УДК 517. 98

О. А. ВЕЛИЕВ

О СПЕКТРЕ МНОГОМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Введение. Пусть Ω — решетка в n-мерном евклидовом пространстве с приведенным базисом ω_i, $i=\overline{1, n}$, Γ — двойственная к Ω решетка с приведенным базисом γ^i, $i=\overline{1, n}$ ($\langle\gamma^i, \omega_j\rangle = 2\pi\delta_{ij}$), а F и F^* — фундаментальные области соответственно решеток Ω и Γ. Не нарушая общности, будем предполагать, что $\operatorname{mes} F = 1$.

Обозначим через H — оператор Шредингера, порожденный в $L_2(R^n)$ выражением $-\Delta u + q(x)u$ (1), а через H_t — оператор, порожденный в $L_2(F)$ выражением (1) и граничными условиями

$$u(x+\omega_j) = e^{i2\pi t_j} u(x), \tag{2}$$

где $t = \sum_{j=1}^{n} t_j\gamma^j$, $q(x)$ — периодическая (относительно решетки Ω) достаточно гладкая функция.

Известно, что [1] спектр $S(H)$ оператора H является объединением спектров $S(H_t)$ операторов H_t (при $t\in F^*$), т. е. при изменении t собственные значения $\Lambda_k(t)$, $k=1, 2, \ldots$, (они занумерованы в порядке неубывания, с учетом кратности) оператора H_t заметают спектр оператора H

$$S(H) = \bigcup_{t\in F^*} S(H_t) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\Lambda_n(t) : t\in F^*\}. \tag{3}$$

Наша статья посвящена в основном доказательству гипотезы Бете—Зоммерфельда (см. [2, 3]), согласно которой существует такое число $\lambda(q)$, что интервал $(\lambda[q], \infty)$ принадлежит спектру оператора H. Эта гипотеза, высказанная в начале 30-х годов, до последнего времени доказана (см. [1]) только в случае, когда потенциал допускает разделение переменных. Для общих потенциалов справедливость гипотезы впервые доказал М. М. Скриганов [4—9]. В этих работах при $n>3$ гипотеза доказана для рациональных решеток на основании изучения геометрических и арифметических свойств решетки периодов потенциала $q(x)$ оператора H.

Мы предлагаем другой подход, основанный на получении асимптотических формул для собственных значений операторов H_t. Это дает возможность доказать гипотезу Бете—Зоммерфельда для произвольной размерности n без ограничения на решетку периодов для потенциалов класса $W_2^{(n^2-n)2n}(F)$.

Перед тем как перейти к изложению результатов, опишем вкратце план работы. Чтобы не затемнять суть дела техническими деталями, мы вначале предполагаем, что потенциал $q(x)$ является тригонометри-ческим многочленом

$$q(x) = \sum_{\gamma\in Q} q_\gamma e^{i<\gamma, x>}, \qquad (4$$

где $\int\limits_F q(x)\,dx = 0$, а $Q = \{\gamma : q_\gamma \neq 0\}$ содержит конечное число векторо γ из Γ.

В § 1 строится m-кратно резонансное множество V_α^m, состоящее и объединения по $\gamma \in Q^m$ множеств

$$V_{\gamma,\alpha} = \{x \in R^n : \| x|^2 - |x-\gamma|^2| < |x|^\alpha\},$$

где $\alpha = \mathrm{const}$, $0 < \alpha < 1$, $Q^m = \left\{\gamma : \gamma = \sum_{i=1}^{k} \dot\gamma_i,\ \dot\gamma_i \in Q,\ k \leqslant m\right\}$. $\qquad$ (5

Элементу $\dot\gamma + t$ $(\gamma \in \Gamma,\ t \in R^n)$ множества $R^n \diagdown V_\alpha^m \equiv \tilde V_\alpha^m$ ставитс в соответствие некоторое собственное значение $\Lambda_{k(\gamma+t)}(t)$ оператор H_t и доказывается, что оно удовлетворяет асимптотике

$$\Lambda_{k(\gamma+t)}(t) = |\gamma+t|^2 + F_{m-\tilde n}(\gamma+t) + O\left(\frac{1}{|\gamma+t|^{m\alpha - \frac{n-1}{2}}}\right) \qquad (6$$

$$\left(\tilde n = \left[\frac{n}{2\alpha}\right] \text{— целая часть } \frac{n}{2\alpha}\right),$$

где $F_{m-\tilde n}(\gamma+t)$ — рациональная функция, имеющая порядок убывани $O\left(\frac{1}{|\gamma+t|^\alpha}\right)$ при $|\gamma+t| \to \infty$, явно выражающаяся через $q(x)$.

Доказательству гипотезы Бете — Зоммерфельда посвящен § 2. Прежд всего отметим, что спектр оператора H_t при $q(x) \equiv 0$ (т. е. H_t^0) со стоит из чисел $|\gamma+t|^2$ $(\gamma \in \Gamma)$. Множество векторов $\gamma + t$ $(\gamma \in \Gamma,\ t \in F^*)$ для которых собственное число $|\gamma+t|^2$ совпадает с R^2, образует сферу $S_R = \{x : |x| = R\}$. Мы доказываем, что существуют вектор $\gamma + t$, для которых собственные значения $\Lambda_{k(\gamma+t)}(t)$ совпадают с R при достаточно больших R. Схема рассуждения следующая.

Рассматривается поверхность $\tilde S_R$, определенная уравнением

$$\tilde S_R = \{x \in \tilde V_\alpha^m : |x|^2 + F_{m-\tilde n}(x) = R^2\}.$$

Каждой точке a поверхности $\tilde S_R$ ставится в соответствие отрезок

$$A_a(\delta) = \left\{a + \tau\frac{a}{|a|};\ \tau \in [-\delta, \delta]\right\},$$

лежащий в нерезонансной области $\tilde V_\alpha^m$. Подбирая δ и m и использу свойства поверхности $\tilde S_R$ и асимптотические формулы (6), покажем что на левом $\left(\text{при } \gamma + t = a - \delta\frac{a}{|a|}\right)$ конце отрезка $A_a(\delta)$ собствен ное значение $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ меньше R^2, а на правом $\left(\text{при } \gamma + t = a + \delta\frac{a}{|a|}\right.$

больше R^2. Далее находится такая точка a из $\tilde{S}_R$, что $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ есть функция, непрерывная от аргумента $\gamma+t\in A_a(\delta)$. Поэтому по теореме о промежуточном значении отсюда следует, что R^2 является собственным значением некоторого оператора H_t и, следовательно (см. (3)), лежит в спектре оператора H.

Основные технические трудности возникают при нахождении точки a для которой $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ непрерывна на интервале $A_a(\delta)$.

Нами использованы следующие обозначения: $\mu_k(A)$ — k-мерная лебегова мера множества $A\subset R^n$, $U_A(\delta)$ — δ-окрестность множества A; $|Q|$ — число векторов γ решетки Γ, лежащих в Q; c_1, c_2 — фиксированные постоянные числа. Если заданы две функции $f(\zeta)$ и $g(\zeta)$ в окрестности точки $\zeta=\infty$, то $f(\zeta)=O(g(\zeta))$ означает, что существует некоторое постоянное число такое, что $\left|\frac{f(\zeta)}{g(\zeta)}\right|<c$ в некоторой окрестности ∞, $f(\zeta)\sim g(\zeta)$ означает, что $f(\zeta)=O(g(\zeta))$, $g(\zeta)=O(f(\zeta))$.

§ 1. Асимптотические формулы для собственных чисел оператора H_t. Обозначим через $\Lambda_1(t)$, $\Lambda_2(t)$, ..., собственные числа оператора H_t, занумерованные в порядке неубывания с учетом кратности. Пусть $\psi_{1,t}(x)$, $\psi_{2,t}(x)$, ..., являются ортонормированными собственными функциями оператора H_t, фиксированные произвольным образом. $H_t\psi_{k,t}=\Lambda_k(t)\psi_{k,t}$. Отметим, что $\Lambda_k(t)$ непрерывно зависит от t (см. [1]). Из этих собственных значений мы выделяем собственные значения $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ с номером $k(\gamma+t)$, который определяется следующим образом:

$$|(\psi_{k(\gamma+t),t}(x), e^{i\langle\gamma+t,x\rangle})|=\max_{S:|\Lambda_S(t)-|\gamma+t|^2|<2M}|(\psi_{s,t}(x), e^{i\langle\gamma+t,x\rangle})|, \tag{1.1}$$

где $M=\sup\limits_{x\in F}|q(x)|$.

Если max достигается на нескольких k, то выбор среди них произволен. Такое определение индекса $k(\gamma+t)$ корректно, поскольку согласно общей теории возмущения в M-окрестности собственных значений $|\gamma+t|^2$ оператора Лапласа имеется, по крайней мере, одно собственное значение оператора H_t.

Асимптотические формулы мы будем получать, используя формулу

$$(\Lambda_k(t)-|\gamma+t|^2)(\psi_{k,t}, e^{i\langle\gamma+t,x\rangle})=(\psi_{k,t}, q(x)e^{i\langle\gamma+t,x\rangle}). \tag{1.2}$$

Эта формула получается из уравнения

$$\Delta\psi_{k,t}+q(x)\psi_{k,t}=\Lambda_k(t)\psi_{k,t}$$

скалярным умножением на $e^{i\langle\gamma+t,x\rangle}$.

Прежде чем доказывать теорему об асимптотической формуле для собственных значений оператора H_t, сделаем некоторые предварительные вычисления. Подставляя в (1.2) разложение (4) функции $q(x)$, получаем

$$(\Lambda_k-|\gamma+t|^2)b_{k,\gamma}=\sum_{\gamma_1:\gamma-\gamma_1\in Q}q_{\gamma-\gamma_1}b_{k,\gamma_1}, \tag{1.3}$$

где $b_{k,\gamma}=(\psi_{k,t}, e^{i\langle\gamma+t,x\rangle})$.

Здесь $\gamma_1 \neq \gamma$, так как мы предполагаем, что $q_{\gamma-\gamma} \equiv q_0 = 0$ (см. (4)). Итерируя формулу (1.3) один раз, получаем

$$(\Lambda_k - |\gamma + t|^2) b_{k,\gamma} = \sum_{\gamma_1, \gamma_2} \frac{q_{\gamma-\gamma_1} q_{\gamma_1-\gamma_2}}{\Lambda_k - |\gamma_1 + t|^2} b_{k,\gamma_2}.$$

В этой формуле выделяем члены с $b_{k,\gamma}$ (т. е. $\gamma_2 = \gamma$) и к остальным членам применяем формулу (1.3), тогда

$$(\Lambda_k - |\gamma + t|^2) b_{k,\gamma} = \sum_{\gamma_1} \frac{q_{\gamma-\gamma_1} q_{\gamma_1-\gamma}}{\Lambda_k - |\gamma_1 + t|^2} b_{k,\gamma} +$$

$$+ \sum_{\gamma_1, \gamma_2 \neq \gamma} \frac{q_{\gamma-\gamma_1} q_{\gamma_1-\gamma_2}}{\Lambda_k - |\gamma_1 + t|^2} b_{k,\gamma_2} = \sum_{\gamma_1} \frac{|q_{\gamma-\gamma_1}|^2}{\Lambda_k - |\gamma_1 + t|^2} b_{k,\gamma} +$$

$$+ \sum_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} \frac{q_{\gamma-\gamma_1} q_{\gamma_1-\gamma_2} q_{\gamma_2-\gamma_3}}{(\Lambda_k - |\gamma_1 + t|^2)(\Lambda_k - |\gamma_2 + t|^2)} b_{k,\gamma_3}.$$

Теперь снова выделим члены с $b_{k,\gamma}$ и к остальным еще раз применим формулу (1.3). Продолжая этот процесс m раз, находим

$$(\Lambda_k - |\gamma + t|^2) b_{k,\gamma} = \Big(\sum_{p \neq 1}^{m-1} S_p(\Lambda_k, \gamma + t)\Big) b_{k,\gamma} + \tilde{S}_m(\Lambda_k, \gamma + t), \tag{1.4}$$

$$\text{где } S_p(\Lambda_k, \gamma + t) \sum_{\gamma_1, \ldots, \gamma_p} \frac{q_{\gamma-\gamma_1} q_{\gamma_1-\gamma_2} \cdots q_{\gamma_{p-1}-\gamma_p} q_{\gamma_p-\gamma}}{\prod_{i=1}^{p} (\Lambda_k - |\gamma_i + t|^2)}; \tag{1.5}$$

$$\hat{S}_m(\Lambda_k, \gamma + t) = \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m+1}} \frac{q_{\gamma-\gamma_1} q_{\gamma_1-\gamma_2} \cdots q_{\gamma_m-\gamma_{m+1}}}{\prod_{i=\overline{1,m}} |\Lambda_k - (\gamma_i + t|^2)} b_{k,\gamma_{m+1}}. \tag{1.6}$$

Введем обозначения: $A_m(\Lambda, \gamma + t) = \sum_{p=1}^{m-1} S_p(\Lambda, \gamma + t)$, $F_1(\gamma + t) = A_m(|\gamma + t|^2, \gamma + t)$, $F_2(\gamma + t) = A_m(F_1(\gamma + t) + |\gamma + t|^2, \gamma + t)$, $F_k(\gamma + t) = A_m(F_{k-1}(\gamma + t) + |\gamma + t|^2, \gamma + t)$.

Теорема 1. а) *Пусть собственное значение $\Lambda_k(t)$ оператора H_t удовлетворяет условиям*

$$|\Lambda_k(t) - |\gamma + t|^2| \leq 2M \ \textbf{(1.7)}; \quad |b_{k,\gamma}| > |\gamma|^{-m_0\alpha} \ \textbf{(1.8)},$$

где m_0 — фиксированное целое положительное число.

Тогда, если $\gamma + t$ принадлежит m-кратно нерезонансной области $\tilde{V}_\alpha^m$, то $\Lambda_k(t)$ удовлетворяет следующей асимптотической формуле:

$$\Lambda_k(t) = |\gamma + t|^2 + F_{m-m_0}(\gamma + t) + O\left(\frac{1}{|\gamma|^{m\alpha - m_0\alpha}}\right). \tag{1.9}$$

б) *Если $\gamma + t \in \tilde{V}_\alpha^m$, то собственное значение $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ удовлетворяет асимптотической формуле* (1.9) *при* $m_0 = \left[\frac{n}{2\alpha}\right]$.

Доказательство. В формулах (1.5), (1.6) можно считать, что $\gamma-\gamma_1\in Q$, $\gamma_i-\gamma_{i+1}\in Q$, $i=1, 2, \ldots,$ так как в противном случае $q_{\gamma-\gamma_1}=0$, $q_{\gamma_i-\gamma_{i+1}}=0$. Поэтому $\gamma-\gamma_p\in Q^m$ для $p\leqslant m$. По определению V_α^m при $\gamma+t\in\tilde V_\alpha^m$ и $\gamma-\gamma_p\in Q^m$ имеет место

$$||\gamma+t|^2-|\gamma_p+t|^2|>|\gamma+t|^\alpha. \tag{1.10}$$

Согласно (1.7) имеем $|\Lambda_k-|\gamma+t|^2|>|\gamma+t|^\alpha-2M$. Следовательно,

$$\left(\prod_{i=1}^{p}(\Lambda_k-|\gamma_i+t|^2)\right)^{-1}=O\left(\frac{1}{|\gamma+t|^{\alpha p}}\right) \text{ при } |\gamma+t|\to\infty. \tag{1.11}$$

Легко видеть, что

$$\sum_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_p}|(q_{\gamma-\gamma_1}\cdot q_{\gamma_1-\gamma_2}\cdots q_{\gamma_{p-1}-\gamma_p})|<\Big(\sum_{\gamma\in Q}|q_\gamma|\Big)^p, \tag{1.12}$$

где $\sum\limits_{\gamma\in Q}|q_\gamma|<c_1$.

Поэтому, применяя (1.11) к фомулам (1.5) и (1.6), находим оценки для S_p и $\hat S_m$:

$$S_p=O(1/|\gamma|^{p\alpha}),\quad \hat S_m=O(1/|\gamma|^{m\alpha}). \tag{1.13}$$

Формула (1.9) из этих оценок вытекает следующим образом.

Разделив обе части (1.4) на $b_{k,\gamma}$ и используя (1.8), получим, что при $\gamma_i+t\in\tilde V_\alpha^m$ имеет место

$$\Lambda_k(t)=|\gamma+t|^2+\sum_{p=1}^{m-m_0-1}S_p(\Lambda_k,\ \gamma+t)+O(1/|\gamma|^{m\alpha-m_0\alpha})=$$
$$=|\gamma+t|^2+O(1/|\gamma|^\alpha). \tag{1.14}$$

Следовательно, формула (1.9) доказана при $m-m_0=1$. При $m-$ $-m_0=1, 2, \ldots$ докажем по индукции. Пусть при $m-m_0=j$

$$\Lambda_k=|\gamma+t|^2+F_{j-1}(\gamma+t)+O(1/|\gamma|^{j\alpha}). \tag{1.15}$$

Подставляя значения Λ_k из (1.15) в формулу (1.4), при $\sum\limits_{p=1}^{m-m_0-1}S_p\equiv$ $\equiv A_{m-m_0}$ получаем

$$\begin{aligned}\Lambda_k(t)&=|\gamma+t|^2+A_{m-m_0}(F_{j-1}(\gamma+t)+|\gamma+t|^2+O(1/|\gamma|^{j\alpha}),\gamma+t)+\\&+O(1/|\gamma|^{(m-m_0)\alpha})=|\gamma+t|^2+A_{m-m_0}(F_{j-1}(\gamma+t)+|\gamma+t|^2,\ \gamma+t)+\\&+O(1/|\gamma|^{(m-m_0)\alpha})+(A_{m-m_0}(F_{j-1}(\gamma+t)+|\gamma+t|^2+O(1/|\gamma|^{j\alpha}))-\\&-A_{m-m_0}(F_{j-1}(\gamma+t)+|\gamma+t|^2,\ \gamma+t)).\end{aligned} \tag{1.16}$$

Производная функция $A_{m-m_0}(h,\ \gamma+t)$ по любым направлениям h удовлетворяет оценке

$$\left|\frac{\partial A_{m-m_0}^{(h,\,\gamma+t)}}{\partial h}\right|\leqslant c_2|\gamma+t|^{-1} \tag{1.16}$$

при достаточно больших $|\gamma+t|$ с постоянной c_2, не зависящей от h (где $h=|\gamma+t|^2+O(1)$). Это видно из определения функции $A_{m-m_0}(h,\ \gamma+t)$. Поэтому разность $A_{m-m_0}(F_{j-1}(\gamma+t)+|\gamma+t|^2+ + O\left(\frac{1}{|\gamma|^{j\alpha}}\right),\ \gamma+t\Big)-A_{m-m_0}(F_{j-1}(\gamma+t)+|\gamma+t|^2,\quad \gamma+t)$ равна на $O(1/|j|^{(j+1)\alpha})$.

Из (1.16) следует, что формула (1.9) верна и при $m-m_0=j+1$. Утверждение а) теоремы 1 доказано.

б) Чтобы доказать, что $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ удовлетворяет асимптотике (1.9), достаточно показать, что

$$|b_{k(\gamma+t),\,\gamma}|\equiv\max_{S:|\Lambda_S(t)-|\gamma+t|^2|<2M}|b_{S\gamma}|>c_3|\gamma+t|^{\frac{n-1}{2}}.$$

По формуле (1.2) имеем

$$\sum_{S:|\Lambda-|\gamma+t|^2|>2M}|b_{S,\,\gamma}|^2\leqslant\sum_S\frac{|(\psi_{S,\,t},\ q(x)\,e^{i\langle\gamma+t,\,x\rangle})|^2}{(2M)^2}\leqslant\frac{1}{4}. \tag{1.17}$$

Поэтому

$$\sum_{S:|\Lambda_S-|\gamma+t|^2|<2M}|b_{S,\,\gamma}|^2\geqslant\frac{3}{4}. \tag{1.18}$$

Теперь заметим, что число собственных значений оператора, попадающих в интервал $[|\gamma+t|^2-2M,\ |\gamma+t|^2+2M]$, меньше, чем $c_4|\gamma+t|^{n-1}$. Действительно, по общей теории возмущений число собственных значений оператора H_t, попадающих в $[|\gamma+t|^2-2M,\ |\gamma+ t|^2+2M]$, меньше, чем число собственных значений $|\gamma+t|^2$ $(\gamma\in\Gamma)$ оператора H_t^0, попадающих в $[|\gamma+t|^2-3M, |\gamma+t|^2+3M]$. Поскольку число векторов $\gamma+t$, попадающих в кольцо $\left\{x\in R^n:||x|-|\gamma+t||< <\frac{3M}{|\gamma+t|}\right\}$, меньше, чем $c_3|\gamma+t|^{n-1}$, то число собственных значений $|\gamma+t|^2$ $(\gamma\in\Gamma)$, попадающих в $[|\gamma+t|^2-3M,\ |\gamma+t|^2+3M]$, меньше, чем $c_4|\gamma+t|^{n-1}$. Следовательно, $|b_{k,\,\gamma}|<\frac{3}{4}c_3|\gamma+t|^{n-1}$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. В теореме 1 вместо оператора Лапласа можно взять оператор $f(\Delta)$, где функция $f(\xi)$ вещественная и удовлетворяет условию $|f(|x|)-f(|x+\gamma|)|>|x|^\alpha||x|-|x+\gamma||$ **(1.19)** при $\gamma\in Q^m$ и достаточно больших $|x|$ $(x\in R^n)$.

Тогда при $\gamma+t\in\tilde V_\alpha^m$ для соответствующих собственных значений $\Lambda_k(t)$ оператора $f(\Delta)+q(x)$ верны асимптотические формулы, полученные из (1.9) заменой $|\gamma+t|^2$ на $f(|\gamma+t|)$. Доказательство этих формул отличается от доказательства (1.9) только тем, что вместо (1.10) применяется (1.19).

§ 2. Доказательство гипотезы Бете – Зоммерфельда. Обозначим через $\tilde S_R$ поверхность $\{x\in\tilde V_\alpha^m:|x|^2+F_{m-n}(x)=R^2\}$. Положим $A_a(\delta)= =\left\{a+\tau\frac{a}{|a|}:\tau\in[-\delta,\ \delta]\right\}$, где $a\in\tilde S_R$. Подберем m, m_i и α, α_k из условия $(2n^2+2n+3)^{-1}-\frac{1}{n^3}<\alpha<(2n^2+2n+3)^{-1}$, $\alpha=k^2-$ $-k+2$, $k=1, 2, \ldots$, $m\alpha>2n-\left[\frac{n}{2}\right]$, $m_1>2m_2$, $m_2\alpha>4n$.

Лемма 1. *Если R достаточно большое число и функция $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ непрерывна от аргумента $\gamma+t$ на отрезке $A_a(\delta)$, то точка R^2 входит в спектр оператора H.*

Доказательство. Из определения $F_k(x)$ видно, что функция $f(\tau)=\left|a+\tau\frac{a}{|a|}\right|^2+F_{m-\tilde{n}}\left(a+\tau\frac{a}{|a|}\right)$ дифференцируема при $\tau\in[-\delta,\delta]$ и

$$2R-2<2\left|\alpha+\tau\frac{a}{|a|}\right|-1<\frac{\partial f}{\partial\tau}<2\left|a+\tau\frac{a}{|a|}\right|+1<2R+2. \quad (2.1)$$

По определению поверхности $\tilde{S}_R$ имеем $f(0)=R^2$. Поэтому из (2.1) получим

$$F\left(a+\delta\frac{a}{|a|}\right)>R^2+\delta R, \quad F\left(a-\delta\frac{a}{|a|}\right)<R^2-\delta R,$$

а отсюда и из формулы (1.9) вытекает, что при $\gamma+t=a+\delta\frac{a}{|a|}$

$$\Lambda_{k(\gamma+t)}>R^2+\frac{\delta R}{2}, \text{ а при } \gamma+t=a-\delta\frac{a}{|a|}, \ \Lambda_{k(\gamma+t)}<R^2-\frac{\delta R}{2}.$$

Из непрерывности $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ на отрезке $A_a(\delta)$ следует, что функция $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ принимает и значение R^2, т. е. $R^2\in S(H)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если при $\gamma+t\in A_a(\delta)$ собственное значение $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ простое и выполняется следующее неравенство:*

$$|(\psi_{k,t}, e^{i\langle\gamma+t, x\rangle})|^2>\frac{1}{2}, \quad (2.2)$$

то индекс k на отрезке $A_a(\delta)$ не зависит от $\gamma+t$, т. е. $k(\gamma+$ $+t)\equiv\mathrm{const}$ при $\gamma+t\in A_a(\delta)$ и, следовательно, как заметили в начале § 1, $\Lambda_{k(\gamma+t)}(t)$ непрерывна на отрезке $A_a(\delta)$.

Доказательство. Пусть $\gamma+t_0\in A_a(\delta)$. Из условия простоты собственного значения $\Lambda_{k(\gamma+t_0)}(t_0)$ следует, что в достаточно малой окрестности u_{t_0} точки t_0 собственное значение $\Lambda_{k(\gamma+t_0)}(t)$ простое, функция $(\psi_{k(\gamma+t_0),t}(x), e^{i\langle\gamma+t, x\rangle})$ непрерывна по t, поэтому $|(\psi_{k(\gamma+t_0),t}, e^{i\langle\gamma+t, x\rangle})|^2>1/2$ при $t\in u_{t_0}$, т. е. $k(\gamma+t)\equiv k(\gamma+t_0)$ при $t\in U_{t_0}$.

Очевидно, что $k(\gamma+t)$ постоянна на каждом связном компакте $V\subset A_a(\delta)$, так как у любого компакта существует конечное покрытие $\{U_{t_i}\}_{i=1}^{n_0}$, в каждом U_{t_i} и в их пересечении функция $k(\gamma+t)$ постоянна. Лемма 2 доказана.

Для выполнения условий леммы 2 достаточно доказать, что имеет место неравенство

$$\sum_{\tilde{\gamma}\neq\gamma}|(\tilde{\psi}_{k(\gamma+t),t}(x), e^{i\langle\tilde{\gamma}+t, x\rangle})|^2<1/2,$$

где $\tilde{\psi}_{k,t}(x)$ — любая нормированная собственная функция, соответствующая собственному значению $\Lambda_{k(\gamma+t)}$. Действительно, если $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ не простое собственное значение, то существуют две ортонормированные собственные функции $\psi^1_{k,t}$, $\psi^2_{k,t}$, такие, что $|(\tilde{\psi}^j_{k,t}, e^{i\langle\gamma+t,x\rangle})|^2 > 1/2$, $j = 1, 2$, т. е. $1 = \|e^{i\langle\gamma+t,x\rangle}\|^2 > \sum_{s=1}^{2} |(\psi^s_{k,t}, e^{i\langle\gamma+t,x\rangle})|^2 > 1$.

Итак, доказательство гипотезы Бете — Зоммерфельда мы свели к нахождению отрезка $A_a(\delta)$ ($a \in \tilde{S}_R$, $\delta \sim R^{-n}$ при достаточно больших R, такого, что при $\gamma + t \in A_a(\delta)$ имеет место (2.3). Для оценки суммы в левой части (2.3) множество индексов $\{\tilde{\gamma} + t : \tilde{\gamma} \in \Gamma \setminus \gamma\}$ разделим на следующие части:

$$J_0 = \{\tilde{\gamma} + t : \tilde{\gamma} + t \bar{\in} K_R(3M/R)\}, \quad J_1 = \{\tilde{\gamma} + t : \tilde{\gamma} + t \in K_R(3M/R) \setminus E_1\},$$

$$J_k = \{\tilde{\gamma} : \tilde{\gamma} + t \in K_R(3M/R) \cap (E_{k-1} \setminus E_k)\},$$

$$E_1 = \bigcup_{\gamma \in Q^{m_1}} V_{\gamma, \alpha_1}, \ \ldots, \ E_k = \bigcup_{\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in Q^{m_1}} (V_{\gamma_1, \alpha_k} \cap$$

$$\cap V_{\gamma_2, \alpha_k} \cap \cdots \cap V_{\gamma_k, \alpha_k}),$$

где $K_R(\lambda) = \{x \in R^n : ||x| - R| < \lambda\}$ и векторы $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ линейно независимы.

Множество J_0 содержит векторы $\gamma + t$, находящиеся вне кольца $K_R(3M/R)$, а J_0 содержит векторы, находящиеся внутри кольца и не принадлежащие резонансным множествам $V^{m_1}_{\alpha_1}$, J_k содержит векторы, находящиеся внутри кольца $K_R(3M/R)$ и принадлежащие пересечению $k - 1$ резонансным множествам $V_{\alpha_{k-1}\gamma}$, но не принадлежащие пересечению k резонансных множеств $V_{\alpha_k, \gamma}$. Проверим, что эти множества действительно дают разбиение множества $\{\tilde{\gamma} + t : \tilde{\gamma} \in \Gamma \setminus \gamma\}$. Для этого достаточно показать, что $E_n \cap K^2_R(3M/R) = \varnothing$. Докажем это утверждение от противного. Пусть существует $x \in K_R(3M/R)$ и $x \in V_{\gamma_1, \alpha_n} \cap \cap \cdots \cap V_{\gamma_n, \alpha_n}$ или

$$\begin{cases} |x| \sim R \\ 2(x, \gamma_i) = -|\gamma_i|^2 + O(R^{\alpha_n}). \end{cases} \tag{2.4}$$

Векторы γ_i входят в решетку Γ, поэтому имеют вид

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{n} n_{i,j} \gamma^j, \tag{2.5}$$

где $\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^n$ — базис решетки Γ; $n_{i,j} \in Z$.

По эквивалентности норм в R^n

$$|n_{i,j}| \leqslant c_6 \operatorname{diam} Q^{m_1} \leqslant m_1 c_6 \operatorname{diam} Q. \tag{2.6}$$

Подставляя разложение (2.5) вектора γ_i в (2.4), получаем

$$\sum_{j=1}^{n} n_{i,j}(x, \gamma^j) = O((\operatorname{diam} Q)^2) + O(R^{\alpha_n}). \tag{2.7}$$

Решая систему (2.7) по правилу Крамера, получим

$$|(x,\ \gamma^j)| = \frac{\det A_j}{\det (n_{i,\ j})_{i,\ j=1.\ n}},\ \text{где}\ A_j = \begin{pmatrix} n_{1,\ 1} & \dots & 0(1) & \dots & n_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ n_{n,\ 1} & \dots & \dots & \dots & n_{nn} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что (см. (2.6)) $\det A_j = O(R^{\alpha_n})(\operatorname{diam} Q)^{(n-1)2} + O((\operatorname{diam} Q)^{2n})$, a $\det(n_{i,\ j}) \neq 0$, поскольку векторы $\gamma_1^1, \dots \gamma_n$ линейно независимы. Если учесть, что $\det(n_{i,\ j})$ — целое число, то $|x| = O(R^{\alpha_n}(\operatorname{diam} Q)^{(n-1)}) + O((\operatorname{diam} Q)^{n+1})$. Это приводит к противоречию, если $(\operatorname{diam} Q) \leqslant c_7 R^{\alpha}$, так как $(n-1)\alpha + \alpha_n = (n^2 - n + 2 - 1 + n)\alpha < 1$ **(2.8)**. Следовательно, равенство $\{\tilde{\gamma} + t : \tilde{\gamma} \in \Gamma \setminus \gamma\} = \bigcup_{k=1}^{n} J_k$ доказано.

Теперь сумму в правой части (2.3) напишем в виде

$$\sum_{\tilde{\gamma} \neq \gamma} |(\tilde{\psi}_{k(\gamma+t),\ t},\ e^{i\langle\tilde{\gamma}+t,\ x\rangle})|^2 = \sum\nolimits_0 + \sum\nolimits_1 + \dots + \sum\nolimits_n, \qquad (2.9)$$

где $\sum_k = \sum_{\tilde{\gamma}:\tilde{\gamma}+t \in J_k} |(\tilde{\psi}_{k(\gamma+t),\ t},\ e^{i\langle\tilde{\gamma}+t,\ x\rangle})|^2$, и оценим каждую сумму в отдельности.

Сначала докажем, что если $\gamma + t \in U_{\tilde{S}_R}(\delta)$, то сумма $\sum_0$ мала (лемма 3). Затем найдем такое подмножество $B_R(\delta)$ множества $U_{\tilde{S}_R}(\delta)$, чтобы при $\gamma + t \in B_R(\delta)$ сумма $\sum_1$ была достаточно мала (леммы 4, 5). Далее, найдем такое подмножество множества $B_R(\delta)$ (его будем обозначать через $\tilde{B}_R(\delta)$, чтобы при $\gamma + t \in \tilde{B}_R(\delta)$ сумма $\sum_k (k = 2 \dots n)$ была мала. Наконец, докажем, что в $\tilde{B}_R(\delta)$ содержится отрезок $A_a(\delta)$ $(a \in \tilde{S}_R,\ \delta \sim R^{-n})$. Тогда при $\gamma + t \in A_a(\delta) \subset \tilde{B}_R(\delta) \subset B_R(\delta) \subset U_{\tilde{S}_R}(\delta)$ все суммы $\sum_0, \dots, \sum_n$ будут малы, т. е. будет выполняться неравенство (1.3), что нам и нужно.

Оценка суммы $\sum_0$. Лемма 3. *Если* $\gamma + t \in U_{\tilde{S}_R}(\delta)$, то $\sum_0 < \frac{1}{4}$.

Доказательство. Сначала докажем, что при $\gamma + t \in U_{\tilde{S}_R}(\delta)$ (т. е. $\gamma + t \in U_a(\delta)$, $a \in \tilde{S}_R$) и $\tilde{\gamma} + t \in J_0$ имеет место $|\Lambda_{k(\gamma+t)} - |\tilde{\gamma} + t|^2| > 2M$ **(2.10)**. По определению J_0 имеем $\tilde{\gamma} + t \bar{\in} K_R(3M/R)$. Поэтому $||\tilde{\gamma} + t|^2 - R^2| > 6M$ **(2.11)**. Применяя асимптотические формулы (1.9) для $\Lambda_{k(\gamma+t)}$, получим $\Lambda_{k(\gamma+t)} = F(\gamma + t) + O(1/R^{(m-m_0)\alpha})$ **(2.12)**, а по определению поверхности $\tilde{S}_R$ и по его свойствам (2.1) имеем $F(a) = R^2$, $\Lambda_{k(\gamma+t)} - R^2 = -F(a) + F(\gamma + t) + O(1/R^{(m-m_0)\alpha}) \leqslant (2R + 1)\delta$ **(2.13)**. Теперь из (2.11) и (2.12) следует (2.10). Поэтому, используя (1.2), получаем

$$\sum\nolimits_0 = \sum_{\tilde{\gamma}:\tilde{\gamma}+t \in J_0} \frac{|(\tilde{\psi}_{k,\ t}(x)\, q(x),\ e^{i\langle\tilde{\gamma}+t,\ x\rangle})|^2}{|\Lambda_{k(\gamma+t)} - |\tilde{\gamma} + t|^2|^2} < \frac{1}{4}.$$

Лемма 3 доказана.

Определение множества $B_R(\delta)$, его свойства и оценка суммы $\sum_1$. Обозначим через $\tilde{S}_R^1$ ту часть поверхности $\tilde{S}_R$, которая не содержит точек множества $\Omega_R(\varepsilon) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \tilde{\Pi}_\gamma(\varepsilon)$, где $\tilde{\Pi}_\gamma(\varepsilon) = \{x : |F(x) - F(x - \gamma)| < \varepsilon\}$, $\varepsilon = 17\delta R$.

Положим $B_R(\delta) = \bigcup_{a\in\tilde{S}_R'} U_a(\delta)$.

Лемма 4. *Существует такое число $R_0(q)$, что при $R > R_0(q)$ множество $B_R(\delta)$ обладает следующими свойствами:*

1) *если $x \in B_R(\delta)$ и $\gamma \in \Gamma$, то $|F(x) - F(x+\gamma)| > \frac{\varepsilon}{2}$;*

2) *если $x \in B_R(\delta)$ и $\gamma \in \Gamma$, то $x + \gamma \bar{\in} B_R(\delta)$.*

Доказательство. Докажем первое свойство. Если $x \in B_R(\delta)$, то существует такая точка $a \in \tilde{S}_R'$, что $x \in U_a(\delta)$. Разность $F(x) - F(x+\gamma)$ напишем в виде суммы трех разностей: $F(x) - F(x+\gamma) = (F(x) - F(a)) + (F(a) - F(\gamma + a)) + (F(a+\gamma) - F(x+\gamma))$.

По определению $\tilde{S}_R'$ точка x не лежит в $\tilde{\Pi}_\gamma(\varepsilon)$, поэтому $|F(\gamma + a) - F(a)| > \varepsilon$ **(2.14).**

Производная $F(x)$ по любым направлениям h меньше, чем $3|x|$ см. 1.16)):

$$\left|\frac{\partial F(x)}{\partial h}\right| < 3|x|. \tag{2.15}$$

Кроме того, $|x - a| < \delta$, $|(\gamma + a) - (x+\gamma)| < \delta$. Поэтому $|F(x) - F(a)| < 3\delta R < \frac{\varepsilon}{4}$; $|F(\gamma + a) - F(\gamma + x)| < 3\delta R < \frac{\varepsilon}{4}$. Отсюда и из (2.14) получим, что $|F(x) - F(x+\gamma)| > \frac{\varepsilon}{2}$.

Второе свойство следует из первого. Действительно, если $x \in U_{a_1} \times (\delta) \in B_R(\delta)$ и $x + \gamma \in U_{a_2}(\delta) \subset B_R(\delta)$ (где a_1, $a_2 \in \tilde{S}_R'$), то по определению $\tilde{S}_R'$: $F(a_1) = R^2$, $F(a_2) = R^2$. Согласно (2.15) имеем $|F(x + \gamma) - F(a_2)| < 3\delta R$, $|F(a_1) - F(x)| < 3\delta R$. Поэтому $|F(x+\gamma) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, что противоречит первому свойству. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Если $\gamma + t \in B_R(\delta)$ и $R > R_0(q)$, то $\sum_1 = O(1/R)$.*

Доказательство. Очевидно, что число векторов, попадающих в J_1, имеет порядок $O(R^{n-1})$. Поэтому для доказательства леммы 5 достаточно показать, что при $\tilde{\gamma} + t \in J_1$ имеет место неравенство $|(\tilde{\psi}_{k(\gamma+t),\, t},\ e^{i\langle\tilde{\gamma}+t,\, x\rangle})| < R^{n/2}$.

Докажем от противного. Пусть $|(\tilde{\psi}_{k,\, t},\ e^{i\langle\tilde{\gamma}+t,\, x\rangle})| > R^{n/2}$. Тогда по теореме 1 $\Lambda_{k(\gamma+t)} = F(\tilde{\gamma} + t) + O(1/|\gamma + t|^{(m-\tilde{n})\alpha})$. Отсюда и из (1.9) получим $|F(\gamma + t) - F(\tilde{\gamma} + t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $(m - \tilde{n})\alpha > n - 1$, что противоречит первому свойству множества $B_R(\delta)$. Лемма 5 доказана.

Построение множества $\tilde{B}_R(\delta)$ и оценка суммы $\sum_2, \sum_3, \ldots, \sum_n$. Дадим некоторые комментарии к построению множеств $B_R(\delta)$ и $\tilde{B}_R(\delta)$. Прежде всего отметим, что по первому свойству множества

$B_R(\delta)$, если $\gamma + t \in B_R(\delta)$ и $\tilde{\gamma} \neq \gamma$, то $|F(\gamma+t) - F(\tilde{\gamma}+t)| > \varepsilon/2$. Если $\gamma + t$ входит в m-кратно нерезонансную область, то по асимптотическим формулам (1.9) имеем $|\Lambda_{k(\gamma+t)} - \Lambda_{k(\tilde{\gamma}+t)}| > \varepsilon/3$.

Следовательно, множество $B_R(\delta)$ построено так, что при $\gamma + t \in B_R(\delta)$ все нерезонансные собственные значения $\Lambda_{k(\tilde{\gamma}+t)}$ ($\tilde{\gamma} + t \in V_\alpha^m$) находятся от $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ на расстоянии, большем чем $\varepsilon/2$, т. е. $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ не может быть кратным за счет нерезонансных собственных значений $\Lambda_{k(\tilde{\gamma}+t)}$. Для этого при построении $B_R(\delta)$ мы из $U_{\bar{S}_R}(\delta)$ выбросили те точки $\gamma + t \in V_\alpha^m$, для которых $\Lambda_{k(\gamma+t)} - \Lambda_{k(\tilde{\gamma}+t)} \neq 0$.

Теперь множество $\tilde{B}_R(\delta)$ будет построено так, чтобы $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ при $\gamma + t \in \tilde{B}_R(\delta)$ не могло быть кратным и за счет резонансных собственных значений $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ $(\gamma + t) \in \tilde{B}_R(\delta)$). Для этого из $B_R(\delta)$ выбросим так точки, чтобы в остальном множестве $\tilde{B}_R(\delta)$ собственное значение $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ при $\gamma + t \in \tilde{B}_R(\delta)$ не было кратным и за счет резонансных собственных значений. Резонансные собственные значения не удовлетворяют асимптотике (1.9), а находятся в окрестностях собственных значений некоторых матриц. Поэтому множество, которое мы будем выбрасывать из $B_R(\delta)$ связано с собственными значениями этих матриц. Перейдем к их определению. Каждой точке x, где $x = \tilde{\gamma} + t$, резонансного множества (при $x \in V_{\gamma_1, \alpha_k} \cap \cdots \cap V_{\gamma_k, \alpha_k} \gamma_1, \ldots, \gamma_k \in Q^{m_1}$) сопоставляем матрицу $C(x)$ по правилу $C(x) = (C_{i,j}(x))_{i=1}^{\nu}$, $C_{i,i}(x) = |x|^2 - |x - \tilde{\gamma}_i|^2$ (2.16), $C_{i,j} = q_{\tilde{\gamma}_i - \tilde{\gamma}_j}$, $i = \overline{1, \nu}$, $j = \overline{1, \nu}$. Здесь $\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_\nu$ каким-то образом занумерованные векторы множества $\tilde{D}_k - x$, где $\tilde{D}_k - x = \{y \in R^n : y = z - x, \quad z \in \tilde{D}_k\}$, $\tilde{D}_k\ (x) = D_k(x) + Q^{m_2} = \{x + \gamma : x \in D_k, \ \gamma \in Q^{m_2}\}$, а $D_k(x)$ состоит из точек $x + \gamma\ (\gamma \in \Gamma)$, находящихся в плоскости $P(x, \gamma_1, \ldots, \gamma_k) = \{x + \sum a_i \gamma_i : a_i \in (-\infty, \infty)\}$ размерности p, проходящих через точки x в направлении $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, таких, что $|x + \gamma|^2 - R^2 \sim R^\alpha$ (2.17).

Обозначим через $r_1(x), r_2(x), \ldots$, собственные значения матрицы $C(x)$, занумерованные по порядку возрастания с учетом кратности. Положим $A_{k,i} = \{x \in E_k : R^2 - |x|^2 \subset [r_i(x) - \delta_1, \ r_i(x) + \delta_1]\}$, где $\delta_1 = O(R)\,\delta$, $A_k = \bigcup\limits_{i=1} A_{k,i}$, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{n-1} A_k$.

Теперь из $B_R(\delta)$ выбросим множество A', которое определяется следующим образом: $A' = \{\gamma + x \in B_R(\delta) : \gamma \in \Gamma, \ x \in A\}$.

Лемма 6. *Если* $\gamma + t \in B_R(\delta) \setminus A'$ *и* $R > R_0(q)$, *то сумма* $\sum_k (k = \overline{2, n})$ *достаточно мала.*

Доказательство. Написав формулу (1.6) для $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ любого вектора $\tilde{\gamma}_s + t$ из $\tilde{D}_k(\tilde{\gamma} + t)$, получим систему уравнений

$$(\Lambda_{k(\gamma+t)} - |\tilde{\gamma}_s + t|^2)\, b_{k, \tilde{\gamma}_s} = \sum_{\gamma^{(1)} : \gamma^{(1)} - \tilde{\gamma}_s \in Q} q_{\tilde{\gamma}_s - \gamma^{(1)}} b_{k, \gamma^{(1)}}. \qquad (2.18)$$

Среди векторов $\gamma^{(1)} + t$, входящих в правую часть (2.18), есть невходящие в $\tilde{D}_k^{(\tilde{\gamma}+t)}$. Докажем, что тогда (т. е. при $\gamma^{(1)} + t \,\bar{\in}\, \tilde{D}_k$) имеет место $|b_{k,\gamma^{(1)}}| < R^{-4n}$ **(2.19)**. Для этого, применяя m_2 раз формулу (1.3), получим

$$b_{k,\gamma^{(1)}} = \sum_{\gamma^{(2)},\gamma^{(3)},\ldots,} \frac{q_{\gamma^{(1)}-\gamma^{(2)}} q_{\gamma^{(2)}-\gamma^{(3)}} \cdots q_{\gamma^{(m_2)}-\gamma^{(m_2+1)}}}{\prod_{p=1}^{m_2} (\Lambda_{k(\gamma+t)} - |\gamma^{(p)}+t|^2)}$$

и докажем, что для любого p $(\Lambda_{k(\gamma+t)} - |\gamma^{(p)}+t|^2)^{-1} = O(R^{-\alpha})$ **(2.20)**.

Возможны два варианта:

1) $\gamma^{(p)}+t$ принадлежит плоскости $P(\tilde{\gamma}+t, \gamma_1, \ldots, \gamma_p)$. Тогда по определению D_k: $(|\gamma^{(p)}+t|^2 - R^2)^{-1} = O(R^{-\alpha})$, так как $\gamma^{(p)}+t \bar{\in} D_k$, (см. 2.17)). Если учесть, что $\Lambda_{k(\gamma+t)} - R^2 = O(R^{-\alpha})$ **(2.21)**, то получим $(\Lambda_{k(\gamma+t)} - |\gamma^{(p)}+t|^2)^{-1} = O(R^{-\alpha})$ **(2.22)**.

2) Пусть теперь $\gamma^{(p)}+t \bar{\in} P(\tilde{\gamma}+t, \gamma_1, \ldots, \gamma_k)$. В силу того, что $\gamma^{(1)} \in \tilde{D}_k + Q$, $\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)} \in Q, \ldots$ (так как в противном случае $q_{\gamma_1-\gamma_2} = 0, \ldots,$), имеем $\gamma^{(p)}+t \in \tilde{D}_k + Q^p = D_k + Q^{m_2+p}$, $(p \leqslant m_2)$. Отсюда следует, что существует $\tilde{\gamma}_s + t$ из D_k, такая, что $\tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)} \in Q^{m_1}$, так как $2m_2 < m_1$. По формулам (2.21) и (2.22) $|\tilde{\gamma}_s + t|^2 - \Lambda_{k(\gamma+t)} \sim R^{\alpha}$. Поэтому, чтобы доказать (2.20), достаточно показать, что

$$||\tilde{\gamma}_s + t|^2 - |\gamma^{(p)}+t|^2| \geqslant \frac{1}{2} R^{\alpha_{k+1}}. \qquad (2.23)$$

Докажем от противного. Пусть

1) $||\tilde{\gamma}_s + t|^2 - |\gamma^{(p)}+t|^2| < \frac{1}{2} R^{\alpha_{k+1}}$, или, что то же самое: $|(\tilde{\gamma}_s + t, \tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)}) - |\tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)}|^2| < \frac{1}{2} R^{\alpha_{k+1}}$.

Тогда $||\tilde{\gamma}+t|^2 - |\tilde{\gamma}+t+\tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)}|| = |-(\tilde{\gamma}+t, \tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)}) - |\tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)}|^2| = |-(\gamma_s + t, \ \tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)}) + (\tilde{\gamma}_s - \tilde{\gamma}, \ \tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)}) - (\tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)})^2| < \frac{1}{2} R^{\alpha_{k+1}} + |(\ddot{\gamma}_s - \tilde{\gamma}, \ \tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)})|$ **(2.24)**. Нетрудно вычислить, что $\operatorname{diam} D_k = O((R^{\alpha_k} + (\operatorname{diam} Q)^2 (\operatorname{diam} Q)^{k-1}) (d(Q) \overset{\text{det}}{\equiv} \operatorname{diam} Q)$, т. е. $|(\tilde{\gamma}_s - \tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)})| = O(R^{\alpha_k} + d^2(Q)) d^{2k-1}(Q)$.

Поэтому из (2.24) следует $||\tilde{\gamma}+t|^2 - |\tilde{\gamma}+t+\tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)}|^2 < R^{\alpha_{k+1}}$, $R^{\alpha_{k+1}} > O((R^{\alpha_k} + d^2(Q)) d^{2k-1}(Q))$ при $d(Q) < C_7 R^{\alpha}$ **(2.25)**. Другими словами, $\tilde{\gamma}+t \in V_{\tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)}, \alpha_{k+1}}$, где $\tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)}$ линейно не зависит от векторов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$.

Следовательно, $\tilde{\gamma}+t \in V_{\gamma_1, \alpha_{k+1}} \cap \cdots \cap V_{\gamma_k, \alpha_{k+1}} \cap V_{\tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)}, \alpha_{k+1}} \subset E_{k+1}$, что противоречит нашему предположению о том, что $\tilde{\gamma}+t \in E_k \setminus E_{k+1}$. Соотношения (2.23) и тем самым (2.19) доказаны. Теперь, если в системе уравнений (2.18) вместо $b_{k(\gamma+t),\gamma^{(1)}}$ (где $\gamma^{(1)} \in \tilde{D}_k$) написать $O(R^{-4n})$, то получим следующую систему уравнений:

$$(\Lambda_{k(\gamma+t)} - |\tilde{\gamma}_s + t|^2) b_{k,\tilde{\gamma}_s} = \sum_{\gamma^{(1)} \in \tilde{D}_k} q_{\tilde{\gamma}_s - \gamma^{(1)}} b_{k,\gamma^{(1)}} + O(R^{-4n})$$

при $s = 1, 2 \ldots$

Полученную систему уравнений можно записать в таком матричном виде: $(C(x)-rI)\,b_{k,\,\tilde{\gamma}_s}=(O(R^{-4n}))$ **(2.27)**, где $r=|\tilde{\gamma}+t|^2-\Lambda_{k(\gamma+t)}$ $x=\tilde{\gamma}+t$. Как нетрудно видеть, диагональные элементы c_{ss} имеют вид, $|\tilde{\gamma}+t|^2-|\tilde{\gamma}+t-\tilde{\gamma}_s|^2=2(\tilde{\gamma}+t,\quad \tilde{\gamma}_s)-|\tilde{\gamma}_s|^2$, а недиагональные элементы $C_{i,\,j}$ есть коэффициенты Фурье $q_{\tilde{\gamma}_i-\tilde{\gamma}_j}$. Кроме того, $C_{i,\,j}=\bar{C}_{j,\,i}$, т. е. матрица $C(x)$ симметрична. Итак, из (2.27) получим

$$|b_{k(\gamma+t),\,\tilde{\gamma}}|<\|(C(\tilde{\gamma}+t)-rI)^{-1}\|\,O(1/R^{3n})=\max_i\frac{1}{|r-r_i|}O(R^{-3n}),\tag{2.28}$$

где $r_i(\tilde{\gamma}+t)$ — собственные значения матрицы $C(\tilde{\gamma}+t)$.

По определению A' и A_k, если $\gamma+t\in B_R(\delta)\diagdown A'$ (отсюда следует, что $\tilde{\gamma}+t\bar{\in}A_k$), то $|R^2-|\tilde{\gamma}+t|^2-r_i(\tilde{\gamma}+t)|>\delta_1$ и по (2.13) $|r-r_i|>\delta_1/2$.

Следовательно, из (2.22) получим (при $\gamma+t\in\tilde{J}_k$)

$$|b_{k,\,\tilde{\gamma}}|<\frac{1}{\delta_1}O(R^{-3n})=O(R^{-(2n+1)}),\ \text{так как}\ \delta_1\sim R^{-(n-1)}.$$

Если учесть, что число векторов в J_k $(J_k\in K_R(3M/R))$ меньше $O(R^{n-1})$, то $\sum_k<c_8R^{n-1}O(R^{-1-2n})=O(R^{-n-2})$.

Лемма 6 доказана.

Остается доказать, что множество $B_R(\delta)\diagdown A'$ непустое и содержит отрезок $A_a(\delta)$. Для этого нам будет нужно следующее неравенство: $\mu_n(U'_A(2\delta))<\mu_n(B_R(\delta))$, где $U'_A(2\delta)=\{x+\gamma\in B_R(\delta): x\in V_A(2\delta),\ \gamma\in\Gamma\}$.

Лемма 7. *Если R — достаточно большое число и $\varepsilon\sim R^{1-n}$*, то

$$\mu(\tilde{S}'_R)=(1-\beta)\mu(S_R)\ \ и\ \ \mu_n(B_R(\delta))\sim 1,\tag{2.29}$$

где β — достаточно малое положительное число.

Доказательство. Прежде всего легко видеть, что $\mu_{n-1}(\tilde{S}_R\cap V_\alpha^m)=O(R^\alpha|Q|)$. Поэтому вычислим площадь гиперповерхности $\tilde{S}_R\cap(\bigcup_\gamma\tilde{\Pi}_\gamma(\varepsilon))$. Поверхность $\tilde{S}_R\cap\tilde{\Pi}_\gamma(\varepsilon)$ асимптотически близка к сферическому поясу с шириной $\varepsilon/|\gamma|^2$ и нетрудно проверить, что $\mu_{n-1}(\tilde{S}_R\cap\tilde{\Pi}_\gamma(\varepsilon))<c_9|\gamma|^{-2}\varepsilon R^{n-2}$.

Если учесть, что число слоев $\tilde{\Pi}_\gamma(\varepsilon)$, которые пересекаются с $\tilde{S}_R$ (для этого, очевидно, должно выполняться условие $|\gamma|<2R+1$), меньше, чем $c_{10}R^n$, то получим $\mu_{n-1}(\Omega_R(\varepsilon)\cap\tilde{S}_R)<\beta\cdot\varepsilon\cdot R^{2n-2}$ **(2.30)**. Теперь из $\mu_{n-1}(\tilde{S}_R)\sim R^{n-1}$ $\varepsilon\sim R^{1-n}$ следует $\mu_{n-1}(\tilde{S}'_R)=(1-\beta)\mu\times(S_R)$, $\mu_n(B_R(\delta))\sim\mu_{n-1}(S'_R)\delta\sim\perp$.

Лемма 7 доказана.

Отметим, что если X есть n-мерное подмножество в R^n, то для вычисления объема будем пользоваться формулой $\mu_n(X)=\int\limits_{\cdot\,(K)}\mu_1\times$

$\times (X(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_{k-1}\, dx_{k+1}\, dx_n < \tilde{\mu}_k \times$
$\times (X)\, \mu_{n-1}(X(k))$ **(2.31),**

где

$$X(x_1, \ldots, x_{k-1}x_{k+1}, \ldots, x_n) = \{x_k : (x_1, x_2, \ldots, x_n \in) X\},$$

$$X(k) = \bigcup_{x_k} \{(x_1, \ldots, x_{k-1}x_{k+1}, \ldots, x_n) : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X\},$$

$$\mu_k(X) = \max_{x_1, \ldots, x_{k-1}x_{k+1}, \ldots, x_n} \mu_1(X(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n). \quad (2.32)$$

Лемма 8. *Для лебеговой меры множества $U_A(2\delta)$ верна следующая оценка:* $\mu_n(U_A(2\delta)) < \beta_1 \mu_n(B_R(\delta))$ **(2.33)**, *где* β_1 *— достаточно малое число.*

Доказательство. По определению A_k состоит из множеств $\tilde{A}_k = \tilde{A}_k(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) = A_k \cap (V_{\gamma_1, \alpha_k} \cap V_{\gamma_2, \alpha_k} \cap \cdots \cap V_{\gamma_k, \alpha_k})$, а множество $\tilde{A}_k$ состоит из множеств $\tilde{A}_{k,i}$, где $\tilde{A}_{ki} = \tilde{A}_k \cap A_{k,i}$.

Оценим меру $U_{\tilde{A}_{k,i}}(2\delta)$. Будем пользоваться формулой (2.31), где в данный момент вместо X возьмем $U_{A_{k,i}}(2\delta)$, а вместо $X(k)$ $X(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ возьмем $U_{\tilde{A}_{k,i}}(2\delta)$, $U_{\tilde{A}_{k,i}}(2\delta)$, $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Не нарушая общности, можно предполагать, что для координат x_n любой точки x из $U_{\tilde{A}_{k,i}}(2\delta)$ выполняется неравенство $|x_n| > \frac{R}{2n}$, так как для каждой точки x из множества $U_{\tilde{A}_{k,i}}(2\delta)$ одна из координат x_j $(j > k)$ удовлетворяет этому условию. Множество $U_{\tilde{A}_{k}}$ состоит из множеств $U_{A_{k,i}}(2\delta)$.

Докажем, что $\mu_1(U_{\tilde{A}_{k,i}}(2\delta))(x_1, \ldots, x_{n-1}) \sim \delta$. Для этого достаточно доказать, что если точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1 x'_n)$ входят в $U_{\tilde{A}_{k,i}}(2\delta)(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и $x_j = x'_j$ при $j \neq n$, $|x_n - x'_n| = \delta_2$, $\delta_2 > 100n\delta$, $x_n x'_n > 0$ **(2.35)**, то одна из этих точек не принадлежит множеству $U_{\tilde{A}_{k,i}}(2\delta)$.

Докажем от противного. Пусть выполняется (2.35) и $x, x' \in U_{\tilde{A}_{k,i}}(2\delta)$. Тогда существуют точки $\tilde{x} \in \tilde{A}_{k,i}$ и $x' \in \tilde{A}_{k,i}$, такие, что $|x - \tilde{x}| < 2\delta$, $|x' - \tilde{x}'| < 2\delta$ **(2.36)**. По определению $\tilde{A}_{k,i}$ должно выполняться следующее неравенство: $||\tilde{x}|^2 - r_i(\tilde{x}) - |\tilde{x}'|^2 - r_i(\tilde{x}')| < 2\delta_1$ **(2.37)**.

Чтобы доказать, что последнее неравенство не выполняется, оценим разности $|\tilde{x}|^2 - |\tilde{x}'|^2$ и $r_i(\tilde{x}) - r_i(\tilde{x}')$ в отдельности. Разность $|\tilde{x}|^2 - |\tilde{x}'|^2$ запишем в виде суммы трех слагаемых $|\tilde{x}|^2 - |\tilde{x}'|^2 = (|\tilde{x}|^2 - |x|^2) + (|x'|^2 - |\tilde{x}'|^2 + (|x|^2 - |x'|^2)$. Из (2.36) и из того, что $\tilde{x}, \tilde{x}' \in \tilde{A}_{k,i}$ следует $||\tilde{x}|^2 - |x|^2| < 2R \cdot 2\delta$, $|x'|^2 - |\tilde{x}'|^2 < 4R\delta$. С другой стороны, из (2.35) и из предположения, что при $x \in U_{\tilde{A}_k}(2\delta)$ выполняется неравенство $|x_n| > \frac{R}{2n}$ следует $||x|^2 - |x'|^2| = |x_n^2 -$

$-(x_n')^2| = (|x_n| + |x_n'|)(|x_n| - |x_n'|) > \frac{R}{2n}\delta_2$, так как $||x_n| - |x_n'|| = |x_n - x_n'|$ при $x_n x_n' > 0$. Следовательно,

$$||\tilde{x}|^2 - |x'|^2| > \frac{R}{2n}\delta_2 - 4R2\delta > \frac{R}{4n}\delta_2, \quad (2.38)$$

так как $8R\delta < \frac{R}{4n}\delta_2$ при $\delta_2 > 100n\delta$.

По определению $r_l(\tilde{x})$, $r_i(\tilde{x}')$ есть i-е собственное значение матрицы $C(\tilde{x})(C(\tilde{x}'))$. Можно считать (в силу того, что $|\tilde{x}' - \tilde{x}| = O(R^{-1})$), что только диагональные элементы матрицы $C(\tilde{x})(C(\tilde{x}'))$ зависят от $\tilde{x}(\tilde{x}')$ и имеют вид $|\tilde{x}|^2 - |\tilde{x} - \gamma_s|^2$, $(|\tilde{x}'|^2 - |\tilde{x}' - \gamma_s|^2)$. Тогда получим, что $C(\tilde{x}) - C(\tilde{x}') = (a_{i,j})$, где $a_{i,j} = 0$ при $i \neq j$, а $a_{i,i} = \langle \tilde{x} - \tilde{x}', \gamma_i \rangle$, где $|\gamma_i| \leqslant d(D_k)$. Поэтому $|r_i(\tilde{x}) - r_i(\tilde{x}')| \leqslant ||C(\tilde{x}) - C(\tilde{x}')|| < d(D_k)|$, а $|\tilde{x} - \tilde{x}'| < |x' - \tilde{x}'| + |x - x'| + |x - \tilde{x}| < \delta_2 + 2\delta$. Следовательно, $|r_i(\tilde{x}) - r_i(\tilde{x}')| < d(D_k)(\delta_2 + 2\delta)$. Итак, из (2.38) и из только что полученных неравенств видим, что неравенства (2.37) не выполняются в силу того, что $d(D_k) = O(R^{\alpha(k^2+k+1)}) = O(R)$, так как $(k^2 + k + 1)\alpha < 1$ при $k = \overline{1, (n-1)}$. Следовательно, $\mu_1(U_{A_{ki}}(2\delta)(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \sim \delta$.

Учитывая, что $U_{\tilde{A}_{ki}}(2\delta)$ входит в пересечение k слоев толщиной порядка $O(R^{\alpha_k})$ и $U_{A_{ki}}(2\delta) \in R\left(\frac{4M}{R}\right)$ нетрудно вычислить

$$\mu_n(U_{A_{ki}}(2\delta)) = O(R^{n-2-k} d(D_k)^k \delta. \quad (2.39)$$

Число собственных значений $r_i(x)$ $(i = \overline{1, \delta})$ матрицы $C(x)$ меньше, чем $c_{11} d(D_k)|Q|$. Поэтому

$$\mu_n(U_{A_k}(2\delta)) = d^{2k-1}(D_k) \cdot |Q| \, O(R^{n-1-k})\delta; \quad (2.40)$$

$$\mu_n(U_{Ak}(2\delta) = |Q|^{k+1} d^{2k-1}(D_k) \cdot O(R^{n-1-k})\delta =$$
$$= O(R^{(k+1)n+2k^3+k^2+k-1}) \, O(R^{n-1-k})\delta = O(R^{n-1})\delta, \quad (2.41)$$

так как $|\alpha|^{-1} > 2n^2 - 2n + 3$. Остается учесть, что $\mu_n(B_R - (\delta)) \sim R^{n-1} \cdot \delta$ (см. лемму 7). Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Существует отрезок* $A_a(\delta)$, *такой, что* $a \in \tilde{S}_R^1$, $\delta \sim R^{-n}$ *и* $A_a(\delta) \subset \tilde{B}_R(\delta)$.

Доказательство. Доказательство леммы состоит из двух частей. В первой части докажем, что

$$\mu_n(U_A'(2\delta)) \leqslant \mu_n(U_A(2\delta)), \quad (2.42)$$

где $U_A'(2\delta) = \{\gamma + x \in B_R(\delta) : x \in U_A(2\delta), \ \gamma \in \Gamma\}$, т. е. по лемме 8 $\mu(U_A'(2\delta)) < \beta_1 \mu(B_R(\delta))$ (2.41), а во второй части докажем, что из (2.40) следует утверждение леммы 9.

По определению множество $U_A'(2\delta)$ есть подмножество множества $B_R(\delta)$: элементы множества $U_A'(2\delta)$ получаются из множества $U_A(2\delta)$ сдвигом на векторы $\gamma(\gamma \in \Gamma)$. Очевидно, что число таких векторов γ конечно, т. е. существует конечное число $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$, для которых $U'_{\gamma_k} = (U_A(2\delta) + \gamma_k) \cap B_R(\delta) = \varnothing$.

Следовательно, $U'_A(2\delta)$ можно определить и так: $U'_A(2\delta) = \bigcup_{k=\overline{1,s}} U'_{\gamma_k}$. Обозначим $U_{\gamma_k} = U'_{\gamma_k} - \gamma_k$. Очевидно, что $\mu(U_{\gamma_k}) = \mu(U'_{\gamma_k})$ и $U_{\gamma_k} \subset U_A(2\delta)$ **(2.42)**, так как U_{γ_k} есть просто сдвиг множества U'_{γ_k} на вектор γ_k.

С другой стороны, $U_{\gamma_k} \cap U_{\gamma_j} = \varnothing$ при $\gamma_k \neq \gamma_j$. Действительно, в противном случае существует x, такое, что $x \in U_{\gamma_k}$ и $x \in U_{\gamma_j}$. Тогда по определению U'_{γ_k} и U'_{γ_j}: $x + \gamma_k \in U'_{\gamma_k} \subset B_R(\delta)$ и $x + \gamma_j \in U'_{\gamma_j} \subset B_R(\delta)$. Это противоречит третьему свойству множества.

Итак, множества U_{γ_k}, $k = 1, 2, \ldots$, попарно не пересекаются и входят в $U_A(2\delta)$. Поэтому

$$\mu_n(U_A(2\delta)) \geqslant \sum_{k=1}^{s} \mu_n(U_{\gamma_k}).$$

а из (2.42) получим, что (по $U'_A(2\delta) = \bigcup_k U'_{\gamma_k}$),

$$\mu_n(U'_A(2\delta) \leqslant \sum_{k=1}^{s} \mu_n(U'_{\gamma_k}) = \sum_{k=1}^{s} \mu_n(U_{\gamma_k}) \leqslant \mu_n(U_A(2\delta)),$$

т. е. верно (2.42) и тем самым верно (2.41).

Из (2.41) получим, что существует $\tilde{x}$ из $B_R(\delta)$. Тем самым по определению $B_R(\delta)$ существует такое $U_a(\delta)$, что $\tilde{x} \in U_a(\delta)$, такое, что $\tilde{x} \bar{\in} U'_A(2\delta)$.

Докажем, что шар $U_a(\delta)$ (значит, и отрезок $A_a(\delta)$) удовлетворяет требованию этой леммы, т. е. $A_a(\delta) \cap A' \neq \varnothing$.

Докажем от противного. Пусть существует x_0, такое, что $x_0 \in A_a(\delta) \cap A'$. Если $x_0 \in A'$, то по определению A' существует $x_1 \in A$, такое, что $x_0 = x_1 + \gamma_{x_1}$, где $\gamma_{x_1} \in \Gamma$.

Тогда 2δ — окрестность $U_{x_1}(2\delta)$ точки x_1 входит в $U_A(2\delta)$, а шар $U_{x_1}(2\delta) + \gamma_{x_1}$ имеет радиус 2δ и центр x_0 (где $x_0 \in U_a(\delta)$), поэтому $U_a(\delta) \subset U_{x_1}(2\delta) + \gamma_{x_1}$.

Следовательно, $\tilde{x} \in U_{x_1}(2\delta) + \gamma_{x_1}$ (так как $\tilde{x} \in U_a(\delta)$), другими словами, существует точка $x_2 \in U_{x_1}(2\delta) \subset U_A(2\delta)$, такая, что $\tilde{x} = x_2 + \gamma_{x_2}$. Отсюда следует, что $\tilde{x} \in U'_A(2\delta)$. Это противоречит определению точки $\tilde{x}$. Лемма 9 доказана.

Теорема 2. *Если потенциал $q(x)$ входит в $W_2^{(n^2-n)2n}(F)$, то число лакун в спектре оператора H конечно.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $q(x)$ является тригонометрическим многочленом (см. [4]). Пусть $R > R_0(q)$. По лемме 9 существует отрезок $A_a(\delta)$, такой, что $A_a(\delta) \subset \tilde{B}_R(\delta)$, $a \in \tilde{S}'_R$, $\delta \sim R^{-n}$. Поэтому по леммам 3, 5, 6 при $\gamma + t \in A_a(\delta) \subset \tilde{B}_R(\delta) \subset U_{S'_R}(\delta)$ суммы $\sum_0 \sum_1, \ldots, \sum_n$ достаточно малы, т. е. выполняется условие (1.3). Тем самым при $\gamma + t \in A_a(\delta)$ выполняются условия леммы 2. Следовательно, существует индекс k_0, не зависящий от $\gamma + t$ на отрезке $A_a(\delta)$, такой, что $k(\gamma + t) \equiv k_0$, т. е. по лемме 1 точка R^2 входит в спектр оператора H. Более того (см. лемму 1), k_0-я зона $\{\Lambda_k(t): t \in F^*\}$ спектра содержит отрезки $\left[R^2 - \frac{\delta}{2},\ R^2 + \frac{\delta}{2}\right]$, т. е. существуют точки t_1 и t_2 такие, что

$$\Lambda_k(t_1) < R^2 - \frac{\delta}{2}, \quad \Lambda_k(t_2) > R^2 + \frac{\delta}{2}. \tag{2.43}$$

Причем это верно для любого многочлена, удовлетворяющего условиям (см. (2.8)):

$$d(Q) \leqslant c_7 R^{\alpha},\ \alpha < \frac{1}{2n^2 - 2n + 3}. \tag{2.44}$$

Теперь пусть $q(x)$ — гладкая функция из $W_2^{(n^2-n)2n}$. Нетрудно проверить, что многочлен

$$\tilde{q}(x) = \sum_{|\gamma| < \frac{1}{2} c_7 R^{\alpha}} q_{\gamma} e^{i\langle \gamma, x\rangle}$$

тоже удовлетворяет условию (2.44). Поэтому (2.43) имеет место и для этого многочлена. Обозначим через $\tilde{\Lambda}_1(t)$, $\tilde{\Lambda}_2(t)$ собственные значения оператора T_t с потенциалом $q(x)$ из $W_2^{(n^2-n)2n}$. Согласно общей теории возмущения

$$|\tilde{\Lambda}_k(t) - \Lambda_R(t)| \leqslant \sup_x |q(x) - \tilde{q}(x)|, \tag{2.45}$$

где $\Lambda_k(t)$ — собственные значения оператора T_t с потенциалом $\tilde{q}(x)$, а $|q(x) - \tilde{q}(x)| = O(R^{1-n})$. Из (2.43), (2.45) и $\delta \sim R^{1-n}$ следует, что $\tilde{\Lambda}_k(t_1) < R^2$, $\tilde{\Lambda}_k(t_1) > R^2$, т. е. k-я зона $\{\tilde{\Lambda}_k(t): t \in F^*\}$ спектра оператора T содержит точку R^2. Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что утверждение теоремы 2 верно и для оператора $f(\Delta) + q(x)$ в $L_2(R^n)$ (см. замечание 1). При этом в доказательстве при определении функции $F_k(\gamma + t)$ вместо $|\gamma + t|^2$ нужно брать $f(|\gamma + t|)$.

Замечание 3. Из доказательства леммы 9 видно, что число отрезков $A_a(\delta)$, $a \in \tilde{S}'_R$, $\delta \sim R^{-n}$, входящих в множество $\tilde{B}_R(\delta)$, достаточно велико. Действительно, так мы предположили, что $x_0 \in A'$, а получили, что шар $U_a(\delta)$, содержащий точку x_0, целиком входит в множество $U'_A(2\delta)$.

Поэтому объединение всех шаров $U_a(\delta)$, имеющих общие точки с множеством A', входит в множество $U'_A(2\delta)$. Отсюда следует, что объединение всех шаров, не имеющих общих точек с множеством A', т. е. множество

$$\tilde{\tilde{B}}_R(\delta) = \bigcup_{a: U_a(\delta) \subset \tilde{B}_R(\delta)} (U_a(\delta))$$

составляет большую часть множества.

Следовательно, множество центров (середин) отрезков $A_a(\delta)$, входящих в $\tilde{B}_R(\delta)$, составляет большую часть множества S'_R и тем самым большую часть $\tilde{S}_R$.

А среди собственных значений $\Lambda_{k(\gamma+t)}$, где $\gamma+t\in A_a(\delta)$ по лемме 1 существует хотя бы одно собственное значение, совпадающее с точкой R^2. Таким образом, множество $\gamma+t$, для которого $\Lambda_{k(\gamma+t)}=R^2$ образует большую часть поверхности $\tilde{S}_R$.

Итак, мы получили, что множество собственных значений $\Lambda_n(t)$, совпадающих с R^2, не только непусто (т. е. не только доказали гипотезы Бете—Зоммерфельда), а даже верно следующее более сильное утверждение.

Теорема 3. *Если* $q(x)\in W_2^{(n^2-n)2n}(F)$ *и* R — *достаточно большое число, то*

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu_{n-1}\{t\in F^*:\Lambda_k(t)=R^2\}\geqslant\mu_{n-1}\{t\in F^*:(\exists_k),\Lambda_k(t)=R^2\}>(1-$ $-\beta_2)\mu(S_R)$, где β_2 — достаточно малое положительное число.

2) Множество векторов $\gamma+t$, для которых собственное значение $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ совпадает с точкой R^2, образует $n-1$-мерное многообразие в R^n, лебегова мера которого асимптотически близка (при $R\to\infty$) мере сферы S_R.

Замечание 4. Предложенным методом нетрудно доказать, что если $q(x)\in W_2^{(n^2-n)2n}$ и $\sup\limits_x|q(x)|$ достаточно малы, то в спектре оператора H не имеется лакун.

Автор выражает благодарность В. А. Марченко и М. В. Новицкому за очень полезные обсуждения.

Список литературы: 1. *Eastham M. S. P.* The spectral theory of periodic differential equations. Scottish Acad. Press, 1973. 2. *Бете Г., Зоммерфельд А.* Электронная теория металлов.— М.; Л., 1938.— 316 с. 3. *Зейтц Ф.* Физика металлов.— М.; Л., 1947.— 364 с. 4. *Скриганов М. М.* Конечность числа лакун в спектре многомерного полигармонического оператора с периодическим потенциалом // Мат. сб.— 1980.— **113 (155)**, № 1.— С. 133—146. 5. *Попов В. Н., Скриганов М. М.* Замечание о строении спектра двумерного оператора Шредингера с периодическим потенциалом // Записки науч. семинаров ЛОМИ.— 1981.— **109**.— С. 131—133. 6. *Скриганов М. М.* Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.— 1985.— **171**.— С. 13—18. 7. *Скриганов М. М.* Многомерный оператор Шредингера с периодическим потенциалом // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1983.— **47**, № 3.— С. 659—687. 8. *Скриганов М. М.* Доказательство гипотезы Бете—Зоммерфельда в размерности три. Препринт ЛОМИ Р-6-84. Л., 1984. 9. *Яковлев Н. Н.* Асимптотические оценки плотностей решетчатых к-упаковок и к-покрытий и строение спектра оператора Шредингера с периодическим потенциалом // Докл. АН СССР.— 1984.— **276**, № 1.— С. 54—57. 10. *Велиев О. А.* О спектре оператора Шредингера с периодическим потенциалом // Докл. АН СССР.— 1983.— **286**, № 6.— С. 1289—1293.

Поступила в редколлегию 11.11.8