_1 - S_2)', x^{k+1}) =$$

$$(k+1)(S - S, x^{k+1}) = (k+1)(0, x^{k+1}) = 0.$$

Оскільки кільце K має нульову характеристику, то $(S_1 - S_2, x^k) = 0$ для всіх $k = 0, 1, 2, \dots$, тобто $S_1 = S_2$.

4. Знайдемо критерій існування первісної для кополінома. Необхідна умова існування первісної: $(T, 1) = 0$, оскільки, якщо $T = Q'$, тоді $(T, 1) = (Q', 1) = -(Q, 1') = 0$. Покажемо, що критерій існування первісної у кополінома T є наступна умова: $k|(T, x^k) \quad k = 1, 2, \dots$ та $(T, 1) = 0$.

Доведення: Нехай $T = Q'$. Тоді

$$(T, x^k) = (Q', x^k) = -(Q, kx^{k-1}) = -k(Q, x^{k-1}) \Rightarrow k|(T, x^k).$$

Нехай $k|(T, x^k)$, тоді можна наступним чином побудувати кополіном, для якого $T = Q'$: покладемо $(Q, 1) = 0$, далі для будь якого $k = 1, 2, \dots$, побудуємо Q

$$(Q, x^{k-1}) = (Q, \frac{1}{k}kx^{k-1}) = -(Q', \frac{1}{k}x^k) = -\frac{1}{k}(T, x^k).$$

2.4.

Нехай $T \in K[x]'$. Перетворенням Коші кополінома T будемо називати наступний формальний ряд Лорана:

$$C(T)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T, x^n)}{z^{n+1}} = \frac{(T, 1)}{z} + \frac{(T, x)}{z^2} + \dots$$

Оскільки ряд Лорана повністю визначений своїми коефіцієнтами, то перетворення Коші $C(T)(z)$ повністю визначає кополіном T . Відмітемо, що розглянуті формальні ряди Лорана можна перемножати:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots \right) \left(\frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \frac{b_3}{z^3} + \dots \right) = \\ & = \frac{a_1 b_1}{z^2} + \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{z^3} + \frac{a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1}{z^4} + \dots \end{aligned}$$

Тепер за допомогою добутків перетворень Коші ми можемо ввести добуток кополіномів: якщо $T_1, T_2 \in K[x]$, то $T_1 T_2$ - це такий кополіном, що $C(T_1 T_2) = C(T_1) C(T_2)$. Оскільки розглянуті формальні ряди Лорана утворюють комутативне асоціативне кільце без одиниці, то модуль кополіномів $K[x]'$ із введеною операцією множення становить комутативне асоціативне кільце без одиниці.

Приклад 1.

$$C(\delta)(z) = \frac{1}{z}.$$

Перетворення Коші наступним чином пов'язане з похідною.

Лема 2. *Нехай $T \in K[x]'$. Тоді $C(T') = C(T)'$.*

Доведення:

$$\begin{aligned} C(T')(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T', x^n)}{z^{n+1}} = \frac{(T', 1)}{z} + \frac{(T', x)}{z^2} + \dots + \frac{(T', x^k)}{z^{k+1}} + \dots = \\ &= \frac{-(T, 0)}{z} + \frac{-(T, 1)}{z^2} + \dots + \frac{-k(T, x^{k-1})}{z^{k+1}} + \dots = \\ &= -\frac{(T, 1)}{z^2} + \dots + -k \frac{(T, x^{k-1})}{z^{k+1}} + \dots = \\ &= (T, 1) \left(\frac{1}{z}\right)' + \dots + (T, x^{k-1}) \left(\frac{1}{z^k}\right)' + \dots = C(T)'(z). \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайдемо δ^2 . Маємо:

$$C(\delta^2)(z) = \frac{1}{z^2} = -\frac{1}{z}' = -C(\delta)'(z) = -C(\delta')(z),$$

тобто $\delta^2 = -\delta'$. Аналогічно,

$$C(\delta^{n+1})(z) = \frac{1}{z^{n+1}}, \quad C(\delta^{(n)})(z) = C(\delta)^{(n)}(z) = \left(\frac{1}{z}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{z^{n+1}}.$$

Тому

$$\delta^{n+1} = \frac{(-1)^n \delta^{(n)}}{n!}, \quad n \geq 0.$$

Теорема 1. Нехай $T_1, T_2 \in K[x]'$. Тоді $(T_1 T_2)' = T_1' T_2 + T_1 T_2'$.

Доведення:

$T_1 T_2$ - це такий кополіном, що $C(T_1 T_2) = C(T_1)C(T_2)$.

$$\text{Нехай } C(T_1) = \left(\frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots\right), \quad C(T_2) = \left(\frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \frac{b_3}{z^3} + \dots\right)$$

Користуючись попередньою лемою, $C((T_1 T_2)') = C(T_1 T_2)' =$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{a_1 b_1}{z^2} + \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{z^3} + \frac{a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1}{z^4} + \dots\right)' = \\ &= \sum_{k=3}^{\infty} -k \frac{a_{k-1} b_1 + \dots + a_1 b_{k-1}}{z^{k+1}} = \\ &= \sum_{k=3}^{\infty} \left(- (k-1) \frac{a_{k-1}}{z^k} \frac{b_1}{z} - (k-2) \frac{a_{k-2}}{z^{k-1}} \frac{b_2}{z^2} - \dots - \frac{a_1}{z^2} \frac{b_{k-1}}{z^{k-1}} \right) + \\ &\quad + \left(- \frac{a_{k-1}}{z^{k-1}} \frac{b_1}{z^2} - 2 \frac{a_{k-2}}{z^{k-2}} \frac{b_2}{z^3} - \dots - (k-1) \frac{a_1}{z} \frac{b_{k-1}}{z^k} \right) = \\ &= \sum_{k=3}^{\infty} \left(\left(\frac{a_{k-1}}{z^{k-1}} \right)' \frac{b_1}{z} + \dots + \left(\frac{a_1}{z} \right)' \frac{b_{k-1}}{z^{k-1}} \right) + \\ &\quad + \sum_{k=3}^{\infty} \left(\left(\frac{a_{k-1}}{z^{k-1}} \right) \left(\frac{b_1}{z} \right)' + \dots + \frac{a_1}{z} \left(\frac{b_{k-1}}{z^{k-1}} \right)' \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{z^k} \right)' \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{z_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z_k} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b_k}{z^k} \right)' = \\ &= C(T_1)' C(T_2) + C(T_1) C(T_2)' = C(T_1' T_2) + C(T_1 T_2') = C(T_1' T_2 + T_1 T_2'). \end{aligned}$$

Отже теорему доведено.

Наслідок 1. Нехай $T \in K[x]'$. Тоді $(T^m)' = m T^{m-1} \cdot T, \quad m \geq 1$.

Доведення.

Будемо доводити за індукцією.

1° перевіримо базу $n = 2$:

$$(T^2)' = T' \cdot T + T \cdot T' = 2 T \cdot T' \Rightarrow (T^2)' = 2 T \cdot T'.$$

2° перехід $n = k \rightarrow n = k + 1$:

$$\begin{aligned} (T^n)' &= nT^{n-1} \cdot T', \text{ тоді } C((T^{n+1})') = C((T^n \cdot T)') = \\ &= C((T^n)')C(T) + C(T^n)C(T') = nC(T^{n-1} \cdot T' \cdot T) + C(T^n \cdot T') = \\ &= (n+1)C(T^n \cdot T') \Rightarrow (T^{n+1})' = (n+1)T^n \cdot T' \quad \text{ч. т. д.} \end{aligned}$$

2.5.

Введемо у кільці $K[x]'$ поняття збіжності. Нехай $\{T_n\} \subset K[x]'$ і $T \in K[x]'$.

Означення. $T_n \rightarrow T \Leftrightarrow \forall p \in K[x] \exists n_p \in \mathbb{N} \forall n > n_p : (T_n, p) = (T, p)$.

Як завжди, під збіжністю ряду із кополіномів ми будемо розуміти збіжність по-слідовності його часткових сум. Фактично це означає, що ряд із кополіномів $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ збігається тоді і тільки тоді, коли

$$\forall p \in K[x] \exists n_p \in \mathbb{N} \forall n > n_p : (Q_n, p) = 0.$$

Наступна теорема говорить про те, що будь-який кополіном можна єдиним шляхом розкласти в ряд по похідним, або по степеням δ -функції.

Теорема 2. *Нехай $T \in K[x]'$. Тоді*

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (T, x^n) \frac{\delta^{(n)}}{n!}, \text{ або } T = \sum_{n=0}^{\infty} (T, x^n) \delta^{n+1}.$$

Крім того, ці розкладання визначаються однозначно.

Доведення.

Відмітемо, що ці два ряди фактично співпадають, оскільки $\delta^{n+1} = (-1)^n \frac{\delta^n}{n!}$ (див. підрозділ 2.4). Крім того, вони є збіжними, оскільки $(\delta^{(n)}, p) = 0$, якщо $n > \deg p$. Покажемо тепер, що

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (T, x^n) \frac{\delta^{(n)}}{n!} = T.$$

Маємо:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (T, x^n) \frac{\delta^{(n)}}{n!}, x^k \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (T, x^n) \frac{(\delta^{(n)}, x^k)}{n!} \stackrel{n=k}{=} \\ &= (-1)^k (T, x^k) \frac{(\delta^{(k)}, x^k)}{k!} = (T, x^k) \end{aligned}$$

для всіх $k = 0, 1, 2, \dots$.

Доведемо тепер єдиність розкладу. Нехай $T = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\delta^{(n)}}{n!}$. Маємо:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\delta^{(n)}}{n!}, x^k \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(\delta^{(n)}, x^k)}{n!} \underset{n=k}{=} c_k \frac{(\delta^{(k)}, x^k)}{k!} = (T, x^k) \Rightarrow \\ &\Rightarrow c_k = (-1)^k (T, x^k) \end{aligned}$$

Теорема 3 [8]. *Нехай $T \in K[x]$ і $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset K$. Тоді ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^{(n)}$ збігається і*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^{(n)} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^{(n+1)}.$$

Розділ 3

Основні результати

Розглянемо деякі нелінійні диференціальні рівняння у кільці кополіномів.

Приклад 1. $T' = T^2$. Розв'язок $T = 0$ завжди існує, тому будемо шукати нетривіальний розв'язок.

$$\text{Нехай } T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta^{n+1} = a_1 \delta + a_2 \delta^2 + a_3 \delta^3 + \dots$$

Оскільки $\delta' = -\delta^2$, підставимо це у рівняння, отримаємо згідно з теоремою 3:

$$T' = a_1 \delta' + a_2 (\delta^2)' + a_3 (\delta^3)' + \dots = -a_1 \delta^2 - 2a_2 \delta^3 - 3a_3 \delta^4 - \dots,$$

$$\begin{aligned} T^2 &= (a_1 \delta + a_2 \delta^2 + a_3 \delta^3 + \dots) \cdot (a_1 \delta + a_2 \delta^2 + a_3 \delta^3 + \dots) = \\ &= a_1^2 \delta^2 + 2a_1 a_2 \delta^3 + (2a_1 a_3 + a_2^2) \delta^4 + \dots \end{aligned}$$

Звідси ми отримаємо що $-a_1 = a_1^2 \Rightarrow a_1 = -1$, або $a_1 = 0$. Якщо $a_1 = 0$, то $a_n = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тобто $T = 0$. Нехай тепер $a_1 = -1$. Маємо:

$$-2a_2 = 2a_1 a_2 = -2a_2 \Rightarrow a_2 \text{ будь яке з кільця } K$$

$$-3a_3 = -2a_3 + a_2^2 \Rightarrow a_3 = -a_2^2$$

$$-4a_4 = -2a_4 - 2a_2 \cdot a_2^2 \Rightarrow a_4 = a_2^3$$

Покажемо що $a_k = (-1)^k a_2^{k-1}$. Базу індукції перевірили, докажемо перехід

$$-ka_k = (a_1 a_k + a_2 a_{k-1} + \dots + a_k a_1) = 2(-1)^0 a_2^0 \cdot (-1)^{k-1} a_k + \sum_{j=2}^{k-1} (-1)^j a_2^{j-1} (-1)^{k-j+1} a_2^{k-j} =$$

$$= -2a_k - (k-2)(-1)^k a_2^{k-1} \Rightarrow a_k = (-1)^k a_2^{k-1}.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння $T' = T^2$ має наступний вигляд:

$$T = -\delta + C\delta^2 - C^2\delta^3 + C^3\delta^4 - \dots, \quad C \in K, \quad \text{або } T = 0.$$

Наслідок 2. Розглянемо наступну задачу для нашого диференціального рівняння:

$$\begin{cases} T' = T^2 \\ (T, 1) = b, \quad \text{де } b \in K. \end{cases}$$

Ця задача має розв'язок тоді й тільки тоді, коли $b = 0$, або $b = -1$. У випадку $b = 0$ задача має тільки нулевий розв'язок. Якщо $b = 1$, то задача має нескінченну кількість розв'язків.

Наслідок 3. δ -функція є єдиним розв'язком задачі:

$$\begin{cases} T' = -T^2 \\ (T, 1) \neq 0 \\ (T, x) = 0. \end{cases}$$

Доведення:

Нехай

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta^{n+1} = a_1 \delta + a_2 \delta^2 + a_3 \delta^3 + \dots$$

Як було зазначено у прикладі 1, загальний розв'язок рівняння $T' = T^2$ має наступний вигляд:

$$T = -\delta + C\delta^2 - C^2\delta^3 + C^3\delta^4 - \dots, \quad C \in K.$$

Якщо $T' = -T^2$ в такому разі:

$$T = \delta - C\delta^2 + C^2\delta^3 - C^3\delta^4 + \dots, \quad C \in K,$$

з умови $(T, x) = 0$ витікає що $C = 0$, тобто $T = \delta$.

Розглянемо тепер більш загальне рівняння $T' = T^m$. Наступна теорема є першим основним результатом дипломної роботи.

Теорема "про двійку". Нехай $m \in \mathbb{N}$. Диференціальне рівняння $T' = T^m$ має ненульвий розв'язок тоді й тільки тоді, коли $m = 2$.

Доведення:

Нехай $T = a_1\delta + a_2\delta^2 + a_3\delta^3 + \dots$. Оскільки $\delta' = -\delta^2$ (див. 2.4), тоді $T' = a_1\delta' + 2a_2\delta\delta' + 3a_3\delta^2\delta' + \dots = -a_1\delta^2 - 2a_2\delta^3 - 3a_3\delta^4 - \dots$.

Спочатку розглянемо випадок $m = 1$:

прирівнюючи степені δ ми отримаємо що $a_1 = 0$, звідси отримаємо що $a_2 = -0$ звідки випливає $a_3 = -2 \cdot 0$ і так далі. Отримуємо що $\forall i \in \mathbb{N} \ a_i = 0$, тобто $T = 0$.

Випадок $m = 2$ був вже розглянутий (див. приклад 1.). Розглянемо випадок коли $m \geq 3$:

$$T^m = (a_1\delta + a_2\delta^2 + a_3\delta^3 + \dots)^m = b_m\delta^m + b_{m+1}\delta^{m+1} + b_{m+2}\delta^{m+2} + \dots$$

причому b_j комбінація добутків $a_1, \dots, a_{j-2}$. Прирівнюємо коефіцієнти при степенях δ . Оскільки $m > 2$ отримаємо $a_1 = 0$. Якщо $m = 3$, тоді $-2a_2 = b_3$, $b_3 = a_1^3$ (оскільки кільце цілісне та має нульову характеристику) $\Rightarrow a_2 = 0$. Як було зазначено вище, b_j дорівнює комбінації добутків $a_1, \dots, a_{j-2}$, тобто $b_4 = 0$ оскільки залежить лише від $a_1 = 0$, $a_2 = 0$. Звідси прирівнюючі коефіцієнти при 4-й степені δ , отримаємо $0 = b_4 = a_3$. За такою самою логікою $0 = b_5 \Rightarrow a_4 = 0 \dots$. Тобто усі a_i та b_j дорівнюють 0. Значить $T = 0$. Випадок коли $m \geq 4$ розглядається повністю аналогічно. теорему доведено.

Нехай тепер $P \in K[y]$, $P(0) = 0$, $P(y) = b_1y + b_2y^2 + \dots + b_my^m$. Якщо $T \in K[x]'$, то $P(T) = b_1T + b_2T^2 + \dots + b_mT^m$. Розглянемо у кільці кополіномів $K[x]'$ наступне диференціальне рівняння: $T' = P(T)$. Теорема про існування ненульового розв'язку є другим результатом дипломної роботи.

Теорема про рівняння першого порядку.

1. Якщо рівняння $T' = P(T)$ має ненульвий розв'язок то $b_1 = b_3 = 0$ і елемент b_2 є дільником 1.

2. Нехай виконується умова 1 і кільце K містить поле раціональних чисел. Тоді рівняння $T' = P(T)$ має ненульвий розв'язок.

Доведення.

Нехай T - ненульвий розв'язок рівняння $T' = P(T)$, $T = a_1\delta + a_2\delta^2 + a_3\delta^3 + \dots$.

Маємо:

$$T' = a_1\delta' + 2a_2\delta\delta' + 3a_3\delta^2\delta' + \dots = -a_1\delta^2 - 2a_2\delta^3 - 3a_3\delta^4 - \dots,$$

$$P(T) = b_1(a_1\delta + a_2\delta^2 + \dots) + b_2(a_1\delta + a_2\delta^2 \dots)^2 + b_3(a_1\delta + a_2\delta^2 \dots)^3 + \dots$$

Прирівнюємо коефіцієнти при δ : $b_1a_1 = 0$. Якщо $b_1 \neq 0$, тоді $a_1 = 0$. Тоді:

$$b_1a_2 + b_2a_1^2 = -a_1 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$b_1a_3 + \dots = -2a_2 \Rightarrow a_3 = 0$$

...

Таким чином отримуємо нульвий розв'язок. Значить $b_1 = 0$ та $a_1 \neq 0$. Розглянемо коефіцієнти про δ^2 : $b_2a_1^2 = -a_1 \Leftrightarrow a_1(b_2a_1 + 1) = 0$ оскільки $a_1 \neq 0$ значить $b_2a_1 = -1$ тобто b_2, a_2 є дільниками одиниці причому $a_1 = -b_2^{-1}$. Розглянемо коефіцієнт при δ^3 :

$$-2a_2 = 2b_2a_1a_2 + b_3a_1^3 = -2a_2 + b_3a_1^3 \Rightarrow b_3a_1^3 = 0$$

оскільки $a_1 \neq 0$, то $b_3 = 0$.

Доведемо тепер твердження в інший бік. Ми вже отримали що $a_1 = -b_2^{-1}$, a_2 - довільне, знайдемо інші a_j .

Розглянемо коефіцієнт при δ^4 :

$$-3a_3 = 2b_2a_1a_3 + b_2a_2^2 + b_4a_1^4 = -2a_3 + b_2a_2^2 + b_4a_1^4 \Rightarrow a_3 = -b_2a_2^2 - b_4a_1^4.$$

Розглянемо коефіцієнт при δ^5 :

$$-4a_4 = 2b_2a_1a_4 + 2a_2a_3b_2 + 4b_4a_1^3a_2 + b_5a_1^5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_4 = -\frac{1}{2}(-a_2^3b_2 - b_2b_4 + 4b_4a_1^3a_2 + b_5a_1^5).$$

Аналогічно можемо вразити будь яке a_j , подивимось на коефіцієнт при δ^{n+1} , $n \geq 3$:

$$-na_n = 2b_2a_1a_n + (\dots) \Leftrightarrow a_n = -\frac{1}{n-2} \cdot (\dots)$$

причому помітимо що права частина залежить тільки від $a_1, \dots, a_{n-1}$. Отже теорема доведена.

Наслідок 4. Нехай $P(y)$ - поліном з попередньої теореми, $b_1 = b_3 = 0$, b_2 є дільником 1, $K \subset \mathbb{Q}$ і $a \in K$. Розглянемо наступну задачу для нашого диференціального

рівняння:

$$\begin{cases} T' = P(T) \\ (T, 1) = a. \end{cases}$$

Ця задача має розв'язок тоді й тільки тоді, коли $a = 0$, або $ab_2 = -1$.

Список використаних джерел

- [1] L. V. Hormander, *The Analysis of Linear Partial Differential Equations. 1. Distribution Theory and Fourier Analysis*, Springer, Berlin (1990).
- [2] R. Estrada and R. P. Kanwal, *A distributional approach to asymptotics theory and applications*, Birkhauser (2002).
- [3] E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Oxford Univ. Press, London (1975).
- [4] S. L. Gefter and T. E. Stulova, *Fundamental Solution of the Simplest Implicit Linear Differential Equation in a Vector Space*. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 207, No. 2, (2015), p. 166-175.
- [5] J.F. Colombeau, *Multiplication of distributions. A tool in mathematics, numerical engineering and theoretical physics*, Springer-Verlag, Berlin (1992).
- [6] Yu. V. Egorov, *A contribution to the theory of generalized functions*, Math. Surveys, 45, № 5, 1–49 (1990).
- [7] P. Antosik, J. Mikusinski, and R. Sikorski, *Theory of distributions. The sequential approach*, Elsevier Science Publ. Co., Amsterdam; PWN, Warsaw (1973).
- [8] S.L. Gefter, A.L. Piven', *Linear Partial Differential Equations in Module of Formal Generalized Functions over Commutative Ring*, J. Math. Sci., **257**, № 5, 579–596 (2021).
- [9] S.L. Gefter, A.L. Piven', *Implicit Linear Differential Difference Equations in the Module of Formal Generalized Functions over a Commutative Ring*, J. Math. Sci., **255**, № 4, 409–422
- [10] S.L. Hefter, O.L. Piven', *Infinite-Order Differential Operators in the Module of Formal Generalized Functions and in a Ring of Formal Power Series*. Ukr. Math. J., 74, 896–915 (2022).

- [11] I. Frenkel, J. Lepovsky, and A. Meurman, Vertex Operator Algebras and the Monster, Academic Press, New York (1988).
- [12] V. G. Kac, Vertex Algebras for Beginners, AMS, Providence, RI (1998).