

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

магістра

на тему *«Диференціальне рівняння з
частинними похідними четвертого порядку в
просторах розподілів»*

Виконала: студентка групи МП61 II курсу
(другий магістерський рівень),
спеціальності 113

“Прикладна математика”

освітньо-професійної програми

“Прикладна математика”

Гречка Я.О.

Керівники: доктор фіз.-мат. наук, професор,
провідний науковий співробітник,
ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України,

Фардигола Л.В.

доктор фіз.-мат. наук, професор,
професор кафедри прикладної математики

Кізілова Н.М.

Рецензент: доктор філософії (математика),
старший науковий співробітник,
ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України,

Рибалко Я.В.

Харків — 2025 рік

АНОТАЦІЇ

Гречка Яна Олексіївна. Диференціальне рівняння з частинними похідними четвертого порядку в просторах розподілів. У кваліфікаційній роботі диференціальне рівняння з частинними похідними четвертого порядку з параметром вивчається в просторі розподілів \mathcal{L}' . Для цього допоміжне звичайне диференціальне рівняння (яке є перетворенням Фур'є від зазначеного) розглянуто в просторі \mathcal{D}' . Побудовано і досліджено розв'язки цього допоміжного рівняння, а також вивчено вплив параметра на кінцевий стан розв'язків. Застосовуючи обернене перетворення Фур'є, далі одержано властивості розв'язків вихідного рівняння та вплив параметра на кінцеві стани його розв'язків.

Ключові слова: диференціальне рівняння, розв'язок, перетворення Фур'є.

Hrechka Yana. A fourth-order partial differential equation in spaces of distributions. In the thesis, a fourth-order partial differential equation with a parameter is studied in the space of distributions \mathcal{L}' . To this end, an auxiliary ordinary differential equation (which is the Fourier transform of the original equation) is considered in \mathcal{D}' . The solutions for this auxiliary equation are constructed and analysed, along with the influence of the parameter on the properties of the solutions' endpoints. Applying the inverse Fourier transform then provided the properties of the original equation and the influence of the parameter on the properties of the endpoints of its solutions.

Keywords: differential equation, solution, Fourier transform.

Зміст

Вступ	4
1. Простори узагальнених функцій	7
2. Задача Коші для неоднорідного диференціального рівняння 4-ого порядку	13
3. Дослідження властивостей отриманих функцій	17
4. Розв'язання однорідного диференціального рівняння 4-ого порядку з неоднорідними крайовими умовами	26
5. Дослідження неоднорідного диференціального рівняння 4-ого порядку з однорідними крайовими умовами	28
6. Розв'язання неоднорідного диференціального рівняння 4-ого порядку з однорідними крайовими умовами	45
Висновки	49
Список використаних джерел	50

Вступ

У роботі [1] було досліджено хвильове рівняння на півосі з параметром (керуванням) у крайовій умові типу Діріхле:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t \in (0, T), \\ w(t, 0) &= u(t), \quad t \in (0, T).\end{aligned}$$

де $u \in L^2(0, T)$. Після непарного продовження функції w за x (це продовження позначене w) з цієї крайової задачі було одержане нове рівняння (яке включило у себе і крайову умову) у просторах розподілів (за x) з \mathcal{S}' :

$$\frac{\partial^2 w(t, \cdot)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w(t, \cdot)}{\partial x^2} - 2u(t)\delta', \quad t \in (0, T), \quad (0.1)$$

де $\frac{\partial^n}{\partial x^n} w : [0, T] \rightarrow \mathcal{S}'$, $n = 0, 1, 2$, $\delta \in \delta$ -розподілом Дірака за x (див. [4]).

Для дослідження цього рівняння було застосовано перетворення Фур'є за x :

$$\frac{\partial^2 v(t, \lambda)}{\partial t^2} = (i\lambda)^2 v(t, \lambda) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} u(t) i\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T), \quad (0.2)$$

де $v(t, \cdot) = \mathcal{F} w(t, \cdot)$, $t \in [0, T]$. Рівняння (0.2) є звичайним диференціальним рівнянням (відносно t), фундаментальна система якого складається з функцій $\frac{\sin(t\lambda)}{\lambda}$ та $\cos(t\lambda)$ і розв'язок якого легко записати в явному вигляді. Після аналізу цього розв'язку і застосування оберненого перетворення Фур'є у було, фактично, одержано таку теорему.

Теорема 0.1 ([1]). *Нехай $w_0^0 \in \mathcal{S}'$ і $w_1^0 \in \mathcal{S}'$. Тоді функція $u \in L^2(0, T)$*

така, що розв'язок рівняння (0.1) задовольняє умови:

$$w(0, x) = w_0^0(x), \quad \frac{\partial w(0, x)}{\partial t} = w_1^0(x), \quad w(T, x) = \frac{\partial w(T, x)}{\partial t} = 0,$$

існує у тому і лише тому випадку, коли виконано такі дві умови:

$$w_1^0 = w_0^{0'} \quad \text{на } (0, \infty), \quad (0.3)$$

$$w_0^0 \subset [-T, T]. \quad (0.4)$$

Зазначимо, що завдяки тому, що функції $\frac{\sin(t\lambda)}{\lambda}$ і $\cos(t\lambda)$ з фундаментальної системи розв'язків рівняння (0.2) та всі їх похідні є обмеженими, ми можемо розглядати рівняння (0.1) і (0.2) в \mathcal{S}' .

Рівняння

$$\frac{\partial^3 v(t, \lambda)}{\partial t^3} = (i\lambda)^3 v(t, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T). \quad (0.5)$$

яке є перетворенням Фур'є за x рівняння

$$\frac{\partial^3 w(t, \cdot)}{\partial t^3} = \frac{\partial^3 w(t, \cdot)}{\partial x^3}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T), \quad (0.6)$$

було досліджено в роботі [5]. Фундаментальна система функцій рівняння (0.5) складається з функцій експоненціального типу, які описані в розділі 3.

У кваліфікаційній роботі вивчається рівняння

$$\frac{\partial^4 w(t, \cdot)}{\partial t^4} = \frac{\partial^4 w(t, \cdot)}{\partial x^4} - 2u(t)\delta''', \quad t \in (0, T), \quad (0.7)$$

де $\frac{\partial^n}{\partial x^n} w : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}'$, $n = 0, \dots, 4$, $u \in L^2(0, T)$. Це рівняння пов'язано з крайовою задачею

$$\frac{\partial^4 w(t, x)}{\partial t^4} = \frac{\partial^4 w(t, x)}{\partial x^4}, \quad x > 0, \quad t \in (0, T),$$

$$\begin{aligned} w(t, 0) &= u(t), \quad t \in (0, T), \\ \frac{\partial^2 w(t, 0)}{\partial x^2} &= 0, \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

якщо w розглядати як непарне продовження w за x . Для дослідження рівняння (0.7) застосовано комбінацію деяких методів робіт [1] і [5]. Після застосування перетворення Фур'є за x до рівняння (0.7) одержуємо:

$$\frac{\partial^4 v(t, \lambda)}{\partial t^4} = (i\lambda)^4 v(t, \lambda) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} u(t) (i\lambda)^3, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T). \quad (0.8)$$

Рівняння (0.8) є звичайним диференціальним рівнянням (відносно t), фундаментальна система якого складається з лінійних комбінацій функцій $\frac{\sinh(t\lambda)}{\lambda}$, $\cosh(t\lambda)$, $\frac{\sin(t\lambda)}{\lambda}$ та $\cos(t\lambda)$ і розв'язок якого записується в явному вигляді. Після аналізу цього розв'язку і застосування оберненого перетворення Фур'є одержано властивості розв'язків рівнянь (0.7) і (0.8). Зазначимо, що на відміну від хвильового рівняння (0.1) фундаментальна система розв'язків рівняння (0.8), одержаного за допомогою перетворення Фур'є з рівняння (0.7), складається з функцій, що експоненціально зростають. Тому рівняння (0.8) розглядається в просторі \mathcal{D}' , а рівняння (0.7) — в просторі \mathcal{L}' .

У розділі 1 кваліфікаційної роботи наведено відомості про простори \mathcal{D}' і \mathcal{L}' . У розділі 2 досліджено задачу Коші для однорідного $u = 0$ рівняння типу (0.7). У розділі 3 досліджено функції, що утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (0.8), а у розділі 4 одержано (в термінах цих функцій) розв'язок задачі Коші для цього рівняння, а також задачі Коші для однорідного рівняння типу (0.7). У розділах 5 та 6 досліджено властивості неоднорідних рівнянь (0.7) і (0.8) з однорідними крайовими умовами та вплив параметра u на кінцеве значення їх розв'язків, зокрема певні аналоги теореми 0.1.

Розділ 1

Простори узагальнених функцій

В підручнику [2] розглянуто простори \mathcal{D} , \mathcal{D}' , \mathcal{L} , \mathcal{L}' . Нижче наведено певні відомості про ці простори, які я використовую в своїй роботі.

Означення 1.1. Будемо називати тестовою функцією будь-яку дійсну функцію $\varphi(x)$, визначену при $-\infty < x < \infty$, неперервну та таку, що має похідні (в звичайному сенсі) будь-якого порядку, і, крім того, фінітну, тобто таку, що обертається в нуль поза межами скінченного проміжку.

Означення 1.2. Простір тестових функцій позначається через \mathcal{D} і складається з усіх нескінченно диференційовних (гладких) функцій з компактним носієм. Тобто кожна функція $\varphi \in \mathcal{D}$ має носій $\text{supp}(\varphi)$, що є підмножиною деякого компакту $K \subset \mathbb{R}$.

Послідовність функцій $\varphi_n \in \mathcal{D}$ збігається до $\varphi \in \mathcal{D}$ у просторі \mathcal{D} , якщо виконуються такі умови:

- 1) існує компактна множина $K \subset \mathbb{R}$, така що для всіх n носії функцій φ_n містяться в K , тобто $\text{supp}(\varphi_n) \subseteq K$;
- 2) для кожного $k \in \mathbb{N}_0$ послідовність похідних $\varphi_n^{(k)}(x)$ збігається рівномірно на \mathbb{R} до $\varphi^{(k)}(x)$.

Означення 1.3. Узагальненою функцією будемо називати будь-який лінійний неперервний функціонал на просторі \mathcal{D} , тобто функціонал f , який задовольняє умови:

- для будь-яких функцій $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$ та будь-яких дійсних чисел a, b виконується лінійність: $(f, a\varphi_1 + b\varphi_2) = a(f, \varphi_1) + b(f, \varphi_2)$;

- якщо послідовність функцій $\varphi_n \rightarrow 0$ у просторі \mathcal{D} , то $(f, \varphi_n) \rightarrow 0$.

Означення 1.4. Простір узагальнених функцій (розподілів) позначається \mathcal{D}' і визначається як множина всіх неперервних лінійних функціоналів на просторі тестових функцій \mathcal{D} , тобто

$$\mathcal{D}' = \{ T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \text{ (або } \mathbb{C}) \mid T \text{ — неперервний лінійний функціонал} \}.$$

Збіжність послідовності T_n до T у просторі \mathcal{D}' означає, що для будь-якої тестової функції $\varphi \in \mathcal{D}$ виконується

$$T_n(\varphi) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} T(\varphi).$$

Тобто збіжність у \mathcal{D}' — це точкова збіжність послідовності функціоналів на просторі тестових функцій.

Означення 1.5. Простір \mathcal{L} — це простір всіх цілих функцій $\Psi(s)$, які задовольняють нерівностям:

$$|s|^q |\Psi(s)| \leq C_q e^{a|\tau|},$$

де $q = 0, 1, 2, \dots$, $s = \sigma + i\tau$, а сталі a та C_q залежать від функції $\Psi(s)$. У цьому просторі очевидним чином визначені основні лінійні операції додавання та множення на число. Послідовність $\Psi_\nu(s)$ прямує до нуля в \mathcal{L} , якщо, по-перше, виконуються нерівності:

$$|s^q \Psi_\nu(s)| \leq C_q e^{a|\tau|}$$

зі сталими C_q та a , що не залежать від ν , і якщо, по-друге, ці функції прямують до нуля рівномірно на кожному інтервалі осі.

Означення 1.6. Простір \mathcal{L}' — це сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів на просторі \mathcal{L} , які також називаються узагальненими фун-

кціями. У просторі \mathcal{Z}' граничний перехід визначається умовою: $g_\nu \rightarrow g$ у \mathcal{Z}' , якщо для будь-якої основної функції $\Psi \in \mathcal{Z}$ виконується $(g_\nu, \Psi) \rightarrow (g, \Psi)$.

Означення 1.7. Визначення узагальненої похідної в просторі \mathcal{Z}' є наступним:

$$(\partial g, \Psi(s)) = -(g, \Psi'(s)),$$

де $g \in \mathcal{Z}'$ є узагальненою функцією, а $\Psi(s) \in Z$ є тестовою функцією.

До числа функціоналів у просторі \mathcal{Z}' належить дельта-функція:

$$(\delta(s), \Psi(s)) = \Psi(0),$$

а також її зсуви (навіть комплексні):

$$(\delta(s - s_0), \Psi(s)) = \Psi(s_0).$$

Застосування дельта-функції зі зсувом до тестової функції визначає її значення в точці зсуву.

Означення 1.8. Нехай $f \in \mathcal{D}'$ та $g \in \mathcal{D}$ є розподілом з компактним носієм. Їхня згортка $f * g \in \mathcal{D}$ є новим розподілом, що визначається своєю дією на будь-яку тестову функцію $\varphi \in \mathcal{D}$ за формулою:

$$(f * g, \varphi) = (f_x, (g_y, \varphi(x + y))),$$

де f_x означає, що функціонал f діє по змінній x , а g_y — по змінній y .

Особливий випадок: згортка з дельта-функцією. Для будь-якого розподілу $f \in \mathcal{D}'$ і дельта-функції $\delta(x)$ або її зсуву $\delta(x - a)$:

$$f * \delta(x) = f(x),$$

$$f * \delta(x - a) = f(x - a).$$

Це означає, що згортка з дельта-функцією не змінює розподіл, а згортка зі зсунутою дельта-функцією просто зсуває його.

Згортка в \mathcal{D}' відповідає множенню в \mathcal{L}' . Нехай $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'$ - розподіли в початковому просторі, і $g_1 = \mathcal{F}[f_1]$, $g_2 = \mathcal{F}[f_2]$ - їхні перетворення Фур'є в \mathcal{L}' . Тоді, якщо згортка $f_1 * f_2$ визначена в \mathcal{D}' , її перетворення Фур'є в \mathcal{L}' є добутком g_1 та g_2 :

$$\mathcal{F}[f_1 * f_2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g_1 \cdot g_2.$$

Аналогічно, якщо згортка $g_1 * g_2$ визначена в \mathcal{L}' (наприклад, через $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[g_1] \cdot \mathcal{F}[g_2]]$), то вона відповідає множенню в \mathcal{D}' :

$$\mathcal{F}^{-1}[g_1 * g_2] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1}[g_1] \cdot \mathcal{F}^{-1}[g_2].$$

Отже, згортка в \mathcal{L}' є операцією, яка відповідає множенню в просторі \mathcal{D}' під дією оберненого перетворення Фур'є.

Означення 1.9. Нехай $f \in \mathcal{D}'$. Функція $\alpha(x)$ є мультиплікатором, якщо добуток αf є розподілом, що визначається своєю дією на будь-яку тестову функцію $\varphi \in \mathcal{D}$ за формулою:

$$(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha \varphi),$$

де $\alpha \varphi$ є звичайним добутком функції $\alpha(x)$ на тестову функцію $\varphi(x)$. Функція $\alpha(x)$ має бути нескінченно диференційовною, тобто $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Означення 1.10. Нехай $g \in \mathcal{L}'$ — узагальнена функція. Функція $G(s)$ є мультиплікатором, якщо вона є цілою аналітичною функцією і задовольняє оцінці:

$$|G(s)| \leq C(1 + |s|)^m e^{b|\tau|}$$

для $s = \sigma + i\tau$ та деяких сталих C, m, b . Добуток $G(s)g$ (новий розподіл у \mathcal{L}') визначається своєю дією на будь-яку основну функцію $\Psi \in \mathcal{L}$ за

формулою:

$$(G(s)g, \Psi) = (g, G^*(s)\Psi),$$

де $G^*(s) = \overline{G(\bar{s})}$.

Означення 1.11. Перетворення Фур'є в просторі \mathcal{D} для тестової функції $\varphi(x)$ визначається як:

$$\Psi(s) \equiv \mathcal{F}[\varphi(x)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-isx} dx.$$

Оскільки $\varphi(x)$ є фінітною, інтеграл поширюється на кінцеву область, що дозволяє визначити $\Psi(s)$ для комплексних значень $s = \sigma + i\tau$.

Перетворення Фур'є \mathcal{F} встановлює взаємно однозначну відповідність між просторами \mathcal{D} та \mathcal{L} , яка зберігає лінійні операції та є ізоморфізмом. Тобто, \mathcal{L} є образом простору \mathcal{D} під дією перетворення Фур'є.

Означення 1.12. Для функціоналу $f \in \mathcal{D}'$ його перетворення Фур'є $\mathcal{F}[f]$ (яке є функціоналом на \mathcal{L}' , тобто $g \in \mathcal{L}'$) визначається за формулою:

$$(\mathcal{F}[f], \Psi) = (f, \varphi),$$

де $\Psi = F[\varphi]$ є перетворенням Фур'є тестової функції $\varphi \in \mathcal{D}$. Обернений оператор \mathcal{F}^{-1} визначений на просторі \mathcal{L}' і переводить функціонал $g \in \mathcal{L}'$ у функціонал $f \in \mathcal{D}'$ за формулою:

$$(\mathcal{F}^{-1}[g], \varphi) = (g, \mathcal{F}[\varphi]).$$

При цьому $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f$ та $\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[g]] = g$.

Перетворення Фур'є встановлює взаємно однозначну відповідність між просторами \mathcal{D}' та \mathcal{L}' , яка зберігає лінійні операції та збіжність. Тобто, \mathcal{L}' є образом простору \mathcal{D}' під дією перетворення Фур'є.

Таким чином, перетворення Фур'є є фундаментальним зв'язком між цими просторами, що дозволяє переносити властивості та операції з одного простору до іншого.

Розділ 2

Задача Коші для неоднорідного диференціального рівняння 4-ого порядку

Розглянемо задачу Коші:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial t^4} = \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} - 2\delta'''(x)u(t), \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \omega(0, x) = g_0(x), \\ \frac{\partial \omega}{\partial t}(0, x) = g_1(x), \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}(0, x) = g_2(x), \\ \frac{\partial^3 \omega}{\partial t^3}(0, x) = g_3(x), \end{cases} \quad (2.2)$$

де $g_0(x) \in \mathcal{L}'$, $g_1(x) \in \mathcal{L}'$, $g_2(x) \in \mathcal{L}'$, $g_3(x) \in \mathcal{L}'$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$,
 $u \in L^2(0, T)$.

Зазначимо, що похідна за x - це узагальнена похідна, а похідна за t - похідна за параметром в просторі \mathcal{L}' .

Означення 2.1. Похідною $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ за параметром t називається така узагальнена функція, для якої в просторі \mathcal{L}' існує границя:

$$\frac{\omega(t + \Delta t, \cdot) - \omega(t, \cdot)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \omega_t(t, \cdot) \quad \text{в } \mathcal{L}'.$$

Рівняння (2.1) розглядаємо в просторі \mathcal{L}' (означення 1.6).

Розв'язком нашої задачі Коші (2.1), (2.2) для неоднорідного диферен-

ціального рівняння 4-ого порядку з ненульовими початковими умовами є сума розв'язку відповідного однорідного диференціального рівняння з ненульовими початковими умовами та розв'язку неоднорідного диференціального рівняння з нульовими початковими умовами.

Спочатку розглянемо задачу Коші для однорідного диференціального рівняння, тобто візьмемо $u = 0$.

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial t^4} = \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4}, \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} \omega(0, x) = g_0(x), \\ \frac{\partial \omega}{\partial t}(0, x) = g_1(x), \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}(0, x) = g_2(x), \\ \frac{\partial^3 \omega}{\partial t^3}(0, x) = g_3(x), \end{cases} \quad (2.4)$$

де $g_0(x) \in \mathcal{L}'$, $g_1(x) \in \mathcal{L}'$, $g_2(x) \in \mathcal{L}'$, $g_3(x) \in \mathcal{L}'$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Застосуємо перетворення Фур'є за x для кожного фіксованого $t > 0$ і отримаємо наступну задачу Коші:

$$y^{(4)} = (i\lambda)^4 y, \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} y(0, \lambda) = y_0^0(\lambda), \\ y'(0, \lambda) = y_0^1(\lambda), \\ y''(0, \lambda) = y_0^2(\lambda), \\ y'''(0, \lambda) = y_0^3(\lambda), \end{cases} \quad (2.6)$$

де $y_0^0 \in \mathcal{D}'$, $y_0^1 \in \mathcal{D}'$, $y_0^2 \in \mathcal{D}'$, $y_0^3 \in \mathcal{D}'$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Задачу Коші (2.5) розглядаємо в просторі \mathcal{D}' (означення 1.4).

Дану задачу Коші (2.5), (2.6) раніше мною було розв'язано в кваліфіка-

ційній роботі рівня бакалавр [6] та отримано наступні результати:

$$y(x) = K_1 \cosh \lambda x + K_2 \sinh \lambda x + K_3 \cos \lambda x + K_4 \sin \lambda x$$

є загальним розв'язком рівняння (2.5), де $K_1, K_2, K_3, K_4 \in \mathbb{R}$ - довільні сталі.

Наступна задача полягатиме у розв'язанні чотирьох задач Коші до нашого лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами:

	s_1	s_2	s_3	s_4
$y(0) =$	1	0	0	0
$y'(0) =$	0	1	0	0
$y''(0) =$	0	0	1	0
$y'''(0) =$	0	0	0	1

$$y(x) = K_1 \cosh \lambda x + K_2 \sinh \lambda x + K_3 \cos \lambda x + K_4 \sin \lambda x,$$

$$y'(x) = K_1 \lambda \sinh \lambda x + K_2 \lambda \cosh \lambda x - K_3 \lambda \sin \lambda x + K_4 \lambda \cos \lambda x,$$

$$y''(x) = K_1 \lambda^2 \cosh \lambda x + K_2 \lambda^2 \sinh \lambda x - K_3 \lambda^2 \cos \lambda x - K_4 \lambda^2 \sin \lambda x,$$

$$y'''(x) = K_1 \lambda^3 \sinh \lambda x + K_2 \lambda^3 \cosh \lambda x + K_3 \lambda^3 \sin \lambda x - K_4 \lambda^3 \cos \lambda x.$$

Результати розв'язку цієї задачі теж були отримані мною у моїй кваліфікаційній роботі рівня бакалавр [6], а саме маємо розв'язки всіх чотирьох задач Коші до нашого лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$S_1(x) = \frac{1}{2}(\cosh \lambda x + \cos \lambda x),$$

$$S_2(x) = \frac{1}{2\lambda}(\sinh \lambda x + \sin \lambda x),$$

$$S_3(x) = \frac{1}{2\lambda^2}(\cosh \lambda x - \cos \lambda x),$$

$$S_4(x) = \frac{1}{2\lambda^3}(\sinh \lambda x - \sin \lambda x).$$

Теорема 2.2. Лінійна комбінація $y(x) = C_1 S_1(x) + C_2 S_2(x) + C_3 S_3(x) + C_4 S_4(x)$, де $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{C}$ - довільні сталі, є розв'язком задачі Коші (2.5), (2.6).

Для зручності вивчення цих функцій було покладено $\lambda = 1$ і розглянуто ці функції для $x \in \mathbb{C}$. Тоді маємо:

$$s_1(x) = \frac{1}{2}(\cosh x + \cos x),$$

$$s_2(x) = \frac{1}{2}(\sinh x + \sin x),$$

$$s_3(x) = \frac{1}{2}(\cosh x - \cos x),$$

$$s_4(x) = \frac{1}{2}(\sinh x - \sin x).$$

Розділ 3

Дослідження властивостей отриманих функцій

В попередньому розділі було продемонстровано функції, які нам дозволили розв'язати задачу Коші (2.5), (2.6). Для рівняння 3-ого порядку подібний результат був отриманий раніше та наведений у статті Золотарьова Володимира Олексійовича [5].

У роботі [5] розглянуто розглянуто лінійне однорідне диференціальне рівняння III порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y''' = (-i\lambda)^3 y, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Було отримано таку систему фундаментальних розв'язків рівняння (3.1), які є подібними до косинусів і синусів для рівняння другого порядку:

$$c(z) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 e^{z\zeta_k}, \quad s(z) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\zeta_k} e^{z\zeta_k}, \quad d(z) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\zeta_k^2} e^{z\zeta_k},$$

де $z \in \mathbb{C}$, а $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ — корені рівняння $\zeta^3 = 1$:

$$\zeta_1 = 1, \quad \zeta_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad \zeta_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2},$$

та одержано для них певні властивості.

Теорема 3.1 (див. [5]). (i)

$$s'(z) = c(z), \quad d'(z) = s(z), \quad c'(z) = d(z);$$

(ii)

$$\overline{c(z)} = c(\bar{z}), \overline{s(z)} = s(\bar{z}), \overline{d(z)} = d(\bar{z});$$

(iii)

$$c(z\zeta_2) = c(z), s(z\zeta_2) = \zeta_2 s(z), d(z\zeta_2) = \zeta_2^2 d(z);$$

(iv)

$$e^{z\zeta_p} = c(z) + \zeta_p s(z) + \zeta_p^2 d(z), (1 \leq p \leq 3);$$

(v)

$$\begin{array}{lll} c(0) = 1, & c'(0) = 0, & c''(0) = 0, \\ s(0) = 0, & s'(0) = 1, & s''(0) = 0, \\ d(0) = 0, & d'(0) = 0, & d''(0) = 1; \end{array}$$

(vi)

$$c^3(z) + s^3(z) + d^3(z) - 3c(z)s(z)d(z) = 1;$$

(vii)

$$\begin{aligned} c(z+w) &= c(z)c(w) + s(z)d(w) + d(z)s(w), \\ s(z+w) &= c(z)s(w) + s(z)c(w) + d(z)d(w), \\ d(z+w) &= c(z)d(w) + s(z)s(w) + d(z)c(w); \end{aligned}$$

(viii)

$$\begin{aligned} 3c^2(z) &= c(2z) + 2c(-z), \\ 3s^2(z) &= d(2z) + 2d(-z), \\ 3d^2(z) &= s(2z) + 2s(-z); \end{aligned}$$

(ix)

$$s^2(z) - d(z)c(z) = d(-z),$$

$$d^2(z) - s(z)c(z) = s(-z),$$

$$c^2(z) - s(z)d(z) = c(-z);$$

(x)

$$c(z) = 1 + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^6}{6!} + \dots,$$

$$s(z) = z + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^7}{7!} + \dots,$$

$$d(z) = \frac{z^2}{2!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^8}{8!} + \dots.$$

У моїй кваліфікаційній роботі рівня бакалавр [6] було досліджено певні властивості для отриманих раніше функцій $s_1(x)$, $s_2(x)$, $s_3(x)$, $s_4(x)$:

$$s_1(x) = \frac{1}{2}(\cosh x + \cos x),$$

$$s_2(x) = \frac{1}{2}(\sinh x + \sin x),$$

$$s_3(x) = \frac{1}{2}(\cosh x - \cos x),$$

$$s_4(x) = \frac{1}{2}(\sinh x - \sin x).$$

Теорема 3.2. Для функцій s_1 , s_2 , s_3 , s_4 є справедливими властивості:

$$\cosh x = s_1(x) + s_3(x),$$

$$\sinh x = s_2(x) + s_4(x),$$

$$\cos x = s_1(x) - s_3(x),$$

$$\sin x = s_2(x) - s_4(x).$$

Доведення.

$$\begin{aligned}
 \cosh x &= \frac{1}{2}(\cosh x + \cos x) + \frac{1}{2}(\cosh x - \cos x) \\
 &= \frac{1}{2} \cosh x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cosh x - \frac{1}{2} \cos x = s_1(x) + s_3(x), \\
 \sinh x &= \frac{1}{2}(\sinh x + \sin x) + \frac{1}{2}(\sinh x - \sin x) \\
 &= \frac{1}{2} \sinh x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sinh x - \frac{1}{2} \sin x = s_2(x) + s_4(x), \\
 \cos x &= \frac{1}{2}(\cosh x + \cos x) - \frac{1}{2}(\cosh x - \cos x) \\
 &= \frac{1}{2} \cosh x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \cosh x + \frac{1}{2} \cos x = s_1(x) - s_3(x), \\
 \sin x &= \frac{1}{2}(\sinh x + \sin x) - \frac{1}{2}(\sinh x - \sin x) \\
 &= \frac{1}{2} \sinh x + \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \sinh x + \frac{1}{2} \sin x = s_2(x) - s_4(x).
 \end{aligned}$$

□

Теорема 3.3. *Функції s_1 та s_3 є парними, а s_2 та s_4 - непарними.*

Доведення.

$$\begin{aligned}
 s_1(-x) &= \frac{1}{2}(\cosh(-x) + \cos(-x)) = \frac{1}{2}(\cosh x + \cos x), \\
 s_2(-x) &= \frac{1}{2}(\sinh(-x) + \sin(-x)) = \frac{1}{2}(-\sinh x - \sin x) \\
 &= -\frac{1}{2}(\sinh x + \sin x), \\
 s_3(-x) &= \frac{1}{2}(\cosh(-x) - \cos(-x)) = \frac{1}{2}(\cosh x - \cos x), \\
 s_4(-x) &= \frac{1}{2}(\sinh(-x) - \sin(-x)) = \frac{1}{2}(-\sinh x + \sin x) \\
 &= -\frac{1}{2}(\sinh x - \sin x).
 \end{aligned}$$

□

Теорема 3.4. Для функцій s_1, s_2, s_3, s_4 є справедливими властивості:

$$s_1(ix) = s_1(x),$$

$$s_2(ix) = is_2(x),$$

$$s_3(ix) = -s_3(x),$$

$$s_4(ix) = -is_4(x).$$

Доведення.

$$\begin{aligned} s_1(ix) &= \frac{1}{2}(\cosh(ix) + \cos(ix)) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + \frac{e^{i^2x} + e^{-i^2x}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + \frac{e^{-x} + e^x}{2} \right), \\ s_2(ix) &= \frac{1}{2}(\sinh(ix) + \sin(ix)) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} + \frac{e^{i^2x} - e^{-i^2x}}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} + \frac{e^{-x} - e^x}{2i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2i} \right), \\ s_3(ix) &= \frac{1}{2}(\cosh(ix) - \cos(ix)) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} - \frac{e^{-x} + e^x}{2} \right), \\ s_4(ix) &= \frac{1}{2}(\sinh(ix) - \sin(ix)) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2i} \right). \end{aligned}$$

□

Теорема 3.5. Для функцій s_1, s_2, s_3, s_4 є справедливими властивості:

$$\begin{aligned} s_1(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{4m}}{(4m)!}, \\ s_2(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{4m+1}}{(4m+1)!}, \\ s_3(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{4m+2}}{(4m+2)!}, \\ s_4(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{4m+3}}{(4m+3)!}. \end{aligned}$$

Доведення.

$$\begin{aligned}
s_1(x) &= \frac{1}{2}(\cosh x + \cos x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2x^{4m}}{(4m)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{4m}}{(4m)!}, \\
s_2(x) &= \frac{1}{2}(\sinh x + \sin x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2x^{4m+1}}{(4m+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{4m+1}}{(4m+1)!}, \\
s_3(x) &= \frac{1}{2}(\cosh x - \cos x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2}}{(2m+2)!} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2x^{4m+2}}{(4m+2)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{4m+2}}{(4m+2)!}, \\
s_4(x) &= \frac{1}{2}(\sinh x - \sin x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+3}}{(2m+3)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+3}}{(2m+3)!} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2x^{4m+3}}{(4m+3)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{4m+3}}{(4m+3)!}.
\end{aligned}$$

□

Теорема 3.6. Для похідних функцій $s_1, s_2, s_3, s_4 \in$ справедливими властивості:

$$s_1'(x) = s_4(x),$$

$$s_2'(x) = s_1(x),$$

$$s_3'(x) = s_2(x),$$

$$s_4'(x) = s_3(x).$$

Доведення.

$$s_1'(x) = \left(\frac{1}{2}(\cosh x + \cos x) \right)' = \frac{1}{2}(\sinh x - \sin x),$$

$$\begin{aligned}
s_2'(x) &= \left(\frac{1}{2}(\sinh x + \sin x) \right)' = \frac{1}{2}(\cosh x + \cos x), \\
s_3'(x) &= \left(\frac{1}{2}(\cosh x - \cos x) \right)' = \frac{1}{2}(\sinh x + \sin x), \\
s_4'(x) &= \left(\frac{1}{2}(\sinh x - \sin x) \right)' = \frac{1}{2}(\cosh x - \cos x).
\end{aligned}$$

□

Теорема 3.7. Для функцій s_1, s_2, s_3, s_4 є справедливими властивості:

$$\begin{aligned}
s_1(x+y) &= s_1(x)s_1(y) + s_3(x)s_3(y) + s_2(x)s_4(y) + s_4(x)s_2(y), \\
s_2(x+y) &= s_2(x)s_1(y) + s_4(x)s_3(y) + s_1(x)s_2(y) + s_3(x)s_4(y), \\
s_3(x+y) &= s_1(x)s_3(y) + s_3(x)s_1(y) + s_2(x)s_2(y) + s_4(x)s_4(y), \\
s_4(x+y) &= s_2(x)s_3(y) + s_4(x)s_1(y) + s_1(x)s_4(y) + s_3(x)s_2(y).
\end{aligned}$$

Доведення.

$$\begin{aligned}
s_1(x+y) &= \frac{1}{2}(\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y + \cos x \cos y - \sin x \sin y) \\
&= \frac{1}{2}((s_1(x) + s_3(x))(s_1(y) + s_3(y)) + (s_2(x) + s_4(x))(s_2(y) + s_4(y)) \\
&\quad + (s_1(x) - s_3(x))(s_1(y) - s_3(y)) - (s_2(x) - s_4(x))(s_2(y) - s_4(y))) \\
&= \frac{1}{2}(2s_1(x)s_1(y) + s_1(x)s_3(y) - s_1(x)s_3(y) + s_3(x)s_1(y) - s_3(x)s_1(y) \\
&\quad + 2s_3(x)s_3(y) + s_2(x)s_2(y) - s_2(x)s_2(y) + 2s_2(x)s_4(y) + 2s_4(x)s_2(y) \\
&\quad + s_4(x)s_4(y) - s_4(x)s_4(y)) = s_1(x)s_1(y) + s_3(x)s_3(y) + s_2(x)s_4(y) \\
&\quad + s_4(x)s_2(y), \\
s_2(x+y) &= \frac{1}{2}(\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y + \sin x \cos y + \cos x \sin y) \\
&= \frac{1}{2}((s_2(x) + s_4(x))(s_1(y) + s_3(y)) + (s_1(x) + s_3(x))(s_2(y) + s_4(y)) \\
&\quad + (s_2(x) - s_4(x))(s_1(y) - s_3(y)) + (s_1(x) - s_3(x))(s_2(y) - s_4(y))) \\
&= \frac{1}{2}(2s_2(x)s_1(y) + 2s_4(x)s_3(y) + 2s_1(x)s_2(y) + 2s_3(x)s_4(y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= s_2(x)s_1(y) + s_4(x)s_3(y) + s_1(x)s_2(y) + s_3(x)s_4(y), \\
s_3(x+y) &= \frac{1}{2}(\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y - \cos x \cos y + \sin x \sin y) \\
&= \frac{1}{2}((s_1(x) + s_3(x))(s_1(y) + s_3(y)) + (s_2(x) + s_4(x))(s_2(y) + s_4(y)) \\
&\quad - (s_1(x) - s_3(x))(s_1(y) - s_3(y)) + (s_2(x) - s_4(x))(s_2(y) - s_4(y))) \\
&= \frac{1}{2}(2s_1(x)s_3(y) + 2s_3(x)s_1(y) + 2s_2(x)s_2(y) + 2s_4(x)s_4(y)) \\
&= s_1(x)s_3(y) + s_3(x)s_1(y) + s_2(x)s_2(y) + s_4(x)s_4(y), \\
s_4(x+y) &= \frac{1}{2}(\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y - \sin x \cos y - \cos x \sin y) \\
&= \frac{1}{2}((s_2(x) + s_4(x))(s_1(y) + s_3(y)) + (s_1(x) + s_3(x))(s_2(y) + s_4(y)) \\
&\quad - (s_2(x) - s_4(x))(s_1(y) - s_3(y)) - (s_1(x) - s_3(x))(s_2(y) - s_4(y))) \\
&= \frac{1}{2}(2s_2(x)s_3(y) + 2s_4(x)s_1(y) + 2s_1(x)s_4(y) + 2s_3(x)s_2(y)) \\
&= s_2(x)s_3(y) + s_4(x)s_1(y) + s_1(x)s_4(y) + s_3(x)s_2(y).
\end{aligned}$$

□

Теорема 3.8. Для функцій s_1, s_2, s_3, s_4 є справедливими властивості:

$$\sum_{k=1}^4 s_k^2(x) - 2 \sum_{k=1}^2 s_k s_{k+2} = 1.$$

Доведення.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$(s_1(x) - s_3(x))^2 + (s_2(x) - s_4(x))^2 = 1,$$

$$s_1^2(x) - 2s_1(x)s_3(x) + s_3^2(x) + s_2^2(x) - 2s_2(x)s_4(x) + s_4^2(x) = 1,$$

$$\sum_{k=1}^4 s_k^2(x) - 2 \sum_{k=1}^2 s_k s_{k+2} = 1.$$

□

Теорема 3.9. Для функцій s_1, s_2, s_3, s_4 є справедливими властивості:

$$\sum_{k=0}^3 (-1)^k s_{k+1}^2(x) + 2 \sum_{k=0}^1 (-1)^k s_{k+1} s_{k+3} = 1.$$

Доведення.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$(s_1(x) + s_3(x))^2 - (s_2(x) + s_4(x))^2 = 1,$$

$$s_1^2(x) + 2s_1(x)s_3(x) + s_3^2(x) - s_2^2(x) - 2s_2(x)s_4(x) - s_4^2(x) = 1,$$

$$\sum_{k=0}^3 (-1)^k s_{k+1}^2(x) + 2 \sum_{k=0}^1 (-1)^k s_{k+1} s_{k+3} = 1.$$

□

Надалі отримані властивості функцій s_1, s_2, s_3, s_4 нададуть більше можливостей для знаходження розв'язків нашого неоднорідного диференціального рівняння 4-ого порядку.

Розділ 4

Розв'язання однорідного диференціального рівняння 4-ого порядку з неоднорідними крайовими умовами

Повернімося до нашої задачі Коші (2.5), (2.6). Нехай

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}y(t, \cdot) &= \omega(t, \cdot), \\ \mathcal{F}^{-1}y_0^i &= g_i.\end{aligned}$$

Як відомо,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(\sin(t(\cdot)))(x) &= i\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta(x-t) - \delta(x+t)), \\ \mathcal{F}^{-1}(\sinh(t(\cdot)))(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta(x-it) - \delta(x+it)), \\ \mathcal{F}^{-1}(\cos(t(\cdot)))(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta(x-t) + \delta(x+t)), \\ \mathcal{F}^{-1}(\cosh(t(\cdot)))(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta(x-it) + \delta(x+it)).\end{aligned}$$

Враховуючи властивість, наведену у теоремі (3.6), можемо помітити наступне:

$$\begin{aligned}\left(\frac{s_4(t\lambda)}{\lambda^3}\right)'_t &= \frac{s_3(t\lambda)}{\lambda^2}, \\ \left(\frac{s_3(t\lambda)}{\lambda^2}\right)'_t &= \frac{s_2(t\lambda)}{\lambda},\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\left(\frac{s_2(t\lambda)}{\lambda} \right)'_t = s_1(t\lambda).$$

Застосуємо обернене перетворення Фур'є за x функції $s_1(\lambda t)$:

$$\mathcal{F}^{-1}(s_1(t(\cdot)))(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\delta(x - it) + \delta(x + it) + \delta(x - t) + \delta(x + t)).$$

Тепер застосуємо обернене перетворення Фур'є за x (зокрема, звертаючи увагу на означення 1.8) до першого доданку лінійної комбінації, що є розв'язком рівняння:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(y_0^0(\cdot)s_1(t(\cdot)))(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (g_0 * (\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\delta(x - it) + \delta(x + it) + \delta(x - t) \\ &\quad + \delta(x + t)))) = \frac{1}{4} (g_0(x - it) + g_0(x + it) + g_0(x - t) \\ &\quad + g_0(x + t)). \end{aligned}$$

Застосуємо обернене перетворення Фур'є за x до лінійної комбінації, що є розв'язком рівняння, враховуючи всі властивості та підрахунки, наведені вище:

$$\begin{aligned} \omega(t, \cdot) &= \frac{1}{4} \left(g_0(x - it) + g_0(x + it) + g_0(x - t) + g_0(x + t) \right. \\ &\quad + \int_0^t (g_1(x - i\tau) + g_1(x + i\tau) + g_1(x - \tau) + g_1(x + \tau)) d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int_0^\tau (g_2(x - i\xi) + g_2(x + i\xi) + g_2(x - \xi) + g_2(x + \xi)) d\xi d\tau \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_0^\tau \int_0^\xi (g_3(x - i\zeta) + g_3(x + i\zeta) + g_3(x - \zeta) + g_3(x + \zeta)) d\zeta d\xi d\tau \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Таким чином доведено теорему.

Теорема 4.1. *Задача (2.3), (2.4) має єдиний розв'язок (4.2).*

Розділ 5

Дослідження неоднорідного диференціального рівняння 4-ого порядку з однорідними крайовими умовами

Перейдемо до наступного етапу розв'язку задачі (2.1), (2.2). Розглянемо задачу Коші з однорідними крайовими умовами, тобто $g_0(x), g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ дорівнюють 0:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial t^4} = \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} - 2\delta'''(x)u(t), \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} \omega(0, x) = 0, \\ \frac{\partial \omega}{\partial t}(0, x) = 0, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}(0, x) = 0, \\ \frac{\partial^3 \omega}{\partial t^3}(0, x) = 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

де $t > 0, x \in \mathbb{R}$.

Знову зазначимо, що похідна за x - це узагальнена похідна, а похідна за t - похідна за параметром в просторі \mathcal{L}' .

Застосуємо перетворення Фур'є за x для кожного фіксованого $t > 0$ і отримаємо наступну задачу Коші. Маємо лінійне рівняння зі сталими

коефіцієнтами з правою частиною спеціального виду

$$y^{(4)} = (i\lambda)^4 y - \sqrt{\frac{2}{\pi}} (i\lambda)^3 u(t), \quad t \in (0, T), \quad (5.3)$$

$$\begin{cases} y(0, \lambda) = 0, \\ y'(0, \lambda) = 0, \\ y''(0, \lambda) = 0, \\ y'''(0, \lambda) = 0, \end{cases} \quad (5.4)$$

де $t \in (0, T)$, $u \in L^2(0, T)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Задача Коші (5.3), (5.4) містить параметр u .

У кваліфікаційній роботі рівня бакалавр [6] було розглянуто задачу Коші з неоднорідними крайовими умовами. У цьому розділі ми розглядаємо таку задачу:

Задача 5.1. Знайти $u \in L^2(0, T)$ так, щоб було виконано наступну умову:

$$\begin{cases} y(T, \lambda) = Y_4^T, \\ y'(T, \lambda) = Y_3^T, \\ y''(T, \lambda) = Y_2^T, \\ y'''(T, \lambda) = Y_1^T, \end{cases} \quad (5.5)$$

і проаналізувати для яких Y^T таке $u \in L^2(0, T)$ існує.

Для знаходження параметра $u \in L^2(0, T)$ ми одержуємо систему інтегральних рівнянь, необхідні умови її розв'язності та ілюструємо результати прикладами.

Загальним розв'язком неоднорідного лінійного диференціального рівняння є розв'язок лінійного однорідного рівняння і одного частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Повернемось до нашого лінійного однорідного рівняння зі сталими кое-

фіцієнтами:

$$y^{(4)} = (i\lambda)^4 y. \quad (5.6)$$

Функції $s_1(\lambda t)$, $\frac{s_2(\lambda t)}{\lambda}$, $\frac{s_3(\lambda t)}{\lambda^2}$, $\frac{s_4(\lambda t)}{\lambda^3}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (5.6) згідно з дослідженнями, викладеними у розділі 3. Запишемо задачу в матричному вигляді:

$$Y(t, \lambda) = \begin{pmatrix} y(t, \lambda) \\ y'(t, \lambda) \\ y''(t, \lambda) \\ y'''(t, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^0(t, \lambda) \\ Y^1(t, \lambda) \\ Y^2(t, \lambda) \\ Y^3(t, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Випишемо похідну:

$$\dot{Y}(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \dot{Y}^0(t, \lambda) \\ \dot{Y}^1(t, \lambda) \\ \dot{Y}^2(t, \lambda) \\ \dot{Y}^3(t, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^1(t, \lambda) \\ Y^2(t, \lambda) \\ Y^3(t, \lambda) \\ \lambda^4 Y^0(t, \lambda) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f(t, \lambda) \end{pmatrix},$$

$$\text{де } f(t, \lambda) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}(i\lambda)^3 u(t).$$

А також

$$\dot{Y}(t, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda^4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y(t, \lambda) + F(t, \lambda).$$

Отже, отримано систему:

$$\begin{cases} \dot{Y} = AY + F, \\ Y(0) = 0, \end{cases}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda^4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix}, \quad Y^T = \begin{pmatrix} Y_4^T \\ Y_3^T \\ Y_2^T \\ Y_1^T \end{pmatrix}.$$

Далі розглянемо наступне однорідне рівняння:

$$\dot{Y} = AY.$$

Записуємо фундаментальну матрицю розв'язків, де, починаючи з другого, елементи рядка є похідними відповідних елементів попереднього рядка:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} s_1(\lambda t) & \frac{s_2(\lambda t)}{\lambda} & \frac{s_3(\lambda t)}{\lambda^2} & \frac{s_4(\lambda t)}{\lambda^3} \\ \lambda s_4(\lambda t) & s_1(\lambda t) & \frac{s_2(\lambda t)}{\lambda} & \frac{s_3(\lambda t)}{\lambda^2} \\ \lambda^2 s_3(\lambda t) & \lambda s_4(\lambda t) & s_1(\lambda t) & \frac{s_2(\lambda t)}{\lambda} \\ \lambda^3 s_2(\lambda t) & \lambda^2 s_3(\lambda t) & \lambda s_4(\lambda t) & s_1(\lambda t) \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Розглянемо значення функцій $s_1(\lambda t)$, $s_2(\lambda t)$, $s_3(\lambda t)$, $s_4(\lambda t)$ в нулі. Завдяки побудові функцій, маємо:

$$s_1(0) = 1, \quad s_2(0) = 0, \quad s_3(0) = 0, \quad s_4(0) = 0.$$

Враховуючи це,

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \mathbb{I}, \\ \Phi(t) &= e^{tA}, \\ \Phi^{-1}(t) &= e^{-tA}. \end{aligned}$$

За наслідком з теореми про фундаментальність матричної експоненти

(див. [3, наслідок 2.4.45]), загальний розв'язок має вигляд:

$$Y(t, \lambda) = \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\xi)F(\xi, \lambda)d\xi,$$

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(\xi) = e^{(t-\xi)A},$$

$$Y(t, \lambda) = \int_0^t e^{(t-\xi)A}F(\xi, \lambda)d\xi.$$

Умова (5.5) еквівалентна умові $Y(T, \lambda) = Y^T$, тому при $t = T$ маємо:

$$Y^T = \int_0^T e^{(T-\xi)A}F(\xi, \cdot)d\xi = \int_0^T e^{\xi A}F(T - \xi, \cdot)d\xi.$$

Далі підрахуємо:

$$e^{\xi A}F(T - \xi, \lambda) =$$

$$= \begin{pmatrix} s_1(\lambda\xi) & \frac{s_2(\lambda\xi)}{\lambda} & \frac{s_3(\lambda\xi)}{\lambda^2} & \frac{s_4(\lambda\xi)}{\lambda^3} \\ \lambda s_4(\lambda\xi) & s_1(\lambda\xi) & \frac{s_2(\lambda\xi)}{\lambda} & \frac{s_3(\lambda\xi)}{\lambda^2} \\ \lambda^2 s_3(\lambda\xi) & \lambda s_4(\lambda\xi) & s_1(\lambda\xi) & \frac{s_2(\lambda\xi)}{\lambda} \\ \lambda^3 s_2(\lambda\xi) & \lambda^2 s_3(\lambda\xi) & \lambda s_4(\lambda\xi) & s_1(\lambda\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f((T - \xi), \lambda) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{s_4(\lambda\xi)}{\lambda^3} f((T - \xi), \lambda) \\ \frac{s_3(\lambda\xi)}{\lambda^2} f((T - \xi), \lambda) \\ \frac{s_2(\lambda\xi)}{\lambda} f((T - \xi), \lambda) \\ s_1(\lambda\xi) f((T - \xi), \lambda) \end{pmatrix}.$$

Маємо:

$$e^{\xi A} F(T - \xi, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{s_4(\lambda\xi)}{\lambda^3} f(T - \xi, \lambda) \\ \frac{s_3(\lambda\xi)}{\lambda^2} f(T - \xi, \lambda) \\ \frac{s_2(\lambda\xi)}{\lambda} f(T - \xi, \lambda) \\ s_1(\lambda\xi) f(T - \xi, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Маємо:

$$\begin{cases} Y_4^T(\lambda) = \int_0^T \frac{s_4(\lambda\xi)}{\lambda^3} f((T - \xi), \lambda) d\xi, \\ Y_3^T(\lambda) = \int_0^T \frac{s_3(\lambda\xi)}{\lambda^2} f((T - \xi), \lambda) d\xi, \\ Y_2^T(\lambda) = \int_0^T \frac{s_2(\lambda\xi)}{\lambda} f((T - \xi), \lambda) d\xi, \\ Y_1^T(\lambda) = \int_0^T s_1(\lambda\xi) f((T - \xi), \lambda) d\xi. \end{cases} \quad (5.8)$$

Підбиваючи підсумки, одержуємо таку теорему:

Теорема 5.2. *Задача (5.3)–(5.5) є розв’язною тоді і лише тоді, коли розв’язною є система інтегральних рівнянь (5.8).*

Далі розглянемо необхідні умови розв’язності системи інтегральних рівнянь (5.8).

Теорема 5.3. *Якщо існує $u \in L^2(0, T)$, яке задовольняє (5.8), то Y_1^T , Y_2^T , Y_3^T , Y_4^T є цілими функціями і задовільняють наступні умови*

$$Y_m^T(\lambda) = i Y_m^T(i\lambda).$$

Доведення.

(i)

$$Y_4^T(\lambda) = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T (\sinh(\lambda\xi) - \sin(\lambda\xi)) u(T - \xi) d\xi,$$

(ii)

$$\frac{Y_2^T(\lambda)}{(i\lambda)^2} = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T (\sinh(\lambda\xi) + \sin(\lambda\xi))u(T - \xi) d\xi,$$

(i-ii)

$$i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \sinh(\lambda\xi)u(T - \xi) d\xi = Y_4^T(\lambda) - \frac{Y_2^T(\lambda)}{(i\lambda)^2},$$

(i+ii)

$$i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \sin(\lambda\xi)u(T - \xi) d\xi = -\frac{Y_2^T(\lambda)}{(i\lambda)^2} - Y_4^T(\lambda),$$

також для $\lambda := i\lambda$ маємо

$$i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T i \sin(\lambda\xi)u(T - \xi) d\xi = Y_4^T(i\lambda) - \frac{Y_2^T(i\lambda)}{(-\lambda)^2}.$$

та

$$i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T i \sinh(\lambda\xi)u(T - \xi) d\xi = -\frac{Y_2^T(i\lambda)}{(-\lambda)^2} - Y_4^T(i\lambda).$$

Отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{Y_2^T(\lambda)}{\lambda^2} - Y_4^T(\lambda) &= -i \left(-\frac{Y_2^T(i\lambda)}{\lambda^2} + Y_4^T(i\lambda) \right), \\ \frac{Y_2^T(i\lambda)}{\lambda^2} + Y_4^T(i\lambda) &= -i \left(-Y_4^T(\lambda) - \frac{Y_2^T(\lambda)}{\lambda^2} \right). \end{aligned}$$

Отже,

$$Y_2^T(\lambda) = i Y_2^T(i\lambda),$$

$$Y_4^T(\lambda) = i Y_4^T(i\lambda).$$

Далі розглянемо

(iii)

$$Y_3^T(\lambda) = \frac{i\lambda}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T (\cosh(\lambda\xi) - \cos(\lambda\xi)) u(T - \xi) d\xi,$$

(iv)

$$\frac{Y_1^T(\lambda)}{(i\lambda)^2} = \frac{i\lambda}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T (\cosh(\lambda\xi) + \cos(\lambda\xi)) u(T - \xi) d\xi,$$

(iv-iii)

$$i\lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \cos(\lambda\xi) u(T - \xi) d\xi = -Y_3^T(\lambda) + \frac{Y_1^T(\lambda)}{(i\lambda)^2},$$

(iii+iv)

$$i\lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \cosh(\lambda\xi) u(T - \xi) d\xi = Y_3^T(\lambda) + \frac{Y_1^T(\lambda)}{(i\lambda)^2},$$

також для $\lambda := i\lambda$ маємо

$$-\lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \cos(\lambda\xi) u(T - \xi) d\xi = Y_3^T(i\lambda) + \frac{Y_1^T(i\lambda)}{(-\lambda)^2},$$

та

$$-\lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \cosh(\lambda\xi) u(T - \xi) d\xi = -Y_3^T(i\lambda) + \frac{Y_1^T(i\lambda)}{(\lambda)^2}.$$

Отримали

$$\begin{aligned} i \left(Y_3^T(i\lambda) + \frac{Y_1^T(i\lambda)}{\lambda^2} \right) &= Y_3^T(\lambda) + \frac{Y_1^T(\lambda)}{\lambda^2}, \\ i \left(Y_3^T(i\lambda) - \frac{Y_1^T(i\lambda)}{\lambda^2} \right) &= Y_3^T(\lambda) - \frac{Y_1^T(\lambda)}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Отже,

$$Y_3^T(\lambda) = i Y_3^T(i\lambda),$$

$$Y_1^T(\lambda) = i Y_1^T(i\lambda)$$

□

Отримано необхідні умови, при яких (5.8) має розв'язок.

Теорема 5.4. Нехай μ є цілою функцією і

$$\mu(\lambda) = i \mu(i\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тоді

$$\mu(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_{4k+3} \lambda^{4k+3}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (5.9)$$

Доведення. Маємо

$$\mu(\lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} \mu_p \lambda^p, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Отже,

$$i \mu(i\lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} \mu_p i^{p+1} \lambda^p, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Оскільки

$$i^{p+1} = \begin{cases} i, & p = 4k, \\ -1, & p = 4k + 1, \\ -i, & p = 4k + 2, \\ 1, & p = 4k + 3, \end{cases}$$

то звідси одержуємо (5.9). □

З теорем (5.3), (5.4) одержуємо висновок.

Наслідок 5.5. Якщо існує $u \in L^2(0, T)$, яке задовольняє (5.8), то Y_1^T , Y_2^T , Y_3^T , Y_4^T є цілими функціями і мають вигляд:

$$Y_m^T(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{2k+3}^m \lambda^{2k+3}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad m = 1, \dots, 4.$$

Зауваження 5.6. Отримані результати гарно співвідносяться зі властивостями, одержаними для функцій s_1 , s_2 , s_3 , s_4 , що наведені у теоремі (3.5).

Розглянемо тепер приклади, які ілюструють теорему 5.3. Перейдемо до підрахування прикладів з конкретним u .

Приклад 5.7. Нехай $u = 1$. Обчислимо Y_1^T , Y_2^T , Y_3^T , Y_4^T і перевіримо необхідні умови з теоремі 5.3.

Порахуємо допоміжні інтеграли, що стануть у нагоді у подальших розрахунках:

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin(\lambda\xi) d\xi &= \left[\begin{array}{l} u = \lambda\xi, \quad \xi = \frac{u}{\lambda} \\ d\xi = \frac{1}{\lambda} du \end{array} \right] = \int_0^T \frac{\sin u}{\lambda} du \\ &= -\frac{\cos u}{\lambda} \Big|_0^T = -\frac{\cos \lambda\xi}{\lambda} \Big|_0^T = -\frac{\cos \lambda T}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \sinh(\lambda\xi) d\xi &= \left[\begin{array}{l} u = \lambda\xi, \quad \xi = \frac{u}{\lambda} \\ d\xi = \frac{1}{\lambda} du \end{array} \right] = \int_0^T \frac{\sinh u}{\lambda} du \\ &= \frac{\cosh u}{\lambda} \Big|_0^T = \frac{\cosh \lambda\xi}{\lambda} \Big|_0^T = \frac{\cosh \lambda T}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos(\lambda\xi) d\xi &= \left[\begin{array}{l} u = \lambda\xi, \quad \xi = \frac{u}{\lambda} \\ d\xi = \frac{1}{\lambda} du \end{array} \right] = \int_0^T \frac{\cos u}{\lambda} du \\ &= \frac{\sin u}{\lambda} \Big|_0^T = \frac{\sin \lambda\xi}{\lambda} \Big|_0^T = \frac{\sin \lambda T}{\lambda}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \cosh(\lambda\xi) d\xi &= \left[\begin{array}{l} u = \lambda\xi, \quad \xi = \frac{u}{\lambda} \\ d\xi = \frac{1}{\lambda} du \end{array} \right] = \int_0^T \frac{\cosh u}{\lambda} du \\
&= \frac{\sinh u}{\lambda} \Big|_0^T = \frac{\sinh \lambda\xi}{\lambda} \Big|_0^T = \frac{\sinh \lambda T}{\lambda}.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Перейдемо до підрахування основних інтегралів.

$$\begin{aligned}
f(T - \xi, \lambda) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}(i\lambda)^3, \\
Y_4^T(\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{\lambda^3} s_4(\lambda\xi) f(T - \xi, \lambda) d\xi \\
&= \int_0^T \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sinh(\lambda\xi) - \sin(\lambda\xi)) d\xi \\
&= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T (\sinh(\lambda\xi) - \sin(\lambda\xi)) d\xi \\
&= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^T \sinh(\lambda\xi) d\xi - \int_0^T \sin(\lambda\xi) d\xi \right) \\
&= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\cosh \lambda T}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} + \frac{\cos \lambda T}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \right) \\
&= \frac{i}{2\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\cosh \lambda T + \cos \lambda T - 2), \\
Y_3^T(\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{\lambda^2} s_3(\lambda\xi) f(T - \xi, \lambda) d\xi \\
&= \int_0^T \frac{i\lambda}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\cosh(\lambda\xi) - \cos(\lambda\xi)) d\xi \\
&= \frac{i\lambda}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^T \cosh(\lambda\xi) d\xi - \int_0^T \cos(\lambda\xi) d\xi \right) \\
&= \frac{i\lambda}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sinh \lambda T}{\lambda} - \frac{\sin \lambda T}{\lambda} \right) = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sinh \lambda T - \sin \lambda T), \\
Y_2^T(\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{\lambda} s_2(\lambda\xi) f(T - \xi, \lambda) d\xi \\
&= \int_0^T \frac{i\lambda^2}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sinh(\lambda\xi) + \sin(\lambda\xi)) d\xi \\
&= \frac{i\lambda^2}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^T \sinh(\lambda\xi) d\xi + \int_0^T \sin(\lambda\xi) d\xi \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i\lambda^2}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\cosh \lambda T}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} - \frac{\cos \lambda T}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) \\
&= \frac{i\lambda}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\cosh \lambda T - \cos \lambda T), \\
Y_1^T(\lambda) &= \int_0^T s_1(\lambda\xi) f(T - \xi, \lambda) d\xi \\
&= \int_0^T \frac{i\lambda^3}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\cosh(\lambda\xi) + \cos(\lambda\xi)) d\xi \\
&= \frac{i\lambda^3}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^T \cosh(\lambda\xi) d\xi + \int_0^T \cos(\lambda\xi) d\xi \right) \\
&= \frac{i\lambda^3}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sinh \lambda T}{\lambda} + \frac{\sin \lambda T}{\lambda} \right) = \frac{i\lambda^2}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sinh \lambda T + \sin \lambda T).
\end{aligned}$$

Отже, при $u = 1$

$$\begin{aligned}
Y_4^T(\lambda) &= \frac{i}{2\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\cosh \lambda T + \cos \lambda T - 2), \\
Y_3^T(\lambda) &= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sinh \lambda T - \sin \lambda T), \\
Y_2^T(\lambda) &= \frac{i\lambda}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\cosh \lambda T - \cos \lambda T), \\
Y_1^T(\lambda) &= \frac{i\lambda^2}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sinh \lambda T + \sin \lambda T).
\end{aligned}$$

Тепер перевіримо, чи виконуються необхідні умови. Порахуємо спочатку $Y_1^T(i\lambda)$, $Y_2^T(i\lambda)$, $Y_3^T(i\lambda)$ та $Y_4^T(i\lambda)$:

$$\begin{aligned}
Y_1^T(i\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) (i^2\lambda)^3 (\cosh i\lambda\xi + \cos i\lambda\xi) d\xi \\
&= \frac{\lambda^3}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T (\cos \lambda\xi + \cosh \lambda\xi) d\xi = \frac{\lambda^2}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sin \lambda T + \sinh \lambda T), \\
Y_2^T(i\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{2i\lambda} \left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) (i^2\lambda)^3 (\sinh i\lambda\xi + \sin i\lambda\xi) d\xi \\
&= \frac{\lambda^2}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T (\sin \lambda\xi + \sinh \lambda\xi) d\xi = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\cosh \lambda T - \cos \lambda T),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_3^T(i\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{2(i\lambda)^2} \left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) (i^2\lambda)^3 (\cosh i\lambda\xi - \cos i\lambda\xi) d\xi \\
&= -\frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T (\cos \lambda\xi - \cosh \lambda\xi) d\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sinh \lambda T - \sin \lambda T). \\
Y_4^T(i\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{2(i\lambda)^3} \left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) (i^2\lambda)^3 (\sinh i\lambda\xi - \sin i\lambda\xi) d\xi \\
&= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T (\sin \lambda\xi - \sinh \lambda\xi) d\xi = \frac{1}{2\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\cosh \lambda T + \cos \lambda T - 2).
\end{aligned}$$

Підставляємо:

$$\begin{aligned}
Y_1^T(\lambda) &= i Y_1^T(i\lambda), \\
\frac{i\lambda^2}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sinh \lambda T + \sin \lambda T) &= \frac{i\lambda^2}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sinh \lambda T + \sin \lambda T), \\
Y_2^T(\lambda) &= i Y_2^T(i\lambda), \\
\frac{i\lambda}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\cosh \lambda T - \cos \lambda T) &= \frac{i\lambda}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\cosh \lambda T - \cos \lambda T), \\
Y_3^T(\lambda) &= i Y_3^T(i\lambda), \\
\frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sinh \lambda T - \sin \lambda T) &= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sinh \lambda T - \sin \lambda T), \\
Y_4^T(\lambda) &= i Y_4^T(i\lambda), \\
\frac{1}{2\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\cosh \lambda T + \cos \lambda T - 2) &= \frac{i}{2\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\cosh \lambda T + \cos \lambda T - 2).
\end{aligned}$$

Усі фінальні рівності виконуються, отже, необхідні умови виконані.

Приклад 5.8. Покладемо $u = \xi$. Знайдемо Y_1^T , Y_2^T , Y_3^T , Y_4^T і перевіримо необхідні умови з теореми (5.3).

Порахуємо допоміжні інтеграли, що стануть у нагоді у подальших роз-

рахунках:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \xi \sinh(\lambda \xi) d\xi &= \left[\begin{array}{l} u = \xi, \quad dv = \sinh \lambda \xi d\xi \\ du = d\xi \quad v = \frac{\cosh \lambda \xi}{\lambda} \end{array} \right] \\
 &= \frac{\xi \cosh \lambda \xi}{\lambda} \Big|_0^T - \int_0^T \frac{\cosh \lambda \xi}{\lambda} d\xi \\
 &= \frac{\xi \cosh \lambda \xi}{\lambda} \Big|_0^T - \frac{\sinh \lambda \xi}{\lambda^2} \Big|_0^T = -\frac{\sinh \lambda T}{\lambda^2} + \frac{T \cosh \lambda T}{\lambda}, \tag{5.14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \xi \sin(\lambda \xi) d\xi &= \left[\begin{array}{l} u = \xi, \quad dv = \sin \lambda \xi d\xi \\ du = d\xi \quad v = -\frac{\cos \lambda \xi}{\lambda} \end{array} \right] \\
 &= -\frac{\xi \cos \lambda \xi}{\lambda} \Big|_0^T + \int_0^T \frac{\cos \lambda \xi}{\lambda} d\xi \\
 &= -\frac{\xi \cos \lambda \xi}{\lambda} \Big|_0^T + \frac{\sin \lambda \xi}{\lambda^2} \Big|_0^T = -\frac{T \cos \lambda T}{\lambda} + \frac{\sin \lambda T}{\lambda^2}, \tag{5.15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \xi \cosh(\lambda \xi) d\xi &= \left[\begin{array}{l} u = \xi, \quad dv = \cosh \lambda \xi d\xi \\ du = d\xi \quad v = \frac{\sinh \lambda \xi}{\lambda} \end{array} \right] \\
 &= \frac{\xi \sinh \lambda \xi}{\lambda} \Big|_0^T - \int_0^T \frac{\sinh \lambda \xi}{\lambda} d\xi \\
 &= \frac{\xi \sinh \lambda \xi}{\lambda} \Big|_0^T - \frac{\cosh \lambda \xi}{\lambda^2} \Big|_0^T = \frac{T \sinh \lambda T}{\lambda} - \frac{\cosh \lambda T}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}, \tag{5.16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \xi \cos(\lambda \xi) d\xi &= \left[\begin{array}{l} u = \xi, \quad dv = \cos \lambda \xi d\xi \\ du = d\xi \quad v = \frac{\sin \lambda \xi}{\lambda} \end{array} \right] \\
 &= \frac{\xi \sin \lambda \xi}{\lambda} \Big|_0^T - \int_0^T \frac{\sin \lambda \xi}{\lambda} d\xi \tag{5.17}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\xi \sin \lambda \xi}{\lambda} \Big|_0^T + \frac{\cos \lambda \xi}{\lambda^2} \Big|_0^T = \frac{T \sin \lambda T}{\lambda} + \frac{\cos \lambda T}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}. \tag{5.18}$$

Перейдемо до підрахування основних інтегралів:

$$f(T - \xi, \lambda) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} (i\lambda)^3 \xi,$$

$$\begin{aligned}
Y_4^T(\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{\lambda^3} s_4(\lambda\xi) f(T - \xi, \lambda) d\xi \\
&= \int_0^T \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi (\sinh(\lambda\xi) - \sin(\lambda\xi)) d\xi \\
&= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \xi (\sinh(\lambda\xi) - \sin(\lambda\xi)) d\xi \\
&= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^T \xi \sinh(\lambda\xi) d\xi - \int_0^T \xi \sin(\lambda\xi) d\xi \right) \\
&= \frac{i}{2\lambda^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-\sinh \lambda T + T\lambda \cosh \lambda T + T\lambda \cos \lambda T - \sin \lambda T), \\
Y_3^T(\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{\lambda^2} s_3(\lambda\xi) f(T - \xi, \lambda) d\xi \\
&= \int_0^T \frac{i\lambda}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi (\cosh(\lambda\xi) - \cos(\lambda\xi)) d\xi \\
&= \frac{i\lambda}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^T \xi \cosh(\lambda\xi) d\xi - \int_0^T \xi \cos(\lambda\xi) d\xi \right) \\
&= \frac{i}{2\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (T\lambda \sinh \lambda T - \cosh \lambda T - \cos \lambda T - T\lambda \sin \lambda T + 2), \\
Y_2^T(\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{\lambda} s_2(\lambda\xi) f(T - \xi, \lambda) d\xi \\
&= \int_0^T \frac{i\lambda^2}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi (\sinh(\lambda\xi) + \sin(\lambda\xi)) d\xi \\
&= \frac{i\lambda^2}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^T \xi \sinh(\lambda\xi) d\xi + \int_0^T \xi \sin(\lambda\xi) d\xi \right) \\
&= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-\sinh \lambda T + T\lambda \cosh \lambda T - T\lambda \cos \lambda T + \sin \lambda T), \\
Y_1^T(\lambda) &= \int_0^T s_1(\lambda\xi) f(T - \xi, \lambda) d\xi \\
&= \int_0^T \frac{i\lambda^3}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi (\cosh(\lambda\xi) + \cos(\lambda\xi)) d\xi \\
&= \frac{i\lambda^3}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^T \xi \cosh(\lambda\xi) d\xi + \int_0^T \xi \cos(\lambda\xi) d\xi \right) \\
&= \frac{i\lambda}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (T\lambda \sinh \lambda T - \cosh \lambda T + \cos \lambda T + T\lambda \sin \lambda T).
\end{aligned}$$

Отже, при $u = \xi$

$$\begin{aligned} Y_4^T(\lambda) &= \frac{i}{2\lambda^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-\sinh \lambda T + T\lambda \cosh \lambda T + T\lambda \cos \lambda T - \sin \lambda T), \\ Y_3^T(\lambda) &= \frac{i}{2\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (T\lambda \sinh \lambda T - \cosh \lambda T - \cos \lambda T - T\lambda \sin \lambda T + 2), \\ Y_2^T(\lambda) &= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-\sinh \lambda T + T\lambda \cosh \lambda T - T\lambda \cos \lambda T + \sin \lambda T), \\ Y_1^T(\lambda) &= \frac{i\lambda}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (T\lambda \sinh \lambda T - \cosh \lambda T + \cos \lambda T + T\lambda \sin \lambda T). \end{aligned}$$

Тепер перевіримо, чи виконуються необхідні умови. Порахуємо $Y_1^T(i\lambda)$, $Y_2^T(i\lambda)$, $Y_3^T(i\lambda)$, $Y_4^T(i\lambda)$:

$$\begin{aligned} Y_1^T(i\lambda) &= \frac{\lambda^3}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \xi (\cos \lambda \xi + \cosh \lambda \xi) d\xi \\ &= \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (T\lambda \sin \lambda T + \cos \lambda T + T\lambda \sinh \lambda T - \cosh \lambda T), \\ Y_2^T(i\lambda) &= \frac{\lambda^2}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \xi (\sin \lambda \xi + \sinh \lambda \xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (T\lambda \cosh \lambda T - T\lambda \cos \lambda T - \sinh \lambda T + \sin \lambda T), \\ Y_3^T(i\lambda) &= -\frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \xi (\cos \lambda \xi - \cosh \lambda \xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2 - T\lambda \sin \lambda T - \cos \lambda T + T\lambda \sinh \lambda T - \cosh \lambda T), \\ Y_4^T(i\lambda) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \xi (\sin \lambda \xi - \sinh \lambda \xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\lambda^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-\sin \lambda T + T\lambda \cosh \lambda T + T\lambda \cos \lambda T - \sinh \lambda T). \end{aligned}$$

Підставляємо:

$$\begin{aligned} Y_1^T(\lambda) &= i Y_1^T(i\lambda), \\ \frac{i\lambda}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (T\lambda \sinh \lambda T - \cosh \lambda T + \cos \lambda T + T\lambda \sin \lambda T) &= \end{aligned}$$

$$\frac{i\lambda}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (T\lambda \sin \lambda T + \cos \lambda T + T\lambda \sinh \lambda T - \cosh \lambda T),$$

$$Y_2^T(\lambda) = i Y_2^T(i\lambda),$$

$$\frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-\sinh \lambda T + T\lambda \cosh \lambda T - T\lambda \cos \lambda T + \sin \lambda T) =$$

$$\frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (T\lambda \cosh \lambda T - T\lambda \cos \lambda T - \sinh \lambda T + \sin \lambda T),$$

$$Y_3^T(\lambda) = i Y_3^T(i\lambda),$$

$$\frac{i}{2\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (T\lambda \sinh \lambda T - \cosh \lambda T - \cos \lambda T - T\lambda \sin \lambda T + 2) =$$

$$\frac{i}{2\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2 - T\lambda \sin \lambda T - \cos \lambda T + T\lambda \sinh \lambda T - \cosh \lambda T),$$

$$Y_4^T(\lambda) = i Y_4^T(i\lambda),$$

$$\frac{i}{2\lambda^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-\sinh \lambda T + T\lambda \cosh \lambda T + T\lambda \cos \lambda T - \sin \lambda T) =$$

$$\frac{i}{2\lambda^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-\sin \lambda T + T\lambda \cosh \lambda T + T\lambda \cos \lambda T - \sinh \lambda T).$$

Усі фінальні рівності виконуються, отже, необхідні умови виконані.

Розділ 6

Розв'язання неоднорідного диференціального рівняння 4-ого порядку з однорідними крайовими умовами

Повернімося до нашої задачі Коші (5.3), (5.4). Позначимо $v(\xi) = u(T - \xi)$, тоді маємо: $f(T - \xi, \lambda) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}(i\lambda)^3 v(\xi)$. А також,

$$\mathcal{F}^{-1}(f(T - \xi, \lambda)) = -2\delta'''(x)v(\xi).$$

Далі розглянемо виведені раніше $Y_1^T, Y_2^T, Y_3^T, Y_4^T$. Розпочнемо з $Y_1^T(\lambda)$, яка має вигляд:

$$Y_1^T(\lambda) = \int_0^T s_1(\lambda\xi) f(T - \xi, \lambda) d\xi = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T s_1(\lambda\xi) (i\lambda)^3 v(\xi) d\xi.$$

Знайдемо обернене перетворення Фур'є від функції $s_1(\lambda\xi)$:

$$\mathcal{F}^{-1}(s_1(\xi(\cdot)))(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta(x - i\xi) + \delta(x + i\xi) + \delta(x - \xi) + \delta(x + \xi)).$$

Переходимо до оберненого перетворення Фур'є для самого $Y_1^T(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(Y_1^T(\lambda))(x) = & -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^T v(\xi)(\delta'''(x - i\xi) + \delta'''(x + i\xi) + \\ & \delta'''(x - \xi) + \delta'''(x + \xi))d\xi. \end{aligned}$$

Тепер перейдемо до $Y_2^T(\lambda)$:

$$Y_2^T(\lambda) = \int_0^T \frac{s_2(\lambda\xi)}{\lambda} f(T - \xi, \lambda) d\xi = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T s_2(\lambda\xi) (i\lambda)^2 v(\xi) d\xi,$$

$$\mathcal{F}^{-1}(f(T - \xi, \lambda)) = -2\delta''(x) v(\xi),$$

$$\mathcal{F}^{-1}(s_2(\xi(\cdot))) (x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta(x - i\xi) - \delta(x + i\xi) + \frac{1}{i}(\delta(x + \xi) - \delta(x - \xi))).$$

Отже,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(Y_2^T(\lambda))(x) = & -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^T v(\xi)(\delta''(x - i\xi) - \delta''(x + i\xi) + \\ & \frac{1}{i}(\delta''(x + \xi) - \delta''(x - \xi)))d\xi. \end{aligned}$$

Далі розглянемо $Y_3^T(\lambda)$:

$$Y_3^T(\lambda) = \int_0^T \frac{s_3(\lambda\xi)}{\lambda^2} f(T - \xi, \lambda) d\xi = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T i\lambda s_3(\lambda\xi) v(\xi) d\xi,$$

$$\mathcal{F}^{-1}(f(T - \xi, \lambda)) = -2\delta'(x) v(\xi),$$

$$\mathcal{F}^{-1}(s_3(\xi(\cdot))) (x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta(x - i\xi) + \delta(x + i\xi) - \delta(x + \xi) - \delta(x - \xi)).$$

Отже,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(Y_3^T(\lambda))(x) = & -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^T v(\xi)(\delta'(x - i\xi) + \delta'(x + i\xi) - \\ & \delta'(x + \xi) - \delta'(x - \xi))d\xi. \end{aligned}$$

Тепер розглянемо $Y_4^T(\lambda)$:

$$Y_4^T(\lambda) = \int_0^T \frac{s_4(\lambda\xi)}{\lambda^3} f(T - \xi, \lambda) d\xi = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T s_4(\lambda\xi) v(\xi) d\xi,$$

$$\mathcal{F}^{-1}(f(T - \xi, \lambda)) = -2\delta(x) v(\xi),$$

$$\mathcal{F}^{-1}(s_4(\xi(\cdot))) (x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta(x - i\xi) - \delta(x + i\xi) - \frac{1}{i}(\delta(x + \xi) - \delta(x - \xi))).$$

Отже,

$$\mathcal{F}^{-1}(Y_4^T(\lambda))(x) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^T v(\xi)(\delta(x-i\xi) - \delta(x+i\xi) - \frac{1}{i}(\delta(x+\xi) - \delta(x-\xi)))d\xi.$$

Тепер розглянемо рівності, отримані в Розділі (5) та проведемо над ними певні операції:

$$\begin{aligned} i\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \cos(\lambda\xi)v(\xi) d\xi &= -Y_3^T(\lambda) + \frac{Y_1^T(\lambda)}{(i\lambda)^2}, \\ (i\lambda)^3\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \cos(\lambda\xi)v(\xi) d\xi &= -(i\lambda)^2Y_3^T(\lambda) + Y_1^T(\lambda). \end{aligned}$$

Застосуємо обернене перетворення Фур'є, тоді отримаємо

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(v(x) + v(-x))''' = -G_3^{T'''} + G_1^T, \quad (6.1)$$

де функція $v(\xi)$ має носій $[0, T]$.

Розглянемо ще один вираз:

$$\begin{aligned} i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \sin(\lambda\xi)v(\xi) d\xi &= -\frac{Y_2^T(\lambda)}{(i\lambda)^2} - Y_4^T(\lambda), \\ (i\lambda)^2i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \sin(\lambda\xi)v(\xi) d\xi &= -Y_2^T(\lambda) - (i\lambda)^2Y_4^T(\lambda). \end{aligned}$$

Застосуємо обернене перетворення Фур'є:

$$\frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(v(-x) - v(x))'' = -G_4^{T'''}(x) - G_2^T(x). \quad (6.2)$$

Продиференціюємо (6.2) та отримаємо наступне:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(v(x) + v(-x))''' = -G_3^{T'''}(x) + G_1^T(x), \quad (6.3)$$

$$\frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(v(-x) - v(x))''' = -G_4^{T'''}(x) - G_2^T(x). \quad (6.4)$$

Якщо ми розглянемо ці рівності при $x > 0$, то в обох рівностях в лівій частині залишиться лише $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}v(x)$. Таким чином отримано наступні теореми:

Теорема 6.1. Якщо існує $u \in L^2(0, T)$, то

$$-G_3^{T''} + G_1^T = -G_4^{T'''} - G_2^{T'},$$

при $x > 0$.

Теорема 6.2. Функція $-G_3^{T''} + G_1^T$ має бути непарною функцією з носієм $(-T, T)$, а $-G_4^{T'''} - G_2^{T'}$ має бути парною функцією з носієм $(-T, T)$.

Висновки

У ході виконання кваліфікаційної роботи було досліджено рівняння (0.7), яке пов'язане з крайовою задачею для функції $w(t, x)$, продовженої непарним чином за x . Застосування перетворення Фур'є за x дало змогу звести початкове рівняння до диференціального рівняння (0.8), фундаментальна система якого складається з лінійних комбінацій аналогів гіперболічних та тригонометричних функцій. Одержане рівняння містить розв'язки, що експоненціально зростають, тому його коректний аналіз здійснювався у просторах розподілів D' та Z' .

У роботі було послідовно описано ці простори, досліджено задачу Коші для однорідного рівняння типу (0.7), проаналізовано фундаментальну систему розв'язків рівняння (0.8) та побудовано розв'язок задачі Коші для цього рівняння. Також вивчено властивості неоднорідних рівнянь (0.7) та (0.8) з однорідними крайовими умовами. Окрему увагу приділено впливу параметра $u(t)$ на кінцеве значення розв'язків.

Список використаних джерел

- [1] G.M. Sklyar, L.V. Fardigola. The Markov power moment problem in problems of controllability and frequency extinguishing for the wave equation on a half-axis. *J. Math. Anal. Appl.* 276 (2002) 109–134.
- [2] I.M. Gelfand, G.E. Shilov. *Generalized Functions. Vol. 1: Properties and Operations* – New York-London: Academic Press, 1964.
- [3] Фардигола Л.В. Курс звичайних диференціальних рівнянь. Навчальний посібник – Київ: Наукова думка, 2022. — 312 с.
- [4] Фардигола Л.В. Перетворення Фур'є та його застосування. Навчальний посібник. – Харків: ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України, 2024. – 249 с.
- [5] V.A. Zolotarev. Inverse spectral problem for a third-order differential operator with non-local potential. *Journal of Differential Equations* 303 (2021) 456–481.
- [6] Гречка, Яна Олексіївна. Вплив параметрів на розв'язки диференціального рівняння четвертого порядку : кваліфікаційна робота першого (бакалаврського) рівня вищої освіти : спеціальність 113 «Прикладна математика» : освітньо-професійна програма «Прикладна математика» / Я.О. Гречка ; науковий керівник Л.В. Фардигола. – Харків : Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 2024. – 43 с.