

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Фізичний факультет
Кафедра теоретичної фізики імені академіка І.М. Ліфшиця

«Допущено до захисту»
Зав. кафедри теоретичної фізики
імені академіка І.М. Ліфшиця
доц. Рашба Г. І. _____
_____ 2024 р.

Оцінка «_____»
Голова ЕК _____
_____ 2024 р.

Токарський Станіслав Олександрович
**Плазмони та нульовий звук на поверхні
нанотрубки у магнітному полі**

Кваліфікаційна робота на здобуття
освітнього ступеня «Магістр»
спеціальність 104 – «фізика та астрономія»
освітньо-професійна програма - «фізика»

Науковий керівник – завідувач кафедри
теоретичної фізики імені академіка
І.М. Ліфшиця,
канд.фіз.-мат. н, доцент Рашба Г.І.

Харків 2024

АНОТАЦІЯ

Токарський С. О. Плазмони та нульовий звук на поверхні нанотрубки у магнітному полі. – Рукопис.

Дипломна робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр» за спеціальністю 104 – «фізика та астрономія». – Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2024. – 36 с. – Іл. 1.

Розглянуто спектри магнітоплазмових хвиль та нульовий звук в електронному газі на поверхні неферромагнітної нанотрубки в поздовжньому магнітному полі. Початковий енергетичний спектр електрона вважається параболічним, а електрон-електронну взаємодія розглядається в рамках наближення випадкової фази. Для великої кількості заповнених підзон хвильові частоти у виродженому електронному газі зазнають осциляцій типу де Гааза-ван Альфена та Ааронова-Бома зі зміною параметрів нанотрубки та магнітного потоку.

Розглянуто хвильові спектри на поверхні нанотрубок з надграткою в магнітному полі. Характеристики осциляцій визначаються відношенням енергії Фермі до ширини мінізон. При великих значеннях відношення картина биття проявляється в залежності частоти хвилі від параметрів нанотрубки. Ці коливання не присутні, якщо відношення достатньо мале.

Ключові слова: нанотрубки, надгратка, магнітне поле, магнітоплазмові хвилі, нульовий звук, спінові хвилі, спектр, коливання де Гааза-ван Альфена та Ааронова-Бома, биття.

ABSTRACT

Tokarskyi S. O. Plasmons and zero sound on the surface of a nanotube in a magnetic field. – Manuscript.

Master's Thesis for the educational degree of "Master" in the specialty 104 – "Physics and Astronomy". – Kharkiv: V. N. Karazin Kharkiv National University, 2024. – 36 p. – Fig. 1.

The spectra of magnetoplasma waves and zero sound in an electron gas on the surface of a non-ferromagnetic nanotube in a longitudinal magnetic field are examined. The initial energy spectrum of the electron is assumed to be parabolic, and electron-electron interactions are considered within the framework of the random phase approximation. For a large number of filled subbands, the wave frequencies in a degenerate electron gas exhibit oscillations of the de Haas–van Alphen and Aharonov–Bohm types with changes in the nanotube parameters and magnetic flux.

The wave spectra on the surface of nanotubes with a superlattice in a magnetic field are also studied. The characteristics of these oscillations are determined by the ratio of the Fermi energy to the miniband width. At high values of this ratio, a beating pattern appears in the dependence of the wave frequency on the nanotube parameters. These oscillations are absent if the ratio is sufficiently small.

Keywords: nanotubes, superlattice, magnetic field, magnetoplasma waves, zero sound, spin waves, spectrum, de Haas–van Alphen and Aharonov–Bohm oscillations, beating.

Зміст

Вступ	5
Аналітичний огляд літератури	8
1 Енергетичний спектр електронів на поверхні нанотрубки	10
2 Магнітоплазмові хвилі на поверхні нанотрубки	13
2.1 Вироджений електронний газ	13
2.2 Невироджений електронний газ	17
3 Магнітоплазмові хвилі на поверхні напівпровідникової нанотрубки з надграткою	19
4 Нульовий звук на нанотрубці	29
Висновки	32
Список літератури	34

Вступ

На сучасному етапі розвитку нанотехнологій та квантової фізики нанотрубки привертають значну увагу через свої унікальні електронні та магнітні властивості, що надає їм великий потенціал для застосування в різних галузях науки і техніки. Зокрема, двовимірний електронний газ на поверхні нанотрубок є об'єктом інтенсивних досліджень, оскільки він відкриває нові можливості для розробки чутливих приладів, накопичувачів енергії та компонентів квантових комп'ютерів, а також для вивчення колективних явищ у мікроскопічних системах. Особливо цікавим є дослідження колективних збуджень електронів, що відкриває нові горизонти для розуміння взаємодії між електронними, магнітними та оптичними властивостями матеріалів на нано- та мікроскопічному рівнях. Важливим аспектом є розуміння того, як електронні збудження, що виникають внаслідок резонансних переходів між енергетичними рівнями, можуть супроводжуватися утворенням нових колективних мод, зокрема магнітоплазмових хвиль та нульового звуку.

Актуальність теми дослідження зумовлена необхідністю глибшого вивчення електронних збуджень на поверхні нанотрубок під впливом змінних полів і магнітних збурень. Зокрема, електронні резонансні переходи між енергетичними рівнями можуть супроводжуватися утворенням нових гілок колективного спектра збудження. Це є важливим як для фундаментальної науки, так і для практичних застосувань у технологіях, пов'язаних з наноматеріалами. Перевірка ідеї щодо утворення нових спектрів збудження на основі електронних переходів є важливим кроком до розуміння фізичних процесів, що відбуваються в таких системах, і може мати значення для розвитку нових видів сенсорів та матеріалів. Ідеї щодо такого явища були підтверджені в роботах, присвячених вивченню магнітних хвиль і електронних збуджень у металах, де продемонстровано виникнення нових

мод, зокрема магнітодомішкових хвиль. Ці теоретичні передумови стали основою для проведеного в даній роботі дослідження.

Основною гіпотезою цього дослідження є припущення про існування колективних збуджень у вигляді нових гілок спектра, що виникають внаслідок електронних резонансних переходів між нееквідистантними енергетичними рівнями на поверхні нанотрубок. Переходи між цими рівнями є основою формування спектрів магнітоплазмових хвиль та нульового звуку, що виникають через особливості енергетичного спектра електронів на поверхні трубки. Це припущення підтверджується в рамках теоретичного аналізу, де вивчаються спектри магнітоплазмових хвиль і нульового звуку.

Задача дипломної роботи – дослідити колективні збудження електронного газу на поверхні нанотрубки в магнітному полі.

Об'єкт дослідження – колективні збудження електронного газу, які виникають на поверхні нанотрубок під впливом магнітного поля.

Предмет дослідження – спектри колективних збуджень електронного газу на поверхні нанотрубки у магнітнім полі.

Мета роботи – теоретичне дослідження колективних збуджень електронного газу та вивчення їх властивостей на поверхні циліндричної нанотрубки в магнітному полі.

Практична цінність результатів, отриманих у цьому дослідженні, полягає в тому, що сучасні технологічні пристрої вже використовують та будуть використовувати нанотрубки. Тому результати цього дослідження сприятимуть просуванню науково-технічного прогресу в цій області. Визначення ключових параметрів нанотрубок, таких як ефективна маса електрона, ширина мінізони та відношення енергії Фермі до ширини мінізони. Використання отриманих результатів для вдосконалення методів експериментального дослідження нанотрубок (наприклад, через розсіювання світла або електронів).

Достовірність отриманих у роботі результатів в дослідженні використовувалися загальновідомі методи квантової кінетики. Висновки базуються на перевірених фізичних моделях, які використовуються для опису електронного газу та його колективних збуджень.

Наукова обґрунтованість базується на детальному аналізі спектра електронів (Розділ 1), врахуванні особливостей виродженого та невиродженого електронного газу (Розділ 2), дослідженні впливу надграток (Розділ 3) та явища нульового звуку (Розділ 4). Отримані результати є новим внеском у фізику наноматеріалів і підтверджуються коректними теоретичними підходами.

Аналітичний огляд літератури

Колективні збудження в металах, напівпровідниках і плазмі в магнітному полі завжди були в центрі уваги фізиків [1, 2]. У цих роботах були закладені основи вивчення колективних збуджень в електронних системах на кривих поверхнях. Серед них вуглецеві [3,4] і напівпровідникові [5-9] нанотрубки. Інтерес до цих систем викликаний кількома причинами. Вони використовуються як функціональні елементи в багатьох пристроях і інструментах. В даний час експериментальна технологія дозволяє створювати ці системи в лабораторних умовах. Наявність додаткового параметра – кривизни конструкції – збільшує кількість способів управління властивостями системи.

Можливість поширення плазмової хвилі на поверхні вуглецевої нанотрубки показано в роботах [10-13]. Автори використали модель ефективної маси електрона та наближення випадкової фази. Теорія цих хвиль на поверхні нанотрубок була розроблена в [14-16]. Осциляції Ааронова-Бома спектру довгохвильових внутріпідзонних плазмонів на поверхні трубки циліндра в поздовжньому магнітному полі розглянуто в [14]. Міжпідзонні плазмони в [14] досліджувалися лише чисельно. Короткохвильові плазмони на трубці розглядалися в [15]. Автори цієї статті відзначили особливості плазмонного спектра на трубці за відсутності магнітного поля, які відрізняють його від спектру тривимірних систем. Виявилося, що дисперсійна крива плазмону не має кінцевої точки в квантовій межі. Групова швидкість довгохвильових внутріпідзонних плазмонів за відсутності ефектів запізнювання має характерну для одновимірних систем логарифмічну особливість. Спектр міжпідзонних плазмонів починається зі скінченної частоти. Із збільшенням числа заповнених підзон зростає число гілок спектра плазмової хвилі. Затухання Ландау плазмових хвиль із фазовою швидкістю,

меншою за ферміївську, відсутнє. У роботі [15] також розглядалися нанотрубки з магнітним потоком. Показано, що при заданій густині електронів кількість гілок спектра плазмової хвилі збільшується, коли потік через поперечний переріз нанотрубки зростає. У [16] розраховано поздовжню діелектричну проникність електронного газу на трубці з магнітним потоком, яка входить до дисперсійного рівняння плазмонів, для довільного відношення фазової швидкості хвилі до швидкості Фермі. Результати, отримані в [10-16], стосуються напівпровідникових і вуглецевих нанотрубок з невеликою кількістю носія поблизу екстремуму зони провідності. Плазмові хвилі в електронному неvirодженому газі, а також нульовий звук на поверхні трубки не розглядалися в [10-16].

У роботі [17] наведено результати розрахунків спектрів магнітоплазмону, нульового звуку на поверхні неферромагнітної циліндричної нанотрубки в поздовжньому магнітному полі при відмінних від використовуваних раніше густинах електронів. Як і в попередніх роботах [10-16], вихідний закон дисперсії електронів вважається параболічним. Електрон-електронна взаємодія враховується в наближенні випадкової фази.

У роботі [18] розглядався вплив надгратки [19-22] на спектр магнітоплазмових хвиль на поверхні нанотрубок. Нульові звукові коливання електронної густини на трубці з лінійчастим спектром розглядаються в [17]. Компоненти тензора високочастотної провідності електронного газу на поверхні нанотрубки в магнітному полі розраховано в [23].

1 Енергетичний спектр електронів на поверхні нанотрубки

Енергія електрона з ефективною масою m_* на поверхні циліндричної нанотрубки радіуса a складається з енергії обертального руху, $\frac{l^2}{2m_*a^2}$ та поздовжнього руху, $\frac{k^2}{2m_*}$ де $l = 0, \pm 1, \dots$, і k – відповідно проекції моменту імпульсу та моменту електрона на трубку вісь. Квантова стала приймається рівною одиниці. У магнітному полі \vec{B} , паралельному осі трубки z , енергія обертального руху електрона стає рівною $\varepsilon_0(l + \eta)^2$ [24], де $\varepsilon_0 = (2m_*a^2)^{-1}$ – обертальний квант, $\eta = \Phi/\Phi_0$ – відношення магнітного потоку, Φ , через поперечний переріз трубки, до кванта потоку, $\Phi_0 = 2\pi c/e$ (e – заряд електрона, c – швидкість світла). Враховуючи спінове розщеплення рівнів, отримуємо енергію електрона

$$\varepsilon_{lk\sigma} = \varepsilon_0(l + \eta)^2 + \frac{k^2}{2m_*} + \sigma\mu_B B, \quad (1.1)$$

де μ_B – спіновий магнітний момент електрона, $\sigma = \pm 1$ відповідає двом орієнтаціям спіну. Орбітальна хвильова функція для стаціонарного стану електрона з енергією (1.1) набуває вигляду:

$$\psi_{lk}(\phi, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{il\phi} \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikz}, \quad (1.2)$$

де ϕ, z – циліндричні координати, L – довжина труби. Функції (1.2) ортонормовані за умовою

$$\int dS \psi_{lk}^*(\phi, z) \psi_{l'k'}(\phi, z) = \delta_{ll'} \delta_{kk'},$$

де $dS = ad\phi dz$.

З виразу (1.1) видно, що за відсутності магнітного поля рівні оберտального руху з двократно вироджуються у бік напрямку кутового моменту $l \neq 0$. Магнітне поле зсуває нижній рівень ($l = 0$) на величину $\varepsilon_0 \eta^2$ та розділяє рівні з $l \neq 0$ на два підрівні. Таким чином, спектр (1.1) являє собою набір одновимірних суміжних підзон, межі яких $\varepsilon_l^\sigma = \varepsilon_{l0\sigma}$ не є рівновіддаленими. Електронна густина станів має кореневі особливості на межах підзон. Послідовність рівнів $\varepsilon_l = \varepsilon_0(l + \eta)^2$ залежить від магнітного потоку. Якщо задовольняється умова рівності $0 < \eta < \frac{1}{2}$, ε_l чергується наступним чином: $\varepsilon_0 \eta^2 < \varepsilon_{-1} < \varepsilon_{+1} < \varepsilon_{-2} < \dots$. А якщо рівність $\eta > \frac{1}{2}$, послідовність рівнів ε_l інша: $\varepsilon_{-1} < \varepsilon_0 \eta^2 < \varepsilon_{-2} < \varepsilon_1 < \dots$

Вплив кулонівської взаємодії електронів на трубці на енергетичний спектр у наближенні Хартрі-Фока обговорювався в [25]. Екранування електрон-електронних взаємодій досліджено в [26, 27]. Поправка Хартрі-Фока до спектру (1.1) в моделі контактної взаємодії електронів має звичайний вигляд [28] $gn_{-\sigma}$, де n_{σ} – поверхнева густина електронів з проекцією спіну σ , g – фур'є-компонента енергії короткодіючої взаємодії електронів. Ця поправка обумовлює обмінний зсув підзон. Нижче енергетичний спектр електронів має вигляд:

$$\varepsilon_{lk\sigma} = \varepsilon_0(l + \eta)^2 + \frac{k^2}{2m_*} + \sigma\mu_B B + gn_{-\sigma} \quad (1.3)$$

буде використано для дослідження спектру колективного збудження в електронному газі на трубці.

Сучасні нанотехнології дозволяють створювати радіальні та поздовжні надгратки з циліндричною симетрією. Поздовжня надгратка викликає чергування потенційних бар'єрів і ям для електронів, що рухаються вздовж трубки. Їх можна врахувати, замінивши $\frac{k^2}{2m_*}$ в формулі (1.3) виразом:

$$\varepsilon_k = \Delta(1 - \cos k d), \quad (1.4)$$

який зазвичай використовується в моделі сильного зв'язку електронів у кристалічній ґратці [24]. У (1.4) символ Δ позначає амплітуду модулюючого потенціалу d – його період. Якщо $kd \ll 1$, то вираз (1.4) перетворюється на $\frac{k^2}{2m_*}$, де

$$m_* = \frac{1}{\Delta d^2}. \quad (1.5)$$

Поздовжня ефективна маса електрона вважається рівною його поперечній. Енергія електрона на трубці з поздовжньою надґраткою становить

$$\varepsilon_{lk\sigma} = \varepsilon_0(l + \eta)^2 + \Delta(1 - \cos k d) + \sigma\mu_B B + gn_{-\sigma}. \quad (1.6)$$

Цей вираз описує набір мінізон, які можуть перекривати одна одну.

Електронна густина станів із спектром (1.6) виражається як [30]

$$\nu(\varepsilon) = \frac{L}{\pi d} \sum_{l\sigma} \frac{\theta(\varepsilon - \varepsilon_l^\sigma) \theta(\varepsilon_l^\sigma + 2\Delta - \varepsilon)}{\sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_l^\sigma)(\varepsilon_l^\sigma + 2\Delta - \varepsilon)}}, \quad (1.7)$$

де θ – функція Хевісайда.

Модулюючий потенціал надґратки перетворює спектр (1.3) на мінізони з ширинами 2Δ та кореневими особливостями електронної густини станів на межах мінізони ε_l^σ та $\varepsilon_l^\sigma + 2\Delta$. Нижче буде показано, як взаємне розташування мінізон впливає на спектри плазмових на нанотрубці.

2 Магнітоплазмові хвилі на поверхні нанотрубки

2.1 Вироджений електронний газ

У наближенні випадкових фаз спектр магнітоплазмових хвиль на трубці визначається з дисперсійного рівняння [10-18]

$$1 - u_m(q)P_m(q, \omega) = 0, \quad (2.1)$$

де $u_m(q)$ – циліндрична гармоніка потенціалу кулонівської взаємодії електронів, $P_m(q, \omega)$ є поляризаційний оператор, який залежить від цілого числа m , хвильового числа q та частоти ω . Функція $u_m(q)$ дорівнює

$$u_m(q) = 4\pi e^2 a I_m(qa) K_m(qa),$$

тут I_m і K_m є модифікованими функціями Бесселя. Поляризаційний оператор у випадку електронного газу на трубці має вигляд:

$$P_m(q, \omega) = \frac{1}{\pi a L} \sum_{lk} \frac{f(\varepsilon_{(l+m)(k+q)}) - f(\varepsilon_{lk})}{\varepsilon_{(l+m)(k+q)} - \varepsilon_{lk} - \omega - i0}, \quad (2.2)$$

де $f(\varepsilon)$ – функція Фермі. Співвідношення потоків $\eta = \Phi/\Phi_0$ входить до рівнянь (1.1) і (2.2) у комбінації $l + \eta$. Це дозволяє обмежуватися інтервалом $0 \leq \eta \leq 1$ зміни потоку. Тут і в розділі 4 не враховується спінове розщеплення рівнів.

У напівпровідникових нанотрубках з радіусом $a \propto (10^{-7} - 10^{-6}) \text{ см}$ поверхнева електронна густина зазвичай не перевищує a^{-2} . Це означає, що в виродженому електронному газі електрони займають невелику кількість низько розташованих підзон спектра (1.1). Якщо енергія Фермі μ_0 знаходиться в нижній підзоні $[\varepsilon_0 \eta^2, \varepsilon_{-1}]$, то поверхнева електронна густина n задовольняє

умову $n < \frac{(1-2\eta)^{\frac{1}{2}}}{\pi^2 a^2}$. Отже, дисперсійне рівняння (2.1) для осциляцій густини електронного газу на нанотрубці має розв'язок у вигляді

$$\exp[i(m\phi + qz - \omega t)]$$

з проекцією імпульсу q та кутовому моменту m :

$$\omega_m(q) = 2m\eta\varepsilon_0 + \left[(qv_0)^2 + (\varepsilon_0 m^2 + \omega_q)^2 + 2qv_0(\varepsilon_0 m^2 + \omega_q) \operatorname{cth} \frac{\pi qa}{2v_0 u_m(q)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.3)$$

де $v_0 = [2(\mu_0 - \varepsilon_0 \eta^2)/m_*]^{1/2}$ – швидкість Фермі в нижній підзоні, $v = m_*/2\pi$ – густина станів двовимірного електронного газу на поверхні, $\omega_q = q^2/2m_*$. Хвиля (2.3) розповсюджується вздовж осі трубки. Формула (2.3) справедлива також у випадку, коли рівень Фермі знаходиться в нижній підзоні $[\varepsilon_{-1}, \varepsilon_0 \eta^2]$, якщо v_0 замінюється на $v_{-1} = [2(\mu_0 - \varepsilon_0(\eta - 1)^2)/m_*]^{1/2}$. Гранична частота магнітоплазмової хвилі зі спектром (2.3) дорівнює

$$\omega_m(0) = 2m\eta\varepsilon_0 + \varepsilon_0 \left(m^4 + \frac{8mm_*^2 e^2 a^2 v_0}{\pi} \right)^{1/2}, \quad (2.4)$$

де $m \geq 1$. Крім деполаризаційного зсуву граничної частоти $\delta\omega_l = 2m_* e^2 v_0 / \pi m$, знайденого в [15] в магнітному полі є додатковий зсув $\delta\omega_\eta = 2m\eta\varepsilon_0 = \frac{m e B}{2m_* c}$, кратний ларморовській частоті електрона. Відношення цих двох зсувів дорівнює $\delta\omega_\eta / \delta\omega_l = \pi m^2 B / 4m_*^2 e c v_0$. Співвідношення параметрів напівпровідникової нанотрубки на основі GaAs (де $m_* = 0,07m_0$, m_0 – маса вільного електрона, $v_0 = 10^7 \frac{cm}{s}$) при $m = 1$ в польових умовах

$B = 10T$ дорівнює 15%. За відсутності магнітного поля формули (2.3) і (2.4) збігаються з отриманими в роботі [15].

Якщо $m = 0$, то з рівняння (2.1) отримуємо спектр аксіально симетричного внутріпідзонного магнітоплазмону. У довгохвильовій границі, коли фазова швидкість хвилі перевищує характерну швидкість електрона, а температура довільна, спектр магнітоплазмону має вигляд

$$\omega_0^2(q) = \frac{q^2 n u_0(q)}{m_*} + 3q^2 \overline{v^2}, \quad (2.5)$$

де

$$\overline{v^2} = \frac{1}{\pi a L n} \sum_{lk} \left(\frac{k}{m_*} \right)^2 f(\varepsilon_{lk}) \quad (2.6)$$

– середнє значення квадрата швидкості електронів уздовж трубки.

У квантовій границі, коли електрони частково займають нижню підзону $[\varepsilon_0 \eta^2, \varepsilon_{-1}]$, для виродженого газу маємо $\overline{v^2} = v_0^2/3$. Тоді з формули (2.3) при $qa \ll 1$ отримуємо

$$\omega_0^2(q) = 4\pi e^2 n a q^2 / m_* \left[\ln \frac{2}{e^\gamma q a} - \frac{1}{2} (q a)^2 \ln \frac{q a}{2} \right] + q^2 v_0^2, \quad (2.7)$$

де $\gamma = 0,577$ – число Ейлера. Перший член у правій частині формули (2.7) був знайдений за відсутності магнітного поля в [11].

Із зростанням радіуса нанотрубки та електронної густини збільшується кількість зайнятих підзон. Якщо $\mu_0 \gg \varepsilon_0$, сума по l входить в рівняння (2.2) можна розрахувати за формулою Пуассона. Отже, з рівняння (2.5) впливає спектр аксіально симетричного довгохвильового магнітоплазмону у виродженому газі:

$$\omega_0^2(q) = \frac{4\pi e^2 n a q^2}{m_*} \left[\ln \frac{2}{e^\nu q a} - \frac{1}{2} (q a)^2 \ln \frac{q a}{2} \right] + \frac{3\mu_0 q^2}{2m_*} \left[1 - \frac{4}{\pi^3} \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{\frac{5}{4}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{\frac{5}{2}}} \cos 2\pi r \eta \cdot \cos \left(2\pi r \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (2.8)$$

Частота хвилі (рівняння (2.8)) зазнає осциляції, що нагадують осциляції де Гааза-ван Альфена та осциляції Ааронова-Бома. Перші пов'язані з проходженням кореневих особливостей густини станів через межу Фермі, коли електронна густина або радіус трубки змінюється. Зі зміною величини $\mu_0^{1/2} = (n/2\nu)^{1/2}$ період осциляції дорівнює $\tau_n = (2m_* a)^{-\frac{1}{2}}$. Якщо радіус трубки змінюється, то для періоду отримуємо вираз $\tau_a = (2m_* \mu_0)^{-1/2}$. Ці осциляції існують і за відсутності магнітного поля.

Якщо електронна густина задовольняє умову

$$n < \frac{(2\sqrt{\eta} + \sqrt{1+2\eta})}{\pi^2 a^2},$$

тоді енергія Фермі знаходиться в другій підзоні $[\varepsilon_{-1}, \varepsilon_{+1}]$. У цьому випадку існують дві гілки спектра аксіально симетричних коливань електронної густини:

$$\omega_{\pm}^2(q) = \frac{1}{2} \left[q^2 (v_0^2 + v_{-1}^2) + 2\omega_q^2 + 2q(v_0 + v_{-1})\omega_q b(q) \right] \pm \frac{1}{2} \left\{ q^2 (v_0 - v_{-1})^2 [q(v_0 + v_{-1}) + 2\omega_q b(q)]^2 - 16q^2 v_0 v_{-1} \omega_q^2 [1 - b^2(q)] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

де v_0 і v_{-1} – швидкості Фермі в заповнених підзонах, $b(q) = \text{cth} \left(\frac{\pi q a}{2\nu u_0(q)} \right)$.

2.2 Невироджений електронний газ

Використовуючи в рівнянні (2.2) функцію розподілу Больцмана, отримуємо

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} P_0(q, \omega) &= \frac{\nu}{\sqrt{\pi} q a} e^{\beta \mu} \operatorname{ch} \beta \mu_B B \times \\ &\times \left[F\left(\sqrt{\frac{\beta m_*}{2q^2}} \omega_-\right) - F\left(\sqrt{\frac{\beta m_*}{2q^2}} \omega_+\right) \right] \cdot \sum_l \exp(-\beta \varepsilon_l), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} P_0(q, \omega) &= \frac{\nu}{q a} e^{\beta \mu} \operatorname{ch} \beta \mu_B B \times \\ &\times \left[\exp\left(-\frac{\beta m_*}{2q^2} \omega_+^2\right) - \exp\left(-\frac{\beta m_*}{2q^2} \omega_-^2\right) \right] \sum_l \exp(-\beta \varepsilon_l), \end{aligned} \quad (2.11)$$

де

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} P \int_{-\infty}^{+\infty} dy \cdot \frac{e^{-y^2}}{x-y},$$

μ – хімічний потенціал, β – зворотна температура, $\omega_{\pm} = \omega \pm (q^2/2m_*)$.

У довгохвильовій границі $q(m_*\beta)^{-1/2} \ll \omega$ вирази (2.10) і (2.11) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} P_0(q, \omega) &= \frac{q^2 n}{m_* \omega^2}, \\ \operatorname{Im} P_0(q, \omega) &= -\beta n \omega \left(\frac{\pi \beta m_*}{2q^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\beta m_* \omega^2}{2q^2}\right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

З рівняння (2.1) з урахуванням (2.12) отримуємо частоту та декремент затухання аксіально симетричних плазмонів у класичній електронній плазмі на поверхні трубки:

$$\begin{aligned}\omega_0^2(q) &= \frac{nq^2 u_0(q)}{m_*}, \\ \gamma_0(q) &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{m_* \beta}{q^2}\right)^{3/2} \omega_0^4(q) \exp\left(-\frac{\beta m_* \omega_0^2(q)}{2q^2}\right).\end{aligned}\quad (2.13)$$

Якщо умова $qa \ll 1$ виконується, тоді отримуємо

$$\omega_0^2(q) = \frac{4\pi e^2 n a q^2}{m_*} \left[\ln \frac{2}{e^{\gamma} q a} - \frac{1}{2} (q a)^2 \ln \frac{q a}{2} \right] + \frac{3q^2}{m_* \beta}. \quad (2.14)$$

Формули (2.12) – (2.14) містять β і n , тому відповідають замкнутій системі електронів на поверхні нанотрубки. Якщо система електронів відкрита, то сума по l , яка входить до рівнянь (2.10) і (2.11) можна перетворена за допомогою формули

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \exp[-x(l+v)^2] = \sqrt{\frac{\pi}{x}} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 r^2}{x}\right) \cos 2\pi r v, \quad x > 0.$$

Отже, отримуємо

$$\omega_0^2(q) = \frac{q^2 u_0(q)}{\pi \beta} e^{\beta \mu} \operatorname{ch} \beta \mu_B B \cdot \left[1 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 r^2}{\beta \varepsilon_0}\right) \cos 2\pi r \eta \right]. \quad (2.15)$$

У цьому випадку частота хвилі і декремент згасання випробовують осциляції Ааронова-Бома. Їх можна знайти лише за адресою $\beta \varepsilon_0 > 1$. Коливання типу де Гааза-ван Альфена в даному випадку відсутні.

3 Магнітоплазмові хвилі на поверхні напівпровідникової нанотрубки з надграткою

Магнітоплазмові хвилі в напівпровідникових надгратках розглядалися в рамках підходу наближення випадкових фази в роботах [10], [31-35]. Автори [35] розглядали не лише довгохвильову граніцю, де магнітоплазмонне хвильове число є малим порівняно з шириною зони Бріллюена вздовж осі надгратки, але й процеси перекидання. Вони показали, що дрейф електрона вздовж осі надгратки обумовлює появу нових гілок у спектрі хвиль. Відповідні надгратки та магнітоплазмони в [35] отримали назву «тунельних».

Енергетичний спектр електрону, описаний рівнянням (1.6) без урахування рівнів спінового розщеплення та поправки Хартрі-Фока є набором мінізон шириною 2Δ з наявністю кореневої особливості густини станів на їх межах $\varepsilon_l, \varepsilon_l + 2\Delta$. Якщо $\eta < 1/2$, то ширина k -го проміжку між сусідніми мінізонами дорівнює:

$$\begin{aligned}\delta_k &= k\varepsilon_0(1 - 2\eta) - 2\Delta, k = 1,3,5, \dots, \\ \delta_k &= 2k\varepsilon_0\eta - 2\Delta, k = 2,4,6, \dots\end{aligned}\tag{3.1}$$

Якщо, з іншого боку $\eta > 1/2$, ми можемо отримати

$$\begin{aligned}\delta_k &= k\varepsilon_0(2\eta - 1) - 2\Delta, k = 1,3,5, \dots, \\ \delta_k &= 2k\varepsilon_0(1 - \eta) - 2\Delta, k = 2,4,6, \dots\end{aligned}\tag{3.2}$$

З рівнянь (2.1), (2.2) очевидні умови відсутності перекриття мінізон.

Поверхнева густина виродженого електронного газу на трубці дорівнює

$$n = \frac{1}{\pi^2 a} \sum_l k_l,$$

де

$$k_l = \frac{1}{d} \arccos \left(1 - \frac{\mu_0 - \varepsilon_l}{\Delta} \right) \quad (3.3)$$

є максимальним хвильовим числом для електрона в l -й мінізоні. Якщо $n = 1/\pi ad$, найнижча мінізона повністю заповнена. У цьому випадку $k = \pi/d$, $\mu_0 = \varepsilon_0 \eta^2 + 2\Delta$.

У рамках теорії лінійного відгуку електронного газу [36] на зовнішнє збурююче поле $\sim \exp[i(m\phi + qz - \omega t)]$, дисперсійне рівняння для магнітоплазмонних хвиль, які поширюються вздовж трубки, має вигляд (2.1) у наближенні випадкових фаз. Знаменник у виразі (2.2) містить частоти вертикальних електронних переходів між рівнями ε_l :

$$\Omega_{\pm}(l, m) = \left(\frac{\varepsilon_{l+m} - \varepsilon_l}{\varepsilon_l - \varepsilon_{l-m}} \right) = \varepsilon_0 [2m(l + \eta) \pm m^2]. \quad (3.4)$$

Кожне ціле значення m пов'язане з гілкою плазмонного спектру. При $m = 0$ розв'язки рівняння (2.1) представляють спектр внутрізонних плазмонів. Значення $m \neq 0$ відповідають міжзонним плазмонам.

При нульовій температурі дійсна частина поляризаційного оператора в діапазоні частот, де відсутнє згасання Ландау, дорівнює

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} P_m(q, \omega) = & - \frac{1}{2\pi^2 ad \Delta \sin \frac{qd}{2}} \times \\ & \times \sum_l \left\{ \frac{1}{\sqrt{b_+^2 - 1}} \left[\operatorname{arctg} \frac{b_+ \operatorname{tg} \left(k_l + \frac{q}{2} \right) \frac{d}{2} + 1}{\sqrt{b_+^2 - 1}} + \operatorname{arctg} \frac{b_+ \operatorname{tg} \left(k_l - \frac{q}{2} \right) \frac{d}{2} - 1}{\sqrt{b_+^2 - 1}} \right] - (+ \rightarrow -) \right\}, \quad (3.5) \end{aligned}$$

де

$$b_{\pm} = \frac{\Omega_{\pm} - \omega}{2\Delta \sin \frac{qd}{2}}, \quad b_{\pm}^2 > 1.$$

Доданки в рівнянні (3.5) позначимо (+ \rightarrow -) отримуються з попередніх шляхом заміни b_+ для b_- та інвертування знака q в дотичному аргументі. Якщо ми встановимо $m = 0$, $\omega = 0$ а потім $q = 0$ з рівнянні (3.5), отримуємо

$$Re P_0(0,0) = -\frac{\partial n}{\partial \mu_0} = -2\nu,$$

де ν – густина станів ферміївських-електронів на трубці з надграткою. При $q = 0$ отримуємо з рівняння (3.5) наступний вираз

$$Re P_m(0, \omega) = \frac{1}{\pi^2 a} \sum_l k_l \left(\frac{1}{\Omega_- - \omega} - \frac{1}{\Omega_+ - \omega} \right). \quad (3.6)$$

Уявна частина поляризаційного оператора для виродженого електронного газу при $m = 0$ можна записати як

$$Im P_0(q, \omega) = \frac{1}{4\pi a d \Delta \left| \sin \frac{qd}{2} \right|} \times \\ \times \left[\int_{(-k_0 - \frac{q}{2})d}^{(-k_0 + \frac{q}{2})d} dx - \int_{(k_0 - \frac{q}{2})d}^{(k_0 + \frac{q}{2})d} dx \right] \cdot \delta \left(\sin x - \frac{\hbar \omega}{2\Delta \sin \frac{qd}{2}} \right). \quad (3.7)$$

Аналізуючи це рівняння ми можемо бачити, що внутрізонні плазмони у виродженому електронному газі не згасають, якщо точка (q, ω) в площині хвильове число-частота розташована вище синусоїдальної

$$\omega = 2\Delta \left| \sin \frac{qd}{2} \right|$$

в першій зоні Бріллюена $(-\pi/d) \leq q \leq (\pi/d)$.

У довгохвильовій границі, коли

$$2\Delta \sin \frac{qd}{2} \ll \omega, \quad (3.8)$$

отримуємо з рівняння (3.5) вираз

$$Re P_0(q, \omega) = \frac{4\Delta \sin^2 \frac{qd}{2}}{\pi^2 a d \omega^2} \sum_l \sin k_l d, \quad (3.9)$$

де

$$\sin k_l d = \frac{1}{\Delta} [(\mu_0 - \varepsilon_l)(\varepsilon_l + 2\Delta - \mu_0)]^{1/2}.$$

Якщо в формулі (3.9) врахувати, що $qd \ll 1$, $d \rightarrow 0$, і $\Delta \rightarrow \infty$, так що умова рівняння (1.5) виконується, то рівняння (3.9) набуває вигляду знайомого виразу

$$Re P = \frac{nq^2}{m_* \omega^2},$$

що відповідає довгохвильовим плазмонам на трубці без надгратки [17]. У цій границі щілини між мінізонами зникають, а електронний спектр стає суцільним.

Використовуючи рівняння (2.1) та враховуючи рівняння (3.9), одержуємо спектр аксіально симетричних внутрізонних плазмонів,

$$\omega_0^2(q) = \frac{4u_0(q)}{\pi^2 a d} \sin^2 \frac{qd}{2} \cdot \sum_l [(\mu_0 - \varepsilon_l)(\varepsilon_l + 2\Delta - \mu_0)]^{1/2}. \quad (3.10)$$

У квантовій межі, що стосується трубок малого радіуса, коли $\eta < \frac{1}{2}$ і енергія Фермі знаходиться в найнижчій мінізоні $[\varepsilon_0\eta^2, \varepsilon_0\eta^2 + 2\Delta]$, підсумовування за l у рівнянні (3.10) можна звести до доданка $l = 0$. Для цього необхідна електронна густина, яка є меншою за $1/\pi ad$. Тоді, при $qa \ll 1$ і $qd \ll 1$, з рівняння (3.10) отримуємо вираз:

$$\omega_0^2(q) = \frac{4e^2 dq^2}{\pi} \ln \frac{2}{qa e^\gamma} \cdot [(\mu_0 - \varepsilon_0\eta^2)(\varepsilon_0\eta^2 + 2\Delta - \mu_0)]^{1/2}. \quad (3.11)$$

Як випливає з рівнянь (3.10) і (3.11) видно, що повністю заповнені мінізони не беруть участі в коливаннях електронної густини.

Якщо $d \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow \infty$ і умова рівняння (1.5) виконується, рівняння (3.11) зводиться до відомого рівняння для спектра плазмонів на трубці без надгратки в квантовій границі [11]:

$$\omega_0^2(q) = \frac{4e^2 k_0 q^2}{\pi m_*} \ln \frac{2}{qa e^\gamma},$$

тут

$$k_0 = [2m_*(\mu_0 - \varepsilon_0\eta^2)]^{1/2}.$$

Як і раніше, припускаємо, що умова (3.8) виконується. Однак тепер вважаємо, що існує багато енергетичних рівнів ε_l які знаходяться нижче рівня Фермі, тобто $\mu_0 \gg \varepsilon_0$. Тоді підсумовування по l у рівнянні (3.10) можна обчислити за формулою Пуассона. В результаті, спектр плазмонів містить як монотонні, так і осцилюючі доданки, що змінюються залежно від параметрів трубки та магнітного потоку Φ . Ці доданки залежать від параметра $\mu_0/2\Delta$.

Якщо $\mu_0 < 2\Delta$, ми отримуємо точний вираз для монотонної частини плазмонного спектра з рівняння (3.10):

$$\omega_{mon}^2(q) = u_0(q) \frac{8\sqrt{m_*}\Delta^{3/2}}{\pi^2 d} \sin^2 \frac{qd}{2} \times$$

$$\times \left[\frac{2\Delta - \mu_0}{\Delta} K\left(\sqrt{\frac{\mu_0}{2\Delta}}\right) - 2 \frac{\Delta - \mu_0}{\Delta} E\left(\sqrt{\frac{\mu_0}{2\Delta}}\right) \right], \quad (3.12)$$

де K і E – еліптичні інтеграли першого та другого роду відповідно. У розглянутому випадку $a \rightarrow \infty$ функція $u_0(q)$ дорівнює $2\pi e^2/q$ і рівняння (3.12) не залежить від радіуса труби. Це пов'язано з випадком двовимірного електронного газу без магнітного поля. Його отримують, розрізаючи трубку по твірній і потім розгортаючи її на площину. Якщо $\mu_0 \ll 2\Delta$, $qd \ll 1$ і $\Delta \rightarrow \infty$, $d \rightarrow 0$ ми отримуємо з рівняння (3.12) спектр плазмонів у двовимірному електронному газі за відсутності надгратки та магнітного поля [37]:

$$\omega(q) = (2e^2\mu_0 q)^{1/2}.$$

Осцилююча частина плазмонного спектра у випадку $\mu_0 < 2\Delta$ має вигляд:

$$\omega_{osc}^2(q) = u_0(q) \frac{4\sqrt{2\Delta}(\mu_0\varepsilon_0)^{1/4}}{\pi^2 ad} \times$$

$$\times \sin^2 \frac{qd}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{3/2}} \cos 2\pi r \eta \cdot \sin \left(2\pi r \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (3.13)$$

Цей вираз описує осциляції, подібні до осциляцій де Гааза-ван Альфена та осциляції Ааронова-Бома [14,15,17,44]. Осциляції типу осциляцій де Гааза-ван Альфена зберігаються і за відсутності магнітного поля. У випадку $\mu_0 < 2\Delta$ осциляції зумовлені проходженням квадратних особливостей щільності станів при ε_l через рівень Фермі при зміні параметрів нанотрубки, радіуса та електронної густини. Частоту коливань можна отримати з умови $\mu_0 = \varepsilon_0 l^2$.

Коли радіус трубки змінюється, частота дорівнює хвильовому числу Фермі k_F . Якщо залежність рівняння (3.13) від квадратного кореня з електронної густини розглядається, частота дорівнює $\sqrt{2\pi a}$.

При $\mu_0 \gg \varepsilon_0$, $\mu_0 - 2\Delta \gg \varepsilon_0$ і $\mu_0 > 2\Delta$ монотонна і коливальна частини спектру магнітоплазмону дорівнюють

$$\omega_{mon}^2(q) = u_0(q) \frac{8\sqrt{2m_*\mu_0\Delta}}{\pi^2 d} \cdot \sin^2 \frac{qd}{2} \left[\frac{\mu_0 - \Delta}{\Delta} E\left(\sqrt{\frac{2\Delta}{\mu_0}}\right) - \frac{\mu_0 - 2\Delta}{\Delta} K\left(\sqrt{\frac{2\Delta}{\mu_0}}\right) \right]. \quad (3.14)$$

$$\omega_{osc}^2(q) = u_0(q) \frac{4\sqrt{2\Delta}(\mu_0\varepsilon_0)^{\frac{1}{4}}}{\pi^2 ad} \sin^2 \frac{qd}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} \cos 2\pi r\eta \times \\ \times \left[\sin\left(2\pi r \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} - \frac{\pi}{4}\right) - \left(1 - \frac{2\Delta}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{4}} \sin\left(2\pi r \sqrt{\frac{\mu_0 - 2\Delta}{\varepsilon_0}} + \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (3.15)$$

Для обчислення рівнянь (3.13) і (3.15) було використовувано асимптотичне наближення інтегралів Фур'є в випадку, коли підінтегральна функція має сингулярності на нижній межі (для рівняння (3.13)) або на верхній і нижній межах (для рівняння (3.15)). Другий період у осциляціях типу де Гааза-ван Альфена з'являється через те, що при $\mu_0 > 2\Delta$ рівні Фермі $\varepsilon_l + 2\Delta$ при зміні параметрів трубки перетинає не тільки нижні, але й верхні межі мінізон. Це подібно до існування мінімального та максимального перерізів гофрованої циліндричної поверхні Фермі в ефекті де Гааза-ван Альфена. Друга частота коливань у рівнянні (3.15) може бути знайдена з умови $\varepsilon_l + 2\Delta = \mu_0$. Існування двох осциляцій з близькими частотами при $\mu_0 \gg 2\Delta$ вказує на те, що графік рівняння (3.15) відносно параметрів трубки має виявляти схему биття. Якщо розглядати рівняння (3.15) як функція радіуса трубки, частота коливань k_F накладається на частоту биття $k_F\Delta/\mu_0$. Відносна різниця між амплітудами двох членів у рівнянні (3.15) дорівнює $\Delta/2\mu_0$. Коли

цей параметр зростає, биття стають слабкими і переходять у модуляції. При $\mu_0 < 2\Delta$ биття в спектрі магнітоплазмонів зникають.

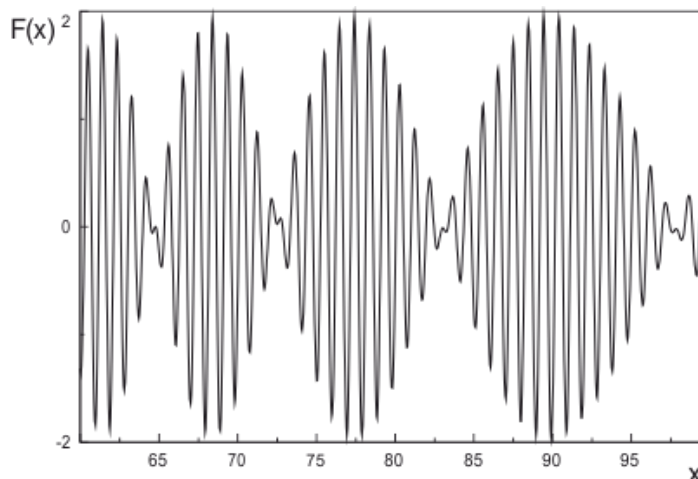


Рисунок. 3.1. Основна гармоніка осцилюючої частини спектру плазмонів (рівняння (3.15)) як функція $x = (2\pi n)^{\frac{1}{2}}a$ при $\eta = 0$ та $\frac{2\Delta}{\varepsilon_0} = 10^3$.

На рис. 3.1 досліджено залежність основної гармоніки осциляційної частини в спектрі плазмонів (рівняння (3.15)) як функцію параметра $x = (2\pi n)^{\frac{1}{2}}a$ та за умови $\frac{2\Delta}{\varepsilon_0} = 10^3$ у нульовому магнітному полі.

$$F = \omega_{osc}^2(q) \pi^2 a d \left[4\sqrt{2\Delta} (\mu_0 \varepsilon_0)^{\frac{1}{4}} \sin^2 \frac{qd}{2} \cdot u_0(q) \right]^{-1}$$

При $m \neq 0$, замість умови рівняння (3.8), яке обмежує аналіз довгохвильову границею, виконується:

$$2\Delta \sin \frac{qd}{2} \ll |\omega - \Omega_{\pm}|. \quad (3.16)$$

За цих умов основний внесок у дійсну частину поляризаційного оператора визначається рівнянням (3.6). Отже, рівняння (2.1) має два розв'язки в квантовій границі. Один з них розташований нижче Ω_- , а другий – вище Ω_+ . Зокрема, для випадку $\eta < 1/2$ і $l = 0$, з рівняння (3.4) випливає, що $\Omega_- < 0$ а $\Omega_+ > 0$. Спектри довгохвильових міжзонних плазмонів поблизу частоти Ω_+ має вигляд:

$$\omega_m(q) = 2m\varepsilon_0\eta + \left[\left(\varepsilon_0 m^2 + \frac{u_m(q)k_0}{\pi^2 a} \right)^2 - \left(\frac{u_m(q)k_0}{\pi^2 a} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.17)$$

Граничні частоти для хвиль із спектром, показаним у формулі (3.17), має вигляд:

$$\omega_m(0) = 2m\varepsilon_0\eta + \left(\varepsilon_0^2 m^4 + \frac{4e^2 \varepsilon_0 k_0 |m|}{\pi} \right)^{1/2}. \quad (3.18)$$

Вирази (3.17) і (3.18) показують, що параметри надгратки d і Δ містяться лише в k_0 (рівняння (3.3)).

Об'єднавши рівняння (3.16) з припущенням $qa \ll 1$, можна отримати з (3.16) та (3.17) вирази:

$$\omega_{\pm 1}(q) = \omega_{\pm 1}(0) + \frac{e^2 \varepsilon_0 k_0}{\pi} (qa)^2 \cdot \ln \frac{qa}{2} \left(\varepsilon_0^2 + \frac{4e^2 \varepsilon_0 k_0}{\pi} \right)^{-1/2}, \quad (3.19)$$

$$\omega_m(q) = \omega_m(0) - \frac{e^2 k_0 (qa)^2}{2\pi |m| (|m|-1)} \cdot \left(1 + \frac{4e^2 k_0}{\pi \varepsilon_0 |m|^3} \right)^{-1/2}, \quad m = \pm 2, \pm 3, \dots \quad (3.20)$$

Ці спектри демонструють аномальну дисперсію.

При слабкій кулонівській взаємодії між електронами, якщо $e^2 k_0 / \varepsilon_0 \ll 1$, рівняння (3.17) – (3.20) спрощуються:

$$\omega_{\pm 1}(q) = \varepsilon_0(1 \pm 2\eta) + \frac{2e^2k_0}{\pi} + \frac{e^2k_0}{\pi}(qa)^2 \ln \frac{qa}{2}, \quad (3.21)$$

$$\omega_m(q) = 2m\varepsilon_0\eta + \varepsilon_0m^2 + \frac{2e^2k_0}{\pi|m|} - \frac{e^2k_0(qa)^2}{2\pi(m^2-|m|)}, \quad m = \pm 2, \pm 3, \dots$$

З цих формули випливає, що граничні магнітоплазмонні частоти відрізняються від резонансних частот, описаних рівнянням (3.4), на деполаризаційний зсув:

$$\delta\omega_m = \frac{2e^2k_0}{\pi|m|}.$$

Вимірювання зсуву $\delta\omega_m$ в оптичних експериментах дозволяє оцінити максимальний імпульс електрона k_0 у найнижчій мінізоні.

4 Нульовий звук на нанотрубці

Нульовий звук у неідеальній фермі-системі із слабкою взаємодією частинок був теоретично передбачений Ландау на основі створеної ним теорії фермі-рідини [38]. Цей феномен характеризується високочастотними коливання поверхні Фермі, що мають лінійний спектр, і був експериментально зафіксований у рідкому He^3 . Пізніше з'явилося припущення, що нульовий звук може розповсюджуватись в заряджених фермі-системах, наприклад, в електронному газі металів [39, 40]. Важливим є питанням, чи може нульовий звук поширюватися вздовж нанотрубки в магнітному полі. Розглянемо це питання, використовуючи підхід наближення випадкових фаз, описаний у попередніх розділах. У цьому випадку враховуватимемо модель короткодіючої екранованої взаємодії електронів. Як було досліджено в роботах [26, 27], екранування суттєво послаблює кулонівську взаємодію електронів у нанотрубках. Така модель є якісно аналогічною до фермі-рідинного підходу за умови, що враховується лише основна циліндрична гармоніка g екранованої електронної взаємодії.

У рамках розглянутої моделі дисперсійне рівняння для нульового звуку описується рівнянням (2.1), де функція $u_m(q)$ замінюється сталою величиною g , а також застосовується асимптотичний вираз для поляризаційного оператора при $q \ll k_l$ та у довільному співвідношенні ω/qv_l [36, 40, 41]. Тут $v_l = k_l/m_*$ – позначає швидкість Фермі у підзоні l . Звідси для аксіально симетричних внутріпідзонних коливань на нанотрубці отримуємо:

$$\begin{aligned} \text{Re } P_0(q, \omega) &= \frac{q^2}{\pi^2 a} \sum_l \frac{v_l}{\omega^2 - q^2 v_l^2}, \\ \text{Im } P_0(q, \omega) &= \frac{q\omega}{\pi a} \sum_l \delta(\omega^2 - q^2 v_l^2). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Якщо $a \rightarrow \infty$, суми, що містяться в рівнянні (4.1), можна замінити інтегралами. Таким чином, на основі рівняння (4.1) отримуємо довгохвильові асимптоти поляризаційного оператора для двовимірного виродженого газу на площині за умов відсутності магнітного поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} P_0(q, \omega) &= -2\nu \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{qv_F}{\omega} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}, \omega > qv_F, \\ \operatorname{Im} P_0(q, \omega) &= -2\nu \left\{ \left[\left(\frac{qv_F}{\omega} \right)^2 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} - 1 \right\}, \omega < qv_F, \end{aligned} \quad (4.2)$$

де v_F – швидкість Фермі. Формули (4.2) можна отримати з точних формул Стерна [37] шляхом розкладання поляризаційного оператора для двовимірного електронного газу в ряд за степенями ω_q . Використовуючи рівняння (4.2), отримуємо спектр нульового звуку в двовимірному електронному газу без магнітного поля $\omega(q) = cq$, де:

$$c = v_F(1 + 2\nu g)(1 + 4\nu g)^{-\frac{1}{2}},$$

відповідає швидкості звуку. У граничних випадках, що відповідають слабкій і сильній взаємодії, з цієї формули випливає:

$$c = \begin{cases} v_F(1 + 2\nu^2 g^2), \nu g \ll 1, \\ v_F(\nu g)^{\frac{1}{2}}, \nu g \gg 1. \end{cases}$$

У випадку нульового звуку вздовж нанотрубки в магнітному полі в умовах квантової границі з рівнянь (2.1) та (4.1) отримуємо:

$$\omega_0^2(q) = q^2 v_0^2 (1 + 2\nu g / \pi k_0 a), \quad (4.3)$$

де $k_0 = m_* v_0$ – імпульс Фермі електрона в нижній підзоні $[\varepsilon_0 \eta^2, \varepsilon_{-1}]$.

За умови $\mu_0 \gg \varepsilon_0$, формула Пуассона, дозволяє обчислити суму в рівнянні (4.1). Таким чином, швидкість розповсюдження аксіально симетричних коливань при $\omega \gg qv_F$ можна записати як:

$$c = v_F (vg)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \right)^{3/4} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{3/2}} \cos 2\pi r \eta \cdot \sin \left(2\pi r \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (4.4)$$

Швидкість нульового звуку випробовує осциляцій типу де Гааза-ван Альфена та Ааронова-Бома, які детально розглянуті у розділі 2.

Припустимо, що за відсутності магнітного поля енергія Фермі знаходиться в нижній підзоні $[\varepsilon_0 \eta^2, \varepsilon_{-1}]$. У такому випадку густина електронів повинна бути меншою або рівною $(\pi a)^{-2}$. Коли магнітний потік збільшується, для певного відношення потоків $\eta_c = \frac{(1-\zeta^2)}{2}$, де $\zeta = \pi^2 a^2 n$, наступна підзона $[\varepsilon_{-1}, \varepsilon_1]$ починає заповнюватися [15]. Таким чином, в інтервалі $0 \leq \eta \leq \eta_c$ існує одна гілка спектра нульового звуку (4.3) з $k_0 = \zeta/a$. Яка не залежить від магнітного потоку. Якщо $\eta_c \leq \eta \leq \frac{1}{2}$, то існують дві гілки аксіально симетричних коливань з відповідними швидкостями:

$$c_{\pm}^2 = \frac{1}{2} [v_0^2 + v_{-1}^2 + \alpha(v_0 + v_{-1})] \pm \frac{1}{2} (v_0 + v_{-1}) [\alpha^2 + (v_0 - v_{-1})^2]^{1/2}, \quad (4.5)$$

де $\alpha = g/\pi^2 a$, $v_0 = \frac{(1-\eta-\eta_c)}{m_* \zeta a}$, $v_{-1} = \frac{(\eta-\eta_c)}{m_* \zeta a}$. Розв'язок c_+ відповідає синфазним осциляціям, а c_- – протифазним осциляціям.

Висновки

Двовимірний електронний газ на поверхні нанотрубки є перспективним об'єктом для перевірки ідеї, згідно з якою електронні резонансні переходи між енергетичними рівнями, під впливом змінного поля, супроводжуються гілками колективного спектра збудження системи. Ця ідея була реалізована в роботах [42, 43]. Було показано, що біля частот резонансних переходів металів у магнітному полі, між рівнями Ландау та магнітодомішковими рівнями, виникають нові гілки спектра збудження, що отримали назву магнітодомішкових хвиль. Такий підхід був використаний і в цій дипломній роботі, де продемонстровано виникнення нових мод на нанотрубці поблизу частот резонансних електронних орбітальних переходів. Ці переходи між нееквідистантними енергетичними рівнями поперечного руху електронів на поверхні нанотрубки є основою спектрів магнітоплазмових хвиль і нульового звуку, які пов'язані з особливостями енергетичного спектра (1.3) електронів на трубці.

Особливості густини станів на границях підзон нагадують такі, що спостерігаються на рівнях Ландау в магнітному полі, тому можна припустити існування спектрів колективних гілок збудження у зоні частот переходів між підзонами, а також коливань спектра збудження, подібних до осциляції де Гааза-ван Альфена. Особливості спектра (1.3) проявляються в тому, що ці моди існують навіть без магнітного поля. Магнітне поле викликає осциляції типу Ааронова-Бома, обумовлені незв'язністю області, що займається електронами.

Колівання спектрів магнітоплазмових хвиль типу де Гааза-ван Альфена та Ааронова-Бома зберігаються навіть при наявності надгратки на поверхні нанотрубки. Характер осциляцій залежить від співвідношення енергії Фермі

до ширини мінізони. При високому значенні цього співвідношення можна спостерігати биття на графіку залежності частоти хвилі від параметрів лампи. Якщо коефіцієнт невеликий, биття не спостерігаються.

Результати, наведені в цій роботі, дозволяють визначити ефективну масу електрона, параметри трубки та фундаментальні універсальні константи. Експериментальні спостереження биття спектру хвиль можуть дати можливість виміряти відношення енергії Фермі до ширини мінізони. Особливості спектра магнітоплазмону можна також спостерігати за допомогою розсіювання світла або електронів нанотрубками з надграткою в магнітному полі.

Основні результати роботи такі:

1. **Електронні резонансні переходи** на поверхні нанотрубки призводять до появи колективних гілок спектра збуджень, що проявляються як магнітодомішкові хвилі, подібно до рівнів Ландау в магнітному полі.
2. **Моди на нанотрубці** виникають поблизу частот резонансних електронних орбітальних переходів між нееквідистантними енергетичними рівнями поперечного руху електронів.
3. **Магнітне поле** викликає осциляції типу Ааронова-Бома, що обумовлені незв'язністю області, зайнятої електронами на нанотрубці.
4. **Збільшення кількості електронних груп** в різних підзонах з різною орієнтацією спіну призводить до зростання кількості колективних гілок спектра збуджень.
5. **Експериментальні дослідження** можуть дозволити виміряти відношення енергії Фермі до ширини мінізони та спостерігати особливості магнітоплазмону через розсіювання світла або електронів.

Список літератури

1. Platzman, P. M.; Wolff, P. A. *Waves and Interactions in Solid State Plasmas*; Academic Press: New York, USA, 1973; pp. 1–436.
2. Kaner, E. A.; Skobov, V. G. *Advances in Physics* **1968**, *17*, 605–747.
3. Iijima, S. *Nature* **1991**, *354*, 56–58.
4. Saito, R.; Dresselhaus, G.; Dresselhaus, M. S. *Physical Properties of Carbon Nanotubes*; Imperial College Press: London, UK, 1998; pp. 1–259.
5. Prinz, V. Ya.; Seleznev, V. A.; Gutakovsky, A. K. *The 24th International Conference on the Physics of Semiconductors (ICPS 24)*; World Scientific Publishing: Jerusalem, Israel, 1999; pp. Th3-D5.
6. Prinz, V. Ya.; Chehovskiy, A. V.; Preobrazhenskii, V. V.; Semyagin, B. R.; Gutakovsky, A. K. *Nanotechnology* **2002**, *13*, 231–233.
7. Kushwaha, M. S.; Djafari-Rouhani, B. *Physical Review* **2003**, *B67*, 245320 (19).
8. Kushwaha, M. S.; Djafari-Rouhani, B. *Physical Review* **2005**, *B71*, 195317 (21).
9. Magarill, L. I.; Chaplik, A. V.; Entin, M. V. *Physics–Uspekhi* **2005**, *48*, 1017–1021.
10. Lin, M. F.; Shung, K. W.-K. *Physical Review* **1993**, *B47*, 6617–6624.
11. Sato, O.; Tanaka, Y.; Kobayashi, M.; Hasegawa, A. *Physical Review* **1993**, *B48*, 1947–1950.
12. Lin, M. F.; Shung, K. W.-K. *Physical Review* **1993**, *B48*, 5567–5571.
13. Longe, P.; Bose, S. M. *Physical Review* **1993**, *B48*, 18239–18243.
14. Vedernikov, A. I.; Govorov, A. O.; Chaplik, A. V. *JETP* **2001**, *120*, 979–985.
15. Vitlina, R. Z.; Magarill, L. I.; Chaplik, A. V. *JETP* **2008**, *133*, 906–913.
16. Eminov, P. A.; Perepelkina, Yu. V.; Sezonov, Yu. I. *Physics of the Solid State* **2008**, *50*, 2220–2224.

17. Ermolaev, A. M.; Rashba, G. I.; Solyanik, M. A. *Low Temperature Physics* **2011**, *37*, 919–924; doi:10.1063/1.3672160.
18. Ermolaev, A. M.; Rashba, G. I.; Solyanik, M. A. *Low Temperature Physics* **2012**, *38*, 511–516; doi:10.1063/1.4723674.
19. Keldysh, L. V. *Soviet Physics Solid State* **1962**, *4*, 2265–2267.
20. Esaki, L.; Tsu, R. *IBM Journal of Research and Development* **1970**, *14*, 61–65.
21. Bass, F. G.; Tetervov, A. P. *Physics Reports* **1985**, *140*, 237–364.
22. Herman, M. A. *Semiconductor Superlattices*; Akademie-Verlag: Berlin, Germany, 1986; pp. 1–240.
23. Ermolaev, A. M.; Kofanov, S. V.; Rashba, G. I. *Advances in Condensed Matter Physics* **2011**, *2011*, Article ID 901848, 7 pp.; doi:10.1155/2011/901848.
24. Kulik, I. O. *JETP Letters* **1970**, *11*, 275–278.
25. Ermolaev, A. M.; Rashba, G. I.; Solyanik, M. A. *Vestnik KhNU, Series “Physics”* **2010**, *914*, 24–28.
26. Vitlina, R. Z.; Magarill, L. I.; Chaplik, A. V. *JETP Letters* **2007**, *86*, 132–134.
27. Eminov, P. A. *JETP* **2009**, *135*, 1029–1036.
28. White, R. M. *Quantum Theory of Magnetism*; Springer-Verlag: Berlin, Germany, 1983; pp. 1–304.
29. Peierls, R. E. *Quantum Theory of Solids*; Clarendon Press: Oxford, UK, 1955; pp. 1–260.
30. Ermolaev, A. M.; Rashba, G. I.; Solyanik, M. A. *Low Temperature Physics* **2011**, *37*, 824–830.
31. Apostol, M. *Zeitschrift für Physik* **1975**, *B22*, 13–22.
32. Sarma, D.; Quinn, J. J. *Physical Review* **1982**, *B25*, 7603–7618.
33. Bloss, W. L. *Solid State Communications* **1982**, *44*, 363–367.
34. Tselis, A. C.; Quinn, J. J. *Physical Review* **1984**, *B29*, 2021–2027; *Physical Review* **1984**, *B29*, 3318–3335.

35. Wei-ming, Q.; Kirczenow, G. *Physical Review* **1987**, *B36*, 6596–6601.
36. Fetter, A. L.; Walecka, J. D. *Quantum Theory of Many-Particle Systems*; McGraw-Hill: New York, USA, 1971; 600 pp.
37. Ando, T.; Fowler, A.; Stern, F. *Reviews of Modern Physics* **1982**, *54*, 437–667.
38. Landau, L. D. *JETP* **1957**, *32*, 59–66.
39. Silin, V. P. *JETP* **1958**, *35*, 1243–1250.
40. Pines, D.; Nozieres, P. *The Theory of Quantum Fluids*; W. A. Benjamin Inc.: New York, USA, 1966; pp. 1–382.
41. Kadanoff, L. P.; Baym, G. *Quantum Statistical Mechanics*; W. A. Benjamin Inc.: New York, USA, 1962; pp. 1–256.
42. Kaner, E. A.; Ermolaev, A. M. *JETP Letters* **1986**, *44*, 501–502.
43. Kaner, E. A.; Ermolaev, A. M. *JETP* **1986**, *92*, 2245–2256.
44. Ermolaev, A. M.; Rashba, G. I.; Solyanik, M. A. *Soviet Physics Solid State* **2011**, *53*, 1594–1598.