

К-14038
П289016

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА



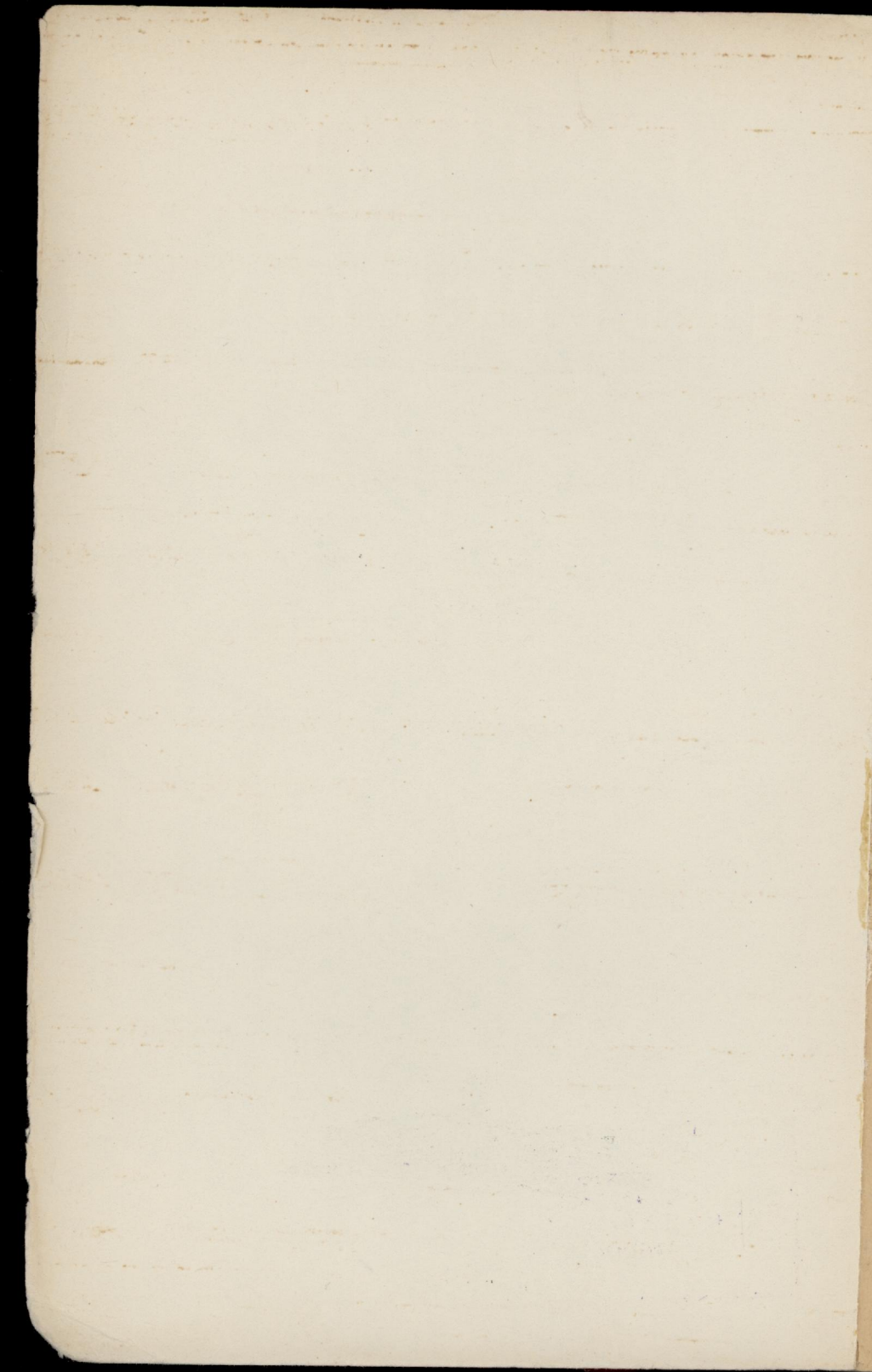
№ 119

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ВЫПУСК 40



«ВИЩА ШКОЛА»



МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ВЕСТНИК
ХАРЬКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

№ 119

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ВЫПУСК 40

ИЗДАТЕЛЬСКОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ «ВИЩА ШКОЛА»
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
Харьков — 1975

Печатается по решению Ученого совета механико-математического факультета Харьковского государственного университета (протокол № 1 от 17 сентября 1974 г.).

В настоящий выпуск включены статьи по алгебре, функциональному анализу, приложениям математических методов в гидродинамике, электродинамике, теории управления.

Вестник рассчитан на научных работников и преподавателей.

Редакционная коллегия:

проф. *Н. И. Ахиезер* (отв. редактор), проф. *В. А. Марченко*, проф. *А. В. Погорелов*, доц. *А. А. Янцевич* (отв. секретарь.).

Адрес редакционной коллегии:

Харьков, 77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет.
Редакция естественнонаучной литературы.
И. о. зав. редакцией *А. Г. Роскопыт.*



КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТЯХ С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА

§ 1. Постановка задачи и основные результаты

Пусть в пространстве R_3 (или R_2) задана фиксированная конечная область Ω с границей $\partial\Omega$ и в ней выделено некоторое число s непересекающихся замкнутых множеств $F_i^{(s)}$ ($i = 1, 2, \dots, s$) с достаточно гладкими границами $\partial F_i^{(s)}$. Рассмотрим в области $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^s F_i^{(s)}$ краевую задачу для линейной системы уравнений Навье — Стокса

$$\left. \begin{aligned} \nu \Delta \vec{u}^{(s)}(x) &= \text{grad } p^{(s)}(x) \\ \text{div } \vec{u}^{(s)}(x) &= 0 \end{aligned} \right\} x \in \Omega^{(s)}, \quad (1.1)$$

$$\vec{u}^{(s)}(x) = \vec{U}(x), \quad x \in \partial\Omega^{(s)} = \partial\Omega \cup \left(\bigcup_{i=1}^s \partial F_i^{(s)} \right). \quad (1.2)$$

Будем предполагать, что «граничная» вектор-функция $\vec{U} = \vec{U}(x)$ задана всюду в Ω , принадлежит пространству $W_2^1(\Omega)$ и удовлетворяет в Ω уравнению $\text{div } \vec{U}(x) = 0$.

Как известно, существует единственное решение $\{\vec{u}^{(s)}(x), p^{(s)}(x)\}$ задачи (1.1)—(1.2) (см., например, [1]). Здесь мы часто будем называть решением задачи лишь вектор скорости $\vec{u}^{(s)}(x)$, продолжая его на множество $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^s F_i^{(s)}$ равенством $\vec{u}^{(s)}(x) = \vec{U}(x)$ и сохраняя за полученной вектор-функцией прежнее обозначение $\vec{u}^{(s)}(x)$. Основная наша цель — изучить асимптотическое поведение вектора $\vec{u}^{(s)}(x)$ при $s \rightarrow \infty$, когда диаметры $d_i^{(s)}$ множеств $F_i^{(s)}$ стремятся к нулю, а сами $F_i^{(s)}$ либо приближаются к фиксированной поверхности (в R_2 — к контуру) $\Gamma \subset \Omega$, либо распределяются в Ω «объемно» (см. рис. 1 и 2).

Покажем, что при определенных условиях существует предел $\lim_{s \rightarrow \infty} \vec{u}^{(s)}(x) = \vec{u}(x)$, и этот предел является решением некоторой

краевой задачи, рассматриваемой уже в простой области $\Omega \setminus \Gamma$ (при «поверхностном» распределении множеств $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^s F_i^{(s)}$, рис. 1) или Ω (при объемном распределении, рис. 2).

Для этого необходимо ввести одну характеристику множеств, аналогичную емкости и учитывающую не только массивность множеств $F_i^{(s)}$, но и ориентацию. Пусть $T(F_i^{(s)})$ — шар (в R_2 — круг) минимального радиуса $a_i^{(s)}$, в котором содержится $F_i^{(s)}$, а $T_a(F_i^{(s)})$ — concentрический с ним шар радиуса $a > a_i$. Обозначим через $H^k(F_i^{(s)})$ класс соленоидальных вектор-функций из

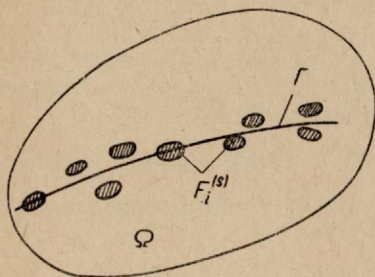


Рис. 1.

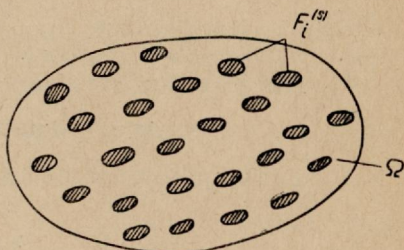


Рис. 2.

пространства $\dot{W}_2^1(T_a)$, равных $\vec{e}^k$ на множестве $F_i^{(s)}$, где $\vec{e}^k$ — орт оси x_k . Рассмотрим функционал

$$I^{(i)}(\vec{u}) = \int_{T_a(F_i^{(s)})} |\nabla \vec{u}(x)|^2 dx = \int_{T_a} \sum_{i,m=1}^n \left| \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_m} \right|^2 dx \quad (n=2, 3), \quad (1.3)$$

где $u_i(x)$ — компоненты вектора $\vec{u}(x)$.

Пусть $\vec{v}^{k(i)}(x) = \vec{v}^{k(i,s)}(x)$ — вектор-функция, на которой достигается минимум функционала (1.3) в классе $H^k(F_i^{(s)})$. Из результатов работы [1] вытекает, что такая вектор-функция существует и единственна, причем она является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v}^{k(i)}(x) &= \text{grad } p^{k(i)} \\ \text{div } \vec{v}^{k(i)} &= 0 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x \in T_a \setminus F_i^{(s)}, \\ \vec{v}^{k(i)}(x) = \vec{e}^k, \quad x \in F_i^{(s)}. \end{array} \right. \quad (1.3')$$

$$\vec{v}^{k(i)}|_{\partial T_a} = 0.$$

С помощью решений $\vec{v}^{k(i)}$ и $\vec{v}^{l(i)}$ ($1 \leq k, l \leq n$; $n = 2, 3$) этой задачи построим тензор

$$C^{kl}(F_i^{(s)}) = \int_{T_a} (\nabla \vec{v}^{k(i)}, \nabla \vec{v}^{l(i)}) dx = \int \sum_{m,r=1}^n \frac{\partial v_r^{k(i)}}{\partial x_m} \frac{\partial v_r^{l(i)}}{\partial x_m} dx.$$

Числа $C^{kl}(F_i^{(s)})$ формально зависят от радиуса a , но как будет видно из дальнейшего, при малых диаметрах множеств $F_i^{(s)}$ и фиксированных $a > 0$ эта зависимость асимптотически исчезает.

Выберем тензор $\{C^{kl}(F_i^{(s)})\}$ в качестве основной количественной характеристики множества $F_i^{(s)}$ (его массивности и ориентации в пространстве R_n). Введем такие обозначения:

$d_i^{(s)}$ — диаметры множеств $F_i^{(s)}$;

$r_i^{(s)}$ — расстояние от минимального шара $T(F_i^{(s)})$ до множества $\bigcup_{j \neq i} T(F_j^{(s)}) \cup \partial \Omega$;

$\sum_G$ — сумма, распространяющаяся на те значения индекса i , для которых $F_i^{(s)}$ лежат внутри области $G \subset \Omega$;

$\sum_{(\Gamma)}$ — сумма, распространяющаяся на те i , для которых проекции множеств $F_i^{(s)}$ на поверхность Γ лежат внутри куска $\gamma \subset \Gamma$.

Основные результаты работы, относящиеся соответственно к объемному и пограничному распределению множеств $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^s F_i^{(s)}$, содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. Пусть при $s \rightarrow \infty$ выполняются такие условия:

1) $\lim_{s \rightarrow \infty} \max_i d_i^{(s)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \max_i r_i^{(s)} = 0$;

2) для любой подобласти $G \subset \Omega$ существует предел

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{(G)} C^{kl}(F_i^{(s)}) = \int_G C^{kl}(x) dx,$$

где $\{C^{kl}(x)\} = C(x)$ — непрерывная неотрицательная матрица в Ω ;

3) $\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^s \frac{(d_i^{(s)})^2}{(r_i^{(s)})^3} < \infty$ в пространстве R_3 и

$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^s \frac{1}{|\ln d_i^{(s)}|^2 (r_i^{(s)})^2} < \infty$ в пространстве R_2 .

Тогда последовательность $\{\vec{u}^{(s)}(x), s = 1, 2, \dots\}$ решений задачи (1.1)—(1.2), продолженных на множество $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^s F_i^{(s)}$ равенством

$\vec{u}^{(s)}(x) = \vec{U}(x)$, в метрике $\vec{L}_2(\Omega)$ сходится к решению $\vec{u}(x)$ следующей краевой задачи:

$$\left. \begin{aligned} \nu \Delta \vec{u}(x) - \nu C(x) \vec{u}(x) &= \text{grad } p(x) - \nu C(x) \vec{U}(x) \\ \text{div } \vec{u}(x) &= 0 \end{aligned} \right\} x \in \Omega, \quad (1.4)$$

$$\vec{u}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.5)$$

где матрица $C(x)$ определена условием 2.

Теорема 2. Пусть при $s \rightarrow \infty$ множества $F^{(s)}$ попадают в слой толщины $\rho^{(s)} \sim c \max_i r_i^{(s)}$ со срединной поверхностью (кривой в R_2) Γ и выполняются такие условия:

$$1) \lim_{s \rightarrow \infty} \max_i d_i^{(s)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \max_i r_i^{(s)} = 0;$$

2) для любого куска $\gamma \subset \Gamma$ существует предел

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{(\gamma)} C^{kl}(x) = \int_{\Gamma} C_{\Gamma}^{kl}(x) d\Gamma,$$

где $\{C_{\Gamma}^{kl}(x)\} = C_{\Gamma}(x)$ — непрерывная неотрицательная матрица на Γ ;

$$3) \lim_{s \rightarrow \infty} \rho^{(s)} \sum_{i=1}^s \frac{(d_i^{(s)})^2}{(r_i^{(s)})^3} < \infty \text{ в пространстве } R_3,$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \rho^{(s)} \sum_{i=1}^s \frac{1}{|\ln d_1^{(s)}|^2 (r_i^{(s)})^2} < \infty \text{ в пространстве } R_2.$$

Тогда последовательность $\{\vec{u}^{(s)}(x), p^{(s)}(x)\}$ решений задачи (1.1) — (1.2) сходится к решению $\{\vec{u}(x), p(x)\}$ следующей краевой задачи:

$$\left. \begin{aligned} \nu \Delta \vec{u}(x) &= \text{grad } p(x) \\ \text{div } \vec{u}(x) &= 0 \end{aligned} \right\} x \in \Omega \setminus \Gamma, \quad (1.6)$$

$$\vec{u}^+(x) = \vec{u}^-(x), \quad (1.7)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \right)^+ - \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \right)^- + \frac{1}{\nu} [p^+(x) - p^-(x)] \vec{n}(x) = C_{\Gamma}(x) [\vec{u}(x) - \vec{U}(x)], \quad (1.7')$$

$$\vec{u}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.8)$$

где знаками $+$ и $-$ отмечены предельные значения вектор-функций с разных сторон от Γ , $n = n(x)$ — нормаль к Γ , направленная в сторону, которой соответствует знак $+$; матрица $C_{\Gamma}(x)$ определена условием 2. При этом сходимость имеет место в метриках $C^k(\bar{\Omega}')$, где $k \geq 0$, а Ω' — любая подобласть в $\Omega \setminus \Gamma$, лежащая на положительном расстоянии от Γ и $\partial\Omega$.

Замечание. Учитывая (1.7), легко проверить, что условие сопряжения (1.7') можно записать еще в таком виде:

$$\vec{t}^+(\vec{u}) - \vec{t}^-(\vec{u}) = \nu C_\Gamma [\vec{u} - \vec{U}],$$

где

$$\vec{t}(\vec{u}) = p\vec{n} + \nu \sum_{k,l} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \cos(\vec{n}, x_l) \vec{e}^k$$

— вектор напряжений на Γ .

§ 2. Основная схема доказательства теорем 1 и 2

Рассмотрим в области Ω множество гладких, финитных и соленоидальных вектор-функций и введем в нем скалярное произведение

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\vec{H}} = \int_{\Omega} (\nabla \vec{u}, \nabla \vec{v}) dx = \sum_{k,l=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial v_l}{\partial x_k} dx. \quad (2.1)$$

Пополняя это множество по норме, соответствующей скалярному произведению (2.1), получим гильбертово пространство вектор-функций из $\vec{W}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющих в Ω уравнению $\operatorname{div} \vec{u}(x) = 0$.

Это пространство будем обозначать через $\vec{H}(\Omega)$.

Выделим в $\vec{H}(\Omega)$ подпространства $\vec{H}(\Omega, F_i^{(s)})$ ($i = 1, 2, \dots, s$) и $\vec{H}(\Omega, F^{(s)})$, определив их как замыкание (в норме $\vec{W}_2^1(\Omega)$) множества вектор-функций из $\vec{H}(\Omega)$, равных нулю соответственно в окрестностях множеств $F_i^{(s)}$ ($i = 1, 2, \dots, s$) и $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^s F_i^{(s)}$.

Обозначим через $\vec{H}_\Delta(\Omega, F_i^{(s)})$ ($i = 1, \dots, s$) и $\vec{H}_\Delta(\Omega, F^{(s)})$ их ортогональные дополнения в $\vec{H}(\Omega)$. Таким образом, справедливы ортогональные разложения

$$\vec{H}(\Omega) = \vec{H}_\Delta(\Omega, F_i^{(s)}) \oplus \vec{H}(\Omega, F_i^{(s)}) = \vec{H}_\Delta(\Omega, F^{(s)}) \oplus \vec{H}(\Omega, F^{(s)}). \quad (2.2)$$

Согласно определению подпространств $\vec{H}(\Omega, F_i^{(s)})$ ($i = 1, 2, \dots, s$) и $\vec{H}_\Delta(\Omega, F^{(s)})$, имеет место равенство $\vec{H}(\Omega, F^{(s)}) = \bigcap_{i=1}^s \vec{H}(\Omega, F_i^{(s)})$

и, следовательно, в силу (2.2) $\vec{H}_\Delta(\Omega, F^{(s)})$ есть линейная оболочка подпространств $\vec{H}(\Omega, F_i^{(s)})$ ($i = 1, 2, \dots, s$), т. е.

$$\vec{H}_\Delta(\Omega, F^{(s)}) = [\vec{H}_\Delta(\Omega, F_i^{(s)})]_1^s.$$

Из результатов работы [1] вытекает, что подпространство $\overset{\circ}{H}_{\Delta}(\Omega, F^{(s)})$ совпадает с множеством вектор-функций из $\overset{\circ}{H}(\Omega)$, удовлетворяющих в области $\Omega \setminus F^{(s)} (\Omega \setminus F_i^{(s)})$ уравнению $\nabla \vec{u} = \text{grad } p$, где $p = p^{(s)}(x)$ — однозначная гладкая функция в $\Omega \setminus F^{(s)} (\Omega \setminus F_i^{(s)})$. Следовательно, решение $\vec{u}^{(s)}(x)$ задачи (1.1) — (1.2) (продолженное на множество $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^s F_i^{(s)}$ равенством $\vec{u}^{(s)}(x) = \vec{U}(x)$) является проекцией вектор-функции $\vec{U}(x)$ на под-

пространство $\overset{\circ}{H}_{\Delta}(\Omega, F^{(s)}) = [\overset{\circ}{H}_{\Delta}(\Omega, F_i^{(s)})]_1^s$. Поэтому поставленную в предыдущем параграфе задачу можно сформулировать в следующем виде: найти условия на подпространства $\overset{\circ}{H}_{\Delta}(\Omega, F_i^{(s)})$ ($i = 1, 2, \dots, s$), при которых последовательность $\{P_{\Delta}^{(s)} \vec{\psi}, s = 1, 2, \dots\}$, где $P_{\Delta}^{(s)}$ — оператор ортогонального проектирования на их линейную оболочку $\overset{\circ}{H}_{\Delta}(\Omega, F^{(s)})$, для любой вектор-функции $\vec{\psi} = \vec{\psi}(x) \in \overset{\circ}{H}(\Omega)$ сходится (слабо в $\overset{\circ}{H}(\Omega)$) к некоторому пределу $\vec{u} = \vec{u}(x) \in \overset{\circ}{H}(\Omega)$, и найти этот предел.

Воспользуемся одним общим результатом, полученным в работе [2]. Пусть H — гильбертово пространство (со скалярным произведением (u, v)), $H_i^{(s)}$ ($i = 1, 2, \dots, s$) — подпространства в нем, $H_i^{\perp(s)}$ — их ортогональные дополнения, а M — некоторое всюду плотное множество в H . Обозначим через $P_i^{(s)}$ и $P^{(s)}$ соответственно операторы ортогонального проектирования на подпространства $H_i^{(s)}$ и их линейную оболочку $[H_i^{(s)}]_1^s$. Будем предполагать, что выполняются следующие условия I—II, геометрический смысл которых выяснен в [2].

1. Существуют линейные ограниченные операторы $B_i^{(s)}$, такие что

$$a) (B_i^{(s)} u, B_j^{(s)} v) = 0, i \neq j \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in H;$$

$$b) \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^s \|P_i^{(s)} u - B_i^{(s)}\|^2 = 0, \quad \forall \vec{u} \in M;$$

$$c) P_j^{(s)} B_i^{(s)} = P_i^{(s)} \delta_{ij};$$

d) если последовательность векторов $v^{(s)}$ из подпространства $\bigcap_{i=1}^s H_i^{\perp(s)} = H \setminus [H_i^{(s)}]_1$ слабо сходится к вектору v , то

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^s (B_i^{(s)} \vec{u}, \vec{v}^{(s)}) < c \|u\| \|v\|, \quad \forall u \in M;$$

$$e) \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^s (B_i^{(s)} u, v) = 0, \quad \forall u, v \in M.$$

$$II) \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^s \|P_i^{(s)} u\|^2 = \Phi(u), \quad \forall u \in M,$$

где $\Phi(u) = \Phi(u, u)$, а $\Phi(u, v)$ — билинейный непрерывный функционал в $\vec{H}$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Если выполняются условия I—II, то для любого вектора $\psi \in H$ последовательность $\{P^{(s)}\psi, s = 1, 2, \dots\}$ слабо сходится к вектору $v \in H$, на котором достигается минимум функционала $\Psi(v) = \|v\|^2 + \Phi(\psi - v)$.

В § 3 мы покажем, что если выполнены условия теорем 1 или 2 (§ 1), то выполняются условия I—II для $H = \vec{H}^{\circ}(\Omega)$, $[H_i^{(s)}]_1 = \vec{H}^{\circ}(\Omega, F^{(s)})$, причем билинейный функционал $\Phi(\vec{u}, \vec{v})$ при объемном и поверхностном распределении множеств $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^s F_i^{(s)}$ определяется соответственно равенствами

$$\Phi(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} (\vec{C}\vec{u}, \vec{v}) dx = \int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^n C^{kl}(x) u_l(x) u_k(x) dx,$$

$$\Phi(u, v) = \int_{\Gamma} (C_{\Gamma} \vec{u}, \vec{v}) d\Gamma = \int_{\Gamma} \sum_{k,l=1}^n C_{\Gamma}^{kl} u_l(x) u_k(x) d\Gamma.$$

Таким образом, согласно приведенной выше теореме последовательность $\{\vec{u}^{(s)}(x) \equiv P_{\Delta}^{(s)} \vec{U}(x), s \rightarrow \infty\}$ сходится слабо в $\vec{H}^{\circ}(\Omega)$

к вектор-функции $\vec{u}(x) \in \vec{H}^{\circ}(\Omega)$, которая при объемном распределении $F^{(s)}$ доставляет минимум функционалу

$$\Psi(\vec{u}) = \int_{\Omega} \{|\nabla \vec{u}|^2 + (C[\vec{U} - \vec{u}], \vec{U} - \vec{u})\} dx.$$

Учитывая симметричность матрицы $C = C(x)$, отсюда обычным образом находим, что для любой вектор-функции $\vec{\zeta} \in \vec{H}^{\circ}(\Omega)$ выполняется равенство

$$\int_{\Omega} \{(\nabla \vec{u}, \nabla \vec{\zeta}) + (C\vec{u}, \vec{\zeta}) - (C\vec{U}, \vec{\zeta})\} dx = 0. \quad (2.3)$$

Пусть $\vec{u} \in W_2^2(\Omega)$, тогда с помощью интегрирования по частям из (2.3) получаем

$$\int_{\Omega} (-\Delta \vec{u} + C\vec{u} - C\vec{U}, \vec{\zeta}) dx = 0.$$

Теперь воспользуемся известным ортогональным разложением векторного пространства $L_2(\Omega)$ (см., например, [1])

$$L_2(\Omega) = \overset{\circ}{J}(\Omega) \oplus G(\Omega),$$

где $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ — замыкание в $L_2(\Omega)$ множества финитных в Ω и соленоидальных векторов, а $G(\Omega)$ состоит из градиентов однозначных функций из $W_2^1(\Omega)$. Так как $\vec{\zeta}(x)$ — произвольная вектор-функция из $\overset{\circ}{H}(\Omega) = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \cap \{\vec{u} : \operatorname{div} \vec{u} = 0\}$, а $\overset{\circ}{H}(\Omega)$ плотно в $\overset{\circ}{J}(\Omega)$, то отсюда вытекает, что $\vec{u} = \vec{u}(x)$ удовлетворяет в Ω уравнению (1.4). Поэтому равенство (2.3) вместе с условием $\vec{u} \in \overset{\circ}{H}(\Omega)$ естественно принято за определение обобщенного решения краевой задачи (1.4) — (1.5). При этом, если вектор-функция $\vec{U}(x)$ и матрица $C(x)$ обладают достаточной гладкостью, то пользуясь методами работы [1], можно показать, что обобщенное решение этой задачи будет классическим. Наконец, заметим, что в силу теоремы вложения из слабой сходимости в пространстве $\overset{\circ}{H}(\Omega)$ вытекает сильная сходимость в $L_2(\Omega)$.

Перейдем к поверхностному распределению множеств $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^s F_i^{(s)}$. В этом случае предельная вектор-функция $\vec{u}(x)$ доставляет минимум функционалу

$$\Psi(\vec{u}) = \int_{\Omega} |\nabla \vec{u}|^2 dx + \int_{\Gamma} (C_{\Gamma} [\vec{U} - \vec{u}], \vec{U} - \vec{u}) d\Gamma.$$

Отсюда следует, что для любой вектор-функции $\vec{\zeta} \in \overset{\circ}{H}(\Omega)$ имеет место равенство

$$\int_{\Omega} (\nabla \vec{u}, \nabla \vec{\zeta}) dx - \int_{\Gamma} (C_{\Gamma} [\vec{U} - \vec{u}], \vec{\zeta}) d\Gamma = 0, \quad (2.4)$$

которое совместно с условием $\vec{u} \in \overset{\circ}{H}(\Omega)$ можно принять за определение обобщенного решения задачи (1.6) — (1.8).

Действительно, если вектор-функция $\vec{u}(x)$ достаточно гладкая, например, $\vec{u}(x) \in W_2^2(\Omega \setminus \Gamma)$, то с помощью интегрирования по частям получаем

$$-\int_{\Omega \setminus \Gamma} (\Delta \vec{u}, \vec{\zeta}) dx - \int_{\Gamma} \left(\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \right]^+ - \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \right]^- - C_{\Gamma} [\vec{u} - \vec{U}], \vec{\zeta} \right) d\Gamma = 0.$$

Отсюда, выбирая $\vec{\zeta} \in \dot{H}(\Omega)$ равным нулю в окрестности Γ , находим, что $\vec{u} = \vec{u}(x)$ удовлетворяет в области $\Omega \setminus \Gamma$ уравнению (1.7), где $p(x)$ определено в каждой связной компоненте $\Omega \setminus \Gamma$ с точностью до постоянного слагаемого. Поэтому для произвольного $\vec{\zeta} \in \dot{H}(\Omega)$ имеем

$$-\frac{1}{v} \int_{\Omega \setminus \Gamma} (\text{grad } p, \vec{\zeta}) dx - \int_{\Gamma} \left[\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \right]^+ - \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \right]^- - C_{\Gamma} [\vec{u} - \vec{U}], \vec{\zeta} \right] d\Gamma = 0,$$

откуда, учитывая, что $\text{div } \vec{\zeta} = 0$, с помощью интегрирования по частям получаем

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{1}{v} [p^+ - p^-] \vec{n} + \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \right]^+ - \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \right]^- - C_{\Gamma} [\vec{u} - \vec{U}], \vec{\zeta} \right) d\Gamma = 0. \quad (2.5)$$

Если поверхность (контур в R_2) Γ не замкнута, то вектор-функция $\vec{\zeta} = \vec{\zeta}(x)$ на Γ может быть произвольной и, следовательно, из (2.5) вытекает равенство (1.7)'. Если же Γ — замкнутая поверхность, то в силу условия $\text{div } \vec{\zeta} = 0$ интеграл от нормальной составляющей $\vec{\zeta}$ по Γ должен быть равен нулю. Поэтому из (2.5) вытекает равенство (1.7)' с точностью до слагаемого $\text{const} \cdot \vec{n}$. Но так как в каждой связной компоненте $\Omega \setminus \Gamma$ давление $p(x)$ определено лишь с точностью до постоянного слагаемого, то $\text{const} \cdot \vec{n}$ можно включить, например, в $\frac{1}{v} p^+ \vec{n}$.

Таким образом, равенство (1.7)' выполняется во всех случаях. Приведенные рассуждения показывают, что при поверхностном распределении $F^{(s)}$ предельная вектор-функция $\vec{u}(x)$ является обобщенным решением краевой задачи (1.6) — (1.8). Остается убедиться, что в любой подобласти $\Omega' \subset \Omega \setminus \Gamma$, лежащей на положительном расстоянии от Γ и $\partial\Omega$, $\vec{u}^{(s)}(x)$ сходится к $\vec{u}(x)$ равномерно.

Погрузим Ω' в более широкую область Ω'' такую, чтобы ее граница $\partial\Omega''$ находилась на положительных расстояниях от Γ , $\partial\Omega$ и $\partial\Omega'$. Тогда в любой точке $x \in \Omega'$ при достаточно больших s для разности решений задач (1.1) — (1.2) и (1.6) — (1.8) можно получить представление (см. [1], гл. 3, § 4):

$$\vec{u}^{(s)}(x) - \vec{u}(x) = \int_{\Omega' \setminus \Omega''} L(x, y) [\vec{u}^{(s)}(y) - \vec{u}(y)] dy,$$

где $L(x, y)$ — матрица, элементы которой бесконечно дифференцируемые функции от x при $x \in \Omega'$, а $y \in \Omega'' \setminus \Omega'$. Отсюда, учитывая, что $\vec{u}^{(s)}(x)$ сходится к $\vec{u}(x)$ слабо в $\dot{H}(\Omega)$ и, значит,

сильно в $L_2(\Omega)$, заключаем, что сходимость равномерная (вместе с любыми производными) в подобластях Ω' , лежащих на положительном расстоянии от Γ и $\partial\Omega$.

Таким образом, теоремы 1 и 2 будут доказаны, если установить справедливость условий I—II. Это будет сделано в § 4.

§ 3. Некоторые вспомогательные оценки

Получим необходимые в дальнейшем оценки для решения $\vec{v}(x) = \vec{v}^{(i)}(x)$ задачи (1.3').

Лемма 1. Пусть точка x принадлежит шару $T_b = T_b(F_i^{(s)})$ ($b < a$) и находится на расстоянии $\rho = \rho(x)$ от минимального шара $T(F_i^{(s)})$ ($F_i^{(s)} \subset T(F_i^{(s)})$), причем при $n = 3$ $\rho \geq c_1 d_i^{(s)}$, а при $n = 2$

$$\rho \geq \exp(-c_1 \sqrt{|\ln d_i^{(s)}|}),$$

где $d_i^{(s)}$ — диаметр множества $F_i^{(s)}$, а $c_1 = \text{const}$ ($c_1 > 0$). Тогда для любой компоненты $v_l(x)$ решения задачи (1.3') в этой точке справедливы неравенства:

$$|D^\alpha v_l(x)| \leq A \frac{d_i^{(s)}}{\rho^{|\alpha|+1}}, \quad n=3, \quad |\alpha|=0, 1, 2;$$

$$|D^\alpha v_l(x)| \leq \begin{cases} A \frac{|\ln \rho| + 1}{|\ln d_i^{(s)}|}, & n=2; \quad |\alpha|=0; \\ A \frac{1}{\rho^{|\alpha|} |\ln d_i^{(s)}|}, & n=2, \quad |\alpha|=1, 2, \end{cases}$$

где постоянные A не зависят от $d_i^{(s)}$ и ρ .

Доказательство леммы приведем для $n=3$. Предполагая, что $\text{div} \vec{v} = 0$ и $\text{div} \vec{u} = 0$, с помощью интегрирования по частям получаем следующие формулы Грина:

$$\int_{T_a \setminus F} (\Delta \vec{v} - \text{grad } p, \vec{u}) dx = \int_{T_a \setminus F} (\nabla \vec{v}, \nabla \vec{u}) dx + \int_{S_a \cup S} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial n} - p \vec{n}, \vec{u} \right) dS, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \int_{T_a \setminus F} \{ (\Delta \vec{v} - \text{grad } p, \vec{u}) - \Delta \vec{u} - \text{grad } q, \vec{v} \} dx = \\ & = \int_{S_a \cup S} \left\{ \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial n} - p \vec{n}, \vec{u} \right) - \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} - q \vec{n}, \vec{v} \right) \right\} dS, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\vec{n} = \vec{n}(x)$ — внешняя нормаль к границе области $T_a \setminus F$ ($F = F_i^{(s)}$), $S_a = \partial T_a$, $S = \partial F$.

Обозначим через $\{G_{ij}(x, \xi, q_j(x, \xi))\}_{i,j=1,2,3}$ матрицу Грина задачи (1.3') в области $T_a = T_a(F)$, т. е. матрицу-функцию, определенную в $T_a \times T_a$ и удовлетворяющую по $x \in T_a$ системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \Delta_x G_{ij}(x, \xi) - \frac{\partial}{\partial x_i} q_j(x, \xi) &= \delta(x, \xi) \delta_{ij} \\ \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} G_{ij}(x, \xi) &= 0 \end{aligned} \right\} x, \xi \in T_a$$

и граничным условиям $G_{ij}(x, \xi) = 0$ на сфере S_a .

Известно, что такая матрица существует и обладает следующими свойствами: 1) при $x \neq \xi$ и $\xi \in T_b$ ($b < a$) производные $D_x^\alpha D_\xi^\beta G_{ij}(x, \xi)$ непрерывны по $(x, \xi) \in T_a \times T_b$ и имеют вид

$$A(x, \xi) |x - \xi|^{-1-|\alpha|-|\beta|},$$

где $A(x, \xi)$ — ограничены; 2) для любого столбца $\vec{G}_{ij}(x, \xi)$ матрицы $\{G_{ij}(x, \xi)\}$ справедливо представление

$$\vec{G}_j(x, \xi) = \text{rot}_x \vec{\tilde{G}}_j(x, \xi),$$

где векторы $\vec{\tilde{G}}_j(x, \xi)$ при $x \neq \xi$ имеют непрерывные производные

$$D_x^\alpha D_\xi^\beta \vec{\tilde{G}}_j(x, \xi)$$

вида

$$B(x, \xi) |x - \xi|^{-1-|\alpha|-|\beta|},$$

причем $B(x, \xi)$ ограничены при

$$(x, \xi) \in T_a \times T_b \quad (b < a).$$

Пусть в формуле (3.2) $\vec{v}(x)$ — решение задачи (1.3'), а $\vec{u}(x) = \vec{G}_j(x, \xi)$. Тогда, учитывая, что $D^\alpha \vec{v}(x) = D_x^\alpha \vec{G}_j(x, \xi) = 0$ при

$x \in S_a$ ($|\alpha| = 0, 1$) и $\vec{v}(x) = \vec{e}^k, \frac{\partial \vec{v}(x)}{\partial n} = 0$ при $x \in S$ получаем следующую

равенство для j -й компоненты вектора $\vec{v}(x) = \vec{v}^{(j)}(x)$:

$$\begin{aligned} v_j(\xi) &= \int_S \left(\frac{\partial \vec{v}(x)}{\partial n} - p(x) \vec{n}(x), \vec{G}_j(x, \xi) \right) dS_x - \\ &- \int_S \left(\frac{\partial \vec{G}_j(x, \xi)}{\partial n_x} - q_j(x, \xi) \vec{n}(x), \vec{e}^k \right) dS_x. \end{aligned}$$

Последний интеграл равен нулю, что вытекает из формулы (3.1), если ее применить к области $F \setminus S$ и положить $\vec{v}(x) = \vec{e}^k$, а $\vec{u}(x) = \vec{G}_I(x, \xi)$, $\xi \in F$. Следовательно, при любом $\xi \in T_b \setminus F$ и $|\alpha| \leq 2$

$$D_{\xi}^{\alpha} v_I(\xi) = \int_S \left(\frac{\partial \vec{v}(x)}{\partial n} - p(x) \vec{n}(x), D_{\xi}^{\alpha} \vec{G}_I(x, \xi) \right) dS_x. \quad (3.3)$$

Введем вектор-функцию

$$\vec{u}_I^{\alpha}(x, \xi) = \operatorname{rot}_x [D_{\xi}^{\alpha} \vec{G}_I(x, \xi) \varphi^{(s)}(x)],$$

где $\varphi^{(s)}(x) = \varphi\left(\frac{r - a_i^{(s)}}{d_i^{(s)}}\right)$; $\varphi(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная 1 при $t \leq 0$ и 0 при $t \geq \frac{c_1}{2}$, $r = r(x)$ — расстояние от точки x до центра минимального шара $T(F_i^{(s)})$ радиуса $a_i^{(s)}$.

Очевидно, при $x \in S \subset T(F_i^{(s)})$

$$\vec{u}_I^{\alpha}(x, \xi) = D_{\xi}^{\alpha} \vec{G}_I(x, \xi), \quad (3.4)$$

и, если точка ξ находится на расстоянии $\rho \geq c_1 d_i^{(s)}$ от $T(F_i^{(s)})$, то вектор-функция $\vec{u}_I^{\alpha}(x, \xi)$ — бесконечно дифференцируема по x в шаре $T_a = T_a(F_i^{(s)})$ и равна нулю при

$$r(x) \geq a_i^{(s)} + \frac{c_1}{2} d_i^{(s)}.$$

Пусть в формуле (3.1) $\vec{v} = \vec{v}^{k(t)}(x)$ — решение задачи (1.3'), а $\vec{u} = \vec{u}_I^{\alpha}(x, \xi)$. Тогда, учитывая (3.3), (3.4), получаем

$$D_{\xi}^{\alpha} v_I(\xi) = - \int_{T_a \setminus F} (\nabla \vec{v}(x), \nabla \vec{u}_I^{\alpha}(x, \xi)) dx$$

и, следовательно,

$$|D_{\xi}^{\alpha} v_I(\xi)| \leq \left\{ \int_{T_a} |\nabla \vec{v}(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_{T_a \setminus F} |\nabla \vec{u}_I^{\alpha}(x, \xi)|^2 dx \right\}^{1/2}. \quad (3.5)$$

Для оценки первого сомножителя в (3.5) заметим, что $\vec{v} = \vec{v}^{k(t)}$ минимизирует функционал (1.3) в классе $H^k(F_i^{(s)})$. Нетрудно проверить, что вектор

$$\vec{w}(x) = \operatorname{rot}(\vec{e}^k(x) \varphi^{(s)}(x)),$$

где

$$\varphi^{(s)}(x) = \varphi\left(\frac{r - a_i^{(s)}}{d_i^{(s)}}\right), \quad \vec{e}^1 = \{0, 0, x_2\}, \quad \vec{e}^2 = \{x_3, 0, 0\},$$

$\vec{e}^3 = \{0, x_1, 0\}$ принадлежит классу $H^k(F_i^{(s)})$. Следовательно,

$$\int_{T_a} |\nabla \vec{v}|^2 dx \leq \int_{T_a} |\nabla \vec{w}|^2 dx \leq A d_i^{(s)}, \quad A - \text{const.} \quad (3.6)$$

Оценим второй сомножитель в (3.5). В силу свойств функции $\varphi^{(s)}(x)$ можно рассматривать лишь те точки x , которые находятся на расстоянии $\rho(x) \leq \frac{c_1}{2} d_i^{(s)}$ от шара $T(F_i^{(s)})$.

А так как по условию $\rho(\xi) \geq c_1 d_i^{(s)}$, то

$$|x - \xi| \geq \rho(\xi) - \rho(x) \geq \frac{\rho(\xi)}{2} = \frac{\rho}{2}.$$

Поэтому, учитывая отмеченные выше свойства матрицы Грина $\{G_{ij}(x, \xi)\}$, находим

$$\int_{\tilde{\mathcal{V}}_2 F} |\nabla u_j^a(x, \xi)|^2 dx \leq A \sum_{k=0}^2 \left\{ \frac{1}{\rho^{2(|\alpha|+2-k)}} \sum_{|\beta|=k} \int_{r < a_i^{(s)} + \frac{c_1}{2} d_i^{(s)}} |D^\beta \varphi^{(s)}|^2 dx \right\}.$$

Поскольку

$$\int_{r < a_i^{(s)} + \frac{c_1}{2} d_i^{(s)}} |D^\beta \varphi^{(s)}|^2 dx \leq A [d_i^{(s)}]^{3-2|\beta|},$$

и $\rho \geq c_1 d_i^{(s)}$, отсюда следует

$$\int_{\tilde{\mathcal{V}}_1 F} |\nabla u_j^a(x, \xi)|^2 dx \leq A \frac{d_i^{(s)}}{\rho^{2(|\alpha|+1)}}. \quad (3.7)$$

Здесь постоянные A не зависят от $d_i^{(s)}$ и ρ (но зависят от c_1 , a и b). Объединяя (3.5) — (3.7), получаем требуемое неравенство при $n = 3$

$$|D^\alpha v_j(\xi)| \leq A \frac{d_i^{(s)}}{\rho^{1+|\alpha|}}.$$

При $n = 2$ лемма доказывается аналогично, но всюду вместо функции $\varphi^{(s)}(x)$ используется функция

$$\psi^{(s)}(x, \xi) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{r(x)}{\rho(x)}\right) |\ln d_i^{(s)}|^{-1} \ln \frac{1}{r(x)}, & r(x) \geq d_i^{(s)} \\ 1, & r(x) < d_i^{(s)}, \end{cases}$$

где $\varphi(t)$ — гладкая функция, равная 1 при $t \leq \frac{1}{4}$ и 0 при $t \geq \frac{1}{2}$. Лемма доказана.

Продолжим решение $\vec{v}(x) = \vec{v}^{(k)}(x)$ задачи (1.3') на множество $F_i^{(s)}$, полагая $\vec{v}(x) = \vec{e}^k$ при $x \in F_i^{(s)}$.

Тогда, используя лемму 1, нетрудно получить такие неравенства:

$$\int_{T_b} (D^{\alpha} \vec{v}, D^{\alpha} \vec{v}) dx \leq \begin{cases} A \{ (d_i^{(s)})^2 + (d_i^{(s)})^{3-2|\alpha|} \}, & n=3 \\ A \{ |\ln d_i^{(s)}|^{-2} + |\ln d_i^{(s)}|^{-1} e^{-2(1-|\alpha|)} \sqrt{|\ln d_i^{(s)}|} \}, & n=2 \end{cases} \quad (3.8)$$

где $T_b = T_b(F_i^{(s)})$ — шар радиуса $b < a$, $|\alpha| = 0, 1$, постоянная A не зависит от $d_i^{(s)}$.

Нам понадобится еще следующая теорема о представлении соленоидальных векторов [3].

Пусть G некоторая область в R_3 , являющаяся диффеоморфным образом шара, а $\vec{J}(\Omega)$ — подпространство в $L_2(\Omega)$, образованное замыканием множества гладких соленоидальных векторов. Тогда для любого $\vec{u}(x) \in J(\Omega)$ справедливо представление

$$\vec{u}(x) = \text{rot } \vec{u}(x),$$

где $\vec{u} \in W_2^1(G)$, $\text{div } \vec{u} = 0$, $\vec{u}_n|_{\partial G} = 0$ и имеет место неравенство

$$\|\vec{u}\|_{W_2^1(G)} \leq C \|\vec{u}\|_{L_2(G)}$$

с постоянной C , зависящей только от области G . Вектор $\vec{u}(x)$ этими условиями определяется однозначно.

Пусть $G = T_a$ — шар радиуса a . Тогда, пользуясь приведенной теоремой и соображениями подобия, получаем оценки

$$\|\vec{u}\|_{L_2(T_a)} \leq Ca \|\vec{u}\|_{L_2(T_a)}, \quad (3.9)$$

$$\|D\vec{u}\|_{L_2(T_a)} \leq C \|u\|_{L_2(T_a)}, \quad (3.10)$$

где постоянная C не зависит от $a > 0$ и $\vec{u} \in J(T_a)$.

§ 4. Проверка условий теоремы 3

Будем рассматривать случай $n = 3$. В качестве плотного множества M в $\vec{H}(\Omega)$ выберем множество дважды непрерывно дифференцируемых соленоидальных и финитных в Ω вектор-функций. Пусть $\vec{u}(x) \in M$. Определим операторы $B_i^{(s)}$ формулой

$$B_i^{(s)} \vec{u} = \text{rot} \left\{ \sum_{k=1}^3 \vec{v}^{k(i)}(x) u_k(x^i) \varphi_i^{(s)}(x) \right\} + \text{rot} \left\{ \vec{u}(x) \tilde{\varphi}_i^{(s)}(x) \right\}, \quad (4.1)$$

где

$$\varphi_i^{(s)}(x) = \varphi\left(\frac{r - a_i^{(s)}}{r_i^{(s)}}\right); \quad \widehat{\varphi}_i^{(s)}(x) = \varphi\left(\frac{r - a_i^{(s)}}{\widehat{r}_i^{(s)}}\right);$$

r — расстояние от x до центра x^i минимального шара $T(F_i^{(s)})$ радиуса $a_i^{(s)}$,

$$\widehat{r}_i^{(s)} = \min\{r_i^{(s)}, (a_i^{(s)})^{2/3}\},$$

$\varphi(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная 1 при $t \leq \frac{1}{4}$ и 0 при $t \geq \frac{1}{2}$; вектор-функции $\vec{v}^{k(i)}(x)$ и $\vec{u}(x)$ определяются равенствами

$$\vec{v}^{k(i)}(x) = \text{rot } \vec{v}^{k(i)}(x), \quad x \in T_{a_i^{(s)} + \widehat{r}_i^{(s)}};$$

$$\vec{u}(x) - \vec{u}(x^i) = \text{rot } \vec{u}(x), \quad x \in T_{a_i^{(s)} + \widehat{r}_i^{(s)}}, \quad (4.2)$$

$\vec{v}^{k(i)}(x)$ — решение задачи (1.3').

Очевидно, $B_i^{(s)} \vec{u} \in \mathring{H}(\Omega)$. Далее, так как носители функций

$$\varphi_i^{(s)}(x), \quad \varphi_j^{(s)}(x) \quad \text{и} \quad \widehat{\varphi}_i^{(s)}(x), \quad \widehat{\varphi}_j^{(s)}(x) \quad (i \neq j),$$

не пересекаются и в некоторой окрестности

$$F_i^{(s)} \varphi_i^{(s)}(x) \equiv \widehat{\varphi}_i^{(s)}(x) \equiv 1,$$

то в силу свойств $\vec{v}^{k(i)}$

$$B_i^{(s)} \vec{u} \Big|_{x \in F_i^{(s)}} = \delta_{ij} \left\{ \sum_{k=1}^3 \vec{v}^{k(i)}(x) u_k(x) + \vec{u}(x) - \vec{u}(x^i) \right\} = \delta_{ij} \vec{u}(x).$$

Отсюда следует, что условия 1a и 1c выполняются. Остановимся еще подробно на проверке условий 1b и 1c. Для определенности будем рассматривать случай объемного распределения $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^s F_i^{(s)}$ в $\Omega \subset R_3$. Пусть $\vec{u} = \vec{u}(x)$ произвольная

вектор-функция из M . Согласно § 2 ее проекция $\vec{u}^t = P_i^{(s)} \vec{u}$ на подпространство $\vec{H}_\Delta(\Omega, F_i^{(s)})$ минимизирует функционал

$$\|\vec{u}^{(t)}\|_H^2 = \int_{\Omega} (\nabla \vec{u}^{(t)}, \nabla \vec{u}^{(t)}) dx$$

в классе векторов из $\mathring{H}(\Omega)$, равных $\vec{u}(x)$ на $F_i^{(s)}$. Представим $\vec{u}^{(t)} = P_i^{(s)} \vec{u}$ и в виде

$$P_i^{(s)} \vec{u} = B_i^{(s)} \vec{u} + \vec{w}^{(t)},$$

где операторы $B_i^{(s)}$ определяются равенством (4.1). Тогда вектор-функция $\vec{w}^{(i)} = \vec{w}^{(i, s)}(x)$ должна минимизировать функционал

$$U_i(\vec{w}) = \|\vec{w}\|_H^2 + 2(B_i^{(s)}\vec{u}, \vec{w})_{\vec{H}}$$

в классе $\mathring{H}(\Omega, F_i^{(s)})$ векторов, равных нулю на $F_i^{(s)}$.
Так как

$$U_i(\vec{w}^{(i)}) \leq U_i(0) = 0,$$

то

$$\|\vec{w}^{(i)}\|_H^2 \leq 2|(B_i^{(s)}\vec{u}, \vec{w}^{(i)})_{\vec{H}}|. \quad (4.3)$$

Учитывая (4.1), (4.2), запишем

$$(B_i^{(s)}\vec{u}, \vec{w}^{(i)})_{\vec{H}} = I_1^{(i)}(\vec{u}, \vec{w}^{(i)}) + I_2^{(i)}(\vec{u}, \vec{w}^{(i)}) + \\ + I_3^{(i)}(\vec{u}, \vec{w}^{(i)}) + I_4^{(i)}(\vec{u}, \vec{w}^{(i)}), \quad (4.4)$$

где

$$\left\{ \begin{aligned} I_1^{(i)}(\vec{u}, \vec{w}^{(i)}) &= \sum_{k=1}^3 \int (\nabla \{v^{k(i)}\varphi_i^{(s)}\}, \nabla \vec{w}^{(i)}) u_k(x^i) dx; \\ I_2^{(i)}(\vec{u}, \vec{w}^{(i)}) &= \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} (\nabla [\text{grad } \varphi_i^{(s)} \times \vec{v}^{k(i)}], \nabla \vec{w}^{(i)}) u_k(x^i) dx; \\ I_3^{(i)}(\vec{u}, \vec{w}^{(i)}) &= \int_{\Omega} (\nabla \{(\vec{u} - \vec{u}(x^i)), \varphi_i^{(s)}\}, \nabla \vec{w}^{(i)}) dx; \\ I_4^{(i)}(\vec{u}, \vec{w}^{(i)}) &= \int_{\Omega} (\nabla [\text{grad } \varphi_i^{(s)} \times \vec{u}], \nabla \vec{w}^{(i)}) dx. \end{aligned} \right. \quad (4.4')$$

Введем обозначения

$$\Omega_1^{(i)} = \left\{ x : |x - x^i| \leq a_i^{(s)} + \frac{r_i^{(s)}}{4} \right\}, \\ \Omega_2^{(i)} = \left\{ x : a_i^{(s)} + \frac{r_i^{(s)}}{4} < |x - x^i| < a_i^{(s)} + \frac{r_i^{(s)}}{2} \right\}$$

и, учитывая, что

$$\vec{w}^{(i)}(x) \in \mathring{H}(\Omega, F_i^{(s)}),$$

преобразуем первое слагаемое в (4.4) к виду

$$I_1^{(i)}(\vec{u}, \vec{w}^{(i)}) = \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega_2^{(i)} \cup \Omega_1^{(i)} \setminus F_i^{(s)}} \varphi_i^{(s)} (\Delta \vec{v}^{k(i)}, \vec{w}^{(i)}) u_k(x^i) dx + \\ + \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega_2^{(i)}} \Delta \varphi_i^{(s)} (\vec{v}^{k(i)}, \vec{w}^{(i)}) u_k(x^i) dx + \quad (4.5)$$

$$+ \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega_2^{(i)}} ((\nabla \vec{v}^{k(i)}, \nabla \varphi_i^{(s)}), \vec{w}^{(i)}) u_k(x^i) dx = I_{11}^{(i)} + I_{12}^{(i)} + I_{13}^{(i)}. \quad (4.5)$$

Согласно условию 3 теоремы 1 $r_i^{(s)} \geq \text{const} (d_i^{(s)})^{2/3}$ и, следовательно, $\text{mes } \Omega_2^{(i)} = \text{const} (r_i^{(s)})^3$. Поэтому в силу леммы 1 и свойств функций $\varphi_i^{(s)}$ имеем

$$|I_{11}^{(i)}| + |I_{12}^{(i)}| \leq C \frac{d_i^{(s)}}{(r_i^{(s)})^{3/2}} \left\{ \int_{\Omega_2^{(i)}} |\vec{w}^{(i)}|^2 dx \right\}^{1/2}, \quad (4.6)$$

где постоянная C зависит только от $\vec{u} \in M$.

Далее, так как $\vec{v}^{k(i)}(x)$ вне $F_i^{(s)}$ удовлетворяет уравнению $\Delta \vec{v}^{k(i)} = \text{grad } p^k$ и функция $p^k = p^k(x)$ определена с точностью до постоянного слагаемого, то

$$p^k(x) = \int_{\vec{x}^i}^x (\text{grad } p^k, d\vec{l}) = \int_{\vec{x}^i}^x (\Delta \vec{v}^{k(i)}, d\vec{l}),$$

где $\vec{x}^i$ — произвольная точка в области $\Omega_2^{(i)}$, а интегрирование ведется по любому контуру, соединяющему точки x и $\vec{x}^i$. Очевидно, если $x \in \Omega_2^{(i)}$, то контур можно выбрать так, чтобы он находился в $\Omega_2^{(i)}$ и длина его не превышала $\text{const } r_i^{(s)}$. Следовательно, используя лемму 1, получаем

$$|p^k(x)| \leq C \frac{d_i^{(s)}}{(r_i^{(s)})^2}, \quad x \in \Omega_2^{(i)}. \quad (4.7)$$

Теперь, учитывая, что $\vec{w}^{(i)} \in \hat{H}(\Omega, F_i^{(s)})$, с помощью интегрирования по частям преобразуем $I_{11}^{(i)}(\vec{u}, \vec{w}^{(i)})$ к виду

$$I_{11}^{(i)}(\vec{u}, \vec{w}^{(i)}) = \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega_2^{(i)}} p^k (\text{grad } \varphi_i^{(s)}, \vec{w}^{(i)}) \vec{u}_k(x^i) dx. \quad (4.8)$$

Отсюда, в силу (4.7) и свойств $\varphi_i^{(s)}$ следует

$$|I_{11}^{(i)}| \leq C \frac{d_i^{(s)}}{(r_i^{(s)})^{3/2}} \left\{ \int_{\Omega_2^{(i)}} |\vec{w}^{(i)}|^2 dx \right\}^{1/2}, \quad (4.9)$$

где C зависит от $\vec{u} \in M$.

Поскольку $\vec{w}^{(i)} \in \hat{H}(\Omega)$ и $\Omega_2^{(i)} \in \Omega$, обычным способом нетрудно получить неравенство

$$\int_{\Omega_2^{(i)}} |\vec{w}^{(i)}|^2 dx \leq C \theta (r_i^{(s)})^2 \int_{\Omega} |\nabla \vec{w}^{(i)}|^2 dx,$$

где $\theta \equiv 1$ при $n = 3$ и $\theta = 1 + |\ln r_i^{(s)}|$ при $n = 2$.

Из этого неравенства и (4.6), (4.7), (4.9) вытекает такая оценка для $I_1^{(t)}(\vec{u}, \vec{w}^{(t)})$:

$$|I_1^{(t)}(\vec{u}, \vec{w}^{(t)})| \leq C \frac{d_l^{(s)}}{(r_l^{(s)})^{1/2}} \|\vec{w}^{(t)}\|_{\vec{H}}. \quad (4.10)$$

Оценим остальные слагаемые в (4.4). В силу неравенства Коши-Буняковского и свойств функции $\varphi_l^{(s)}$ имеем

$$|I_2^{(t)}(\vec{u}, \vec{w}^{(t)})| \leq C \left\{ \sum_{k=1}^3 \frac{1}{(r_l^{(s)})^4} \int_{\Omega_2^{(t)}} |\vec{v}^{k(t)}|^2 dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{(r_l^{(s)})^2} \int_{\Omega_2^{(t)}} |\nabla \vec{v}^{k(t)}|^2 dx \right\} \|\vec{w}^{(t)}\|_H,$$

откуда, пользуясь неравенствами (3.8) — (3.10), находим

$$|I_2^{(t)}(\vec{u}, \vec{w}^{(t)})| \leq C \frac{d_l^{(s)}}{r_l^{(s)}} \|\vec{w}^{(t)}\|_H.$$

Аналогично, учитывая, что $\vec{u}(x) \in M$ и, значит

$$|\nabla \vec{u}| < C, \quad |\vec{u}(x) - \vec{u}(x^t)| \leq C|x - x^t|,$$

в силу свойств функций $\hat{\varphi}_l^{(s)}(x)$ получаем

$$|I_3^{(t)}(\vec{u}, \vec{w}^{(t)})| \leq C d_l^{(s)} \|\vec{w}^{(t)}\|_{\vec{H}}, \quad (4.12)$$

$$|I_4^{(t)}(\vec{u}, \vec{w}^{(t)})| \leq C \left\{ \frac{1}{(\hat{r}_l^{(s)})^4} \int_{\hat{\Omega}_l^{(s)}} |\vec{u}|^2 dx + \frac{1}{(\hat{r}_l^{(s)})^2} \int_{\hat{\Omega}_l^{(s)}} |\nabla \vec{u}|^2 dx \right\}^{1/2} \|\vec{w}^{(t)}\|_{\vec{H}} \leq \\ \leq C \frac{1}{\hat{r}_l^{(s)}} \left\{ \int_{\hat{\Omega}_l^{(s)}} |\vec{u} - \vec{u}(x^t)|^2 dx \right\}^{1/2} \|\vec{w}^{(t)}\|_H \leq C d_l^{(s)} \|\vec{w}^{(t)}\|_H, \quad (4.13)$$

где

$$\hat{\Omega}_l^{(s)} = \text{supp } \hat{\varphi}_l^{(s)} = \left\{ x : |x - x^t| \leq d_l^{(s)} + \frac{\hat{r}_l^{(s)}}{2} \leq \text{const } (d_l^{(s)})^{2/3} \right\}.$$

Объединяя (4.4), (4.5) и (4.11) — (4.13), приходим к окончательной оценке для нормы разности

$$\|\vec{w}^{(t)}\|_H \leq C \left\{ \frac{d_l^{(s)}}{(r_l^{(s)})^{1/2}} + \frac{d_l^{(s)}}{r_l^{(s)}} + d_l^{(s)} \right\},$$

откуда в силу условия 3 теоремы 1 вытекает 1 в.

Перейдем к проверке условия 1 d. Пусть

$$\vec{u} \in M, \text{ а } \vec{v}^{(s)} \in \bigcap_{i=1}^s \mathring{H}(\Omega, F_i^{(s)})$$

и при $s \rightarrow \infty$ слабо сходится к вектору $\vec{v} \in \mathring{H}(\Omega)$. Учитывая (4.1) и (4.2), запишем

$$\sum_{i=1}^s (B_i^{(s)} \vec{u}, \vec{v}^{(s)})_{\vec{H}} = \sum_{i=1}^4 \sum_{i=1}^s I_i^{(t)}(\vec{u}, \vec{v}^{(s)}), \quad (4.14)$$

где $I_i^{(t)}(\vec{u}, \vec{v}^{(s)})$ определены равенствами (4.4') (при $\vec{w} = \vec{v}^{(s)}$). Суммы

$$\sum_{i=1}^s I_i^{(t)}(\vec{u}, \vec{v}^{(s)}) \quad (l \neq 1)$$

оцениваются с помощью неравенств (3.8) — (3.10) точно так же, как в (4.11) — (4.13). При этом только нужно помнить, что области $\Omega_2^{(i)}$ не пересекаются и $\bigcup_{i=1}^s \Omega_2^{(i)} \subset \Omega$. В результате находим

$$\sum_{l=2}^4 \left| \sum_{i=1}^s I_l^{(t)}(\vec{u}, \vec{v}^{(s)}) \right| \leq C \left\{ \sum_{i=1}^s \frac{(d_i^{(s)})^2}{(r_i^{(s)})^2} \right\}^{1/2} \|\vec{v}^{(s)}\|_H,$$

где постоянная C зависит только от $\vec{u} \in M$.

Так как $\vec{v}^{(s)}$ в пространстве $\mathring{H}(\Omega)$ слабо сходится к $\vec{v}$ и, значит, нормы $\|\vec{v}^{(s)}\|$ ограничены равномерно по s , то отсюда в силу условия 3 теоремы 1 следует

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{l=2}^4 \left| \sum_{i=1}^s I_l^{(t)}(\vec{u}, \vec{v}^{(s)}) \right| = 0. \quad (4.15)$$

Сумму $\sum_{i=1}^s I_i^{(t)}(\vec{u}, \vec{v}^{(s)})$ представим в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s I_i^{(t)}(\vec{u}, \vec{v}^{(s)}) &= \sum_{i=1}^s I_{11}^{(t)}(\vec{u}, \vec{v}^{(s)}) + \sum_{i=1}^s I_{12}^{(t)}(\vec{u}, \vec{v}^{(s)}) + \\ &+ \sum_{i=1}^s I_{13}^{(t)}(\vec{u}, \vec{v}^{(s)}), \end{aligned}$$

где $I_{12}^{(t)}(\vec{u}, \vec{v}^{(s)})$, $I_{13}^{(t)}(\vec{u}, \vec{v}^{(s)})$, определяются равенством (4.4') (при $\vec{w}^{(t)} = \vec{v}^{(s)}$), а $\vec{u}(x) \in M$ преобразовано к виду (4.8). Тогда, учитывая, что $\vec{u}(x) \in M$, и пользуясь неравенствами Гельдера и (4.7), леммой 1 и свойствами функций $\varphi_i^{(s)}$, нетрудно получить

$$\left| \sum_{i=1}^s I_{11}^{(t)}(\vec{u}, \vec{v}^{(s)}) \right| \leq C \left\{ \sum_{i=1}^s \frac{(d_i^{(s)})^2}{(r_i^{(s)})^3} \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^s \int_{\Omega_2^{(i)}} \vec{u}^4 dx \right\}^{1/4} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{i=1}^s \int_{\Omega_2^{(i)}} (\vec{v}^{(s)})^4 dx \right\}^{1/4} \leq C \left\{ \sum_{i=1}^s \frac{(d_i^{(s)})^2}{(r_i^{(s)})^3} \right\}^{1/2} \|\vec{u}\|_{L_4(\Omega)} \|\vec{v}^{(s)}\|_{L_4(\Omega)},$$

где постоянная C , не зависит от s и $\vec{u} \in M$.

Так как оператор вложения $\vec{H}(\Omega)$ в $L_4(\Omega)$ ($\Omega \subset R_3$) вполне непрерывен, а $\vec{v}^{(s)}$ слабо в $\vec{H}(\Omega)$ сходится к $\vec{v}$, то из (4.16), в силу условия 3 теоремы 1, следует

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^s I_i^{(i)}(\vec{u}, \vec{v}^{(s)}) \right| \leq C \|\vec{u}\|_H \|\vec{v}\|_H.$$

Отсюда, учитывая (4.14) и (4.15), приходим к 1 d.

Оставшиеся условия I и II проверяются аналогично. Отметим, что для проверки условия II достаточно убедиться в справедливости равенства

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^s \|B_i^{(s)} \vec{u}\|^2 = \int_{\Omega} (C\vec{u}, \vec{u}) dx, \quad (4.17)$$

где матрица $C = C(x)$ определена в условии 2 теоремы 1. (Это вытекает из 1, a—c). Используя равенства (4.1), (4.2) лемму 1 и неравенства (4.8) — (4.10), убеждаемся, что

$$\sum_{i=1}^s \|B_i^{(s)} \vec{u}\|^2 = \sum_{i=1}^s \sum_{k, l=1}^s \int_{T_a} (\nabla \vec{v}^{k(i)}, \nabla \vec{v}^{l(i)}) dx u_l(x^i) u_k(x^i) +$$

+ члены, стремящиеся к нулю при $s \rightarrow \infty$.

Отсюда, согласно определению тензора $C^{kl}(F_i^{(s)})$, вытекает (4.17).

При поверхностном распределении $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^s F_i^{(s)}$ проверка полноты условий I—II проводится аналогично. При этом в (4.16) нужно воспользоваться следующим равенством:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho^{(s)}} \int_{G_{\rho^{(s)}}} |\vec{v}^{(s)}(x)|^4 dx = \int_{\Gamma} \|\vec{v}(x)\|^4 dx,$$

где $G_{\rho^{(s)}}$ — слой толщиной $\rho^{(s)}$ со срединной поверхностью Γ , ($\rho^{(s)} \rightarrow 0$), а $\vec{v}$ — слабый предел последовательности $\vec{v}^{(s)}(x)$ в $\vec{H}(\Omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1970. 288 с.
2. Хрулов Е. Я. Метод ортогональных проекций и краевая задача Дирихле в областях с мелкозернистой границей. — «Математический сборник», 1972, № 88 (130), с. 38—60.
3. Быховский Э. Б., Смирнов Н. В. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа. — «Труды математического института им. В. А. Стеклова», т. 59, АН СССР, М.—Л., 1960, с. 5—35.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТЯХ С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ ОБЩЕЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Пусть Ω — произвольная область (сравнительно простого вида) в пространстве R_3 (или R_2), а $F_i^{(s)}$ ($i = 1, 2, \dots, s$) — непересекающиеся связные замкнутые множества в ней. Дополнение к множеству $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^s F_i^{(s)}$ в Ω , т. е. $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^s F_i^{(s)}$ называется областью с мелкозернистой границей. При изучении протекания вязкой несжимаемой жидкости через решетки из тонких проволок (а также в некоторых вопросах механики суспензий), появляется необходимость исследования решений краевых задач для системы уравнений Навье-Стокса в таких областях. При этом, если число s множества $F_i^{(s)}$ велико, а диаметры $d_i^{(s)}$ их малы, то решение задачи найти практически невозможно, и естественно возникает вопрос об описании асимптотического поведения решения при $s \rightarrow \infty$, $d_i^{(s)} \rightarrow 0$.

Подобные вопросы для других уравнений изучались, например, в работах [1—3]. Исследование асимптотического поведения решения линеаризованной системы уравнений Навье-Стокса проведено в [4]. Было показано, что в зависимости от того, как располагаются множества $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^s F_i^{(s)}$ в Ω — «объемно» или «поверхностно» (концентрируются вблизи некоторой гладкой поверхности $\Gamma \subset \Omega$), решение задачи при $s \rightarrow \infty$ и $d_i^{(s)} \rightarrow 0$ сходится к предельной вектор-функции, которая всюду в Ω удовлетворяет измененной системе уравнений или исходной системе уравнений с «усредненными» условиями сопряжения на Γ .

Тем самым для нахождения первого члена асимптотики нужно решить измененную краевую задачу, но в более простой области Ω (или $\Omega \setminus \Gamma$). Результаты работы [4] здесь будут перенесены на нелинейные (стационарные и нестационарные) системы уравнений Навье-Стокса.

Основные теоремы, относящиеся к нелинейному случаю, сформулированы в § 2 и 3. При доказательстве их существенно используются результаты [4], которые приводятся в § 1 в удобном для нас виде. В § 4 приводится вычисление основной характеристики влияния множеств $F_i^{(s)}$ на решение задачи для некоторых частных случаев.

§ 1. О поведении резольвент линейных задач

Рассмотрим в области $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^s F_i^{(s)}$ краевую задачу

$$\nu \Delta \vec{v}^{(s)} - \text{grad } p^{(s)} = \vec{f}, \quad \text{div } \vec{v}^{(s)} = 0, \quad (1.1)$$

$$\vec{v}^{(s)} \Big|_{\partial \Omega^{(s)}} = 0. \quad (1.2)$$

Как известно, для любой вектор-функции $\vec{f} = \vec{f}(x) \in L_2(\Omega^{(s)})$ существует единственное решение $\{\vec{v}^{(s)}, p^{(s)}\}$ этой задачи, причем $\vec{v}^{(s)}(x) \in W_2^1(\Omega^{(s)}) \cap W_{2, \text{лок}}^2(\Omega^{(s)})$. Следуя работе [5], введем линейный оператор $\Delta^{(s)}$, устанавливающий соответствие между решениями $\vec{v}^{(s)}(x)$ задачи (1.1)—(1.2) и свободными членами $\vec{f}(x)$, а именно $\Delta^{(s)}\vec{v}^{(s)} = \vec{f}$. В качестве основного пространства возьмем $\dot{J}(\Omega^{(s)})$ — замыкание в $L_2(\Omega^{(s)})$ множества финитных в $\Omega^{(s)}$ соленоидальных векторов. Заметим, что имеет место ортогональное разложение [5]:

$$L_2(\Omega^{(s)}) = \dot{J}(\Omega^{(s)}) \oplus G(\Omega^{(s)}), \quad (1.3)$$

где подпространство $G(\Omega^{(s)})$ состоит из градиентов однозначных функций из $W_2^1(\Omega^{(s)})$. За область определения $D(\Delta^{(s)})$ оператора $\Delta^{(s)}$ примем совокупность всех решений задачи (1.1)—(1.2), отвечающих всевозможным $\vec{f} \in \dot{J}(\Omega^{(s)})$. Справедлива следующая теорема [5].

Оператор $\Delta^{(s)}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между $D(\Delta^{(s)})$ и $\dot{J}(\Omega^{(s)})$; он самосопряжен и отрицательно определен на $D(\Delta^{(s)})$; обратный ему оператор $(\Delta^{(s)})^{-1} = \hat{R}^{(s)}$ вполне непрерывен.

Таким образом, на $\dot{J}(\Omega^{(s)})$ определен самосопряженный вполне непрерывный оператор $\hat{R}^{(s)}$. Расширим его по линейности на все $L_2(\Omega^{(s)})$, положив $\hat{R}^{(s)}\vec{g} = 0$ при $\vec{g} \in G(\Omega^{(s)})$. Введем оператор, действующий в пространстве $L_2(\Omega)$:

$$R^{(s)} = Q^{(s)}\hat{R}^{(s)}P^{(s)},$$

где $P^{(s)}$ — оператор ограничения, сопоставляющий векторам из $L_2(\Omega)$ их ограничение на область $\Omega^{(s)}$, а $Q^{(s)}$ — оператор продолжения, сопоставляющий каждому вектору $\vec{\varphi}^{(s)}(x) \in L_2(\Omega^{(s)})$ вектор $\vec{\psi}(x)$, равный $\vec{\varphi}^{(s)}(x)$ при $x \in \Omega^{(s)}$, и 0 при $x \in \Omega \setminus \Omega^{(s)}$. Легко видеть, что $R^{(s)}$ — самосопряженный и вполне непрерывный оператор. Рассмотрим теперь в областях Ω и $\Omega \setminus \Gamma$ краевые задачи

$$\nu \Delta \vec{v} - \nu C \vec{v} - \text{grad } p = \vec{f}, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad x \in \Omega \quad (1.4)$$

$$\vec{v} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \quad (1.5)$$

$$\nabla \vec{\Delta} \vec{v} - \text{grad } p = \vec{f}, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma \quad (1.6)$$

$$\vec{v}^+ = \vec{v}^-, \quad \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial n} \right)^+ - \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial n} \right)^- + \frac{1}{\gamma} (p^+ - p^-) \vec{n} = C_\Gamma \vec{v}, \quad x \in \Gamma \quad (1.7)$$

$$\vec{v}|_{\partial \Omega} = 0, \quad (1.8)$$

где Γ — некоторая гладкая поверхность в Ω , знаками $+$ и $-$ отмечены предельные значения функций (векторов) с разных сторон от Γ , $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали n к Γ , направленной в сторону, которой соответствует знак $+$, $C(x)$, $C_\Gamma(x)$ положительно определенные матрицы в Ω и на Γ .

Так же, как в работе [5], можно доказать существование и единственность обобщенных решений $\{\vec{v}(x), p(x)\}$, $\{\vec{v}^\Gamma(x), p^\Gamma(x)\}$ задач (1.4)—(1.5), (1.6)—(1.8), которые определяются с помощью соответствующих интегральных тождеств (см. [4]). При этом, если элементы матриц $C(x)$, $C_\Gamma(x)$ достаточно гладкие, то

$$\vec{v}(x) \in W_{2, \text{лок}}^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega), \quad \text{а } \vec{v}^\Gamma(x) \in W_{2, \text{лок}}^2(\Omega \setminus \Gamma) \cap W_2^1(\Omega).$$

Аналогично предыдущему введем операторы Δ^c и Δ^Γ , сопоставляющие решениям $\vec{v}(x)$ и $\vec{v}^\Gamma(x)$ задач (1.4)—(1.5), (1.6)—(1.8) правые части $\vec{f}$ уравнений (1.4), (1.6). Поступая так же, как в [5], показываем, что операторы Δ^c и Δ^Γ устанавливают взаимно-однозначное соответствие между областями их определения и подпространством $\dot{J}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$, где $\dot{J}(\Omega)$ — замыкание в $\dot{J}(\Omega)$ множества гладких финитных в Ω соленоидальных векторов, они самосопряжены и отрицательно определены, а обратные им операторы $R^c = (\Delta^c)^{-1}$ и $R^\Gamma = (\Delta^\Gamma)^{-1}$ вполне непрерывны в $\dot{J}(\Omega)$. Эти операторы также распространим на все $L_2(\Omega)$ по линейности, полагая $R^c \vec{g} = 0$ и $R^\Gamma \vec{g} = 0$ для

$$\vec{g} \in G(\Omega) = L_2(\Omega) \ominus \dot{J}(\Omega).$$

Замечания. Краевые задачи (1.1)—(1.2), (1.4)—(1.5) и (1.6)—(1.8) имеют решения $\vec{v}(x) \in W_2^1(\Omega)$ и для правых частей $\vec{f}$ из более широкого класса, чем $L_2(\Omega)$, например, для $\vec{f} \in L_{6/5}(\Omega)$ (см. [5]). Учитывая это, легко показать, что операторы $R^{(s)}$, R^c и R^Γ могут быть расширены до вполне непрерывных операторов, из $\vec{L}_{6/5}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ ($p < 6$ при $n = 3$ и p — любое при $n = 2$).

Покажем, что при определенных условиях последовательность операторов $R^{(s)}$ сходится сильно в $\vec{L}_p(\Omega)$ к R^e или R^Γ . Для этого нам понадобится одна тензорная характеристика массивности множеств $F_i^{(s)}$, введенная в [4] (тензор влияния). Приведем ее определение. Пусть $T(F_i^{(s)})$ — шар минимального радиуса $d_i^{(s)}$, такой что $F_i^{(s)} \subset T(F_i^{(s)})$, $T_a = T_a(F_i^{(s)})$ — концентрический с ним шар радиуса $a \gg d_i^{(s)}$, $\vec{H}^k(F_i^{(s)})$ — класс вектор-функций, полученный замыканием в $W_2^1(T_a)$ множества гладких соленоидальных и финитных в T_a вектор-функциях, равных $\vec{e}^k$ на $F_i^{(s)}$, где $\vec{e}^k$ — орт оси x_k ($k = 1, 2, 3$), а $\vec{v}^k(x) = \vec{v}^{(k, i)}(x) \in \vec{H}^k(F_i^{(s)})$ — вектор-функция, на которой достигается минимум функционала

$$\Phi(\vec{u}) = \int_{T_a} (\nabla \vec{u}, \nabla \vec{u}) dx = \int_{T_a} \sum_{i, k=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx \quad (1.9)$$

в классе $H^k(F_i^{(s)})$. Положим

$$C^{kl}(F_i^{(s)}) = \int_{T_a} (\nabla \vec{v}^k, \nabla \vec{v}^l) dx, \quad k, l = 1, 2, (3). \quad (1.10)$$

Нетрудно проверить, что величины $C^{kl}(F_i^{(s)})$ образуют симметрический неотрицательный тензор в $R_3(R_2)$. Назовем его тензором влияния. Введем еще такие обозначения:

$d_i^{(s)}$ — диаметры множеств $F_i^{(s)}$;

$r_i^{(s)}$ — расстояние от $F_i^{(s)}$ до $\partial \Omega \cap \left(\bigcup_{j \neq i}^s F_j^{(s)} \right)$;

$\sum_G$ — сумма, распространяющаяся на те номера i , для которых множества $F_i^{(s)}$ лежат в области $G \subset \Omega$;

$\sum_\Gamma$ — сумма, распространяющаяся на те номера i , для которых проекции множеств $F_i^{(s)}$ на поверхность Γ лежат в $\Gamma \subset \Gamma$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть при $s \rightarrow \infty$ множества $F_i^{(s)}$ распределяются в Ω «объемно» так, что выполняются условия:

$$1) \lim_{s \rightarrow \infty} \max_i d_i^{(s)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \max_i r_i^{(s)} = 0;$$

2) для любой подобласти $G \subset \Omega$ существует предел

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_G C^{kl}(F_i^{(s)}) = \int_G C^{kl}(x) dx,$$

где $\{C^{kl}(x)\} = C(x)$ — непрерывный неотрицательный тензор в Ω ;

$$3) \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^s \frac{(d_i^{(s)})^2}{(r_i^{(s)})^3} < C \text{ при } n = 3,$$

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^s \frac{1}{|\ln d_i^{(s)}|^2 (r_i^{(s)})^2} < \infty \text{ при } n = 2.$$

Тогда для любой вектор-функции $\vec{f} \in L_2(\Omega)$ последовательность $\{R^{(s)}\vec{f}, s = 1, 2, \dots\}$ по норме $L_2(\Omega)$ ($p < 6$ в R_3) сходится к $R^c \vec{f}$, т. е.

$$\|R^{(s)}\vec{f} - R^c \vec{f}\|_{L_p(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ при } s \rightarrow \infty.$$

Теорема 2. Пусть при $s \rightarrow \infty$ множества $F_i^{(s)}$ распределяются «поверхностно», попадая в слой толщины $\rho^{(s)}$ ($\rho^{(s)} \geq \max_i r_i^{(s)}$, $\rho^{(s)} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$) со срединной поверхностью Γ , и выполняются условия

$$1) \lim_{s \rightarrow \infty} \max_i d_i^{(s)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \max_i r_i^{(s)} = 0;$$

2) для любого куска γ поверхности Γ существует предел

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{\gamma} C^{kl}(F_i^{(s)}) = \int_{\gamma} C_{\Gamma}^{kl}(x) d\Gamma,$$

где $\{C_{\Gamma}^{kl}(x) = C_{\Gamma}(x)\}$ непрерывный неотрицательный тензор на Γ ;

$$3) \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \rho^{(s)} \sum_{i=1}^s \frac{(d_i^{(s)})^2}{(r_i^{(s)})^3} < \infty \text{ при } n = 3$$

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \rho^{(s)} \sum_{i=1}^s \frac{1}{|\ln d_i^{(s)}|^2 (r_i^{(s)})^2} < c \text{ при } n = 2.$$

Тогда для любой вектор-функции $\vec{f} \in L_2(\Omega)$ последовательность $\{R^{(s)}\vec{f}, s = 1, 2, \dots\}$ по норме $L_p(\Omega)$ ($p < 6$ в R_3) сходится к $R^{\Gamma} \vec{f}$, т. е.

$$\|R^{(s)}\vec{f} - R^{\Gamma} \vec{f}\|_{L_p(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ при } s \rightarrow \infty.$$

Доказательство теорем 1 и 2 вытекает непосредственно из результатов работы [4]. Действительно, учитывая, что $R^{(s)}\vec{f} =$

$= [R^{(s)}\vec{f}](x)$ является решением задачи (1.1)–(1.2), представим его в виде

$$[R^{(s)}\vec{f}](x) = \vec{U}^f(x) - \vec{u}^{(s)}(x),$$

где $\vec{U}^f(x)$ — решение той же задачи в области Ω , а $\vec{U}^{(s)}(x)$ удовлетворяет равенствам

$$\nu \Delta \vec{u}^{(s)}(x) - \text{grad } p^{(s)}(x) = 0, \quad \text{div } \vec{u}^{(s)}(x) = 0, \quad x \in \Omega^{(s)}$$

$$\vec{u}^{(s)}(x) = \vec{U}^f(x), \quad x \in F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^s F_i^{(s)}.$$

Пусть $\dot{H}$ — гильбертово пространство вектор-функций со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\dot{H}(\Omega)} = \int_{\Omega} (\nabla \vec{u}, \nabla \vec{v}) dx = \int_{\Omega} \sum_{i,k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx,$$

полученное замыкание множества гладких соленоидальных и финитных в Ω векторов, а $\vec{H}_{\Delta}(\Omega, F^{(s)})$ подпространство в $\dot{H}(\Omega)$, состоящее из векторов, удовлетворяющих вне множества $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^s F_i^{(s)}$ уравнению $\nu \Delta \vec{u}^{(s)} = \text{grad } p^{(s)}$. Нормы в пространствах

$\dot{H}(\Omega)$ и $\dot{W}_2^1(\Omega)$ эквивалентны. Согласно [4], вектор $\vec{u}^{(s)}(x)$ есть ортогональная проекция $\vec{U}^f(x)$ в $\dot{H}(\Omega)$ на подпространство $\vec{H}_{\Delta}(\Omega, F^{(s)})$ и, следовательно,

$$\|\vec{u}^{(s)}\|_{\dot{H}(\Omega)} \leq \|\vec{U}^f\|_{\dot{H}(\Omega)}.$$

Таким образом, нормы векторов $\vec{u}^{(s)}$ ограничены в метрике $\dot{W}_2^1(\Omega)$ равномерно по s . Отсюда, в силу полной непрерывности оператора вложения $\dot{W}_2^1(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ ($p < 6$ при $n = 3$) вытекает, что множество $\{\vec{u}^{(s)}(x)\}$ компактно в $L_p(\Omega)$.

Пусть при $s \rightarrow \infty$ множества $F_i^{(s)}$ распределяются в Ω «объемно» и выполняются условия теоремы 1. Тогда согласно теореме 1 работы [4] последовательность $\{\vec{u}^{(s)}(x), s = 1, 2, \dots\}$ сходится в $L_2(\Omega)$ к вектор-функции $\vec{u}(x)$, которая является решением такой краевой задачи в области Ω :

$$\nu \Delta \vec{u}(x) - C(x) \vec{u}(x) - \text{grad } p(x) = -C(x) \vec{U}^f(x), \quad \text{div } \vec{u}(x) = 0, \\ \vec{u}(x)|_{\partial\Omega} = 0.$$

Следовательно, $R^{(s)}\vec{f}$ сходится в $L_2(\Omega)$ к вектор-функции $\vec{u}(x) = \vec{U}^1(x) - \vec{u}(x)$, которая, как легко видеть, является решением задачи (1.4)–(1.5). Отсюда, учитывая компактность множества $\{R^{(s)}\vec{f}\}$ в $L_p(\Omega)$ ($p < 6$ при $n = 3$) заключаем, что

$$\|R^{(s)}\vec{f} - R^c\vec{f}\|_{L_p(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ при } s \rightarrow \infty.$$

В случае поверхностного распределения множеств $F_i^{(s)}$ рассуждения аналогичны.

§ 2. Нелинейная стационарная задача

Рассмотрим в области $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^s F_i^{(s)}$ краевую задачу

$$\sqrt{\nu} \Delta \vec{v}^{(s)} - \sum_k v_k^{(s)} \vec{v}_{x_k}^{(s)} - \text{grad } p^{(s)} = \vec{f}, \quad \text{div } \vec{v}^{(s)} = 0 \quad (2.1)$$

$$\vec{v}^{(s)}|_{\partial\Omega^{(s)}} = 0. \quad (2.2)$$

Разрешимость этой задачи и свойства ее решения подробно исследованы в работе [5]. Приведем здесь лишь некоторые необходимые для дальнейшего сведения. Прежде всего, для любой вектор-функции $\vec{f} \in L_2(\Omega)$ существует обобщенное решение задачи из пространства $\dot{H}(\Omega)$ (см. § 1), причем справедлива оценка

$$\|\vec{v}^{(s)}\|_{\vec{H}(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{\nu} \mu_1} \|\vec{f}\|_{L_2(\Omega)}, \quad (2.3)$$

где μ_1 — наименьшее собственное значение оператора Лапласа в области Ω при нулевом условии на границе $\partial\Omega$.

Далее, если между параметрами задачи выполняется определенное соотношение, например в R_3

$$\|\vec{f}\|_{L_2(\Omega)} \leq \sqrt{\nu} \mu_1^{3/4} \left(\frac{4}{3}\right)^{-3/4},$$

то решение задачи (2.1)–(2.2) единственно.

Таким образом, согласно (2.3) норма решений $\vec{v}^{(s)}(x)$ (продолженных нулем на множество $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^s F_i^{(s)}$) в пространстве $\dot{H}(\Omega)$ не зависит от s . Отсюда вытекает, что множество вектор-функций $\{\vec{v}^{(s)}(x), s = 1, 2, \dots\}$ слабо компактно в $\dot{H}(\Omega)$ и, следовательно, компактно в $L_p(\Omega)$ ($p < 6$ в R_3).

Выделим подпоследовательность $\{\vec{v}^{(s)}(x), s = s_l \rightarrow \infty\}$, сходящуюся (в указанных смыслах) в некоторой вектор-функции $\vec{v}(x) \in \dot{H}(\Omega) \subset L_p(\Omega)$. Тогда для любой вектор-функции $\vec{\varphi}(x) \in L_r(\Omega)$ ($r > 3$) будет выполняться равенство

$$\lim_{s=s_l \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (v_k^{(s)} \vec{v}_{x_k}^{(s)}, \vec{\varphi}) dx = \int_{\Omega} (v_k \vec{v}_{x_k}, \vec{\varphi}) dx. \quad (2.4)$$

Действительно, справедливость этого равенства для ограниченных $\vec{\varphi}(x)$ вытекает, очевидно, из слабой сходимости $\vec{v}_{x_k}^{s_l}$ к $\vec{v}_{x_k}$ в $L(\Omega)$ и сильной сходимости $\vec{v}^{s_l}$ к $\vec{v}$ в $L_2(\Omega)$. Поэтому равенство (2.3) будет установлено для всех $\vec{\varphi}(x) \in \vec{L}_r(\Omega)$ ($r > 3$), если доказать ограниченность множества вектор-функций $\{v_k^{(s)} \vec{v}_{x_k}^{(s)}, s = 1, 2, \dots\}$ в сопряженном пространстве $\vec{L}_{r'}(\Omega)$ ($r' = \frac{r}{r-1} < \frac{3}{2}$). Но это сразу вытекает из неравенства Гельдера, (2.3) и равномерной ограниченности $\vec{v}^{(s)}$ в $\vec{L}_p(\Omega)$ ($p < 6$)

$$\begin{aligned} \|v_k^{(s)} \vec{v}_{x_k}^{(s)}\|_{L_{r'}(\Omega)} &\leq \|\vec{v}_{x_k}^{(s)}\|_{L_2(\Omega)} \|v_k^{(s)}\|_{L_p(\Omega)} \leq \\ &\leq \|\vec{v}^{(s)}\|_{\dot{H}(\Omega)} \|\vec{v}^{(s)}\|_{\vec{L}_p(\Omega)} < C, \left(p = \frac{2r'}{2-r'}\right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Исследуем теперь поведение $\vec{v}^{(s)}(x)$ при $s \rightarrow \infty$, когда выполняются условия теоремы 1 или 2 (§ 1). Как обычно, $\vec{v}^{(s)}$ продолжим нулем на множество $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^s F_i^{(s)}$. Переносим нелинейный член в уравнении (2.1) в правую часть и пользуясь введенным в § 1 оператором $R^{(s)}$, запишем

$$\vec{v}^{(s)} = R^{(s)} \vec{f} + R^{(s)} \left\{ \sum_k v_k^{(s)} \vec{v}_{x_k}^{(s)} \right\}.$$

Умножим это равенство скалярно в $L_2(\Omega)$ на произвольную вектор-функцию $\vec{\varphi} \in L_2(\Omega)$. Учитывая при этом, что оператор $R^{(s)}$ самосопряжен в $\vec{L}_2(\Omega)$ и $v_k^{(s)} \vec{v}_{x_k}^{(s)} \in L_{r'}$, $R^{(s)} \vec{\varphi} \in L_p$ ($p < 6$, $r' < \frac{3}{2}$), получаем

$$(\vec{v}^{(s)} \vec{\varphi})_{\vec{L}_2(\Omega)} = (R^{(s)} \vec{f}, \vec{\varphi})_{\vec{L}_2(\Omega)} + \left(\sum_k v_k^{(s)} \vec{v}_{x_k}^{(s)}, R^{(s)} \vec{\varphi} \right)_{L_2(\Omega)}. \quad (2.6)$$

Согласно теореме 1 (или 2),

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|R^{(s)} \vec{\varphi} - R \vec{\varphi}\|_{L_p(\Omega)} = 0, \quad (2.7)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (R^{(s)} \vec{f}, \vec{\varphi})_{L_2(\Omega)} = (R \vec{f}, \vec{\varphi})_{L_2(\Omega)}, \quad (2.8)$$

где $R = R^c$ или R^Γ в зависимости от того, выполняются ли условия теоремы 1 или 2.

Так как выделенная выше последовательность $\{\vec{v}^{(s)}(x), s = s_l \rightarrow \infty\}$ сходится к $\vec{v}(x)$ в $L_p(\Omega)$, то

$$\lim_{s=s_l \rightarrow \infty} (\vec{v}^{(s)}, \vec{\varphi})_{L_2(\Omega)} = (\vec{v}, \vec{\varphi})_{L_2(\Omega)}. \quad (2.9)$$

Далее, при $r' < \frac{3}{2}$ и $6 > r = \frac{r'}{r'-1} > 3$ имеем

$$\begin{aligned} & \left| \left(\sum_k v_k^{(s)} \vec{v}_{x_k}^{(s)}, R^{(s)} \vec{\varphi} \right)_{L_2(\Omega)} - \left(\sum_k v_k \vec{v}_{x_k}, R \vec{\varphi} \right)_{L_2(\Omega)} \right| \leq \\ & \leq \sum_k |(\vec{v}_k^{(s)} \vec{v}_{x_k}^{(s)}, R^{(s)} \vec{\varphi} - R \vec{\varphi})_{L_2(\Omega)} + (v_k^{(s)} \vec{v}_{x_k}^{(s)}, R \vec{\varphi})_{L_2(\Omega)} - \\ & - (v_k \vec{v}_{x_k}, R \vec{\varphi})_{L_2(\Omega)}| \leq \sum_k \|v_k^{(s)} \vec{v}_{x_k}^{(s)}\|_{\vec{L}_{r'}(\Omega)} \|R^{(s)} \vec{\varphi} - R \vec{\varphi}\|_{\vec{L}_r(\Omega)} + \\ & + \sum_k |(v_k^{(s)} \vec{v}_{x_k}^{(s)}, R \vec{\varphi})_{L_2(\Omega)} - (v_k \vec{v}_{x_k}, R \vec{\varphi})_{L_2(\Omega)}|, \end{aligned}$$

откуда в силу (2.4), (2.5) и (2.7) следует

$$\lim_{s=s_l \rightarrow \infty} \left(\sum_k v_k^{(s)} \vec{v}_{x_k}^{(s)}, R \vec{\varphi} \right)_{L_2(\Omega)} = \left(\sum_k v_k \vec{v}_{x_k}, R \vec{\varphi} \right)_{L_2(\Omega)}. \quad (2.10)$$

Объединяя (2.6)–(2.10), получаем

$$(\vec{v}, \vec{v})_{L_2(\Omega)} = (R \vec{f}, \vec{\varphi})_{L_2(\Omega)} + \left(\sum_k v_k \vec{v}_{x_k}, R \vec{\varphi} \right)_{L_2(\Omega)}. \quad (2.11)$$

Теперь вспомним, что оператор $R = R^c(R^\Gamma)$ — самосопряжен, вполне непрерывен в $L_2(\Omega)$ и может быть расширен до вполне непрерывного оператора, действующего из $L_{6/5}(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Поскольку $v_k \vec{v}_{x_k} \in \vec{L}_{r'}(\Omega)$ ($r' < \frac{3}{2}$), заключаем, что

$$\left(\sum_k v_k \vec{v}_{x_k}, R \vec{\varphi} \right)_{L_2(\Omega)} = \left(R \left\{ \sum_k v_k \vec{v}_{x_k} \right\}, \vec{\varphi} \right)_{L_2(\Omega)}.$$

Следовательно, согласно (2.11), предельная вектор-функция $\vec{v}(x)$ удовлетворяет в $L_2(\Omega)$ равенству

$$\vec{v} = R \vec{f} + R \left\{ \sum_k v_k \vec{v}_{x_k} \right\},$$

из которого в силу определения операторов $R = R^c(R^\Gamma)$ вытекает, что $\vec{v}(x)$ является решением одной из следующих краевых задач:

$$\nu \Delta \vec{v} - \sum_k v_k \vec{v}_{x_k} - \nu C \vec{v} - \text{grad } p = \vec{f}, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad x \in \Omega; \quad (2.12)$$

$$\vec{v}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.13)$$

или

$$\nu \Delta \vec{v} - \sum_k v_k \vec{v}_{x_k} - \text{grad } p = \vec{f}, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma; \quad (2.14)$$

$$\vec{v}^+ = \vec{v}^-, \quad \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial n}\right)^+ - \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial n}\right)^- + \frac{1}{\nu} (p^+ - p^-) = C_\Gamma \vec{v}; \quad x \in \Gamma; \quad (2.15)$$

$$\vec{v}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.16)$$

где обозначения те же, что в (1.4)–(1.5) и (1.6)–(1.8).

Так как матрицы $C = C(x)$ и $C_\Gamma = C_\Gamma(x)$ положительно определены, то, пользуясь методом работы [5], легко показать, что при тех же соотношениях между параметрами, что и в (2.1)–(2.2), задачи (2.12)–(2.13) и (2.14)–(2.16) имеют единственные решения $\vec{v} = \vec{v}(x)$. Отсюда вытекает, что вся последовательность $\{\vec{v}^{(s)}(x), s = 1, 2, \dots\}$ сходится в $L_p(\Omega)$ к $\vec{v}(x)$. Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 3. Если выполняются условия теоремы 1 (2), то последовательность решений $\vec{v}^{(s)}(x)$ задачи (2.1)–(2.2), продолженных нулем на множество $F^{(s)} = \bigcup_{t=1}^s F_t^{(s)}$, по норме $\vec{L}_p(\Omega)$ сходится к решению $\vec{v}(x)$ задачи (2.12)–(2.13) (соответственно (2.14)–(2.16)).

Замечание. В случае поверхностного распределения $F^{(s)}$ решение $\{\vec{v}^{(s)}, p^{(s)}\}$ задачи (2.1)–(2.2) сходится к решению $\{\vec{v}, p\}$ задачи (2.14)–(2.16) в метрике $C^k(\bar{\Omega}')$, где Ω' — произвольная подобласть Ω , находящаяся на положительном расстоянии от Γ и $\partial\Omega$.

§ 3. Нелинейная нестационарная задача

Рассмотрим в области $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus F^{(s)}$ начально-краевую задачу

$$\vec{v}_t^{(s)} - \nu \Delta \vec{v}^{(s)} + \sum_k v_k^{(s)} \vec{v}_{x_k}^{(s)} + \text{grad } p^{(s)} = \vec{f}, \quad \text{div } \vec{v}^{(s)} = 0, \quad x \in \Omega_T^{(s)}, \quad (3.1)$$

$$\vec{v}^{(s)}|_{\partial\Omega_T^{(s)}} = 0; \quad \vec{v}^{(s)}|_{t=0} = \vec{a}(x), \quad (3.2)$$

где

$$\Omega_T^{(s)} = \Omega^{(s)} \times [0, T], \quad \partial\Omega_T^{(s)} = \partial\Omega^{(s)} \times [0, T], \quad \vec{f}(x) \in W_2^1(\Omega_T^{(s)}).$$

Относительно начальной вектор-функции $\vec{a}(x)$ будем предполагать, что $\vec{a}(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \mathring{H}(\Omega)$ и, кроме того, $\vec{a}(x)$ равно нулю в некоторой подобласти $G \subset \Omega$, содержащей множества $F^{(s)} = \bigcup_{i=0}^s F_i^{(s)}$ при всех s .

Существование и единственность решения задачи (3.1)–(3.2) в пространстве R_2 доказаны в работе [5].

Анализ полученных там неравенств с учетом свойств $\vec{a}(x)$ позволяет заключить, что для решений $\vec{v}^{(s)}(x)$ задачи (4.1) (про-долженных нулем на множество $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^s F_i^{(s)}$) справедлива оценка

$$\max_{0 < t < T} (\|\vec{v}^{(s)}(x, t)\|_{H(\Omega)} + \|\vec{v}_t^{(s)}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} + \\ + \int_0^T \|\vec{v}_{xt}^{(s)}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} dt < C,$$

где постоянная C выражается через $\vec{a}(x)$, $\vec{f}(x)$, область Ω и не зависит от s . Аналогичные факты имеют место и в трехмерном пространстве, но для достаточно малых T , зависящих от вязкости ν и данных задачи.

В силу неравенства (3.3), из последовательности $\{\vec{v}^{(s)}, s = 1, 2, \dots\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\vec{v}^{(s)}, s = s_i \rightarrow \infty\}$, для которой $\vec{v}^{(s_i)}, \vec{v}_x^{(s_i)}, \vec{v}_t^{(s_i)}, \vec{v}_{xt}^{(s_i)}$ сходятся слабо в $\vec{L}_2(\Omega_T)$ к $\vec{v}, \vec{v}_x, \vec{v}_t, \vec{v}_{xt}$ соответственно ($\Omega_T = \Omega \times [0, T]$). Из такой сходимости нетрудно заключить, что $\vec{v}^{(s_i)}(x, t)$ сходится к $\vec{v}(x, t)$ слабо в пространстве $\mathring{H}(\Omega)$ и сильно в $L_p(\Omega)$ ($p < 6$) в R_3 при любом $t \in [0, T]$. Отсюда, в свою очередь, вытекает оценка (2.5) и равенство (2.4).

Перенесем теперь в (3.1) нелинейный член и $\vec{v}_t = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ в правую часть и, вспоминая определение оператора $R^{(s)}$ (§ 1), запишем при всех $t \in [0, T]$

$$\vec{v}^{(s)} = -R^{(s)}\vec{f} + R^{(s)}\left\{\sum_k v_k^{(s)} \vec{v}_{x_k}^{(s)}\right\} + R^{(s)}\vec{v}_t^{(s)}.$$

Умножим скалярно это равенство на произвольную вектор-функцию $\vec{\varphi} \in L_2(\Omega_T)$ и проинтегрируем по области Ω_T . Учитывая при этом свойства оператора $R^{(s)}$, получаем

$$\int_0^T (\vec{v}^{(s)}, \vec{\varphi})_{L_2(\Omega)} dt = - \int_0^T (R^{(s)}\vec{f}, \vec{\varphi})_{L_2(\Omega)} dt +$$

$$+ \int_0^T \left(\sum_k \varphi_k^{(s)} \vec{v}_{x_k}^{(s)}, R^{(s)} \vec{\varphi} \right)_{L_2(\Omega)} dt + \int_0^T \left(\vec{v}_t^{(s)}, R^{(s)} \vec{\varphi} \right)_{L_2(\Omega)} dt.$$

Отсюда, пользуясь сделанными выше замечаниями и почти полностью повторяя рассуждения предыдущего параграфа, приходим к следующей теореме.

Теорема 4. Если выполняются условия теоремы 1, то последовательность $\{v^{(s)}(x, t)\}$ решений задачи (3.1)–(3.2) при любом t сходится по норме $L_2(\Omega)$ к вектор-функции $\vec{v}(x, t)$, которая является решением такой задачи:

$$\vec{v}_t - \nu \Delta \vec{v} + \sum_k v_k \vec{v}_{x_k} + \nu \vec{C} \vec{v} = -\text{grad } p + \vec{f}, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad x, t \in \Omega_T;$$

$$\vec{v}|_{\partial \Omega_T} = 0; \quad \vec{v}|_{t=0} = \vec{a}.$$

Если выполняются условия теоремы 2, то $\vec{v}(x, t)$ в области $\Omega \setminus \Gamma$ удовлетворяет исходной системе уравнений (3.1) и начальным условиям (3.2), а на поверхности Γ граничным условиям (2.15).

§ 4. Некоторые примеры

Рассмотрим простые случаи, когда тензоры $C(x)$ и $C_\Gamma(x)$ выражаются через геометрические параметры множеств $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^s F_i^{(s)}$. Для вычисления $C(x)$ и $C_\Gamma(x)$ нужно уметь находить вектор-функцию $\vec{v}^k(x) = \vec{v}^{(k, t)}(x)$, которая минимизирует функционал (1.9) в классе $\vec{H}^k(F_i^{(s)})$. Согласно [4], эта вектор-функция является решением следующей задачи:

$$\Delta \vec{v}^k(x) = \text{grad } p^k(x), \quad \text{div } \vec{v}^k(x) = 0; \quad x \in T_a \setminus F_i^{(s)}; \quad (4.1)$$

$$\vec{v}^k(x)|_{F_i^{(s)}} = \vec{e}^k; \quad \vec{v}^k(x)|_{\partial T_a} = 0. \quad (4.2)$$

Пусть $F_i^{(s)} = K_i^{(s)}$ — круги радиуса $a_i^{(s)}$ в R_2 . Тогда решение $\vec{v}^{(k)}(x)$ задачи (4.1)–(4.2) находится явно (см., например, [6]). С помощью него, пользуясь формулой (1.10), нетрудно вычислить тензор влияния $C^{kl}(K_i^{(s)})$

$$C^{kl}(K_i^{(s)}) = \frac{4\pi}{|\ln a_i^{(s)}|} (1 + o(1)) \delta_{kl}. \quad (4.3)$$

Формула (4.3) позволяет оценить тензор влияния $C^{kl}(F_i^{(s)})$ для множеств $F_i^{(s)} \in R_2$ произвольного вида. Будем предполагать только, что в $F_i^{(s)}$ можно вписать круг $K_i^{(s)}$ радиуса $a_i^{(s)} \geq (d_i^{(s)})^{1+\varepsilon(s)}$, где $d_i^{(s)}$ — диаметр $F_i^{(s)}$, а $\varepsilon(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Пусть $T_i^{(s)}$ — круг радиуса $2a_i^{(s)}$, в котором содержится $F_i^{(s)}$, так что $K_i^{(s)} \subset F_i^{(s)} \subset$

$\subset T_i^{(s)} \subset T_a$. Выберем систему координат, в которой тензор $C^{kl}(F_i^{(s)})$ диагонален. Согласно (1.9), (1.10)

$$C^{kk}(F_i^{(s)}) = \inf_{\vec{v} \in H(F_i^{(s)})} \int_{T_a} (\nabla \vec{v}, \nabla \vec{v}) dx. \quad (4.4)$$

Так как $K_i^{(s)} \subset F_i^{(s)} \subset T_i^{(s)}$, то $H^k(K_i^{(s)}) \supset H^k(F_i^{(s)}) \supset H^k(T_i^{(s)})$ и, следовательно, в силу (4.4)

$$C^{kk}(K_i^{(s)}) \leq C^{kk}(F_i^{(s)}) \leq C^{kk}(T_i^{(s)}).$$

Отсюда, пользуясь формулой (4.3) и соотношением между диаметрами множеств $K_i^{(s)}$, $F_i^{(s)}$ и $T_i^{(s)}$, заключаем, тензор $C^{kl}(F_i^{(s)})$ имеет вид

$$C^{kl}(F_i^{(s)}) = \frac{4\pi}{|\ln d_i^{(s)}|} (\delta_{kl} + o(1)), \quad d_i^{(s)} \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$C(x) = 4\pi a(x)E, \quad C_\Gamma(x) = 4\pi a_\Gamma(x)E,$$

где E — единичный тензор в R_2 , а функции $a(x)$, $a_\Gamma(x)$ определяются из равенств

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_G \frac{1}{|\ln d_i^{(s)}|} = \int_G a(x) dx, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{(\Gamma)} \frac{1}{|\ln d_i^{(s)}|} = \int_\Gamma a_\Gamma(x) d\Gamma.$$

Таким образом, в двумерном пространстве тензоры $C(x)$, $C_\Gamma(x)$ всегда выражаются через геометрические параметры множеств $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^s F_i^{(s)}$, причем они пропорциональны единичному тензору.

В трехмерном пространстве это верно только в тех случаях, когда $F_i^{(s)}$ — шары (радиуса $a_i^{(s)}$). Тогда можно найти решение $v^k(x)$ задачи (4.1)–(4.2) (в главной части по $a_i^{(s)} \rightarrow 0$) и с помощью него оценить тензор $C^{kl}(F_i^{(s)})$. В результате получаем

$$C^{kl}(F_i^{(s)}) = 6\pi a_i^{(s)} (1 + o(1)) \delta_{kl},$$

и тензоры $C(x)$, $C_\Gamma(x)$ имеют вид

$$C(x) = 6\pi a(x)E, \quad C_\Gamma(x) = 6\pi a_\Gamma(x)E,$$

где E — единичный тензор в R_3 , а $a(x)$, $a_\Gamma(x)$ — соответственно предельные (объемная и поверхностная) плотности сумм радиусов шаров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марченко В. А., Хрусов Е. Я. Краевые задачи с мелкозернистой границей. — «Мат. сборник», 1964, т. 65 (107): 3, с. 458–472.
2. Марченко В. А., Сузилов Г. В. Вторая краевая задача в областях со сложной границей. — «Мат. сборник», 1969, т. 69 (111), с. 35–60.
3. Хрусов Е. Я. Метод ортогональных проекций и краевая задача Дирихле в областях с мелкозернистой границей. — «Мат. сборник», 1972, т. 88 (130), с. 38–60.

4. Львов В. А., Хрусов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей для линейризованной системы уравнений Навье-Стокса См. статью в настоящем вестнике.
5. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1970. 288 с.
6. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемости жидкости. М., ГИТТЛ., 1955. 487 с.

УДК 517.91

А. П. МАРИНИЧ

КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА ИДЕАЛЬНО НАБЛЮДАЕМЫХ СИСТЕМ

1. *Введение.* Рассмотрим линейную наблюдаемую систему

$$\dot{x} = Ax + Bu; \quad y = Hx, \quad (1)$$

где A , H , B — постоянные матрицы размеров $n \times n$, $m \times n$ и $n \times r$ соответственно; x , y , u — векторы n -мерного, m -мерного и r -мерного евклидовых пространств соответственно.

Пусть имеется наблюдатель, которому известны:

а) матрицы A и B ;

б) прямоугольная матрица H размерности $m \times n$ ненулевого ранга и векторная функция $y(t) = Hx(t)$ на отрезке $[0, T]$, где T — произвольное фиксированное положительное число.

Задача наблюдателя состоит в том, чтобы однозначно восстановить вектор $x_0 = x(0)$ по вектор-функции $y(\cdot)$. Точка в скобках здесь и далее означает, что функция рассматривается не в некоторый момент t , а целиком на отрезке наблюдения $[0, T]$.

Система (1) называется идеально наблюдаемой [1], если по любой возможной вектор функции $y(\cdot)$ можно восстановить вектор $x_0 = x(0)$, т. е. существует оператор F , определенный на функциях $y(\cdot)$ такой, что $Fy(\cdot) = x_0$.

Заметим, что для идеально наблюдаемых систем управление $u(t)$ считается неизвестным в отличие от задачи наблюдаемости по Калману [2].

Наряду с системой (1) рассмотрим линейную наблюдаемую систему

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u; \quad y = \bar{H}\bar{x}, \quad (2)$$

где $\bar{A}$, $\bar{H}$, $\bar{B}$ — постоянные матрицы размеров $n \times n$, $m \times n$ и $n \times r$ соответственно; $\bar{x}$ — вектор n -мерного евклидова пространства.

Система (2) называется линейно-эквивалентной системе (1), если существует такая невырожденная матрица P , что

$$\bar{A} = PAP^{-1}, \quad \bar{B} = PB, \quad \bar{H} = HP^{-1}.$$

Очевидно, для того чтобы система (1) была идеально наблюдаемой, необходимо и достаточно, чтобы система (2) была идеально наблюдаемой.

Идеально наблюдаемые системы впервые рассматривались в [1], где приводится алгоритм и способ вычисления вектора x_0 для идеально наблюдаемых систем.

В данной заметке получена каноническая форма идеально наблюдаемых систем при $m=1$, а также легко проверяемые необходимые и достаточные условия идеально наблюдаемых систем.

2. Критерий идеально наблюдаемых систем с одним выходом. Сформулируем и докажем основную теорему для идеально наблюдаемых систем при $m=1$.

Теорема 1. Для того чтобы система

$$\dot{x} = Ax + Bu; \quad y = hx. \quad (3)$$

была идеально наблюдаемой, необходимо и достаточно, чтобы

$$1) \operatorname{rang}(h^*, A^*h^*, \dots, A^{*n-1}h^*) = n, \quad (4)$$

$$2) hA^iB = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-2. \quad (5)$$

Необходимость. Пусть система (3) идеально наблюдаема. Тогда очевидно, что система (3) является наблюдаемой по Калману, т. е. имеет место условие (4). Докажем необходимость условий (5). Предположим противное. Тогда существует, по крайней мере, одно число k ($0 \leq k \leq n-2$) такое, что $hA^k B \neq 0$.

Пусть число k_1 ($0 \leq k_1 \leq n-2$) наименьшее, для которого $hA^{k_1}B \neq 0$. Поскольку вектор-строка $hA^{k_1}B$ отлична от нуля, то среди чисел $hA^{k_1}b_1, \dots, hA^{k_1}b_r$ хотя бы одно отлично от нуля. Пусть для определенности $hA^{k_1}b_1 \neq 0$.

Покажем, что если управление $u(t)$ имеет вид

$$u(t) = \begin{pmatrix} -\frac{hA^{k_1+1}x(t)}{hA^{k_1}b_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

то система

$$\dot{x}(t) = A_1x(t); \quad y(t) = hx(t),$$

где

$$A_1 = A - b_1 \frac{hA^{k_1+1}}{hA^{k_1}b_1},$$

не является наблюдаемой по Калману. Действительно, учитывая соотношения

$$hB = hAB = \dots = hA^{k_1-1}B = 0,$$

имеем

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} h \\ hA_1 \\ \vdots \\ hA_1^{k_1} \\ hA_1^{k_1+1} \\ \vdots \\ hA_1^{n-1} \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} h \\ hA \\ \vdots \\ hA^{k_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = k_1 + 1 < n.$$

Достаточность. Пусть имеют место соотношения (4)—(5). Докажем, что система (3) является идеально наблюдаемой. Действительно, система (3) после невырожденного преобразования

Действительно, система (3) после невырожденного преобразования

имеет вид

Рассмотрим оператор следующего вида

Поскольку оператор F_1 определен на функциях $y(\cdot) = x_1(\cdot)$, где $\underline{x}_1(\cdot)$ — решение системы (7) и

$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) = \dot{x}_{n-1}(t) = \overline{x}_n(t),$$

$$Fy(\cdot) = F_1 y(t) \big|_{t=c} = x(0).$$

Следствие 1. Пусть $\text{rang}(\tilde{B}, A\tilde{B}, \dots, A^{n-1}\tilde{B}) < n$. Тогда для того чтобы система

была идеально наблюдаемой, необходимо и достаточно, чтобы

$$1) \operatorname{rang}(h^*, A^*h^*, \dots, A^{n-1}h^*) = n;$$

$$2) \tilde{B} = 0.$$

Пусть $\tilde{B} = b_i$, где b_i — i -й столбец матрицы B . Тогда если система (3) является идеально наблюдаемой, то для любого вектора $b_i \neq 0$ имеет место соотношение

$$\operatorname{rang}(b_i, Ab_i, \dots, A^{n-1}b_i) = n, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Поэтому, если хотя бы для одного вектора $b_{i_0} \neq 0$ имеет место соотношение

$$\operatorname{rang}(b_{i_0}, Ab_{i_0}, \dots, A^{n-1}b_{i_0}) < n,$$

то не существует ни одной идеально наблюдаемой системы с одним выходом.

Используя следствие 1, очевидно, что справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть система $\dot{x} = Ax + Bu$ не является полностью управляемой, т. е. $\operatorname{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) < n$. Тогда множество идеально наблюдаемых систем с одним выходом вида

$$\dot{x} = Ax + Bu; \quad y = hx$$

совпадает с множеством наблюдаемых систем по Калману вида

$$\dot{x} = Ax; \quad y = hx.$$

3. Каноническая форма идеально наблюдаемых систем.

Теорема 2. Любая идеально наблюдаемая система с одним выходом вида

$$\dot{x} = Ax + Bu; \quad y = hx$$

линейно эквивалентна системе вида

$$\dot{z}_1 = z_2;$$

$$\text{---}$$

$$\dot{z}_{n-1} = z_n;$$

$$\dot{z}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i + hA^{n-1}Bu; \quad (8)$$

$$y = z_1,$$

где α_i — коэффициенты характеристического многочлена матрицы A .

Данная теорема является прямым следствием теоремы 1. Система (8) получается из системы (3) путем применения замены (6) с использованием условий (4)—(5).

Система (8) и называется канонической формой идеально наблюдаемых систем с одним выходом.

Автор благодарен В. И. Коробову за обсуждение результата и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский М. С. Идеально наблюдаемые системы. — «Докл. АН СССР», 1970, т. 191, № 6, с. 3—9.
2. Кааман Р. Об общей теории систем. — «Тр. I Конгр. ИФАК», т. 2, Изд-во АН СССР, 1960, с. 12—17.

УДК 513.8

Ю. Л. ГЕВОРКЯН, Т. В. ПАШКОВА

О ПОЛНОТЕ И БАЗИСНОСТИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ В L_p

В работе [1] показано, что система неотрицательных измеримых на $[0, 1]$ функций $\{\varphi_k(t)\}$, удовлетворяющих условиям

$$\|\varphi_k\|_{L_1} \geq \mu > 0, \quad \|\varphi_k\|_{L_p} \leq M < \infty, \quad k = 0, 1, \dots,$$

не является базисом в $L_p[0, 1]$, $p > 1$. В связи с этим естественно возникает следующая проблема. Существует ли в $L_p[0, 1]$, $p > 1$ базис из неотрицательных функций?

В данной работе решаются некоторые вопросы, связанные с полнотой и базисностью систем из неотрицательных функций в пространствах L_p , $p \geq 1$,

1. Положительные системы в L_p

Определение 1. Система называется *сверхполной* в банаховом пространстве E , если она остается полной в E после удаления любого конечного числа элементов.

Определение 2. Система неотрицательных непрерывных на своих носителях функций $\{e_k(t)\}$ называется *телесной*, если

$$\frac{1}{d_k^p} \|e_k\|_E \leq A \|e_k\|_{L_p}, \quad (1)$$

где d_k — мера интервала $\Delta_k = [a_k, b_k]$, носителя функции $e_k(t)$.

Лемма 1. Пусть $\{e_k(t)\}_1^\infty$ дефектно-полная в $L_p[a, b]$ система функций с носителями Δ_k и

$$E = \{x \in [a, b], \exists k_l \uparrow \infty, x \in \Delta_{k_l} \subset [a, b]\}.$$

Тогда $\mu E = b - a$

Доказательство. Пусть $G = [a, b] \setminus E$, имеем $G = \bigcup_1^\infty G_n$, где $G_n = \{x: x \in \bar{d}_m, m > n\}$. Если лемма неверна, то $\mu G > 0$, следовательно, существует s такое, что $\mu G_s > 0$. На множестве G_s все функции системы $\{e_k(t)\}_1^\infty$, кроме конечного числа, равны нулю.

Пусть $L_p(G_s)$ — подпространство в L_p , состоящее из всех функций из L_p , равных нулю вне G_s . Так как оно бесконечномерно, то система $\{e_k(t)\}_1^\infty$ не является дефектно-полной для

$L_p(G_s)$, что не соответствует условию леммы. Полученное противоречие доказывает лемму.

На основании рассуждений леммы легко доказывается следующая

Теорема 1. Пусть $\{e_k(t)\}_1^\infty$ — произвольная последовательность функций обладает свойством $\sum_1^\infty d_k < \infty$, где d_k — мера носителя функций $e_k(t)$, тогда $\{e_k(t)\}_1^\infty$ неполна в $L_p[a, b]$, более того, замыкание линейной оболочки $L_p\{e_k(t)\}$ имеет бесконечную коразмерность в $L_p[a, b]$.

Действительно, найдется такое n , что $\sum_{n+1}^\infty d_i < b - a$. Обозначив $G = [a, b] \setminus \bigcup_{n+1}^\infty \Delta_i$, рассуждениями, аналогичным предыдущим, получим утверждение теоремы.

Теорема 2. Если система неотрицательных непрерывных функций $\{z_k(t)\}_1^\infty$ полна в L_p , телесна и $\lim d_k = 0$, то система сверхполна в L_p .

Доказательство. Пусть $\{e_k(t)\}_1^\infty$ — система, полученная из $\{z_k(t)\}_1^\infty$ путем выбрасывания конечного числа элементов. Докажем, что $\{e_k(t)\}_1^\infty$ полна в P -подмножестве кусочно-постоянных неотрицательных функций в $L_p[a, b]$. Известно, что замыкание линейной оболочки $L(P) = L_p[a, b]$.

Пусть $f(t) \in P$, т. е. $f(t) = \sum_1^m M_i \chi_i$, где χ_i — характеристическая функция сегмента Δ_i .

Внутри Δ_i выделим множество $E_i = \{x \in \Delta_i, \exists k_j \uparrow \infty, x \subset \Delta_{k_j} \subset \Delta_i\}$, здесь сегмент Δ_{k_j} носитель функции e_{k_j} . По лемме 1 E_i имеет полную меру в Δ_i . E_i покрыто системой сегментов в смысле Витали и по теореме Витали существует такая подпоследовательность попарно-непересекающихся сегментов, которая покрывает E_i с точностью до множества меры нуль.

Пусть

$$g_i(t) = \sum_j M_i \frac{t_{ij}(t)}{\|e_{ij}\|_C}, \quad g(t) = \sum_1^m g_i(t),$$

где $e_{ij}(t)$ — те функции системы $\{e_k(x)\}_1^\infty$, которые отвечают полученной по теореме Витали последовательности попарно-непересекающихся сегментов. Очевидно, $g_i(t) \leq f_i(t)$. Используя (1) и неперекрываемость носителей e_{ij} , можно дать оценку

$$\|g_i\|_{L_p}^p = M_i^p \sum_j \frac{\|e_{ij}\|_{L_p}^p}{\|e_{ij}\|_C^p} \geq \frac{M_i^p}{A^p} \sum \frac{\|e_{ij}\|_{L_p}^p}{\|e_{ij}\|_{L_p}^p} = \frac{M_i^p}{A^p} d_i.$$

Поскольку $\|f_i\|_{L_p}^p = M_i d_i$, то $\|g_i\|_{L_p}^p \geq \frac{\|f_i\|^p}{A^p}$.

Очевидно, если $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $p \geq 1$; $\lambda + \mu = 1$, то $\lambda^p + \mu^p \leq 1$. Отсюда легко следует, что если $f(t) \geq g(t) > 0$, то

$$\|f(t) - g(t)\|_{L_p}^p \leq \|f\|_{L_p}^p - \|g\|_{L_p}^p \leq \|f\|_{L_p}^p \left(1 - \frac{1}{A^p}\right),$$

т. е. $\|f - g\|_{L_p} \leq \alpha \|f\|$, где $\alpha = \sqrt[p]{1 - \frac{1}{A^p}} < 1$.

Таким образом, можно утверждать, что кусочно-постоянная функция $f(t)$ аппроксимирована функциями типа $g_i(t)$. Если бы это было не так, то по лемме Рисса о «почти ортогональном элементе» существовала бы функция $f(t)$ такая, что

$$\rho(f(t), \{g_i(t)\}_1^\infty) > (1 - \varepsilon) \|f\|_{L_p}$$

а это противоречит последнему полученному неравенству.

2. Полнота шаудеровых систем в L_1 .

Рассмотрим в $C[0, 1]$ последовательность функций

$$0 = \varphi^0(0) \leq \varphi^0(x) \leq \varphi^0(1) = 1; \quad 0 = \varphi^1(1) \leq \varphi^1(x) \leq \varphi^1(0) = 1;$$

$$0 \leq \varphi_{nk}(x) \leq 1; \quad \varphi_{nk}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) = 1; \quad \varphi_{nk}(x) = 0, \quad x \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right); \quad (2)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad k = 0, 1, \dots, (2^n - 1).$$

Систему (2) назовем серийной, если

$$\varphi_{nk}(x) = \varphi_{n0}\left(x - \frac{k}{2^n}\right), \quad x \in \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right). \quad (3)$$

Систему (3) назовем однотипной, если

$$\varphi_{nk}(x) = \varphi(2^n x - k), \quad x \in \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right). \quad (4)$$

Достаточные условия базисности в $C[0, 1]$ гладких и однотипных систем (4) рассмотрены в [2].

Пусть в $C[0, 1]$ задана последовательность выпуклых вниз функций $\{\varphi_n(x)\}$ таких, что

$$0 \leq \varphi^0(0) \leq \varphi^0(x) \leq \varphi^0(1) = 1;$$

$$\varphi^1(x) = \varphi^0(1 - x);$$

$$0 \leq \varphi_n(0) \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_n(1) = 1. \quad (5)$$

С помощью последовательности (5) построим серийную пикобразную шаудерову систему функций $\varphi^0(x)$, $\varphi^1(x)$

$$\varphi_{nk} = \begin{cases} \varphi_n(2^{n+1}x - 2k), & \frac{2}{2^n} \leq x \leq \frac{2k+1}{2^{n+1}} \\ \varphi_n(2k+2 - 2^{n+1}x), & \frac{2k+1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{k+1}{2^n} \\ 0 & \text{в остальных точках} \end{cases} \quad (6)$$

Пусть

$$\begin{aligned} f(x) &\in C[0, 1], \\ f_0(x) &= f(x) - \alpha^0 \varphi^0(x) - \alpha^1 \varphi^1(x); \\ f_1(x) &= f_0(x) - \alpha_{00} \varphi_{00}(x); \\ f_{n+1}(x) &= f_n(x) - \sum_{k=0}^{2^n-1} \alpha_{nk} \varphi_{nk}(x), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\alpha^0 = f(1), \quad \alpha^1 = f(0), \quad \alpha_{nk} = f\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right).$$

Таким образом, всякой непрерывной функции $f(x)$ соответствует ряд Шаудера

$$f(x) \sim \alpha^0 \varphi^0(x) + \alpha^1 \varphi^1(x) + \sum_n \sum_k \alpha_{nk} \varphi_{nk}(x). \quad (8)$$

Теорема 3. Для того, чтобы ряд Шаудера каждой выпуклой вверх функции сходиллся к ней в метрике L_1 , необходимо и достаточно, чтобы система (5), порождающая систему (6), обладала свойством $\sum_1^\infty \tau_n = \infty$,

где

$$\tau_n = \int_0^1 \varphi_n(t) dt. \quad (9)$$

Доказательство. Если $f(x) \in C[0,1]$ выпукла вверх, то все разности (7) между функцией и частными суммами ее шаудерова ряда равны нулю в узлах интерполяции и выпуклы вверх между соседними узлами, как разность между выпуклой вверх и выпуклой вниз функциями. Следовательно,

$$\alpha_{nk} \geq 0 \text{ и } 0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x).$$

Пусть

$$\sigma_{nk} = \int_{d_{nk}} f_n(t) dt, \quad (10)$$

где $f_n(x)$ определяется по (7) для $f(x)$ $d_{nk} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right]$. Если $x \in d_{nk}$, то

$$0 \leq f_{n+1}(x) = f_n(x) - \alpha_{nk} \varphi_{nk}(x). \quad (11)$$

Легко показать, что для $f_n(x)$ на сегменте d_{nk} имеет место оценка

$$\frac{\sigma_{nk}}{2} \leq \alpha_{nk} d_{nk} \leq 2\sigma_{nk}. \quad (12)$$

Из (10) — (12) имеем

$$\int_{d_{nk}} f_{n+1}(t) dt = \sigma_{nk} - \alpha_{nk} \Delta_{nk} \tau_{nk} \leq \sigma_{nk} -$$

$$-\frac{\sigma_{nk}}{2}\tau_n = \sigma_{nk}\left(1 - \frac{\tau_n}{2}\right);$$

$$\int_{d_{nk}} f_{n+1}(t) dt \geq \sigma_{nk} - 2\sigma_{nk}\tau_n = \sigma_{nk}(1 - 2\tau_n)$$

Просуммируем по всем k -отрезкам n -й серии

$$S_{n+1} = \int_0^1 f_{n+1}(t) dt \leq S_n \left(1 - \frac{\tau_n}{2}\right),$$

$$S_{n+1} \geq S_n(1 - 2\tau_n), \quad \text{откуда}$$

$$S_0 \prod_1^n (1 - 2\tau_i) \leq S_{n+1} \leq S_0 \prod_1^n \left(1 - \frac{\tau_i}{2}\right). \quad (13)$$

Пусть система обладает свойством (9). Тогда $\prod_1^\infty \left(1 - \frac{\tau_i}{2}\right) = 0$ и ряд Шаудера по системе (6) сходится в метрике L_1 . Пусть ряд Шаудера по системе (6) какой-нибудь выпуклой вверх функции сходится к ней в метрике L_1 , т. е. S_{n+1} стремится к нулю. Из (13) следует свойство (9).

Учитывая, что множество выпуклых вверх функции полно в C , а значит и в L_1 , получаем

Следствие. Если система (6) обладает свойством (9), то она полна в L_1 .

Теорема 4. Никакая полная и L_p серийная шаудерова система (3) не минимальна в L_p и, значит, не может быть базисом в L_p .

Идея доказательства базируется на следующем очевидном факте. Пусть имеем $L_p[a, b]$; для всякой точки $c \in [a, b]$ пространство $L_p[a, b]$ допускает разложение в прямую сумму $L_p[a, b] = L_p[a, c] \oplus L_p[c, b]$, при этом если система $\{e_k(x)\}_1^\infty$ полна в $L_p[a, c]$, а $\{g_k(x)\}_1^\infty$ полна в $L_p[c, b]$, то $\{e_k(x), g_k(x)\}_1^\infty$ полна в $L_p[a, b]$ метрике L_p . Если же замыкание линейной оболочки $L_p\{e_k(x)\}_1^\infty$ имеет коразмерность m , а $L_p\{g_k(x)\}_1^\infty$ имеет n , то $L_p\{e_k(x), g_k(x)\}_1^\infty$ имеет коразмерность $m + n$.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}_4^\infty$ — серийная шаудерова система со сквозной нумерацией, пусть из неё удалены первые три функции. Система $\{\varphi_n(x)\}_4^\infty$ распадается на две аналогичные по структуре системы $\{\varphi_n^1(x)\}_4^\infty$ и $\{\varphi_n^2(x)\}_4^\infty$, заданные соответственно на интервалах $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Обозначим коразмерность замыкания линейных оболочек $L_p\{\varphi_n^1(x)\}_4^\infty = L_p\{\varphi_n^2(x)\}_4^\infty = m$, они равны в силу идентичности систем $L_p\{\varphi_n(x)\}_4^\infty = 2m$.

Пусть $m \geq 2$. Тогда $\text{codim } L_p\{\varphi_n(x)\}_4^\infty \geq 4$, а исходная система была полна и потеряла всего три функции, т. е. $\text{codim } L_p\{\varphi_n(x)\}_4^\infty < 3$, а значит $m \geq 2$.

Пусть $m \leq 1$. Тогда $L_p\{\varphi_n(x)\}_4^\infty \leq 2$, а выброшены три функции, следовательно, исходная система не минимальна. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелитиди М. А. О базисах в пространствах C и L_p . — «Математические заметки», 1971, 10, № 6, с. 635 — 640.
2. Чантурия З. А. О базисах пространства непрерывных функций — «Математический сборник», 87 (130) : 4 (8), (1972), с. 589 — 608.

УДК 512.9

Г. Ч. КУРИННОЙ

УСЛОВИЕ ИЗОМОРФИЗМА КОНЕЧНЫХ МОДУЛЯРНЫХ РЕШЕТОК

Настоящая статья посвящена перенесению на случай конечных модулярных решеток одного из результатов статьи [1].

В дальнейшем знаки $>$ и $\geq$ имеют общепринятый смысл, $\cup$ и $\cap$ используются для обозначения операций объединения и пересечения соответственно. Кроме того, используются следующие обозначения:

L, L_1, L_2 — конечные модулярные решетки;

$N_1(L)$ — множество неразложимых в объединение элементов решетки L ;

$$N_2(L) = \{x \in L : x = x_1 \cup x_2; \quad x_1, x_2 \in N_1(L)\};$$

$1(L)$ — максимальный и $0(L)$ — минимальный элементы решетки L ;

$a \xi b$ — элемент $a \in L$ покрывает элемент $b \in L$.

Если $x, y \in L$, то

$$[x, y] = \{z \in L : x \leq z \leq y\};$$

$$x^* = \begin{cases} \cup z, & \text{если } x \neq 1(L), \\ z \xi x, & \\ 1(L), & \text{если } x = 1(L); \end{cases}$$

$$x_* = \begin{cases} \cap z, & \text{если } x \neq 0(L), \\ z \xi x, & \\ 0(L), & \text{если } x = 0(L); \end{cases}$$

$n(x)$ — наибольшая длина цепочки:

$$x_* = y_1 > y_2 > \dots > y_n = 0(L)$$

где $(y_i)_* = y_i$ для $i = 2, 3, \dots, n-1$.

Теорема. Конечные модулярные решетки L_1 и L_2 изоморфны тогда и только тогда, когда $N_2(L_1)$ и $N_2(L_2)$ изоморфны как частично упорядоченные множества.

Доказательство. Очевидно, при изоморфизме решетки L_1 на решетку L_2 образом $N_2(L_1)$ является $N_2(L_2)$, откуда $N_2(L_1)$ и $N_2(L_2)$ изоморфны.

Пусть $\varphi: N_2(L_1) \rightarrow N_2(L_2)$ изоморфизм $N_2(L_1)$ на $N_2(L_2)$, рассматриваемых как частично упорядоченные множества. Если $x_1, \dots, x_k \in N_2(L_1)$, то полагаем

$$\psi(x_1 \cup \dots \cup x_k) = \varphi(x_1) \cup \dots \cup \varphi(x_k). \quad (1)$$

Это отображение, вообще говоря, не является однозначным, так как образ элемента из L_1 может зависеть от того, как этот элемент представлен в виде объединения. Очевидно, ψ будет сюръективным отображением множества L_1 на множество L_2 .

Доказательство того, что ψ является изоморфизмом, проведем методом индукции по $n(x)$, где $x \in L_1$.

Лемма 1. Если L_1 и L_2 — конечные модулярные решетки с дополнениями, и $\varphi(N_2(L_1) \rightarrow N_2(L_2))$ изоморфизм частично упорядоченного множества $N_2(L_1)$ на частично упорядоченное множество $N_2(L_2)$, то φ однозначно продолжается до изоморфизма L_1 на L_2 .

Утверждение леммы 1 следует из теоремы 2 в [1]. Оно может быть также получено с помощью основной теоремы проективной геометрии [2].

Лемма 2. Если $x, y \in L$ и $y \in N_2([x_*, x])$, то либо $n(y) < n(x)$, либо $y \in N_2(L)$.

Доказательство. Так как $y \leq x$, то $y_* \leq x_*$ и $n(y) \leq n(x)$. Из того, что для всех $z \in L$ справедливо равенство $((z_*)^*)_* = z_*$ (см. [3]), следует, что если $n(y) = n(x)$, то $x_* = y_*$.

Пусть $x, y \in L$ такие, что $y \in N_2([x_*, x])$ и $y_* = x_*$. Если $y = x_*$, то $y_* = x_* = 0(L)$ и $y \in N_2(L)$. Если $y > x_*$, то можно считать, что $y = x_1 \cup x_2$, где $x_1 \not\leq x_*$ и $x_2 \not\leq x_*$. По доказанному в [4] существуют $y_1, y_2 \in N_2(L)$ такие, что $x_1 = y_1 \cup x_*$ и $x_2 = y_2 \cup x_*$. Очевидно, $y_1 \cup y_2 \leq y$ и $y_1 \cup y_2 \neq x_*$. Взяв цепь $y_1 \cup y_2 = z_1 \rightarrow \dots \rightarrow z_k = y$ и используя то, что $y_* = x_*$, получаем $y_1 \cup y_2 = y$ и $y \in N_2(L)$.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $x, x_1, x_2 \in L$ и $x = x_1 \cup x_2$. Тогда $x_* = (x_1)_* \cup (x_2)_*$.

Доказательство. Поскольку $x_1 \leq x$, то $(x_1)_* \leq x_*$ и $(x_1)_* \cup (x_2)_* \leq x_*$. (2)

Так как $(x_1)_* \cup (x_2)_* \leq x$ и $((x_1)_* \cup (x_2)_*)^* \geq \bigcup_{y \not\leq (x_1)_*} (y \cup (x_2)_*) \cup \bigcup_{y \not\leq (x_2)_*} (y \cup (x_1)_*) \geq ((x_1)_*)^* \cup ((x_2)_*)^* \geq x$, то $[(x_1)_* \cup (x_2)_*, x]$ — ко-

нечная модулярная решетка с дополнениями и $x_* \leq (x_1)_* \cup (x_2)_*$. Принимая во внимание (2), получаем утверждение леммы 3.

Лемма 4. Если $x, y \in L$; $x \geq y$ и $y \in N_2(L)$, то $y \cup x_* \in N_2([x_*, x])$.

Доказательство. Пусть $y = y_1 \cup y_2$, где $y_1, y_2 \in N_1(L)$. Поскольку $x_* \geq y_* \geq (y_1)_*$ и $x_* \geq y_* \geq (y_2)_*$, то $y_1 \cup x_* \in N_1([x_*, x])$ и $y_2 \cup x_* \in N_1([x_*, x])$. Отсюда следует, что $y_1 \cup y_2 \cup x_* \in N_2([x_*, x])$.

Пусть известно, что ψ устанавливает изоморфизм между частично упорядоченными множествами $\{x \in L_1 : n(x) < k\}$ и $\{y \in L_2 : n(y) < k\}$.

Лемма 5. Если $x \in L_1$, $n(x) = k$ и $x = x_1 \cup \dots \cup x_r = y_1 \cup \dots \cup y_s$, где $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s \in N_2(L)$, то $\psi(x_1 \cup \dots \cup x_r) = \psi(y_1 \cup \dots \cup y_s)$.

Доказательство. Используя лемму 3, можно проверить, что $\psi(x_*) \leq \psi(x_1 \cup \dots \cup x_r)$ и $\psi(x_*) \leq \psi(y_1 \cup \dots \cup y_s)$. Отсюда $\psi(x_1 \cup \dots \cup x_r) = \psi(x_1 \cup \dots \cup x_r \cup x_*)$ и $\psi(y_1 \cup \dots \cup y_s) = \psi(y_1 \cup \dots \cup y_s \cup x_*)$. По лемме 2 ψ устанавливает изоморфизм между частично упорядоченными множествами $N_2([x_*, (x_*)^*])$ и $N_2([\psi(x_*), (\psi(x_*))^*])$. Используя лемму 4 и лемму 1, получаем утверждение леммы 5. Тем самым доказано, что на множестве $\{x \in L_1 : n(x) < \kappa\}$ отображение ψ является однозначным.

Пусть $y \in L_2$, $n(y) = \kappa$ и x — прообраз элемента y_* . Он существует, так как $n(y_*) < k$. Так как $[x, x^*]$ и $[y_*, (y_*)^*]$ — решетки с дополнениями (см. [3]), то, используя лемму 2, получаем, что ψ устанавливает изоморфизм между ними и y является образом какого-то элемента из L_1 .

Если $x_1, x_2 \in L_1$; $n(x_1) = n(x_2) = k$ и $\psi(x_1) = \psi(x_2)$, то, используя лемму 3, можно получить $\psi((x_1)_*) = \psi((x_2)_*) = (\psi(x_1))_* = (\psi(x_2))_*$. Предыдущие рассуждения дают равенство $(x_1 = x_2)$. То, что ψ сохраняет порядок, следует из определения отображения ψ .

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анищенко С. А. Условия изоморфизма некоторых модулярных структур. — «Сиб. мат. ж.», 1968, 9, № 4, с. 747—751.
2. Артин Э. Геометрическая алгебра. М., «Наука», 1969. 80 с.
3. Куринной Г. Ч. Об одном классе конечных модулярных решеток. — «Труды зонального объединения математических кафедр Сибири». Вып. 2, Алгебра, 1972, с. 64—74.
4. Avann S. P. Upper and lower complementation in a modular lattice. — «Proc. of the Amer. Mathematical Society», 1960, vol. 11, № 1, p. 17—23.

УДК 512.9

Г. Ч. КУРИННОЙ

О РАСШИРЕНИЯХ КОНЕЧНЫХ МОДУЛЯРНЫХ СТРУКТУР

1. Известно (см. [1, с. 115, теорема 7. 3]), что каждая Ω -алгебра является подпрямым произведением подпрямо неразложимых алгебр. Так как конечные модулярные структуры можно рассматривать как Ω -алгебра, то к ним применима эта теорема. Вопрос о представлении заданной модулярной структуры в виде подпрямого произведения модулярных структур, не допускающих нетривиальных отношений конгруэнтности, рассматривался также в [2].

Целью настоящей работы является нахождение всех конечных модулярных структур L , которые являются подпрямым произведением двух заданных конечных модулярных структур L_1 и L_2 .

В статье используются обозначения и терминология, принятые в [1]. Для обозначения минимального и максимального

элементов структуры L будут использоваться соответственно символы $0(L)$ и $1(L)$.

2. Теорема 1. Пусть q и r — две конгруэнции конечной модулярной структуры L . Введем на L отношение p , полагая: при $x, y \in L$ $(x, y) \in p$ тогда и только тогда, когда существует подмножество $\{z_0 = x, z_1, \dots, z_n = y\}$ структуры L такое, что для всех $k: 0 \leq k \leq n-1$ $z_k \equiv z_{k+1} \pmod q$ или $z_k \equiv z_{k+1} \pmod r$. Тогда отношение p является конгруэнтностью и $p = q \vee r$.

Доказательство. Очевидно, p обладает свойствами симметричности, рефлексивности, транзитивности и является отношением эквивалентности. Поэтому для доказательства того, что p является конгруэнтностью, достаточно показать, что если $x_1, x_2, y_1, y_2 \in L$;

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in p, \text{ то } (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2) \in p \text{ и } (x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2) \in p.$$

Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in p$. По определению отношения p существует подмножество такое $\{z_0 = x_1, z_1, \dots, z_n = y_1\}$ структуры L , что для всех $k: 0 \leq k \leq n-1$ выполняется $z_k \equiv z_{k+1} \pmod q$ или $z_k \equiv z_{k+1} \pmod r$. Допустим для некоторого $k: 0 \leq k \leq n-1$ $z_k \equiv z_{k+1} \pmod q$. Так как q конгруэнтность, то $x_2 \equiv z_2 \pmod q$ и $z_k \vee x_2 \equiv z_{k+1} \vee x_2 \pmod q$, $z_k \wedge x_2 \equiv z_{k+1} \wedge x_2 \pmod q$. Точно так же, если для некоторого $k: 0 \leq k \leq n-1$ $z_k \equiv z_{k+1} \pmod r$, то $z_k \vee x_2 \equiv z_{k+1} \vee x_2 \pmod r$ и $z_k \wedge x_2 \equiv z_{k+1} \wedge x_2 \pmod r$. Отсюда следует, что $(x_1 \vee x_2, y_1 \vee x_2) \in p$ и $(x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge x_2) \in p$. Аналогично проверяется, что $(x_2 \vee y_1, y_2 \vee y_1) \in p$ и $(x_2 \wedge y_1, y_2 \wedge y_1) \in p$. Так как p обладает свойством транзитивности, то $(x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2) \in p$ и $(x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2) \in p$. Тем самым показано, что p является конгруэнтностью.

Из определения отношения p видно, что $p \supseteq q$ и $p \supseteq r$, т. е. $p \supseteq q \vee r$. Пусть p_1 — конгруэнция структуры L , обладающая свойством: $p_1 \supseteq q \vee r$. Возьмем элементы $x, y \in L$ такие, что $x, y \in p$. Тогда существует такое множество $\{z_0 = x, z_1, \dots, z_n = y\}$ элементов структуры L , что при $k: 0 \leq k \leq n-1$ $z_k \equiv z_{k+1} \pmod q$ или $z_k \equiv z_{k+1} \pmod r$. Так как $p_1 \supseteq q$, $p_1 \supseteq r$, то для всех $k: 0 \leq k \leq n-1$ $z_k \equiv z_{k+1} \pmod{p_1}$ и $(x, y) \in p_1$. Отсюда заключаем, что $p_1 \supseteq p$ и $p = q \vee r$.

Пусть конечная модулярная структура L является подпрямым произведением конечных модулярных структур L_1 и L_2 , т. е. $L \subseteq L_1 \times L_2$ и естественные проекции $\varepsilon_1: L \rightarrow L_1$ и $\varepsilon_2: L \rightarrow L_2$ являются эпиморфизмами.

Определим конгруэнции q и r структуры L следующим образом: если $x_1, x_2 \in L_1$; $y_1, y_2 \in L_2$; $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L$, то

$$(x_1, y_1) \equiv (x_2, y_2) \pmod q \quad (1)$$

при $x_1 = x_2$ и

$$(x_1, y_1) \equiv (x_2, y_2) \pmod r \quad (2)$$

при $y_1 = y_2$.

Очевидно, $q \wedge r = \Delta(L)$.

Пусть $p = q \vee r$. Каждый p -класс P определяет множество

$$S(P) = \{y \in L_2 : x \in L_1, (x, y) = z \in L \Rightarrow (z, z) \in P\}.$$

В силу теоремы 1 множества $S(P)$ можно рассматривать как классы конгруэнтности некоторой конгруэнции s структуры L_2 .

Теорема 2. Если структура L_2 подпрямой неразложима, то либо L изоморфна структуре L_1 , либо $q \vee r = L^2$.

Доказательство. Если L_2 подпрямой неразложимая структура, то либо

$$s = \Delta(L_2), \quad (3)$$

либо

$$s = L_2^2. \quad (4)$$

Пусть выполняется (3). Тогда для каждого $x \in L_1$ существует единственный элемент $y \in L_2$ такой, что $(x, y) \in L$. Отсюда следует, что проекция $\epsilon_1 : L \rightarrow L_1$ является мономорфизмом. Так, по определению подпрямого произведения ϵ_1 является эпиморфизмом, то это отображение является изоморфизмом.

Пусть $s = L_2^2$. Так как отображения $\epsilon_1 : L \rightarrow L_1$ и $\epsilon_2 : L \rightarrow L_2$ являются эпиморфизмами, то существуют элементы $x \in L_1$ и $y \in L_2$ такие, что $(1(L_1), y) \equiv z_1 \in L$ и $(x, 1(L_2)) = z_2 \in L$. Отсюда получаем, что $(1(L_1), 1(L_2)) = z_1 \vee z_2 \in L$. Аналогично проверяем, что $(0(L_1), 0(L_2)) \in L$. Так как $0(L_2) \equiv 1(L_2) \pmod{s}$, то $(1(L_1), 1(L_2)) \equiv (0(L_1), 0(L_2)) \pmod{p}$. Отсюда следует, что $p = L^2$.

Теорема 2 доказана.

3. Пусть конечная модулярная структура L является подпрямым произведением конечных модулярных структур L_1 и L_2 , причем конгруэнции q и r , определенные с помощью (1) и (2), удовлетворяют условию

$$q \vee r = L^{21}. \quad (5)$$

В дальнейшем будем отождествлять q -класс элемента $(x, y) \in L$ с x , а его r -класс с y .

Теорема 3. Конгруэнции q и r определяют множества A_1 и A_2 интервалов структур L_1 и L_2 соответственно такие, что при $i = 1, 2$:

а) если L_i состоит из одного элемента, то A_i состоит из одного интервала, равного L_i . Если L_i содержит более одного элемента, то для каждого простого (не содержащего нетривиальных подинтервалов) интервала $[x, y] \subseteq L_i$ существует интервал $[a, b] \in A_i$ такой, что $[x, y] \subseteq [a, b]$;

б) если $[a_1, b_1], [a_2, b_2] \in A_i$ и $a_1 \geq a_2$, то $b_1 \geq b_2$, причем, если $a_1 = a_2$, то $b_1 = b_2$;

в) если $[a_1, b_1], [a_2, b_2] \in A_i$, то существует интервал $[a_3, b_3] \in A_i$ такой, что $a_3 = a_1 \wedge a_2$;

¹ Применяя теорему 2, легко видеть, что представляет интерес изучение только этого случая.

г) если $[a_1, b_1], [a_2, b_2] \in A_i$, то существует интервал $[a_3, b_3] \in A_i$ такой, что $a_3 \geq a_1 \vee a_2$ и $b_3 = b_1 \vee b_2$.

Доказательство. Если $y \in L_2$; $x_1, x_2 \in L_1$; $(x_1, y) = z_1$, $(x_2, y) = z_2 \in L$, то $(x_1 \wedge x_2, y) = z_1 \wedge z_2 \in L$ и $(x_1 \vee x_2) \in L$. Пусть элемент $x \in L_1$ и $x_1 \geq x \geq x_2$. В силу того что естественная проекция $\varepsilon_1: L \rightarrow L_1$ является эпиморфизмом, существует элемент $y_0 \in L_2$ такой, что $(x, y_0) = z_0 \in L$. Так как $(x, y) = z_2 \vee (z_1 \wedge z_0)$, то $(x, y) \in L$. Отсюда заключаем, что каждый элемент $y \in L_2$ определяет интервал

$$[a(y), b(y)] = \{x \in L_1 : (x, y) \in L\}$$

структуры L_1 . Аналогично, каждый элемент $x \in L_1$ определяет интервал

$$[a(x), b(x)] = \{y \in L_2 : (x, y) \in L\}$$

структуры L_2 .

Введем обозначения:

$B_1 = \{a, b\} \subseteq L_1 : [a, b] = [a(y), b(y)]$ для некоторого $y \in L_2$, $B_2 = \{[a, b] \subseteq L_2 : [a, b] = [a(x), b(x)]$ для некоторого $x \in L_1\}$, и $A_1 = \{[a, b] \in B_1 : [a, b_1] \in B_1 \Rightarrow b_1 \geq b\}$, $A_2 = \{[a, b] \in B_2 : [a, b_1] \in B_2 \Rightarrow b_1 \geq b\}$.

Покажем, что множества интервалов A_1 и A_2 удовлетворяют условиям теоремы. Ввиду того что A_1 и A_2 определены симметричным образом, для доказательства теоремы 3 достаточно проверить, что A_1 удовлетворяет условиям а, б, в и г.

Пусть $y_1, y_2 \in L_2$. Рассмотрим четыре интервала $[a(y_1), b(y_1)]$, $[a(y_2), b(y_2)]$, $[a(y_1 \vee y_2), b(y_1 \vee y_2)]$, $[a(y_1 \wedge y_2), b(y_1 \wedge y_2)]$. Так как $(a(y_1), y_1) \wedge (a(y_2), y_2) = (a(y_1) \wedge a(y_2), y_1 \wedge y_2)$ и $(b(y_1), y_1) \wedge (b(y_2), y_2) = (b(y_1) \wedge b(y_2), y_1 \wedge y_2)$, то

$$a(y_1 \wedge y_2) \geq a(y_1) \wedge a(y_2) \quad (6)$$

и

$$b(y_1 \wedge y_2) \leq b(y_1) \wedge b(y_2). \quad (7)$$

С другой стороны,

$(a(y_1), y_1) \vee (a(y_1 \vee y_2), y_1 \vee y_2) = (a(y_1) \vee a(y_1 \vee y_2), y_1)$, откуда видно, что $a(y_1) \geq a(y_1 \wedge y_2)$. Аналогично получаем неравенство $a(y_2) \geq a(y_1 \wedge y_2)$. Принимая во внимание (6), можно записать

$$a(y_1 \wedge y_2) = a(y_1) \wedge a(y_2). \quad (8)$$

Проводя двойственные рассуждения, можно проверить, что

$$b(y_1 \vee y_2) = b(y_1) \vee b(y_2) \quad (9)$$

и

$$a(y_1 \vee y_2) \geq a(y_1) \vee a(y_2). \quad (10)$$

Из (7) и (8) следует, что каждый интервал $[a(y_0), b(y_0)] \in B_1$ определяет интервал $[a(y_1), b(y_1)] \in B_1$, где y_1 — точная нижняя грань тех $y \in L_2$, для которых $a(y) = a(y_1)$. Формулы (7), (8), (9) и (10) позволяют заключить, что A_1 удовлетворяет условиям б, в, г.

Пусть $[x_1, x_2]$ — простой интервал структуры L_1 , $z_1^2, z_2^2 \in L$ и $z_1^2 \in x_1, z_2^2 \in x_2$. (Напомним, что элементы структуры L_1 мы можем рассматривать как q -классы, а элементы структуры L_2 — как r -классы элементов структуры L).

Так как $x_1 > x_2$, то $z_1^2 \vee z_2^2 = z_1^1 \in x_1$ и $z_1^1 \wedge z_2^1 = z_2^1 \in x_2$. Из того, что интервал $[x_1, x_2]$ простой, следует, что существуют элементы z_1 и z_2 такие, что $z_1 \in x_1, z_2 \in x_2, z_1^1 \geq z_1 > z_2 \geq z_2^1$ и интервал $[z_1, z_2]$ простой. Для доказательства того, что A_1 удовлетворяет условию а), достаточно проверить, что $z_1 \equiv z_2 \pmod r$. Действительно, тогда r -класс элемента z_1 совпадает с r -классом элемента z_2 . Обозначим его через y . Тогда $(x_1, y) = (x_2, y)$ и $[x_1, x_2] \subseteq [a(y), b(y)]$. Интервал $[a(y), b(y)]$ определяет, как было сказано выше, интервал $[a, b] \in A_1$ такой, что $a(y) = a$ и $b(y) = b$. Отсюда следует, что $[x_1, x_2] \subseteq [a, b]$.

Рассмотрим интервал $[t_1, t_2]$, являющийся минимальным элементом в частично упорядоченном множестве интервалов структуры L , проективных к $[z_1, z_2]$. Элемент t_1 является неразложимым в объединение элементом структуры L (см. [3, лемма 1]). Из того, что $p = q \vee r = L^2$, следует, что $t_1 \equiv t_2 \pmod p$. По теореме 1 это значит, что существуют элементы $t_1 = t^0, t^1, \dots, t^n = t_2$ структуры L такие, что $t^k \equiv t^{k+1} \pmod q$ или $t^k \equiv t^{k+1} \pmod r$ для всех $k: 0 \leq k \leq n-1$. Так как каждый q -класс и каждый r -класс является интервалом структуры L , то можно считать, что при $k: 0 \leq k \leq n-1$ либо $[t^k, t^{k+1}]$, либо $[t^{k+1}, t^k]$ является простым интервалом структуры L .

Так как $t^0 > t^n$, то найдется $m \in \{0, 1, \dots, n\}$ такое, что $t^m \geq t_1$, а $t^{m+1} \not\geq t_1$. Из того, что интервал $[t^m, t^{m+1}]$ простой и t_1 неразложимый в объединение элемент структуры L , следует, что $t^{m+1} \vee t_1 = t^m$ и $t^{m+1} \wedge t_1 = t_2$, т. е. интервалы $[t^m, t^{m+1}]$ и $[t_1, t_2]$ проективны. Если $t^m \equiv t^{m+1} \pmod q$, то $t_1 \equiv t_2 \pmod q$ и $z_1 \equiv z_2 \pmod q$. Но z_1 и z_2 принадлежат различным q -классам x_1 и x_2 . Следовательно, $t^m \equiv t^{m+1} \pmod r, t_1 \equiv t_2 \pmod r$ и $z_1 \equiv z_2 \pmod r$. Теорема 3 доказана.

Определим на A_i ($i = 1, 2$) отношение частичного порядка, полагая, если $[a_1, b_1], [a_2, b_2] \in A_i$, то $[a_1, b_1] \geq [a_2, b_2]$ при $a_1 \geq a_2$. Принимая во внимание б, в и г, частично упорядоченные множества A_1 и A_2 , можно считать структурами, причем для всех $[a_1, b_1], [a_2, b_2] \in A_i$, если $[a_3, b_3] = [a_1, b_1] \wedge [a_2, b_2]$, то $a_3 = a_1 \wedge a_2$ и $b_3 \leq b_1 \wedge b_2$. Если $[a_3, b_3] = [a_1, b_1] \vee [a_2, b_2]$, то $b_3 = b_1 \vee b_2$ и

$$a_3 = \bigwedge_{[a, b] \in A_i: a \geq a_1 \vee a_2} a \quad (11)$$

Теорема 4. Конгруэнции q и r определяют отображения $\varphi_i: A_i \rightarrow L_j$ ($i, j = 1, 2; i \neq j$) такие, что

б) если $[a_1, b_1], [a_2, b_2] \in A_i$, то $\varphi_i([a_1, b_1] \vee [a_2, b_2]) = \varphi_i([a_1, b_1]) \vee \varphi_i([a_2, b_2])$;

е) если $[a, b] \in A_i$ и $[c, d]$ — точная нижняя грань элементов структуры A_i , содержащих $\varphi_i([a, b])$, то $\varphi_i([c, d]) = b$;

ж) если $[a_1, b_1], [a_2, b_2] \in A_i$ и $[a_1, b_1] \neq [a_2, b_2]$, то $\varphi_i([a_1, b_1]) \neq \varphi_i([a_2, b_2])$.

Доказательство. Как и теорему 3 теорему 4 можно доказывать лишь при $i = 1, j = 2$.

Определим отображение $\varphi_1: A_1 \rightarrow L_2$ следующим образом: если $[a, b] \in A_1$, то $\varphi_1([a, b])$ равно точной нижней грани тех элементов $y \in L_2$, для которых $a(y) = a$. (Отображение $\varphi_2: A_2 \rightarrow L_1$ определяется по аналогии). Из (7) и (8) следует, что если $[a, b] \in A_1$, то

$$[a(\varphi_1([a, b])), b(\varphi_1([a, b]))] = [a, b]. \quad (12)$$

Из (12) следует, что φ_1 удовлетворяет условию ж.

Проверим, что φ_1 удовлетворяет условию д. Пусть $[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a, b] \in A_1$ и $[a, b] = [a_1, b_1] \vee [a_2, b_2]$. Введем обозначения

$$u = \varphi_1([a_1, b_1]) \vee \varphi_1([a_2, b_2])$$

и

$$v = \varphi_1([a_1, b_1] \vee [a_2, b_2]) = \varphi_1([a, b]).$$

Из (12) следует, что $(a_1, \varphi_1([a_1, b_1])) \in L$ и $(a, v) \in L$. Так как $a \geq a_1 \vee a_2$, то

$$(a_1, \varphi_1([a_1, b_1])) \wedge (a, v) = (a_1, \varphi_1([a_1, b_1]) \wedge v). \quad (13)$$

Элемент $\varphi_1([a_1, b_1])$, определен так, что (13) возможно лишь при $\varphi_1([a_1, b_1]) \wedge v = \varphi_1([a_1, b_1])$. Отсюда заключаем, что $\varphi_1([a_1, b_1]) \leq v$. Аналогично проверяем, что $\varphi_1([a_2, b_2]) \leq v$ и делаем вывод, что $u \leq v$.

Покажем, что $a(u) \geq a$. Действительно, так как $(a_1, \varphi_1([a_1, b_1])), (a_2, \varphi_1([a_2, b_2])) \in L$, то $(a_1 \vee a_2, u) \in L$ и $a(u) \geq a_1 \vee a_2$. Используя (11), получаем, что $a(u) \geq a$. Отсюда следует, что

$$(a(u), u) \wedge (a, v) = (a, u \wedge v). \quad (14)$$

Элемент v определен таким образом, что (14) возможно лишь при $u \geq v$. Так как выше было доказано обратное неравенство, то $u = v$ и φ_1 удовлетворяет условию д.

Проверим выполнение условия е. Пусть $[a, b] \in A_1$ и $[c, d]$ — точная нижняя грань тех элементов структуры A_2 , которые содержат $\varphi_1([a, b])$. Формула (8) позволяет заключить, что $\varphi_1([a, b]) \in [c, d]$. Так как (см. (12)) $(\varphi_2([c, d]), c), (\varphi_2([c, d]), d) \in L$, то $(\varphi_2([c, d]), \varphi_1([a, b])) \in L$. Отсюда следует, что

$$a \geq \varphi_2([c, d]) \geq b. \quad (15)$$

Соотношение $a(b) \geq \varphi_1([a, b])$ влечет $a(b) \geq c$. Поэтому

$$(b, a(b)) \wedge (\varphi_2([c, d]), c) = (b \wedge \varphi_2([c, d]), c).$$

Отсюда следует, что $b \wedge \varphi_2([c, d]) = \varphi_2([c, d])$ и $b \geq \varphi_2([c, d])$. Принимая во внимание (15), получаем, что $\varphi_2([c, d]) = b$ и условие е выполняется.

Теорема 4 доказана.

Пусть, если $x \in L_1$, то $[x^1, x^2]$ точная нижняя грань интервалов из A_1 содержащих x , и если $y \in L_2$, то $[y^1, y^2]$ — точная нижняя грань тех интервалов $[a, b] \in A_2$, для которых $y \in [a, b]$.

Теорема 5. Если $x \in L_1$, $y \in L_2$, то $(x, y) \in L$ тогда и только тогда, когда $\varphi_1([x^1, x^2]) \leq y$ и $\varphi_2([y^1, y^2]) \leq x$.

Доказательство. Если $x \in L_1$, $y \in L_2$, то $\varphi_1([x^1, x^2])$ — точная нижняя грань тех элементов $y_0 \in L_2$, для которых $(x, y_0) \in L$. Отсюда видно, что если $(x, y) \in L$, то $\varphi_1([x^1, x^2]) \leq y$. Ввиду равноправия x и y можно записать также $\varphi_2([y^1, y^2]) \leq x$. Пусть $x \in L_1$, $y \in L_2$, $\varphi_1([x^1, x^2]) \leq y$ и $\varphi_2([y^1, y^2]) \leq x$. Так как $(x^1, \varphi_1([x^1, x^2])) \in L$, $(x^2, \varphi_1([x^1, x^2])) \in L$, то $(x, \varphi_1([x^1, x^2])) = z_1 \in L$. Аналогично $(\varphi_2([y^1, y^2]), y) = z_2 \in L$. Отсюда следует, что $z_1 \vee z_2 = (x \vee \varphi_2 \times ([y^1, y^2]), y \vee \varphi_1([x^1, x^2])) = (x, y) \in L$.

Теорема 5 доказана.

4. Пусть заданы конечные модулярные структуры L_1 и L_2 ; структуры интервалов A_1^1 и A_2^1 структур L_1 и L_2 , соответственно удовлетворяющие условиям $a, b, в$ и $г$; отображения $\varphi_1^1: A_1^1 \rightarrow L_2$ и $\varphi_2^1: A_2^1 \rightarrow L_1$, удовлетворяющие условиям $д, е$, и $ж$. Если $x \in L_1$, то (x^1, x^2) — точная нижняя грань элементов из A_1^1 , содержащих x , и если $y \in L_2$, то $[y^1, y^2]$ — точная нижняя грань элементов из A_2^1 , содержащих y .

Определим множество L как множество пар (x, y) , где $x \in L_1$, $y \in L_2$ таких, что $\varphi_1^1([x^1, x^2]) \leq y$ и $\varphi_2^1([y^1, y^2]) \leq x$. На множестве L определим отношение частичного порядка, полагая, если $x_1, x_2 \in L_1$; $y_1, y_2 \in L_2$, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L$, то $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ при $x \leq x_2$ и $y_1 \leq y_2$.

Теорема 6. Частично упорядоченное множество L является подструктурной структуры $L_1 \times L_2$.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in L_1$; $y_1, y_2 \in L_2$ и $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L$. По определению множества L это значит, что

$$\begin{aligned}\varphi_1^1([x_1^1, x_1^2]) &\leq y_1, \varphi_1^1([x_2^1, x_2^2]) \leq y_2, \\ \varphi_2^1([y_1^1, y_1^2]) &\leq x_1, \varphi_2^1([y_2^1, y_2^2]) \leq x_2.\end{aligned}$$

Так как отображение φ_1^1 удовлетворяет условию $д$, то можно записать:

$$\begin{aligned}\varphi_1^1([(x_1 \wedge x_2)^1, (x_1 \wedge x_2)^2]) &\leq \varphi_1^1([x_1^1, x_1^2] \wedge [x_2^1, x_2^2]) \leq \\ &\leq \varphi_1^1([x_1^1, x_1^2]) \wedge \varphi_1^1([x_2^1, x_2^2]) \leq y_1 \wedge y_2.\end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что

$$\varphi_2^1([(y_1 \wedge y_2)^1, (y_1 \wedge y_2)^2]) \leq x_1 \wedge x_2.$$

Тем самым проверено, что $(x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2) \in L$.

Из того, что A_1^1 удовлетворяет условию $в$, следует, что $x_1 \leq x_1^1$, $x_2 \leq x_2^1$, $x_1 \vee x_2 \leq x_1^1 \vee x_2^1$ и $[(x_1 \vee x_2)^1, (x_1 \vee x_2)^2] = [x_1^1, x_1^2] \vee [x_2^1, x_2^2]$.

$[x_2^1, x_2^2]$. Так как φ_1^1 удовлетворяет условию δ , то
 $\varphi_1^1 ([(x_1 \vee x_2)^1, (x_1 \vee x_2)^2]) = \varphi_1^1 ([x_1^1, x_1^2]) \vee \varphi_1^1 ([x_2^1, x_2^2]) \leq y_1 \vee y_2$.
 Аналогично проверяется выполнение условия

$$\varphi_2^1 ([(y_1 \vee y_2)^1, (y_1 \vee y_2)^2]) \leq x_1 \vee x_2.$$

Тем самым проверено, что $(x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2) \in L$.
 Теорема 6 доказана.

Теорема 7. Структура L является подпрямым произведением структур L_1 и L_2 . Конгруэнции q и r , определенные с помощью (1) и (2), удовлетворяют условию (5).

Доказательство. Так как A_1^1 и A_2^1 удовлетворяют условию ν , то для любого $x \in L_1$ и любого $y \in L_2$ $x^1 \geq x \geq x^2$, $y^1 \geq y \geq y^2$ и $x, \varphi_1^1 ([x^1, x^2]) \in L$; $\varphi_2^1 ([y^1, y^2]), y \in L$. (16)
 Эпиморфность естественных проекций $\varepsilon_1: L \rightarrow L_1$, $\varepsilon_2: L \rightarrow L_2$ и, следовательно, первая часть теоремы 7 доказаны.

Пусть $z = (x, y) \in L$ и $z \neq 0$ (L). Если $y > \varphi_1^1 ([x^1, x^2])$, то $(x, y) > (x, \varphi_1^1 ([x^1, x^2]))$ и $(x, y) \equiv (x, \varphi_1^1 ([x^1, x^2])) \bmod q$, $(x, y) \equiv \equiv (x, \varphi_1^1 ([x^1, x^2])) \bmod q \vee r$.

Если $y = \varphi_1^1 ([x^1, x^2])$, то $x \neq 0$ (L_1), $x > x^2$, $\varphi_2^1 ([y^1, y^2]) = x^2$ и $(x, y) \equiv (\varphi_2^1 ([y^1, y^2]), y) \bmod r$, $(x, y) \equiv (\varphi_2^1 ([y^1, y^2]), y) \bmod q \vee r$.
 Так как структура L конечна, то, повторяя предыдущие рассуждения несколько раз, получаем, что

$$(x, y) \equiv 0 (L) \bmod q \vee r.$$

Отсюда следует, что $q \vee r = L^2$.

Теорема 7 доказана.

Теорема 8. Если A_1 и A_2 множества интервалов структур L_1 и L_2 соответственно, построенные при доказательстве теоремы 3 и $\varphi_1: A_1 \rightarrow L_2$, $\varphi_2: A_2 \rightarrow L_1$ отображения, построенные при доказательстве теоремы 4, то

$$A_1^1 = A_1, A_2^1 = A_2, \varphi_1^1 = \varphi_1, \varphi_2^1 = \varphi_2.$$

Доказательство. Пусть $[a, b] \in A_1^1$.

Если $x \in [a, b]$, то $[x^1, x^2] \leq [a, b]$, $\varphi_1^1 ([x^1, x^2]) \leq \varphi_1^1 ([a, b])$ и $(x, \varphi_1^1 ([a, b])) \in L$. Если $x < b$, то из условия e следует, что $(x, \varphi_1^1 ([a, b])) \in L$. Если $x > a$, то из условий δ и e следует, что $\varphi_1^1 ([x^1, x^2]) > \varphi_1^1 ([a, b])$ и $(x, \varphi_1^1 ([a, b])) \notin L$. Тем самым показано, что $[a, b] \in A_1$. Поскольку

$$(a, y) \in L \Rightarrow y \geq \varphi_1^1 ([a, b])$$

и выполняется (12), то

$$\varphi_1^1 ([a, b]) = \varphi_1 ([a, b]), [a, b] \in A_1^1.$$

Пусть $[a, b] \in A_1$. Из (12) следует, что $(a, \varphi_1([a, b])) \in L$, а из (16) следует, что $(a, \varphi_1^1([a^1, a^2])) \in L$. По определению множества L

$$\varphi_1^1([a^1, a^2]) \leq \varphi_1([a, b]),$$

а по теореме 5

$$\varphi_1^1([a^1, a^2]) \geq \varphi_1([a, b]).$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_1^1([a^1, a^2]) = \varphi_1([a, b]).$$

Выше было доказано, что $[a^1, a^2] \in A_1$ и $\varphi_1^1([a^1, a^2]) = \varphi_1([a^1, a^2])$. Условие ж дает равенство $[a^1, a^2] = [a, b]$.

Мы проверили равенства $A_1 = A_1^1$, $\varphi_1 = \varphi_1^1$. Совпадение A_2 с A_2^1 и φ_2 с φ_2^1 проверяется аналогично.

Теорема 8 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кон П. Универсальная алгебра. М., «Мир», 1968, 140 с.
2. Hall M., Dilworth R. P. The imbedding problem for modular lattices.— «Ann. of Math», 1944, vol. 45, № 3, p. 450—456.
3. Avann S. P. Upper and lower complementation in a modular lattices.— «Proc. of the Amer. Math. Soc.», 1960, vol. 11, № 1, p. 17—23.

УДК 519.48

Е. Ш. КЕРЕП

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О СТРОЕНИИ КОНЕЧНОПОРОЖДЕННЫХ МОДУЛЕЙ НАД КОЛЬЦАМИ ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ

Введение

В настоящей работе доказывается, что каждый конечнопорожденный модуль над кольцом главных идеалов является расширением циклического модуля с помощью модуля симметрического типа. Соответствующий результат для конечных абелевых групп содержится в [1]. В случае периодических модулей доказывается также двойственное утверждение: каждый периодический конечнопорожденный модуль над кольцом главных идеалов является расширением модуля симметрического типа с помощью циклического модуля. Затем приводится применение этих результатов к теории матриц, для которых найдены нормальные формы нового вида.

В дальнейшем будут использоваться следующие обозначения и понятия:

1) $\langle S \rangle$ — подмодуль модуля M , порожденный системой $S \subset M$;

2) (α) — главный идеал кольца R , порожденный элементом $\alpha \in R$;

3) $\text{Ann } L$ — аннулятор множества L , состоящего из элементов модуля M над кольцом R :

$$\text{Ann } L = \{r \in R \mid \forall x \in L \quad rx = 0\};$$

4) $\text{Aut } M$ — группа автоморфизмов модуля M ;

5) модуль, разложимый в прямую сумму двух изоморфных между собой подмодулей, называется модулем симметрического типа.

1

Теорема 1. В конечнопорожденном модуле M над кольцом главных идеалов R содержится такой циклический подмодуль $W = \langle w \rangle$, что фактор-модуль M/W является модулем симметрического типа. Подмодуль W определяется модулем M однозначно с точностью до автоморфизма модуля M : если W и W' — циклические подмодули, обладающие указанным свойством, то $W' = \alpha W$, где $\alpha \in \text{Aut } M$.

Доказательство. Как известно, модуль M допускает следующее разложение в прямую сумму циклических подмодулей

$$M = \langle b_1^1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle b_1^{k_1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle b_n^{k_n} \rangle,$$

где

$$\text{Ann } b_i^1 = \dots = \text{Ann } b_i^{k_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$\text{Ann } b_i^1 \subset \text{Ann } b_{i+1}^1 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (1)$$

$$\text{Ann } b_i^1 = (p_1^{e_1^1} \dots p_i^{e_i^1}) \quad (i \geq 2);$$

$$\text{Ann } b_i^1 = \begin{cases} (p_1^{e_1^1} \dots p_i^{e_i^1}) & \text{если } M \text{ периодичен в} \\ 0 & \text{противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $\pi = \{p_1, \dots, p_l\}$ — некоторый набор простых элементов кольца R . Элементы кольца R вида $p_1^{e_1} \dots p_l^{e_l}$ будем называть π -элементами. Элементы $b_1^1, \dots, b_n^{k_n}$ будем называть базисными элементами модуля M .

Рассмотрим сначала случай, когда

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 1. \quad (2)$$

1. Предполагая существование циклического подмодуля $W = \langle w \rangle$, удовлетворяющего условию теоремы, докажем «теорему единственности». Полагая $b_i^1 = b_i$, представим w в виде

$$w = \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \dots + \xi_n b_n \quad (\xi_i \in R, i = 1, \dots, n), \quad (3)$$

где $\xi_i = 0$ либо

$$\xi_i = p_1^{\alpha_1^i} \dots p_l^{\alpha_l^i} \xi_i^*,$$

$$(\xi_i^*, p_1, \dots, p_l) = 1, (\exists i) \alpha_i^i < \varepsilon_i^i.$$

1. Покажем, что базис $\{b_i\}_1^n$ может быть выбран так, что все отличные от нуля коэффициенты ξ_i в (3) являются π -элементами.

Допустим сначала, что $\text{Ann } b_1 \neq 0$, т.е. модуль M периодичен. Утверждение в этом случае вытекает из того, что элементы $\{b_1, \dots, b_{i-1}, \xi_i' b_i, \dots, b_n\}$ образуют базис модуля M , причем $\text{Ann } \xi_i' b_i = \text{Ann } b_i$, а коэффициент при $\xi_i' b_i$ в (3) есть π -элемент.

Если $\text{Ann } b_1 = 0$, то можно считать ξ_i π -элементом при $i \geq 2$, а $\xi_1 = \xi_1' p_1^{\alpha_1^1} \dots p_l^{\alpha_l^1}$. Докажем, что ξ_1' — единица кольца R . Пусть

$x \rightarrow \bar{x}$ естественный гомоморфизм модуля M на модуль $\bar{M} = M/W$. Пусть, далее, $J = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid i \neq 1, \xi_i \neq 0\}$, и пусть ξ_1' не является единицей кольца R . Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} \alpha \omega \in \langle b_1 \rangle (\alpha \in R) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha \in \left(p_1^{\max(\varepsilon_1^1 - \alpha_1^1, 0)} \dots p_l^{\max(\varepsilon_l^l - \alpha_l^l, 0)} \right) + \alpha_1^1. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{Ann } \bar{b}_1 &= \left(\xi_1' \prod_{j=1}^l p_j^{\max(\varepsilon_j^j - \alpha_j^j, 0)} + \alpha_1^1 \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{Ann } \prod_{j=1}^l p_j^{\max(\varepsilon_j^j - \alpha_j^j, 0)} \bar{b}_1 = (\xi_1'). \end{aligned}$$

В силу того, что при $i \neq 1$

$$\text{Ann } \bar{b}_i = (p_1^{\beta_1^i} \dots p_l^{\beta_l^i}),$$

имеем:

$$\text{Ann } \bar{b} = (\xi_1') \Rightarrow \bar{b} \in \langle \bar{b}_1 \rangle (\bar{b} \in \bar{M}).$$

А это противоречит тому, что $\bar{M}$ — модуль симметрического типа, так как должно существовать не менее двух независимых элементов с одинаковыми аннуляторами. Следовательно, ξ_1' — единица кольца R .

2. Покажем, что можно выбрать базис модуля M так, чтобы имело место

$$\xi_{2m} = 0, \xi_{2m-1} \neq 0 \left(m = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \right). \quad (5)$$

Для циклических модулей и модулей с двумя базисными элементами утверждение очевидно (в первом случае можно считать $\omega = b_1$, во вто-

втором — $\omega = p_1^{\varepsilon_1^1} \dots p_l^{\varepsilon_l^1} b_1$). Докажем его справедливость для произвольного модуля M , предполагая ее уже установленной для всех модулей, число базисных элементов у которых меньше, чем у модуля M .

Коэффициент ξ_1 отличен от нуля, так как в противном случае модуль $\bar{M}$ не мог бы быть модулем симметрического типа. Допустим, что ξ_2 отличен от нуля, и следовательно,

$$\xi_2 = p_1^{\varepsilon_1^2} \dots p_l^{\varepsilon_l^2}.$$

Покажем, что для всех $j = 1, \dots, l$ $\alpha_j^2 \geq \alpha_j^1$. Действительно, допуская существование такого j , что $\alpha_j^2 < \alpha_j^1$ и принимая во внимание, что

$$\text{Ann } \bar{b}_1 = \left(\prod_{j=1}^l p_j^{\max(\varepsilon_j^1 - \alpha_j^1, 0) + \alpha_j^1} \right),$$

получим

$$\max_{i \in J} (\varepsilon_i^1 - \alpha_i^1, 0) + \alpha_i^1 \geq \varepsilon_2^1 - \alpha_2^1 + \alpha_i^1 > \varepsilon_2^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Ann } \bar{b}_1 \not\subset (p_1^{\varepsilon_1^2} \dots p_l^{\varepsilon_l^2}).$$

Это означает, что существует такой элемент $\bar{b} \in \bar{M}$, что

$$\text{Ann } \bar{b} \subset (p_1^{\varepsilon_1^2} \dots p_l^{\varepsilon_l^2}).$$

Однако это противоречит тому, что $\bar{M}$ — модуль симметрического типа, так как элементы модуля $\bar{M}$, обладающие указанным свойством, зависимы между собой. Тем самым доказано, что $\alpha_j^2 \geq \alpha_j^1$ ($j = 1, \dots, l$). Замечая, что

$$\omega = \prod_{j=1}^l p_j^{\alpha_j^1} \left(b_1 + \prod_{j=1}^l p_j^{\alpha_j^2 - \alpha_j^1} b_2 \right) + \xi_3 b_3 + \dots + \xi_n b_n,$$

и изменяя обозначения, имеем

$$\omega = p_1^{\alpha_1^1} \dots p_l^{\alpha_l^1} b_1 + \xi_3 b_3 + \dots + \xi_n b_n.$$

Таким образом, базис $\{b_i\}_1^n$ всегда может быть выбран так, чтобы имело место $\xi_2 = 0$. Так как $\langle b_2 \rangle \cap W = 0$, то $\langle \bar{b}_2 \rangle \cong \langle b_2 \rangle$ и, следовательно, $\text{Ann } \bar{b}_2 = \text{Ann } b_2 = (p_1^{\varepsilon_1^2} \dots p_l^{\varepsilon_l^2})$. Как было показано выше,

$$\text{Ann } \bar{b}_1 \not\subset (p_1^{\varepsilon_1^2} \dots p_l^{\varepsilon_l^2}).$$

Из $\text{Ann } \bar{b}_1 = (p_1^{\lambda_1^1} \dots p_l^{\lambda_l^1}) \supsetneq (p_1^{\varepsilon_1^2} \dots p_l^{\varepsilon_l^2})$ следует, что

$$1) \quad (\forall i) \lambda_i^1 \leq \varepsilon_2^i,$$

$$2) \quad (\exists j) \lambda_j^1 < \varepsilon_2^j.$$

Подмодуль $\langle \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_n \rangle$ в этом случае содержит элементы с аннулятором, равным $(p_j^{\varepsilon_2^j})$, так как иначе модуль $\bar{M}$ не был бы модулем симметрического типа. Поэтому для всех таких j , что $\lambda^j < \varepsilon_2^j$, $\varepsilon_2^j = \varepsilon_3^j$, и существует такой элемент $\bar{a}_j \in \langle \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_n \rangle$, что $\text{Ann } \bar{a}_j = (p_j^{\varepsilon_2^j})$. Сделав замену

$$b_1^* = b_1 + \sum_{i: \lambda^i < \varepsilon_2^i} a_i,$$

$$b_2^* = b_2 \dots b_n^* = b_n,$$

получим новый базис, для которого для всех $j = 1, 2, \dots, l$ $\lambda^j = \varepsilon_2^j$. Изменяя обозначения, будем считать, что с самого начала базис $\{b_i\}_1^n$ удовлетворяет условию

$$\text{Ann } \bar{b}_1 = \text{Ann } \bar{b}_2 = \text{Ann } b_2.$$

Поскольку модуль $\bar{M}$ симметрического типа, то

$$\bar{M} = \langle \bar{c}_1 \rangle \oplus \langle \bar{c}_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \bar{c}_{2m} \rangle,$$

где

$$m = \left[\frac{n}{2} \right], \quad \text{Ann } \bar{c}_{2k-1} = \text{Ann } \bar{c}_{2k} \quad (k = 1, \dots, m),$$

$$\text{Ann } \bar{c}_{2k} \subseteq \text{Ann } \bar{c}_{2k+1} \quad (k = 1, \dots, m-1).$$

Можно считать, что

$$\langle \bar{c}_1, \bar{c}_2 \rangle = \langle \bar{b}_1, \bar{b}_2 \rangle.$$

В противном случае, полагая

$$\bar{c}_1 = \eta_1 \bar{b}_1 + \dots + \eta_n \bar{b}_n,$$

$$\bar{c}_2 = \xi_1 \bar{b}_1 + \dots + \xi_n \bar{b}_n,$$

построим новый базис $\{\bar{c}_i'\}_1^{2m}$, где

$$\bar{c}_1' = \bar{c}_1 - \eta_3 \bar{b}_3 - \dots - \eta_n \bar{b}_n,$$

$$\bar{c}_2' = \bar{c}_2 - \xi_3 \bar{b}_3 - \dots - \xi_n \bar{b}_n.$$

и $\bar{c}_i' = \bar{c}_i$ при $i \geq 3$, удовлетворяющий требуемому условию.

Обозначив через $\tilde{x}$ образ элемента $x \in M$ при естественном гомоморфизме M на $\tilde{M} = M / \langle b_1, b_2 \rangle$, будем иметь:

$$\begin{aligned} \tilde{M} / \tilde{W} &= (M / \langle b_1, b_2 \rangle) / (\langle w, b_1, b_2 \rangle / \langle b_1, b_2 \rangle) \cong \\ &\cong M / (W + \langle b_1, b_2 \rangle) \cong (M / W) / ((W + \langle b_1, b_2 \rangle) / W) = \\ &= \bar{M} / \langle \bar{b}_1, \bar{b}_2 \rangle. \end{aligned}$$

Модуль $\overline{M} / \langle \bar{b}_1, \bar{b}_2 \rangle$ — модуль симметрического типа, так как $\overline{M}$ и $\langle \bar{b}_1, \bar{b}_2 \rangle$ модули симметрического типа и $\langle \bar{b}_1, \bar{b}_2 \rangle$ — прямое слагаемое модуля $\overline{M}$. Следовательно, и $\tilde{M} / \tilde{W}$ — модуль симметрического типа. По предположению индукции в $\tilde{M}$, а потому и в $\langle b_3 \rangle \oplus \dots \oplus \langle b_n \rangle \cong \tilde{M}$, существует базис, удовлетворяющий условию (5). Объединяя этот базис с парой $\{b_1, b_2\}$, получим базис модуля M , обладающий тем же свойством. Таким образом, можно считать, что с самого начала базис $\{b_i\}_1^n$ таков, что

$$\omega = \begin{cases} \prod_{j=2}^l p_j^{a_j} b_1 + \prod_{j=1}^l p_j^{a_j} b_3 + \dots + \prod_{j=1}^l p_j^{a_j} b_n & \text{при нечетном } n; \\ \prod_{j=1}^l p_j^{a_j} b_1 + \prod_{j=1}^l p_j^{a_j} b_3 + \dots + \prod_{j=1}^l p_j^{a_j} b_{n-1} & \text{при четном } n. \end{cases}$$

Кроме того можно считать, что

$$\langle \bar{b}_{2k-1}, \bar{b}_{2k} \rangle = \langle \bar{c}_{2k-1}, \bar{c}_{2k} \rangle \quad (k = 1, \dots, m).$$

3. Так как $\text{Ann } \bar{b}_1 = \left(\prod_{j=1}^l p_j^{\varepsilon_j^1} \right) = \left(\prod_{j=1}^l p_j^{\max(\varepsilon_j^1 - \alpha_j^1, 0) + \alpha_j^1} \right)$, то для всех $j \in J$ $\varepsilon_j^1 = \max(\varepsilon_j^1 - \alpha_j^1, 0) + \alpha_j^1$. Аналогично, рассматривая модуль $M / \langle b_1, b_2 \rangle$, получим, что для всех $j \in J$ $\varepsilon_j^2 = \max(\varepsilon_j^2 - \alpha_j^2, 0) + \alpha_j^2$ и т. д.

При четном n получим систему равенств

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^j &= \max_{i \in J} (\varepsilon_i^j - \alpha_i^j, 0) + \alpha_1^j; \\ \varepsilon_4^j &= \max_{i \geqslant 5, i \in J} (\varepsilon_i^j - \alpha_i^j, 0) + \alpha_3^j; \\ . &. \\ \varepsilon_{2k}^j &= \max_{i \geqslant 2k+1, i \in J} (\varepsilon_i^j - \alpha_i^j, 0) + \alpha_{2k-1}^j; \\ . &. \\ \varepsilon_{n-2}^j &= \max (\varepsilon_{n-1}^j - \alpha_{n-1}^j, 0) + \alpha_{n-3}^j; \\ \varepsilon_n^j &= \alpha_{n-1}^j. \end{aligned} \tag{7}$$

Из (7) вытекает

$$\alpha_{2k-1}^j = \epsilon_{2k}^j - \epsilon_{2k+1}^j + \epsilon_{2k+2}^j - \dots + \epsilon_n^j, \quad (8)$$

$$(j = 1, \dots, l), \quad \left(k = 1, \dots, \frac{n}{2}\right).$$

Действительно, $\alpha_{n-i}^j = \varepsilon_n^j$. Допустим, уже доказано равенство

$$\alpha_{2k+1} = \varepsilon_{2k+2}^j - \varepsilon_{2k+3}^j + \dots + \varepsilon_n^j \left(k < \frac{n-2}{2} \right).$$

Так как

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^j &\geq \varepsilon_3^j \geq \dots \geq \varepsilon_n^j, \text{ to } \varepsilon_{2k}^j = \max_{i \geq 2k+1, i \in J} (\varepsilon_i^j - \alpha_i^j, 0) + \alpha_{2k-1}^j = \\ &= \max_{i \geq 2k+1, i \in J} (\varepsilon_i^j - \varepsilon_{i+1}^j + \varepsilon_{i+2}^j - \dots - \varepsilon_n^j) + \alpha_{2k-1}^j = \\ &= \varepsilon_{2k+1}^j - \dots - \varepsilon_n^j + \alpha_{2k-1}^j. \end{aligned}$$

Следовательно, $\alpha_{2k-1}^j = \varepsilon_{2k}^j - \varepsilon_{2k+1}^j + \dots + \varepsilon_n^j$. Тем самым (8) доказано.

Если n нечетно, индукцией по числу базисных элементов легко доказать, что для всех $j = 1, \dots, l$ $\alpha_n^j = 0$ (при $n = 1$ это очевидно), и система (7) принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^j &= \max_{i \in J} (\varepsilon_i^j - \alpha_i^j, 0) + \alpha_1^j; \\ . &. \\ \varepsilon_{2k}^j &= \max_{i \geq 2k+1, i \in J} (\varepsilon_i^j - \alpha_i^j, 0) + \alpha_{2k-1}^j; \\ . &. \\ \varepsilon_{n-1}^j &= \max (\varepsilon_n^j - \alpha_n^j, 0) + \alpha_{n-2}^j; \\ \alpha_n^j &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Из (9) с помощью соображений, примененных для доказательства (8), получим

$$\alpha_{2k-1}^j = \varepsilon_{2k}^j - \varepsilon_{2k+1}^j + \varepsilon_{2k+2}^j - \dots - \varepsilon_n^j \quad (10)$$

$$(j = 1, \dots, l), \left(k = 1, \dots, \frac{n-1}{2} \right).$$

Итак, если в модуле M , удовлетворяющем условию (2), существует такой циклический подмодуль $W = \langle w \rangle$, что M/W — модуль симметрического типа, то при некотором выборе базиса $\{b_i\}_1^n$ имеет место

$$\omega = \begin{cases} \prod_{j=1}^l p_j^{\varepsilon_j^2 - \varepsilon_j^3 + \dots - \varepsilon_j^n} b_1 + \prod_{j=1}^l p_j^{\varepsilon_j^4 - \varepsilon_j^5 + \dots - \varepsilon_j^n} b_3 + \dots + b_n & \text{при нечетном } n; \\ \prod_{j=1}^l p_j^{\varepsilon_j^2 - \varepsilon_j^3 + \dots + \varepsilon_j^n} b_1 + \prod_{j=1}^l p_j^{\varepsilon_j^4 - \varepsilon_j^5 + \dots + \varepsilon_j^n} b_3 + \dots + \prod_{j=1}^l p_j^{\varepsilon_j^n} b_{n-1} & \text{при четном } n. \end{cases} \quad (11)$$

Тем самым доказано, что подмодуль W , удовлетворяющий условию теоремы, определяется модулем M однозначно с точностью до автоморфизма модуля M .

II. Пусть $\{b_i\}_1^n$ — такой базис модуля M , что $\text{Ann } b_i \subset \text{Ann } b_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$), и пусть $W = \langle w \rangle$, где w определяется по формулам (11). Докажем, что фактор-модуль M/W — модуль симметрического типа.

При нечетном n полагаем

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1, \\ a_2 &= b_2, \\ a_3 &= \prod_{j=1}^l p_j^{\varepsilon_2^j - \varepsilon_3^j} b_1 + b_3, \\ a_4 &= b_4, \\ &\dots \dots \dots \\ a_{2k+1} &= \prod_{j=1}^l p_j^{\varepsilon_2^j - \varepsilon_3^j + \dots - \varepsilon_{2k+1}^j} b_1 + \dots + b_{2k+1}, \\ a_{2k+2} &= b_{2k+2}, \\ &\dots \dots \dots \\ a_{n-1} &= b_{n-1}. \end{aligned}$$

Из формул (11) следует, что

$$\text{Ann } \bar{a}_{2k-1} = \left(\prod_{j=1}^l p_j^{\varepsilon_{2k}^j} \right).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \bar{0} = \bar{w} &= \prod_{j=1}^l p_j^{\varepsilon_{2k}^j - \varepsilon_{2k+1}^j + \dots - \varepsilon_n^j} \bar{a}_{2k-1} + \\ &+ \prod_{j=1}^l p_j^{\varepsilon_{2k+2}^j - \varepsilon_{2k+3}^j + \dots - \varepsilon_n^j} \bar{b}_{2k+1} + \dots + \bar{b}_n \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[\alpha \prod_{j=1}^l p_j^{\varepsilon_{2k}^j - \dots - \varepsilon_n^j} \bar{a}_{2k-1} = \bar{0} \ (\alpha \in R) \Leftrightarrow \right. \\ &\quad \left. \Leftrightarrow \alpha \in \left(\prod_{i=1}^l p_i^{\varepsilon_{2k+1}^i - (\varepsilon_{2k+2}^i - \dots - \varepsilon_n^i)} \right) \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[\zeta \bar{a}_{2k-1} = 0 \ (\zeta \in R) \Leftrightarrow \zeta \in \left(\prod_{j=1}^l p_j^{\varepsilon_{2k}^j} \right) \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{Ann } \bar{a}_{2k-1} = \text{Ann } \bar{a}_{2k} \quad \left(k = 1, \dots, \frac{n-1}{2} \right). \end{aligned}$$

Так как $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{n-1}$ можно выразить через $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1}$, то

$$M/W = \langle \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{n-1} \rangle = \langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1} \rangle.$$

Докажем, что

$$M/W = \langle \bar{a}_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \bar{a}_{n-1} \rangle.$$

TO

$$\eta \bar{a}_{k+1} \in \langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k \rangle \quad (\eta \in R),$$

$$\begin{aligned} & \eta \left(\prod_{j=1}^l p_j^{\varepsilon_j^2 - \varepsilon_j^3 + \dots - \varepsilon_j^{k+1}} b_1 + \dots + b_{k+1} \right) - \\ & - (\eta_1 b_1 + \dots + \eta_k b_k) = \alpha \omega(\eta_1, \dots, \eta_k, \\ & \alpha \in R) \Rightarrow \left[\eta = \alpha \prod_{j=1}^l p_j^{\varepsilon_j^{k+2} - \varepsilon_j^{k+3} + \dots - \varepsilon_j^n}, \right. \\ & \left. \alpha \prod_{j=1}^l p_j^{\varepsilon_j^{k+4} - \varepsilon_j^{k+5} + \dots - \varepsilon_j^n} b_{k+3} = 0 \right] \Rightarrow \\ & \Rightarrow \alpha \in \left(\prod_{j=1}^l p_j^{\varepsilon_j^{k+3} - \varepsilon_j^{k+4} + \dots + \varepsilon_j^n} \right) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \eta \in \left(\prod_{j=1}^l p_j^{\varepsilon_j^{k+2}} \right) \Rightarrow \eta \bar{a}_{k+1} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, и в этом случае сумма $k+1$ слагаемых прямая.
При четном n полагаем

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1, \\ a_2 &= b_2, \\ a_3 &= \prod_{j=1}^l p_j^{\varepsilon_j^1 - \varepsilon_j^3} b_1 + b_3, \\ &\dots \dots \dots \\ a_n &= b_n \end{aligned}$$

и аналогично первому случаю доказываем, что

$$M/W = \langle \bar{a}_1 \rangle + \dots + \langle \bar{a}_n \rangle.$$

Тем самым доказано, что M/W — модуль симметрического типа.

III. Докажем теперь теорему 1 в общем случае

1. Докажем, что в модуле M содержится такой циклический подмодуль W , что M/W — модуль симметрического типа. Действительно,

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus M',$$

где $M_1 \cong M_2$, а M' — модуль, удовлетворяющий условию (2) и по доказанному в M' содержится такой циклический по-модуль W , что фактор-модуль M'/W симметрического типа. Очевидно, что

$$M/W = \bar{M}_1 \oplus \bar{M}_2 \oplus M'/W,$$

где

$$\bar{M}_i = (M_i + W) / W \quad (i = 1, 2).$$

Так как $W \cap M_i = 0$, то $\bar{M}_i \cong M_i$ и, следовательно, M/W — модуль симметрического типа.

2. Докажем, что подмодуль $W = \langle w \rangle$ единственен с точностью до автоморфизма модуля M .

Допустим, что в базисе, удовлетворяющем условию (1),

$$w = \xi_1^1 b_1^1 + \dots + \xi_1^{k_1} b_1^{k_1} + \dots + \xi_n^{k_n} b_n^{k_n},$$

и рассмотрим сумму

$$\sigma_i = \xi_i^1 b_i^1 + \dots + \xi_i^{k_i} b_i^{k_i}.$$

Если $\sigma_i \neq 0$ то можно считать, что $\xi_i^1 \neq 0$. Если $\xi_i^2 \neq 0$, то

$$\sigma_i = \eta (\xi_i^{1'} b_i^1 + \xi_i^{2'} b_i^2) + \dots + \xi_i^{k_i} b_i^{k_i},$$

где

$$\eta = (\xi_i^1, \xi_i^2),$$

$$\xi_i^{1'} = \xi_i^1 / \eta, \quad \xi_i^{2'} = \xi_i^2 / \eta.$$

Заменяя в исходном базисе b_i^1 на $\xi_i^{1'} b_i^1 + \xi_i^{2'} b_i^2$ и b_i^2 на $\mu b_i^1 + \nu b_i^2$, где μ и ν такие элементы кольца R , что $\xi_i^{1'} \nu - \xi_i^{2'} \mu = 1$, получаем базис, для которого $\xi_i^2 = 0$. Повторяя этот процесс $k_i - 1$ раз, приходим к такому базису $\{b_i^l\}$, что $\sigma_i = \xi_i^1 b_i^1$ и, следовательно,

$$w = \xi_1 b_1^1 + \xi_2 b_2^1 + \dots + \xi_n b_n^1 \quad (\xi_i = \xi_i^1).$$

Покажем, что базис может быть выбран так, чтобы $\xi_i = 0$ при четном k_i . Проведем индукцию по числу N базисных элементов. При N , равном 0 и 1, утверждение очевидно. Допустим, что его справедливость уже доказана для всех $N < k_1 + k_2 + \dots + k_n$. Можно считать, что $k_i = 1$ или $k_i = 2$ ($i = 1, \dots, n$), так как в противном случае можно профакторизовать модуль M по подмодулю $\langle b_i^2, b_i^3 \rangle$, и ξ_i будет при четном k_i равен нулю по предположению индукции. Если $k_1 = 1$, то $\xi_1 \neq 0$, так как модуль M/W симметрического типа. Аналогично тому, как это делалось в пункте 1.2, можно выбрать базис так, чтобы $\xi_2 = 0$. Если $k_2 = 2$, то профакторизуем модуль M по подмодулю $\langle b_2^1, b_2^2 \rangle$ и из индуктивного предположения получаем, что $\xi_i = 0$, если k_i четно. Если же $k_2 = 1$, то выбирая так же, как в 1.2, такой базис, что

$$\text{Ann } \bar{b}_1^1 = \text{Ann } \bar{b}_2^1 = \text{Ann } b_2^1,$$

и факторизуя модуль M по подмодулю $\langle b_1^1, b_2^1 \rangle$, снова получим требуемое утверждение, пользуясь предположением индукции. Если $k_1 = 2$, то $\text{Ann } \bar{b}_1^1 = \text{Ann } b_1^1$, так как M/W — модуль

симметрического типа. Поэтому $\xi_1 = 0$. Факторизуя модуль M по подмодулю $\langle b_1^1, b_1^2 \rangle$, найдем, что для $i > 1$ $\xi_i = 0$ при четном k_i . В результате имеем: $M = M_1 \oplus M_2$, где M_1 — модуль симметрического типа, M_2 — модуль, удовлетворяющий условию (2) и $W \subseteq M_2$. Согласно ранее доказанному подмодуль $W \subseteq M_2$ определяется однозначно с точностью до автоморфизма модуля M_2 . С другой стороны, всякому разложению $M = M_1' \oplus M_2$, где M_1' — модуль симметрического типа, а M_2 — модуль, удовлетворяющий условию (2), соответствует такой автоморфизм φ модуля M , что $\varphi M_1 = M_1'$, $\varphi M_2 = M_2$. Отсюда следует, что циклический подмодуль W модуля M единственен с точностью до автоморфизма модуля M . Это завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 2. В периодическом конечнопорожденном модуле M над кольцом главных идеалов R содержится такой подмодуль симметрического типа N , что M/N — циклический модуль. Подмодуль N определяется модулем M однозначно с точностью до автоморфизма модуля M .

Доказательство. Модулю M , удовлетворяющему условию теоремы 2, как известно, можно поставить в соответствие так называемый сопряженный модуль M^* (см. [2]). Элементами последнего являются «характеры» модуля M , определяемые как гомоморфизмы модуля M в некоторый универсальный R -модуль Ω^1 . Доказывается, что характеры модуля M разделяют точки; модуль M оказывается изоморфным модулю M^* и канонически изоморфным модулю M^{**} . Каждому подмодулю $L \subseteq M$ ставится в соответствие его ортогонал $L^\perp = \{\chi \in M^* \mid \forall x \in L \chi(x) = 0\}$. Доказывается, что отображение $L \rightarrow L^\perp$ является антиизоморфизмом решетки подмодулей модуля M на решетку подмодулей модуля M^* , причем $M/L \cong L^\perp$, $M^*/L^\perp \cong L$.

Существование подмодуля N , удовлетворяющего условию теоремы 2, непосредственно следует из теоремы 1 и сделанных замечаний. Докажем, что в указанном смысле подмодуль N единственен. Допустим, что N_1 и N_2 — подмодули модуля M , удовлетворяющие условию теоремы 2. Тогда N_1^0 и N_2^0 — подмодули модуля M^* , удовлетворяющие условию теоремы 1, и, следовательно, $N_1^0 = \psi^* N_2^0$, где $\psi^* \in \text{Aut } M^*$. Характеры модуля M разделяют точки, ввиду чего задание значений всех характеров на данном элементе модуля M равносильно заданию самого этого элемента. Определим отображение $\psi: M \rightarrow M$ следующим образом: $(\forall \chi \in M^*)$, $(\forall x \in M)$ $\chi(\psi x) = (\psi^* \chi) x$. Легко показать, что ψ является автоморфизмом модуля M . В результате имеем: $\psi N_2 = (\psi^* N_2^0)^0 = N_1^{00} = N_1$. Теорема доказана.

¹ $\Omega \cong K/R$, где K — поле частных кольца R , рассматриваемое как R -модуль.

Применим полученные в предыдущем параграфе результаты к конечнопорожденным модулям над кольцами полиномов.

Пусть A — матрица n -го порядка над произвольным полем K ; M — n -мерное пространство над тем же полем; φ — линейный оператор в пространстве M , задаваемый в некотором базисе с помощью матрицы A ; $K[t]$ — кольцо полиномов от неизвестного t с коэффициентами в поле K . На пространстве M зададим структуру модуля над кольцом $K[t]$ следующим образом: $\hat{f}(t)x = f(\varphi)x$ где $\hat{f}(t) \in K[t]$, $x \in M$. Так как оператор φ обладает ненулевым аннулирующим полиномом, то M является периодическим конечнопорожденным модулем над кольцом главных идеалов $K[t]$. Применение к модулю M теоремы 1 дает существование в пространстве M такого циклического относительно оператора φ подпространства N , что соответствующий фактор-оператор разлагается в прямую сумму двух подобных операторов. На матричном языке это означает, что всякая квадратная матрица A над полем K подобна матрице вида

$$\begin{pmatrix} \Phi & * \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix},$$

где $\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{pmatrix}$ — клетка Фробениуса над полем K , а P

некоторая квадратная матрица. Из единственности подмодуля N вытекает, что клетка Фробениуса Φ определяется матрицей A однозначно, а матрица P однозначно с точностью до подобия.

Из теоремы 2 вытекает двойственное утверждение: всякая квадратная матрица A над полем K подобна матрице вида

$$\begin{pmatrix} P & 0 & * \\ 0 & P \\ 0 & 0 & \Phi \end{pmatrix},$$

где P и Φ определены выше.

Автор благодарит Эммануила Моисеевича Жмудь за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жмудь Э. М. Симплектические геометрии на конечных абелевых группах. — «Мат. сборник», 1971, № 86, с. 9—33.
2. Бурбаки. Алгебра. Модули, кольца, формы. М., «Наука», 1966. 66 с.