

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультету математики і інформатики
Кафедра вищої математики та інформатики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

бакалавра

на тему ***“Розробка завдань для позакласної роботи з теми “Паралельний
перенос і ковзна симетрія””***

Виконав:

студент 4 курсу групи МС-41

спеціальності 014.04 “Середня освіта
(Математика)”,

освітньо-професійна програма

“Математика і інформатика”

Єланський Василь Олександрович

Керівник: канд. фіз.-мат. наук., доц.

Лисиця В.Т.

Рецензент: канд. пед. наук, викладач
математики, викладач вищої категорії,
вчитель-методист, заступник директора КЗ
“Харківський університетський ліцей”
Харківської міської ради *Іванова О.Ю.*

Харків 2025

Анотація

Єланський В.О. Розробка завдань для позакласної роботи з теми "Паралельний перенос і ковзна симетрія".

Структура роботи. Робота складається зі вступу, 2-х розділів, 5 підрозділів, 50 рисунків, висновків, списку використаних джерел (15 найменувань) та 3-х додатків. Загальний обсяг роботи становить 60 сторінок, із них – 44 сторінки основного текст.

У дипломній роботі розглянуто методику формування завдань для проведення позакласної роботи з геометрії на тему «Паралельний перенос і ковзна симетрія».

Проаналізовано особливості застосування геометричних перетворень у шкільному курсі математики, охарактеризовано педагогічні умови організації позакласної роботи з геометрії, запропоновано класифікацію та добірку тематичних завдань різних рівнів складності.

Запропоновані методичні рекомендації та теоретичні відомості з відповідних тем у першому розділі.

Наведені та детально розібрані за конкретною схемою тематичні завдання у другому розділі.

Ключові слова: позакласна робота, паралельний перенос, осьова симетрія, ковзна симетрія, геометричні перетворення, задачі на побудову, онлайн-платформа Geogebra.

Abstract

Yelanskyi V.O. Development of Tasks for Extracurricular Activities on the Topic "Translation and Glide Reflection".

Structure of the work. The paper consists of an introduction, 2 chapters, 5 subsections, 50 figures, conclusions, a list of references (15 sources), and 3 appendices. The total length of the work is 60 pages, of which 44 pages constitute the main text.

This thesis explores the methodology of designing tasks for conducting extracurricular activities in geometry on the topic of "Translation and Glide Reflection."

The work analyzes the peculiarities of applying geometric transformations in the school mathematics curriculum, outlines the pedagogical conditions for organizing extracurricular geometry activities, and presents a classification and selection of thematic tasks of various levels of complexity.

Methodological recommendations and theoretical background on the relevant topics are provided in the first chapter.

The second chapter presents thematic tasks, analyzed in detail according to a specific scheme.

Keywords: extracurricular activity, translation, axial symmetry, glide reflection, geometric transformations, construction problems, online platform GeoGebra.

Зміст

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1. МІСЦЕ ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ В ГЕОМЕТРІЇ.....	9
1.1. Історичні відомості про задачі на побудову.....	9
1.2 Основні властивості паралельного переносу і ковзної симетрії.....	15
1.3 Методичні рекомендації.....	17
РОЗДІЛ 2. ВИКОРИСТАННЯ РУХІВ В ЗАДАЧАХ НА ПОБУДОВУ.....	19
2.1. Задачі на побудову з використанням паралельного переносу.....	19
2.2. Задачі на побудову з використанням осьової симетрії.....	31
2.3. Задачі з використанням ковзної симетрії.....	38
ВИСНОВКИ.....	41
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	42
Додатки.....	45
Додаток 1.....	45
Додаток 2.....	49
Додаток 3.....	53

ВСТУП

У сучасному світі, де візуалізація, просторове мислення та симетрія відіграють важливу роль, вивчення геометричних перетворень набуває особливої значущості. Одними з найпростіших, але водночас надзвичайно важливих перетворень є паралельний перенос та ковзна симетрія. Ці поняття належать до групи так званих рухів — перетворень, що зберігають відстані між точками, тобто не змінюють форму і розміри фігур.

Актуальність та ступінь дослідження проблеми. Геометричні побудови відіграють важливу роль у шкільному курсі математики та підготовці до олімпіад. Використання паралельного переносу спрощує розв’язання багатьох класичних задач, сприяє розвитку просторового мислення та глибшому розумінню властивостей фігур, сприяє розвитку математичних компетентностей учнів [1]. Вивчення геометричних перетворень сприяє кращому розумінню основних принципів класичної геометрії, а також може бути корисним у дослідженні її узагальнень, наприклад, у проєктивній або афінній геометрії.

Паралельний перенос і ковзна симетрія широко використовуються у комп’ютерній графіці, обробці зображень та 3D-моделюванні. Дослідження методів геометричних побудов, що базуються на цьому перетворенні, є корисним для створення алгоритмів у цих сферах. Сучасні підручники з математики, зокрема авторства О.С. Істера [2], Н.А. Тарасенкової [3], А.Г. Мерзляка [4] та Г.П. Бевза [5], мають різні підходи до викладу навчального матеріалу, що відображає загальну тенденцію до оновлення змісту освіти відповідно до нового Державного стандарту. Підручник Істера вирізняється чіткою структурою, лаконічною подачею теорії та великою кількістю вправ різного рівня складності. Його стиль є академічним, що підходить для системної підготовки, однак може бути складним для слабших учнів. Натомість підручник Тарасенкової орієнтований на компетентнісний підхід: матеріал подано в доступній, часто діалогічній формі, багато уваги приділяється життєвим прикладам, дослідницьким завданням і візуальному

оформленню. Мерзляк дотримується класичного підходу до викладу: теорія подається через приклади, акцент на тренувальні вправи, що добре підходить для формування обчислювальних навичок. У підручнику Бевза переважають логічні завдання, математичні дослідження та міжпредметні зв'язки, що робить його особливо корисним для учнів з високою мотивацією до навчання. Отже, всі чотири підручники мають свої сильні сторони й можуть бути ефективними в залежності від цілей учителя та особливостей учнівського колективу.

На жаль, на сьогоднішній день тема геометричних перетворень має більш “рутинний” характер, а важливі та цікаві задачі пропонуються як додаткові або “для кмітливих”. Ковзна симетрія взагалі практично не розглядається, хоча не є складною темою для сприйняття учнями.

Треба зазначити, що існують видання минулих років, де розглядаються задачі на побудову. Для своєї роботи ми користувались джерелами [6, 7], але більше звертаємо увагу на практичне застосування і дослідження побудов. В роботах [8, 9] увага зосереджена на простих геометричних побудовах, які використовуються у шкільному курсі геометрії. Можна також зазначити, що геометричним побудовам присвячено і наукові статті [1, 10, 11].

У цій роботі пропонується акцент на важливості та доцільності вивчення даних перетворень як у межах уроків, так і в позакласній діяльності. Звертається увага на те, що додатковий розгляд задач на побудову, паралельного переносу, осьової симетрії та ковзної симетрії може не лише розширити уявлення учнів про геометричні перетворення, але й урізноманітнити методи розв'язання задач. Це сприяє кращому розумінню просторових зв'язків та формує цілісну картину геометрії.

Запропонована розробка може стати цінним доповненням до шкільної програми, послугувати методичним матеріалом для вчителів та бути корисною для самостійного опрацювання учнями.

Об'єкт дослідження. Геометричні перетворення фігур на площині.

Предмет дослідження. Властивості та особливості паралельного

переносу і ковзної симетрії як видів рухів у задачах на побудову.

Мета дослідження: Проаналізувати місце та значення теми «Задачі на побудову» у шкільному курсі геометрії, запропонувати методи розв’язування задач на побудову, запропонувати методи аналізу та дослідження задач на побудову, запропонувати завдання для самостійної роботи.

Завдання дослідження:

Для досягнення мети дослідження було вирішено наступні завдання:

1. Описати основні властивості рухів, зокрема паралельного переносу та ковзної симетрії.
2. Розглянути побудову паралельного переносу та ковзної симетрії з використанням циркуля і лінійки.
3. Дослідити, як поєднання осьової симетрії і паралельного переносу утворює ковзну симетрію.
4. Дослідити, як паралельний перенос і ковзна симетрія застосовуються у задачах на побудову.
5. Розв’язати задачі на побудову із застосуванням паралельного переносу і ковзної симетрії в координатній площині.

Для досягнення мети та вирішення завдань застосовуються такі **методи дослідження:** теоретичні – аналіз науково-педагогічних та методичних джерел; аналіз, синтез, класифікація, систематизація, узагальнення методів дослідження і розв’язування задач на побудову у шкільному курсі геометрії.

Наукова новизна роботи полягає в тому, що крім геометричних побудов детально проводяться дослідження більшості задач. В задачах для самостійного розв’язання пропонується провести дослідження. Підібрано і систематизовано найбільш цікаві задачі. Ця розробка допоможе учням набути навичок для розв’язання задач на побудову, поглибити знання з елементарної геометрії.

Теоретична значення дослідження полягає в тому, що набули подальшого розвитку методи розв’язання та аналізу задач на побудову у шкільному курсі геометрії.

Практична значущість: паралельний перенос широко використовується у комп'ютерній графіці, CAD-системах, обробці зображень та 3D-моделюванні.

Дослідження методів геометричних побудов, що базуються на цьому перетворенні, є корисним для створення алгоритмів у цих сферах. Використання задач на побудову сприяє розвитку просторового мислення учнів. Це особливо важливо в підготовці до математичних олімпіад і зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО/НМТ).

Апробація результатів: Деякі результати роботи представлено у роботі [12]. За темою дипломної роботи було проведено заняття для учнів 9 класів у Комунальному закладі "Харківський ліцей №131 Харківської міської ради".

РОЗДІЛ 1. МІСЦЕ ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ В ГЕОМЕТРІЇ

1.1. Історичні відомості про задачі на побудову

Про важливість геометрії у математичній освіті сказано немало слів. Можна навести висловлювання відомих особистостей.

Ні тридцять років, ні тридцять століть зовсім не впливають на ясність і красу геометричних істин (Льюїс Керрол)

Той, хто не знає геометрії, той не може увійти в двері Академії (надпис над входом до Академії Платона).

Отже, геометрія—одна з найдавніших фундаментальних галузей математики, а геометричні побудови — ключ до пізнання геометрії.

Геометричні побудови — одні з найдавніших фундаментальних галузей математики, що беруть свій початок ще з часів давніх цивілізацій. Використання геометрії для побудови фігур, кутів і форм без допомоги вимірювальних інструментів — окрім циркуля та лінійки — захоплювало математиків протягом тисячоліть. Принципи геометричних побудов не лише сприяли розвитку математики, але й мали глибокий вплив на прогрес науки, архітектури та інженерії.

Початки: Стародавній Єгипет і Месопотамія

Походження геометричних побудов можна простежити в цивілізаціях Стародавнього Єгипту та Месопотамії, де геометрія використовувалась головним чином у практичних цілях. Наприклад, єгиптяни широко застосовували геометрію для землевимірювання та будівництва пірамід. Дані з математичного папірусу Райнда (бл. 1800 р. до н.е.) свідчать про те, що єгиптяни вміли вирішувати задачі, пов'язані з обчисленням площ трикутників, кіл та інших геометричних фігур, хоча їхні методи були переважно емпіричними, а не теоретичними.

У Месопотамії вавилоняни досягли значного прогресу в геометрії, зокрема у вимірюванні кутів і базових геометричних побудовах. Хоча основна увага приділялась практичним застосуванням у землевимірюванні та астрономії, їхня праця заклала основу для подальшого розвитку цієї галузі. Вавилонські математики використовували геометрію для вирішення задач, пов'язаних з поділом землі та рухом небесних тіл, що стало одним із перших прикладів теоретичного застосування геометрії.

Попри ці ранні досягнення, лише в період класичної Греції геометрична побудова стала формальною гілкою математики, керованою прагненням пізнати світ через дедукцію та логічні доведення.

Класична Греція: Золота епоха геометричних побудов

Геометричні побудови досягли свого апогею в класичний період грецької математики, особливо завдяки працям таких математиків, як Фалес, Піфагор, Евклід і Архімед. Саме вони заклали основи формального вивчення геометрії, встановивши правила та методи побудов, які впливали на покоління математиків.

Фалес Мілетський

Фалеса (бл. 624–546 рр. до н.е.) вважають одним із перших грецьких математиків, які зробили внесок у геометричні побудови. Йому приписують відкриття кількох основоположних геометричних теорем, зокрема теореми Фалеса, яка стверджує, що будь-який кут, вписаний у півколо, є прямим. Фалес також використовував геометричні принципи для розв'язання практичних задач, наприклад, визначав висоту єгипетських пірамід за допомогою подібних трикутників.

Піфагор і піфагорійці

Школа Піфагора, заснована Піфагором (бл. 570–495 рр. до н.е.), зробила значний внесок у геометрію, зокрема в дослідження теорії чисел та взаємозв'язків між геометричними фігурами. Відома теорема Піфагора, що

встановлює зв'язок між сторонами прямокутного трикутника, є одним із найдавніших результатів у галузі геометричних побудов. Піфагор та його послідовники вважали геометрію основою розуміння всесвіту і розробили кілька методів побудови фігур лише за допомогою циркуля та лінійки.

«Начала» Евкліда

Можливо, найвпливовішою фігурою в історії геометричних побудов є Евклід (бл. 300 р. до н.е.), чия праця *«Начала»* залишалася основним підручником з геометрії понад дві тисячі років. У *«Началах»* систематично викладено принципи геометричних побудов, починаючи з основних означень, постулатів і аксіом, і до складніших конструкцій та теорем.

Однією з найважливіших рис праці Евкліда є акцент на побудовах циркулем і лінійкою, без використання інструментів для вимірювання, таких як транспортир або рулетка. Ці побудови стали «золотим стандартом» класичної геометрії, і багато з них — як-от бісектриса кута або побудова рівностороннього трикутника — досі викладаються в школах.

Зосередженість Евкліда на логічних доведеннях і точних методах побудови заклала основу для розвитку аксіоматичних систем у математиці, вплинувши не лише на геометрію, а й на алгебру, математичний аналіз і логіку.

Архімед і геометричні методи

Архімед (бл. 287–212 рр. до н.е.) був ще однією видатною фігурою в історії геометрії. Відомий своїми роботами з геометрії, фізики та попередниками математичного аналізу, Архімед застосовував геометричні побудови для розв'язання різних задач, зокрема для обчислення площ і об'ємів. Він розробляв методи побудови фігур, які наближали значення числа π , та використовував геометричні принципи для обчислення площ криволінійних поверхонь, наприклад, сфер і циліндрів.

Внесок Архімеда у геометричні побудови виходив за межі теорії. Його винаходи, як-от архімедів гвинт і воєнні машини, базувалися на геометричних принципах і демонстрували практичне застосування геометрії в інженерії та механіці.

Занепад класичної геометрії та Золота доба ісламу

Після падіння Римської імперії вивчення геометрії в Європі занепало, але отримало нове життя в ісламському світі під час Золотої доби ісламу (VIII–XIV ст.). Вчені, як-от аль-Хорезмі, Омар Хаям і Насір ад-Дін ат-Тусі, зберегли й розвинули праці грецьких математиків, зокрема Евкліда й Архімеда.

Ісламські математики зробили важливі відкриття в алгебрі, тригонометрії та геометричних побудовах, особливо намагаючись розв'язати класичні задачі, як-от квадратура кола, подвоєння куба й трисекція кута. Хоча пізніше було доведено, що ці задачі не розв'язуються лише циркулем і лінійкою, спроби їх вирішення призвели до створення нових математичних технік та інструментів.

Одним із найважливіших досягнень цього періоду стало створення аналітичної геометрії, яка об'єднала алгебру та геометрію і дала змогу розв'язувати геометричні задачі за допомогою рівнянь. Це стало значним зрушенням від класичних побудов до алгебраїчного підходу в геометрії.

Відродження і народження сучасної геометрії

Епоха Відродження ознаменувалась відновленням інтересу до праць класичних грецьких математиків, особливо Евкліда й Архімеда. Такі мислителі, як Леонардо да Вінчі, Йоганн Кеплер і Рене Декарт, спиралися на геометричні принципи попередників, застосовуючи їх у фізиці, астрономії та інженерії.

У цей час перспектива стала важливим інструментом для художників і архітекторів, даючи змогу зображати об'єкти в тривимірному просторі на

площині. Це вимагало розуміння геометричних побудов і сприяло розвитку проективної геометрії.

Найвизначнішим досягненням у геометрії під час Відродження стало створення аналітичної геометрії Рене Декартом (1596–1650) і П'єром Ферма (1601–1665). Вона революціонізувала геометрію, дозволивши представляти фігури за допомогою рівнянь. Це дало змогу розв'язувати складні задачі алгебраїчними методами і підготувало підґрунтя для виникнення математичного аналізу, створеного Ньютоном і Лейбніцем.

Роль геометричних побудов у сучасній математиці та науці

У наш час геометричні побудови й далі відіграють важливу роль у математиці, науці та інженерії. Хоча ще в XIX столітті було доведено обмеження циркуля і лінійки (деякі класичні задачі не можна розв'язати лише з їхньою допомогою), принципи побудов залишаються актуальними.

Інформатика й алгоритми

Принципи геометричних побудов активно використовуються в комп'ютерній науці — зокрема в алгоритмах для комп'ютерної графіки, САПР (CAD) і робототехніки. Алгоритми для побудови форм, розв'язання задач і моделювання фізичних процесів застосовуються у відеоіграх, архітектурному проектуванні тощо.

Інженерія та фізика

В інженерії геометричні методи використовуються для проектування конструкцій, машин і систем, які працюють відповідно до геометричних принципів. Від мостів і будівель до механічних пристроїв — усе це вимагає точного геометричного мислення.

У фізиці геометричні побудови використовуються для моделювання фізичних систем і аналізу руху, сили, енергії. Такі поняття, як вектори, координатні системи, геодезичні лінії, ґрунтуються на геометрії.

Освіта і геометрія

Геометричні побудови залишаються важливою частиною навчання математики. Вони навчають логіці, точності та просторовому мисленню. Побудова фігур циркулем і лінійкою допомагає учням краще розуміти математичні ідеї й розвивати критичне мислення.

1.2 Основні властивості паралельного переносу і ковзної симетрії

Паралельний перенос. Нехай заданий фіксований вектор $\vec{a}$. Тепер для будь-якої точки M ставиться у відповідність точка M' така, що вектор $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$. Така відповідність називається паралельним переносом.

Основні властивості паралельного переносу:

- 1) Відповідні в паралельному перенесенні прямі паралельні.
- 2) Паралельне перенесення є рухом.
- 3) образом будь-якої фігури F у паралельному перенесенні є фігура F' , рівна фігурі F .
- 4) Якщо точка C лежить між точками A і B , то C' точки C лежить між образами A' і B' точок A і B у будь-якому паралельному перенесенні.

Осьова симетрія. Нехай є пряма l на площині. Для будь-якої точки M , що не належить l , ставиться у відповідність точка M' , симетрична до M відносно l ($M' \notin l$), тобто $MM' \perp l$; якщо точка O - точка перетину MM' та l , то $MO = OM'$.

Основні властивості осьової симетрії:

- 1) Якщо точка M' - це симетричне відображення точки M відносно прямої l , то M - це симетричне відображення точки M' відносно прямої l .
- 2) Якщо пряма a і її образ a' в осьовій симетрії відносно прямої l перетинаються в одній точці, то ця точка належить l .
- 3) Якщо пряма a має з прямою l точку перетину, то вона є і точкою перетину прямої l та a' - образ прямої a в осьовій симетрії відносно прямої l .
- 4) Будь-які дві точки площини мають тільки одну лише одну вісь симетрії.

Осьова симетрія на площині є рухом. Через це впливають властивості:

- 1) Фігури, симетричні відносно прямої, рівні.
- 2) Точки осі симетрії рівновіддалені від будь-якої пари симетричних точок.
- 3) Колінеарність точок зберігається при осьовій симетрії.

4) Симетричні прямі утворюють з віссю симетрії рівні кути.

Ковзна симетрія. Ковзною симетрією називається перетворення площини, яке є композицією осьової симетрії і паралельного перенесення на вектор паралельний до осі симетрії.

Властивості ковзної симетрії:

- 1) Результат буде одним і тим самим, незважаючи на порядок побудови відображень у осьовій симетрії та паралельному переносі.
- 2) Фігури F та F' , де F' —образ фігури F у ковзній симетрії, рівні.
- 3) Ковзну симетрію можна замінити трьома осьовими симетріями.
- 4) Ковзна симетрія є рухом.

1.3 Методичні рекомендації

Позакласні заняття з математики мають на меті не лише розширити знання учнів, а й показати їм практичне застосування математичних понять у реальному житті. Одна з цікавих тем, яка дозволяє розвивати просторове мислення та навички роботи з математичними програмами, – це, наприклад, «Використання паралельного переносу та осьової симетрії для розв'язання задач». Ця тема є важливою для розуміння геометричних перетворень і широко застосовується в природі, мистецтві, архітектурі та дизайні.

Заняття можна проводити як очно, так і дистанційно, використовуючи Geogebra – динамічне середовище для вивчення математики. Онлайн-формат особливо корисний у випадках, коли немає можливості зібрати учнів у класі, або ж якщо необхідно забезпечити інтерактивну взаємодію з математичними об'єктами у цифровій формі.

Організація заняття

Вчитель оголошує тему заняття та пояснює його мету. Далі краще почати з нагадування та обговорення основних понять, концепцій та формул, які знадобляться для вирішення задач. Це стимулює учнів до роботи на занятті та активізує їхню увагу. Учні пригадують, що таке рух у геометрії, що таке симетрія та які бувають її види, а також розглядають поняття вектора, оскільки саме він визначає напрямок і величину переносу фігури.

Учням пропонуються різноманітні задачі з відповідних тем. Схема розв'язання задач повинна бути наступною:

- 1) Аналіз – це відшукування способу розв'язування задачі на основі закону про єдність аналізу та синтезу, це план розв'язування задачі (усвідомлення умови задачі, зв'язків між даними і шуканими величинами).

- 2) Побудова – відповідно до плану, складеного під час аналізу, за допомогою вказаних інструментів виконуємо побудову шуканої фігури за елементами, даними в умові задачі.
- 3) Доведення – це усвідомлення і перевірка правильності розв’язку задачі.
- 4) Дослідження – це етап, на якому визначаємо, для яких саме даних задача має розв’язки, і якщо має, то скільки їх, чи все зроблено добре, що можна зробити інакше, як діяти за інших умов.

Не можна також забувати про обмеження в часі. Потрібно підбирати тільки найважливіші задачі, щоб якомога більше розкрити дану тему. На завершення заняття учні діляться своїми відкриттями та обговорюють, де можна застосовувати ці перетворення. Вчитель підсумовує основні моменти.

На домашнє завдання учням можуть бути запропоновані на обмірковування тематичні задачі або знаходження подібних прикладів в реальному житті.

Зазначимо, що на уроках геометрії доцільно використовувати пакети динамічної геометрії. У даній роботі у додатках 2 і 3 наводяться можливості пакету Geogebra і деякі ключові побудови. Таким чином, заняття допомагає учням не лише зрозуміти нові геометричні поняття, а й навчитися працювати з динамічним математичним середовищем. А використання Geogebra дозволяє зробити навчання більш наочним, цікавим і доступним у будь-якому форматі. Доступ до Geogebra і може бути знайдений через браузер [13]. У джерелах [14, 15] можна знайти приклади використання цієї платформи у геометричних побудовах.

РОЗДІЛ 2. ВИКОРИСТАННЯ РУХІВ В ЗАДАЧАХ НА ПОБУДОВУ

2.1. Задачі на побудову з використанням паралельного переносу

У даному підрозділі розглянемо задачі на побудову, де можна буде ефективно використовувати паралельний перенос. Розв'язувати задачі будемо згідно зі схемою, яка надана у методичних рекомендаціях.

Задача 1. У якому місці слід побудувати міст MN через річку, яка розділяє два населені пункти A і B , щоб шлях $AMNB$ був найкоротшим (береги річки вважаємо паралельними прямими, міст перпендикулярний берегам річки. Рис. 1)? [4, с. 166]

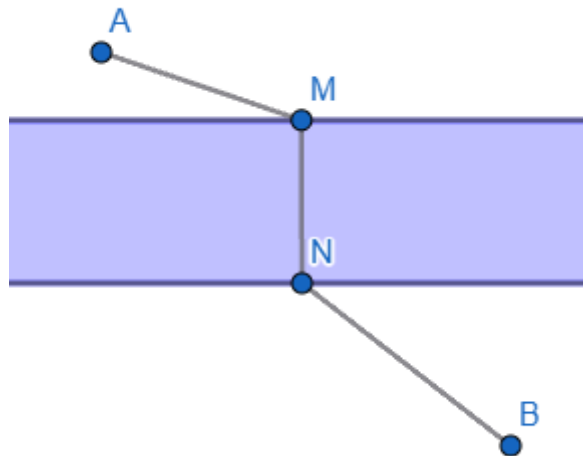


Рис. 1

Аналіз. Шлях $AMNB$ складається з $AM+MN+NB$. Зрозуміло, що MN – це константа, бо це є фактично відстанню між двома паралельними прямими. Отже, довжина шляху $AMNB$ залежить тільки від $AM+NB$, тому відстанню MN можна знехтувати. Таким чином, нам треба знайти таке розташування мосту MN , щоб $AM+NB$ мало мінімальну довжину.

Побудова. Здійснимо паралельний перенос у напрямку, перпендикулярному берегам, на відстань MN . Тоді нижній край моста співпадає з верхнім, нижній берег з верхнім. Це буде пряма l . Він При цьому точка B переміститься у точку B' .

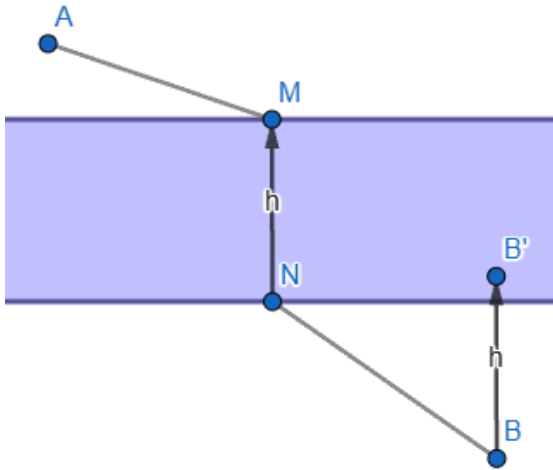


Рис. 2

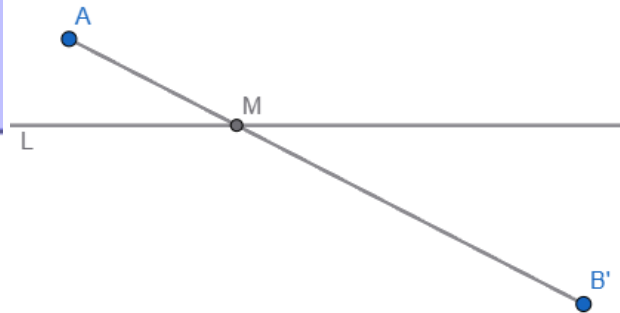


Рис. 3

З'єднаємо точки A і B' відрізком. Він перетинає пряму l у точці M , з якої і потрібно буде будувати міст MN (Рис. 3).

Доведення. Як випливає з побудови $AM + NB = AM + MB'$. Але $AM + MB'$ є найменшим шляхом між точками A та B' , бо він є відрізок AB' .

Дослідження. З геометричної точки зору наведений вище розв'язок можна вважати завершеним. Якщо ми повернемося до початкової постановки задачі, тоді знаходження точки M , де треба починати будівництво мосту, може стати проблематичним. Наприклад, точка B' , куди перейде точка B , може бути в реальності недоступною (Рис. 2).

У цьому випадку знайдемо точку M аналітичними методами.

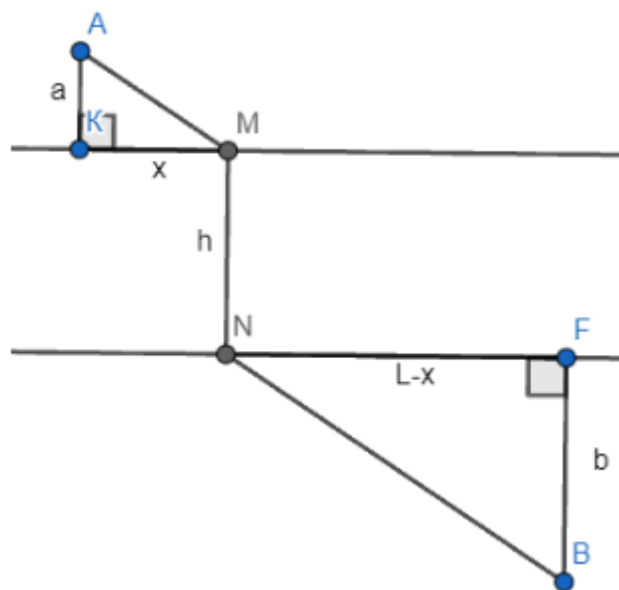


Рис. 4

Позначимо через $AK=a$ - перпендикуляр опущений з точки A на пряму KM (Рис. 4). Аналогічно $FB=b$. Нехай $KM=x$, а $FN=L-x$, де L - це відстань між прямими AK та FB . Якщо ці трикутники побудувати способом описаним раніше, то вийде що кут AMK дорівнює куту BFN (як вертикальні), тому трикутники AKM та BFN - подібні. Це означає, що для знаходження x можна скористатися ознакою подібності трикутників: $\frac{x}{L-x} = \frac{a}{b}$; $x = \frac{aL}{a+b}$; Таким чином ми розв'язали задачу геометрично, що може зробити учень 9-го класу. Але для цього потрібно обґрунтувати подібність трикутників. Річ у тім, що цього можна і не робити, використовуючи більш складні алгебраїчні рішення. Це ми зараз і спробуємо зробити. Для цього, користуючись теоремою Піфагора, запишемо, що $AM = \sqrt{a^2 + x^2}$, $BN = \sqrt{b^2 + (L-x)^2}$. Тоді відстань між двома точками:

$AM + MN + BN = \sqrt{a^2 + x^2} + h^2 + \sqrt{b^2 + (L-x)^2}$. Оскільки нам потрібно знайти такі значення x , при яких ця сума мінімальна, то скористуємось похідною і прирівняємо її до 0:

$$(\sqrt{a^2 + x^2} + h^2 + \sqrt{b^2 + (L-x)^2})' = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x-L}{\sqrt{b^2 + (L-x)^2}} = 0;$$

$$x\sqrt{b^2 + (L-x)^2} = (L-x)\sqrt{a^2 + x^2};$$

$$x^2 b^2 + x^2 (L-x)^2 = a^2 (L-x)^2 + x^2 (L-x)^2;$$

$$x^2 b^2 = a^2 (L-x)^2;$$

$$x^2 (b^2 - a^2) + x(2La^2) - a^2 L^2 = 0; \text{ Отримали звичайне квадратне рівняння.}$$

Розв'язуючи його отримаємо:

$$x_1 = \frac{aL}{a+b}, x_2 = \frac{aL}{a-b}. \text{ Як бачимо в нас вийшло два розв'язки. Можливо, один}$$

з них зайвий. Якщо $a \leq b$, то другий розв'язок нам автоматично не підходить, бо x не може бути від'ємним. У випадку, коли $a > b$, потрібно визначити вид цих точок екстремуму. Так як a, b - додатні та $a + b > a > a - b > 0$, то $0 < \frac{aL}{a+b} < L < \frac{aL}{a-b}$. Тому для визначення

знака похідної можемо підстави точки 0 або L, а далі знаки будуть чергуватись. Отже, підставивши 0, отримаємо:

$$\frac{0}{\sqrt{a^2+0^2}} + \frac{0-L}{\sqrt{b^2+(L-0)^2}} = \frac{-L}{\sqrt{b^2+L^2}} < 0, \text{ тому функція на проміжку } (-\infty; \frac{aL}{a+b})$$

спадає. Підставивши L, отримаємо: $\frac{L}{\sqrt{a^2+L^2}} + \frac{L-L}{\sqrt{b^2+(L-L)^2}} = \frac{L}{\sqrt{a^2+L^2}} > 0$, тому

функція $(\frac{aL}{a+b}; \frac{aL}{a-b})$ зростає. А отже, $x_1 = \frac{aL}{a+b}$ і є точкою мінімуму. Як

бачимо, результати зійшлись. Звісно, алгебраїчний метод виявився набагато важчим, але дає більш ґрунтовний результат і не потребує додаткових міркувань. Також він може бути цікавим для старших класів, під час проходження відповідних тем.

Задача 2. Побудуйте чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно непаралельні, за чотирма кутами і двома протилежними сторонами. [4, с. 166]

Аналіз. Так як нам дано всі кути чотирикутника, то за допомогою циркуля та лінійки ми можемо побудувати одну з даних сторін чотирикутника та прилеглі кути.

У будь-якому чотирикутнику, якщо якусь вершину паралельно перенести на сторону чотирикутника, то вона співпаде з іншою вершиною, яка належала цій стороні. Це означає, що якщо дві прямі, яким належать протилежні сторони чотирикутника, не є паралельними, і ми паралельно перенесемо одну з цих прямих на суміжну їй сторону чотирикутника, то ці дві прямі перетнуться в точці, яка буде вершиною чотирикутника.

Будь-які пари прямих, які містять протилежні сторони, перетинаються (це буде використано при побудові)

Побудова. Нехай відомі довжини сторін АВ та CD і чотири кути чотирикутника ABCD. Побудуємо відрізок АВ та прямі a та b (Рис. 5). Ми це можемо зробити за допомогою циркуля та лінійки, так як знаємо довжину АВ та кути між відрізком та відповідними прямими.

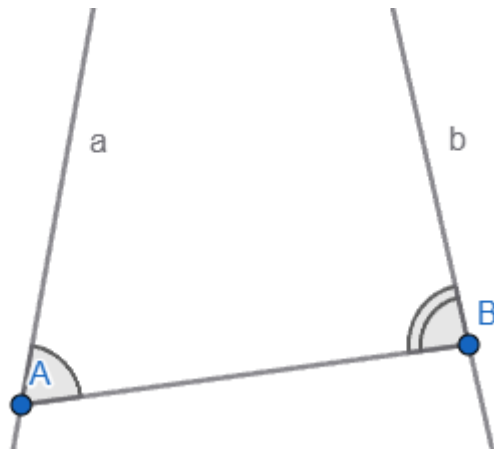


Рис. 5

Тепер потрібно якось зрозуміти, де побудувати відрізок CD. Для цього скористаємось паралельним переносом. Спочатку побудуємо пряму f під відповідним кутом до прямої a з точки A (Рис. 6).

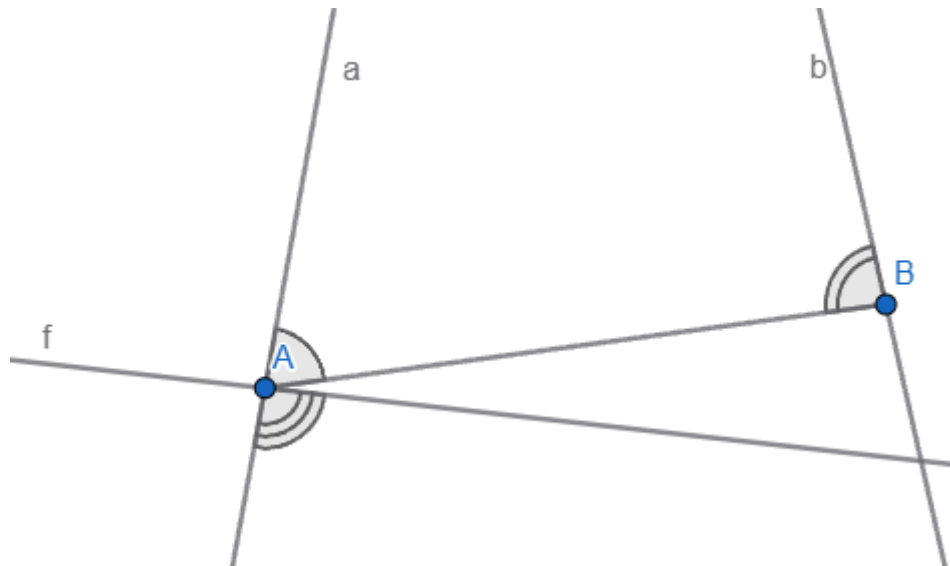


Рис. 6

Далі за допомогою циркуля проведемо з точки коло радіуса CD та відмітимо точку перетину кола з прямою f (Рис. 7).

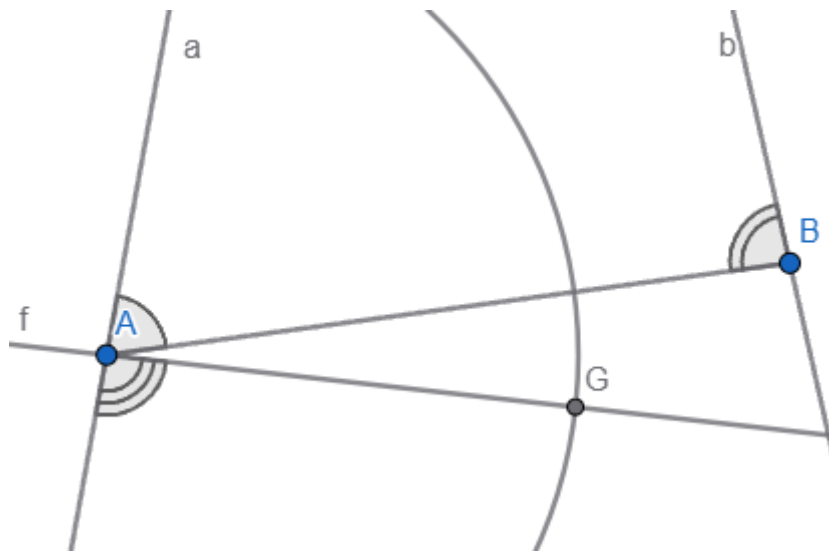


Рис. 7

Через точку G проведемо пряму, яка буде паралельною до прямої a , і позначимо її точку перетину з прямою b як точку C (Рис. 8).

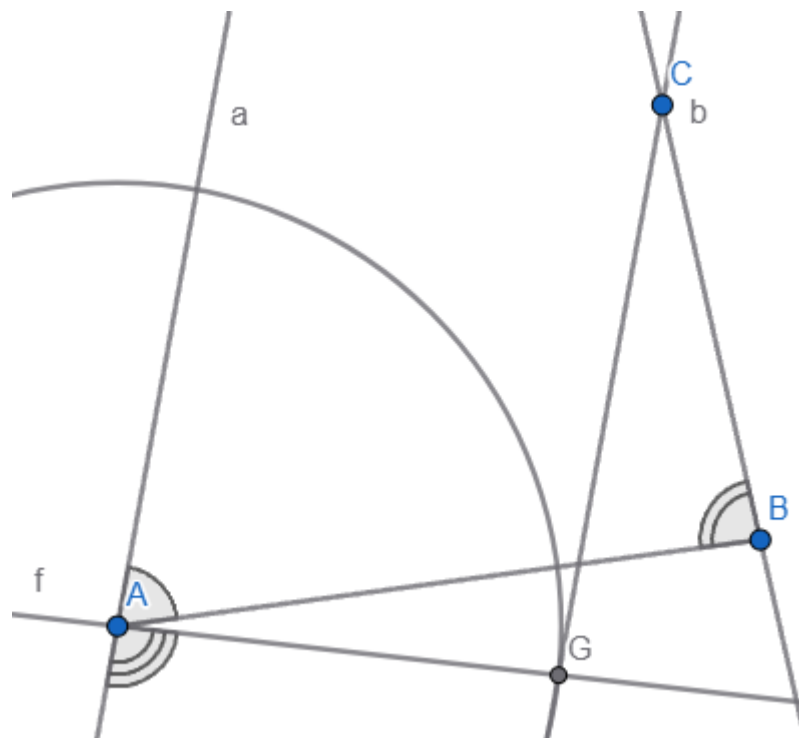


Рис. 8

Тепер, використовуючи четвертий кут або побудувавши паралельну пряму до f через точку C , побудуємо відрізок CD і таким чином отримаємо чотирикутник $ABCD$ (Рис. 9).

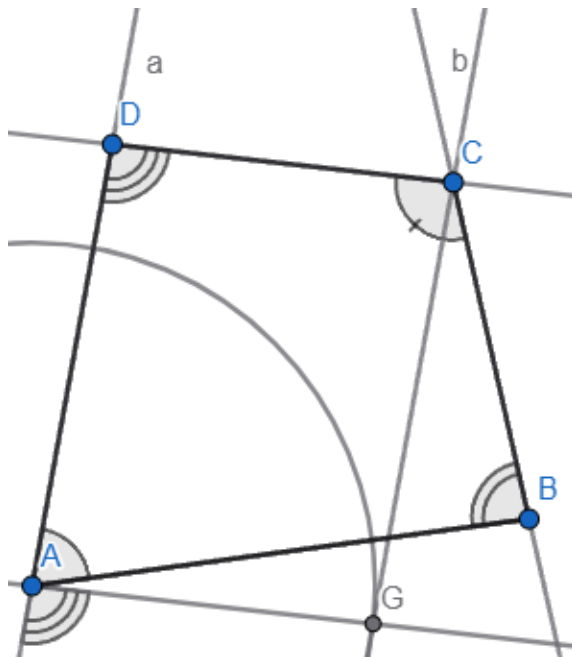


Рис. 9

Доведення. Побудуємо відрізок АВ та прямі a та b під кутами 1 та 2 (Рис. 5). Шукаємо таку точку C , що належить прямій b , і якщо провести відрізок з цієї точки під кутом 3 до b , то він перетне пряму a в точці D . Розглянемо всі такі відрізки довжини CD , які знаходяться під кутом 4 до прямої a . Початки таких відрізків належать прямій a . Якщо ми проведемо пряму через кінці цих відрізків, то вона буде паралельна до a . Її точка перетину з прямою b і буде шуканою точкою C . Фактично ми тільки що зробили паралельний перенос прямої a на відрізок CD .

Дослідження. Цікавим завданням для домашнього опрацювання учням буде розв'язати задачу аналітичним методом.

Задача 2.1 Дано чотирикутник з протилежними сторонами a , c та кутами α , β , γ , δ , які попарно суміжні до відповідних сторін. Знайти дві інші сторони чотирикутника b , d , якщо a , b , c , d попарно непаралельні.

Вказівки:

- Діагоналлю чотирикутник ділиться на два трикутники. Тому, якщо провести діагональ AC , то площу чотирикутника можна подати у вигляді $S_{ABCD} = \frac{1}{2} (a \cdot d \cdot \sin \delta + b \cdot c \cdot \sin \beta)$.

Аналогічно робимо для діагоналі BD .

- Якщо провести висоти з суміжних кутів, які будуть спиратися на одну сторону чотирикутника, то отримаємо прямокутну трапецію, основами якої і будуть проведені висоти. Їхню довжину також можна дізнатися. Таким чином повинно бути достатньо умов, для знаходження невідомих сторін чотирикутника.

Задача 3. Дано два кола з відомими центрами і радіусами, пряма та відрізок заданої довжини l (Рис. 10). Побудувати цей відрізок паралельно прямій так, щоб його кінці належали колам.

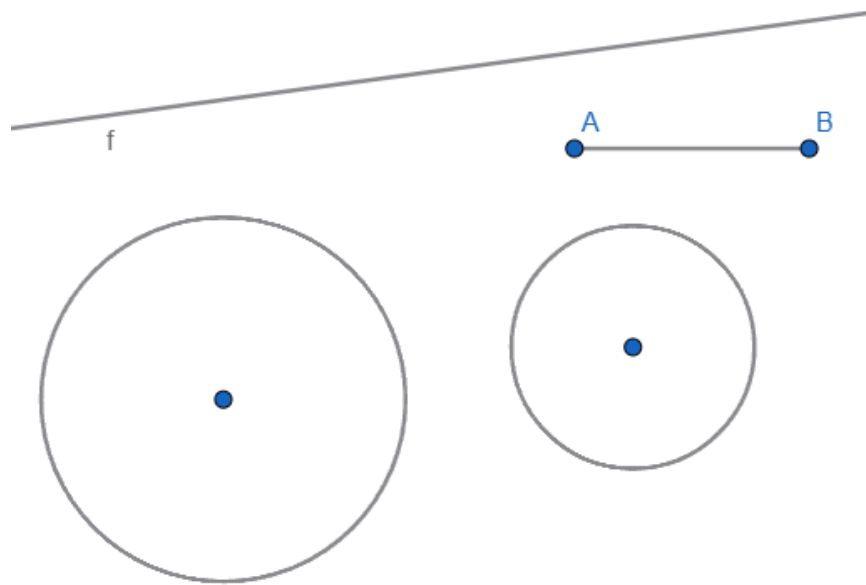


Рис. 10

Аналіз. По-перше, потрібно зазначити, що ця задача не завжди має розв'язки. Наприклад, якщо відрізок відрізок AB виявиться занадто маленьким або великим. Будемо вважати, що існує принаймні 1 розв'язок, бо їхню кількість ми поки що теж не знаємо. Пряма f задає напрямок, а відрізок AB - довжину якогось вектора $\vec{a}$. Стає зрозумілим, що для вирішення цієї задачі потрібно скористатися паралельним переносом.

Побудова. Очевидно, якщо здійснити паралельний перенос на довжину l , то один кінець відрізка співпаде з іншим. Отже, потрібно паралельно перенести одне з кіл на відстань, яка дорівнює довжині відрізка, у напрямку даної прямої вбік другого кола, тобто на вектор $\vec{a}$ (Рис. 11).

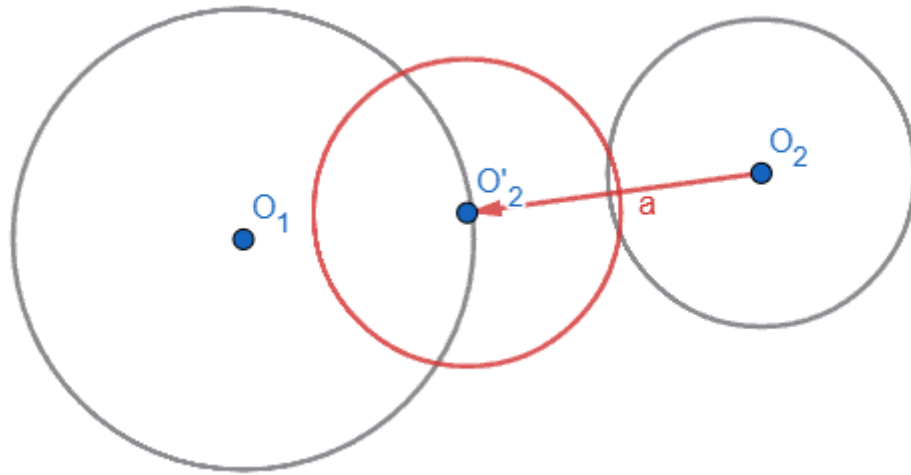


Рис. 11

Стає зрозумілим, що кількість розв'язків залежить від кількості точок перетину. Насправді, задача вже майже вирішена. Точки перетину кіл з центрами O_1 та O'_2 і є розв'язками, тобто ми знайшли один з кінців шуканого відрізка. Залишилося тільки побудувати відрізок АВ паралельно заданій прямій (Рис. 12).

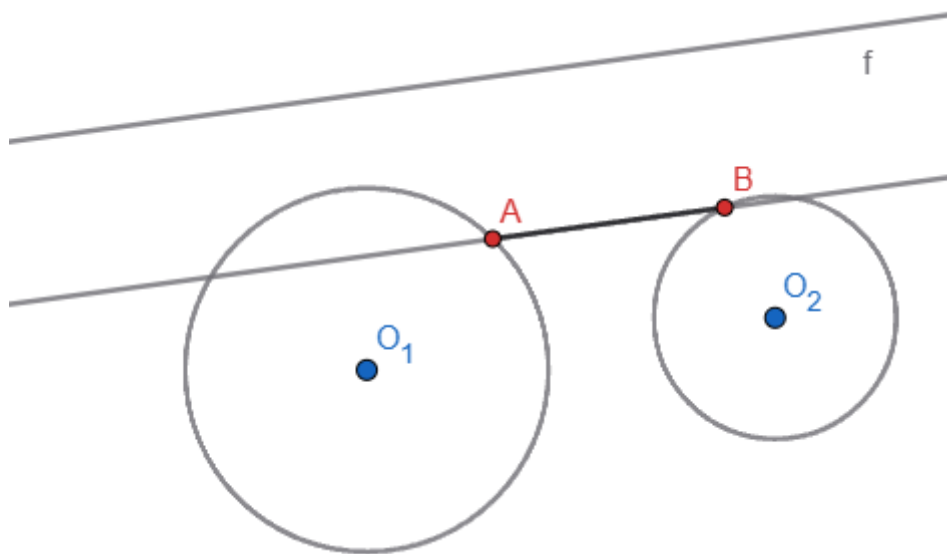


Рис. 12

Доведення. Через кожну точку кола з центром в O_1 проведемо прямі, паралельні до f . На цих прямих у напрямку ближче до другого кола з центром в точці O_2 відкладено відрізки довжини АВ так, щоб їхні початки належали колу з центром в O_1 . Кінці цих відрізків утворюють коло такого ж радіусу, як і

коло з центром в O_1 , і якщо воно перетинає коло з центром в точці O_2 , то ми отримали точки, які є розв'язком задачі. Але фактично ми тільки що зробили паралельний перенос кола з центром в точці O_1 на вектор $\vec{a}$, що колінеарний до прямої f та $|\vec{a}| = AB$.

Дослідження. Цікавим але водночас складним завданням є дослідження існування розв'язків задачі ще до побудови. Наведемо аналітичний аналіз. Для цього нам необхідно ввести позначення відомих параметрів. Нехай радіуси великого та меншого кіл дорівнюють R та r відповідно, $R \geq r$. Так як відомі розташування центрів, то це означає, що нам відома відстань s між центрами заданих кіл. Також нам дана пряма, але нас буде цікавити саме кутовий коефіцієнт $k = \operatorname{tg} \alpha$, тобто рівняння прямої: $y = kx + b$. Випадок, коли рівняння прямої такого вигляду: $x = b$, поки що не врахуємо. Також задано відрізок довжини l . Для того, щоб уникнути деяких параметрів, таких як координати центрів двох кіл, потрібно правильно обрати систему координат. Це можна зробити таким чином (Рис. 13):

- Система координат - Декартова.
- Точку початку координат помістити у центр кола радіуса R .
- Вісь Ox проходить через центри двох кіл у напрямку до кола з радіусом r .
- Напрямок осі Oy оберемо таким чином, щоб кутовий коефіцієнт був $k \geq 0$.

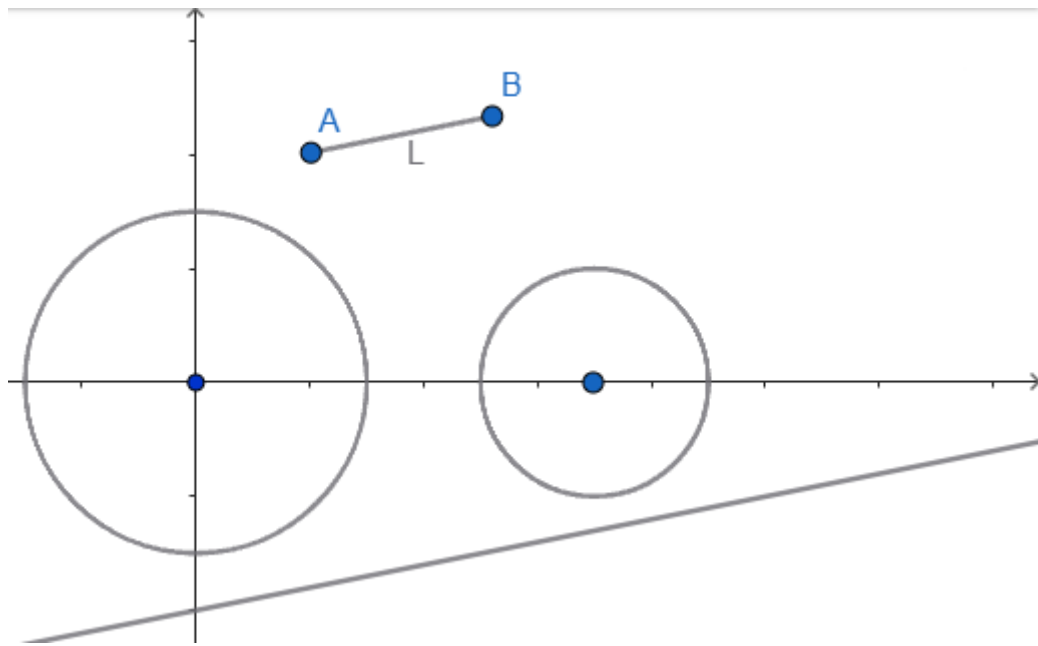


Рис. 13

Нас буде цікавити існування розв'язків. Нехай точки $(x_1; y_1)$ та $(x_2; y_2)$, які будуть належати більшому і меншому колам відповідно. Ці точки - координати початку та кінця шуканого відрізка. Тоді вийде система рівнянь:

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = R^2 \\ (x_2 - c)^2 + y_2^2 = r^2 \\ y_1 = kx_1 + w \\ y_2 = kx_2 + w \\ \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = l \end{cases}$$

Маємо 5 невідомих: x_1, x_2, y_1, y_2, w , і 5 рівнянь, отже з цієї системи можна знайти всі невідомі. Але вирішити її буде дуже важко, тому змінимо умови. Скористаємось паралельним переносом. Для загальності, змінимо деякі параметри (Рис. 14): радіуси кіл - R_1 і R_2 , кут нахилу прямої: $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Введемо параметри l_1, l_2 такі, що $l_1 = l \cdot \cos \alpha, l_2 = l \cdot \sin \alpha$. Тепер система рівнянь має вигляд:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2; \\ (x - c + l_1)^2 + (y + l_2)^2 &= R_2^2; \\ l_1 &= l \cos \alpha; \end{aligned}$$

$$l_2 = l \sin \alpha;$$

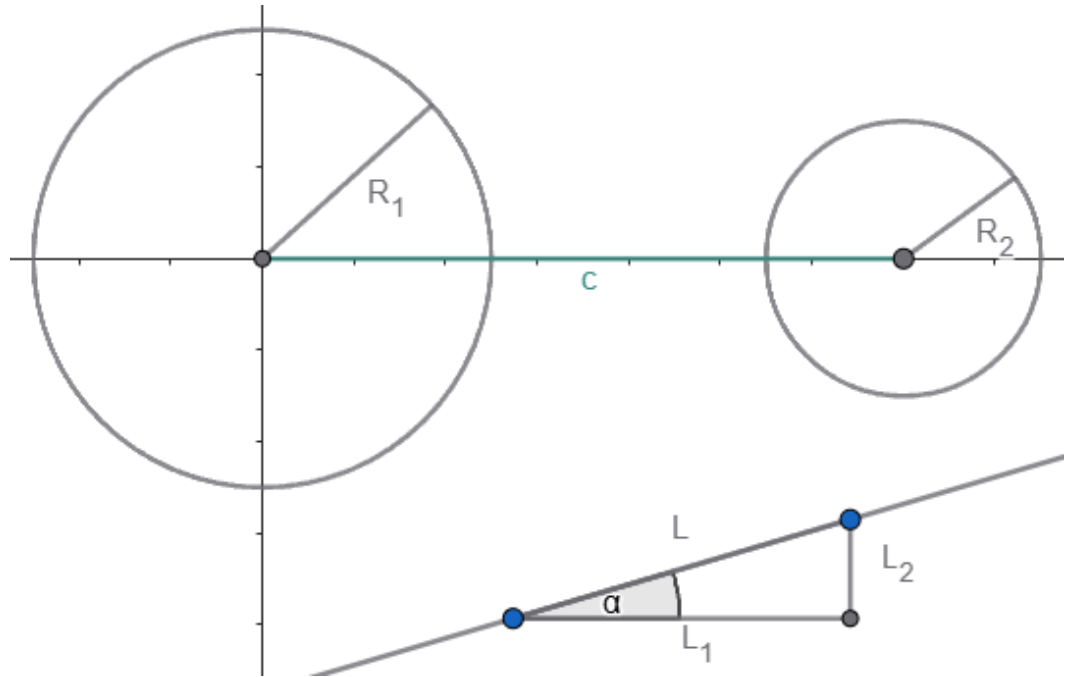


Рис. 14

Таким чином, кількість рівнянь системи знизилася до 4. Спробуємо її розв'язати. Система після перетворень:

$$4l_2^2 x^2 + (2x(l_1 - c) + l^2 - 2l_1 c + c^2 + R_1^2 - R_2^2)^2 = 4l_2^2 R_1^2;$$

$$(2x(l_1 - c) + (l_1 - c)^2 + l_2^2 + R_1^2 - R_2^2) : 2l_2 = -y;$$

$$l_1 = l \cos \alpha;$$

$$l_2 = l \sin \alpha;$$

В результаті отримаємо необхідну умову для існування розв'язків.

$$(l^2 - cl \cdot \cos \alpha + c^2)^2 + (R^2 - r^2)^2 \leq 2((l^2 - cl \cdot \cos \alpha + c^2)(R^2 + r^2))$$

Перевіримо її на достатність використовуючи нерівність Коші: $l^2 - cl \cdot \cos \alpha + c^2 \geq 0$. Вийшло, що отримана умова є необхідною та достатньою.

Хоча аналітичне дослідження для цієї задачі є складним, з допомогою вчителя учні зможуть це зробити.

Можна провести геометричне дослідження, але воно теж достатньо складне і приводить до того ж результату.

2.2. Задачі на побудову з використанням осьової симетрії

Задача 4. По один бік від траси знаходяться два населених пункти. Біля траси потрібно побудувати магазин так, щоб шлях від магазину до обох населених пунктів був мінімальним (Рис. 15).

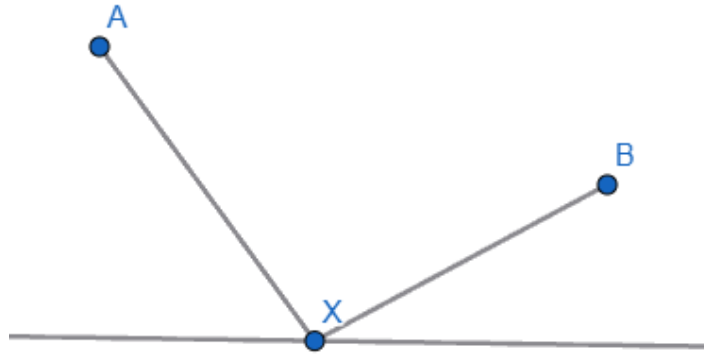


Рис. 15

Аналіз. Якщо б точки A та B лежали по різні сторони прямої, то розв'язок був би очевидний. Стає зрозумілим, що нам потрібно скористатися осьовою симетрією.

Побудова. Побудуємо точку B' - образ в осьовій симетрії точки B відносно прямої f (Рис. 16). Мінімальним шляхом між двома точками A та B' є відрізок AB'. Таким чином ми знайшли точку X - точка перетину прямої f та відрізка AB'.

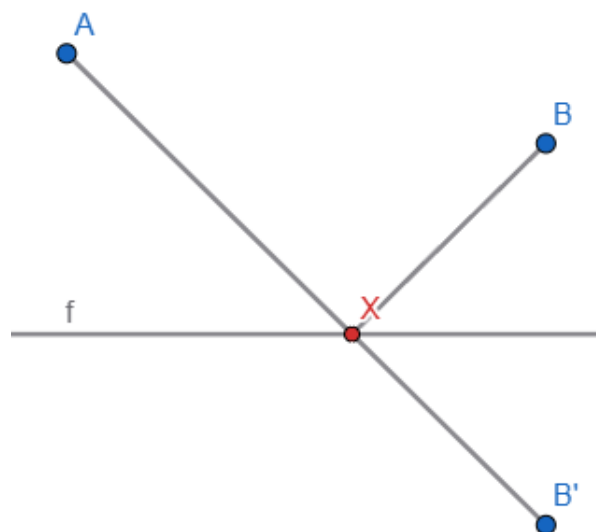


Рис. 16

Доведення. Нехай ми знайшли таку точку X . Тоді, для того, щоб пройти шлях AXB , нам потрібно з точки A пройти відстань AX до точки X , а потім з точки X пройти відстань XB до точки B . Нехай точка B' - образ в осьовій симетрії точки B відносно прямої f . Відстань $XB' = XB$ (за властивостями осьової симетрії). Таким чином, шлях $AXB = AXB'$, тому, якщо шлях AXB' - мінімальний, то і шлях AXB є мінімальним.

Дослідження. Цікавим завданням учням на домашнє опрацювання буде подумати над розв'язком з обґрунтуванням такої задачі:

Задача 4.1. Дано точки A та B , що знаходяться по одну сторону від дзеркала L . Як посвітити лазером з точки A так, щоб промінь світла відбившись від дзеркала пройшов через точку B ?

Вказівка: потрібно згадати, що кут падіння та кут відбиття світла рівні.

Задача 5. Дано гострий кут та точку, яка належить куту, але не належить сторонам кута (Рис. 17). Побудувати трикутник найменшого периметру, одна вершина якого лежить у заданій точці D , а дві інші - належать сторонам кута.

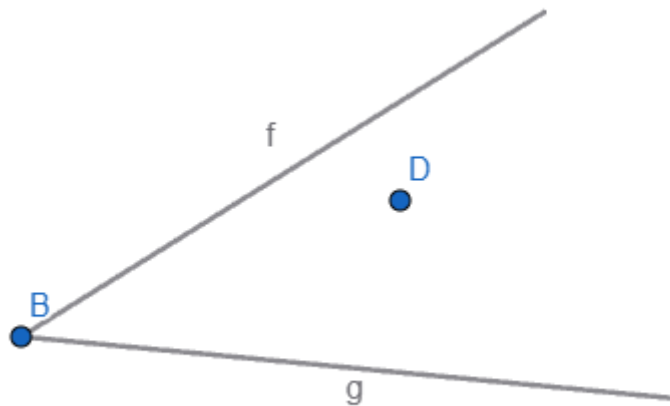


Рис. 17

Аналіз. Переробимо задачу і поставимо дві точки так, як на Рис. 18. Мінімальний шлях від точки M до N - це відрізок MN . Цей відрізок перетне прямі f та g .

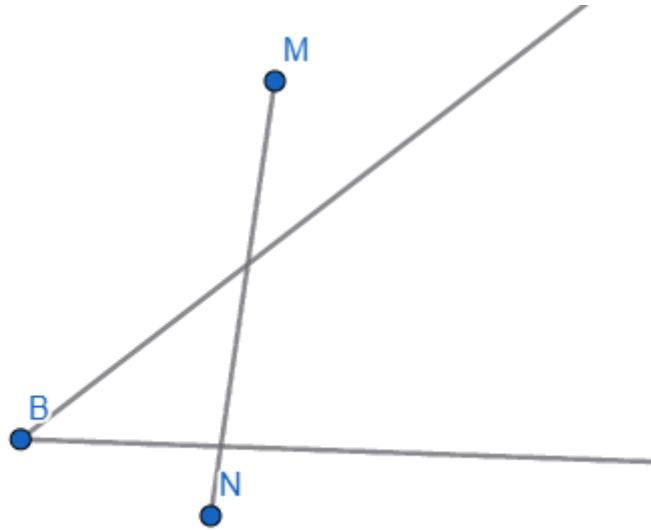


Рис. 18

Спробуємо задачу 5 звести до такої ж моделі. А допоможе нам в цьому осьова симетрія.

Побудова. Симетрично відобразимо точку D відносно прямих f та g . Отримаємо точки D'_1 та D'_2 відповідно. (Рис. 18).

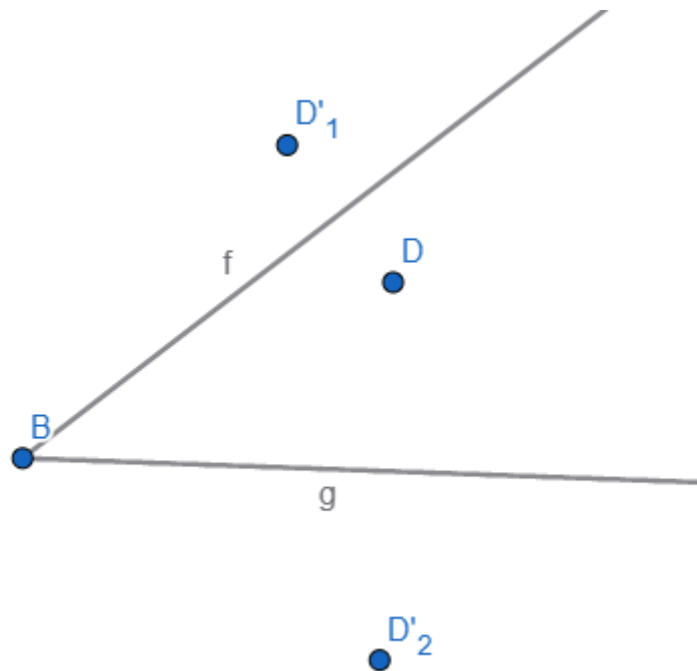


Рис. 19

З'єднаємо точки D'_1 та D'_2 і отримаємо точки F, G - точки перетину прямої $D'_1D'_2$ з прямими f та g, тому шлях $D'_1F + FG + D'_2G$ - мінімальний. Тобто ми отримали трикутник DFG , який буде найменшого периметру (Рис. 20).

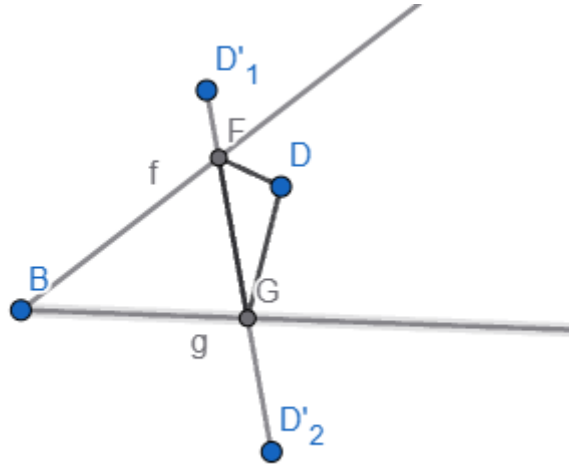


Рис. 20

Доведення. Нехай ми знайшли такі точки F та G, які належать прямим f та g відповідно. Точки D'_1 та D'_2 - образи в осьовій симетрії точки D відносно прямих f та g. Знаємо також, що $D'_1F = DF$, $D'_2G = DG$. Периметр $\triangle DFG$:
 $P_{\triangle DFG} = DF + FG + DG = D'_1F + FG + D'_2G$. Тому, якщо шлях $D'_1F + FG + D'_2G$ - мінімальний, то і $P_{\triangle DFG}$ - мінімальний.

Дослідження. Цікавим є випадок, коли заданий кут є тупим (Рис. 21).

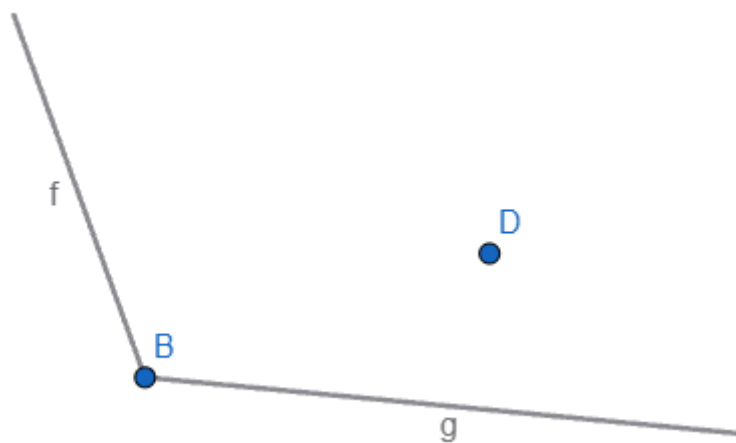


Рис. 21

Якщо ми зробимо ті ж самі дії, як і з гострим кутом, то відрізок $D'_1D'_2$ не перетне кут, а, відповідно, ми не можемо побудувати трикутник (Рис. 22). Отже таким методом вже не знайдеш трикутник найменшого периметру.

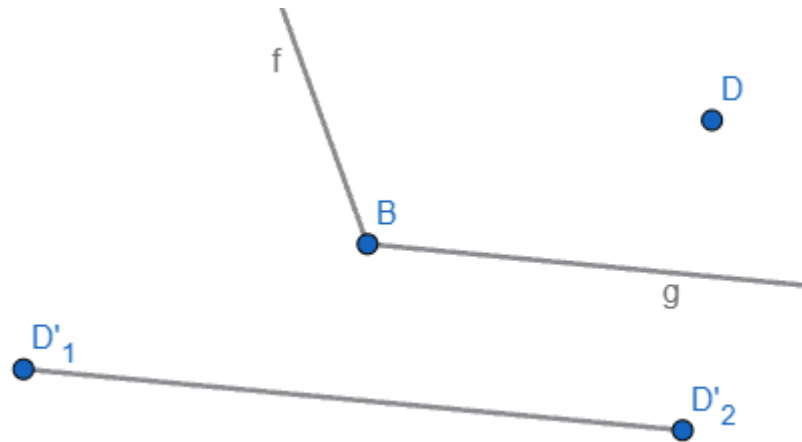


Рис. 22

Задача 6. Побудувати трикутник ABC за двома сторонами AB і AC ($AB < AC$) та різницею кутів B і C. [4, с. 173]

Аналіз. Якщо на стороні BC побудувати кут C з вершини B, то отримаємо рівнобедрений трикутник BCI (Рис. 23).

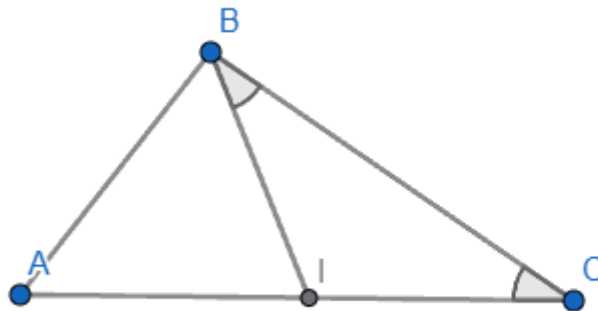


Рис. 23

Візьмемо пряму ІІ, що є медіаною трикутника BCI, за вісь симетрії і відобразимо вісною неї точку A в точку A' (Рис. 24).

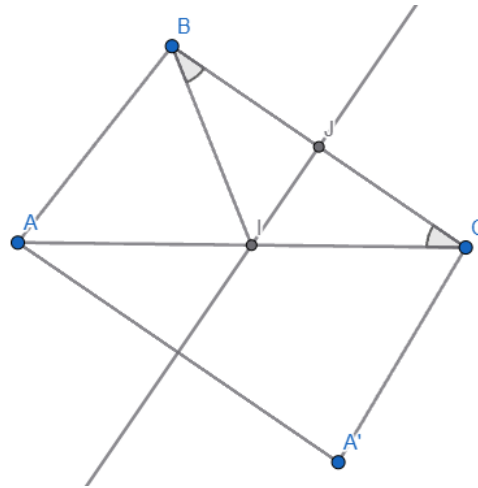


Рис. 24

Отримаємо, що кут $A'CB =$ куту ABC , тоді $A'CA =$ куту $B -$ кут C .

Побудова. Ми зможемо побудувати трикутник $A'CA$, бо відомі кут $A'CA$, AC та $A'C = AB$. Пряма $A'A$ паралельна до CB , тому ми можемо побудувати пряму CB (Рис. 25).

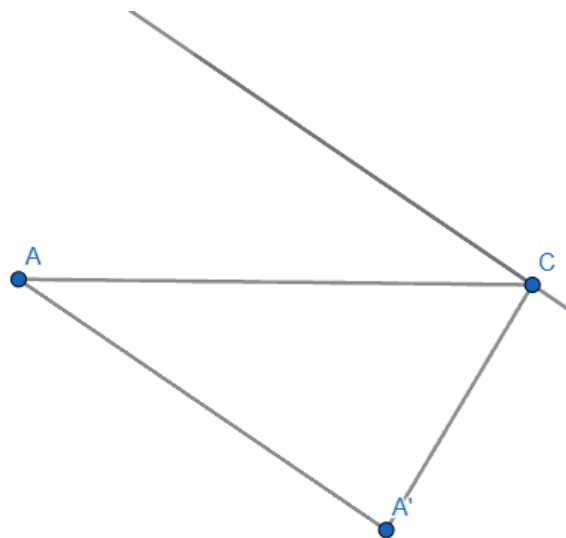


Рис. 25

Залишилось тільки побудувати AB . Це можна зробити, побудувавши за допомогою циркуля коло з центром в точці A та радіусом AB . Одна з точок перетину і буде точкою B . Отримали трикутник ABC (Рис. 26).

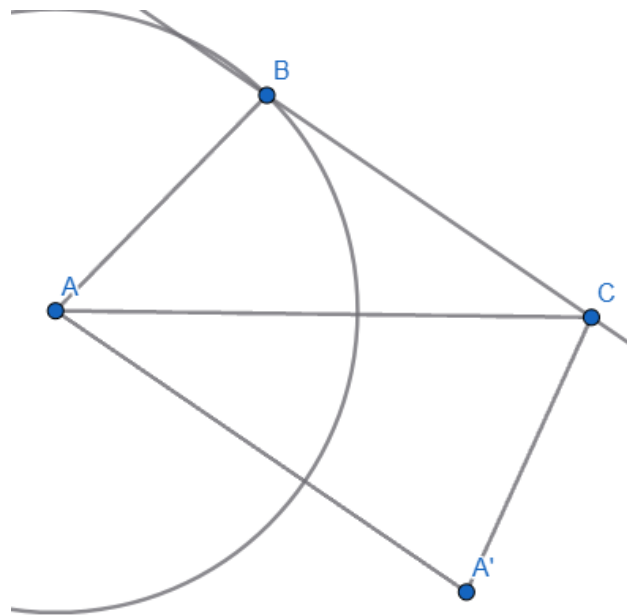


Рис. 26

Доведення. Пряма ІІ - висота, медіана і бісектриса рівнобедреного трикутника ІВС. Тому можна вважати точку С - образом точки В в осьовій симетрії відносно прямої ІІ. Таким чином відрізок А'С —образ прямої АВ в осьовій симетрії відносно прямої ІІ. Тому $A'C = AB$. Прямі $AA' \perp II$, $BC \perp II$, тому прямі AA' та BC - паралельні.

Дослідження. Нехай задані параметри $AB = a$, $AC = c$, $\angle B - \angle C = \delta$. Знайти довжину сторони ВС, користуючись методом осьової симетрії. Чи спрощує цей метод вирішення задачі?

Вказівка: для розв'язання нам потрібно буде знайти висоту трапеції $ABCA'$ (Рис. 26), що знаходиться між основами. Це можна зробити з використанням площі трикутника $AA'C$: $2S_{\triangle AA'C} = a \cdot c \cdot \sin \delta = h \cdot AA'$, де AA' можна знайти за теоремою косинусів.

2.3. Задачі з використанням ковзної симетрії

Задача 7. Дано трикутник з вершинами в точках $A'(3; -2)$, $B'(2; 1)$, $C'(5; 0)$, що є образом в ковзній симетрії трикутника ABC відносно осі OX . Знайти координати вершин трикутника ABC , якщо відомо, що абсциса точки A дорівнює -1 .

Розв'язання. Ковзна симетрія складається з паралельного переносу, паралельно до заданої прямої, та осьової симетрії. При осьовій симетрії відносно осі OX , ордината точки змінює свій знак на протилежний, а абсциса не змінюється. При паралельному переносі, паралельно до вісі OX , до абсциси додається відстань, на яку паралельно переносимо (в нашому випадку, це $3 - (-1) = 4$), а ордината точки не змінюється. Знаючи це, знайдемо координати точок A , B , C :

$$\text{т. } A = (-1; -(-2)) = (-1; 2);$$

$$\text{т. } B = (2-4; -1) = (-2; -1);$$

$$\text{т. } C = (5-4; 0) = (1; 0).$$

Відповідь: т. $A = (-1; 2)$; т. $B = (-2; -1)$; т. $C = (1; 0)$;

Задача 8. Учень знайшов стовбур квітки, на одному боці якого залишилося два листочки на відстані 6 та 10 см., рахуючи від початку стовбура. Довжина стовбура 12 см. Знайти кількість листочків, до того, як їх обірвали, якщо вони були рівномірно розподілені на стовбурі за законом ковзної симетрії відносно прямого стовбура. Вважати, що між двома заданими листочками не було інших.

Розв'язання. Нехай відстань, на яку паралельно переноситься симетрично відображений листок листок дорівнює l . Задані листочки знаходяться по один бік від стовбура, тому операцію ковзної симетрії було виконано два рази. Знайдемо l : $6 + 2 \cdot l = 10$, $l = 2$. На одному боці стовбура, крім двох заданих листочків, був ще один на відстані 2 см. від початку стовбура. На іншому боці знаходилося 4 листочки на відстанях 0, 4, 8 та 12 см. від початку стовбура. Таким чином, всього на стовбурі було 7 листочків.

Відповідь: 7 листочків.

Задача 9. Дано точки A та B , що знаходяться по одну сторону від прямої f . Побудувати такий відрізок MN довжини l , який належить прямій так, щоб шлях від точки A через MN до точки B був мінімальним.

Аналіз. Так як довжина MN не змінюється, то довжина шляху залежить тільки від $AM + BN$. Це означає, що ми можемо скористатися паралельним переносом вздовж прямої f , щоб знехтувати відстанню MN . Таким чином ми зведемо задачу до задачі 2, де для вирішення нам потрібно скористатися осьовою симетрією. Фактично, для вирішення цієї задачі треба використати ковзну симетрію.

Побудова. Здійснимо паралельний перенос вздовж прямої f на відстань l так, щоб точка N перейшла в точку M . Нехай точка B' - образ точки B при даному паралельному переносі на пряму MN , паралельно до прямої f . Точка B'' - образ точки B' при осьовій симетрії відносно прямої f . Точка M є перетином відрізка AB'' з прямою f . Залишилося з точки M побудувати на прямій f відрізок MN (Рис. 27).

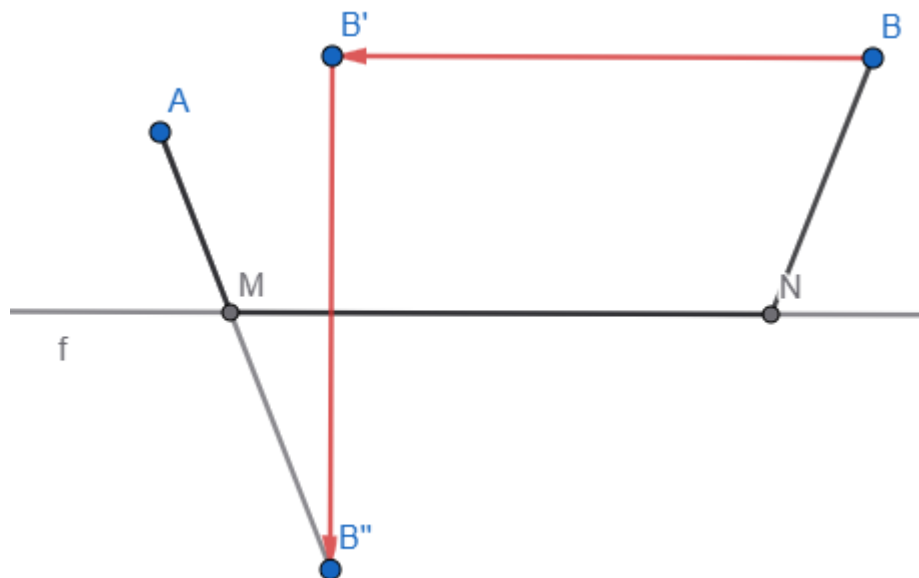


Рис. 27

Доведення. Точка B'' - фактично є образом точки B при ковзній симетрії відносно прямої f . Відрізок $MB'' = BN$. Оскільки точки A , M і B''

лежать на одній прямій, то шлях $AM + MB''$ - мінімальний, тоді і шлях $AM + MN + BN$ теж мінімальний.

Дослідження. Відрізки $AN_1, BN_2 \perp f; N_1, N_2 \in f$. Тоді

$\triangle AMN_1 \sim \triangle BNN_2$, що випливає з властивостей ковзної симетрії. Це можна використати для розв'язання задачі аналітичним методом.

Зауваження. Даною задачею можна скористатись для розв'язання такої практичної задачі.

Два населених пункти A і B знаходяться по одну сторону від прямолінійної залізничної колії. Де треба побудувати платформу довжини l , щоб сума відстаней від населених пунктів A і B до платформи була мінімальною. Відстанню від населеного пункту до платформи вважається відстань від населеного пункту до ближчого краю платформи.

ВИСНОВКИ

У даній дипломній роботі було досліджено використання паралельного переносу та ковзної симетрії у задачах на побудову, що дозволяє глибше зрозуміти роль геометричних перетворень у розв'язанні конструктивних задач.

Здійснено аналіз шкільних підручників щодо використання геометричних перетворень у задачах на побудову. Наведено історичні відомості про задачі на побудову і їх вплив на розвиток геометричних ідей. Наведено основні властивості паралельного переносу і ковзної симетрії.

Встановлено, що ці перетворення зберігають основні геометричні властивості фігур (довжини, кути, паралельність), що робить їх зручним інструментом для використання у задачах на побудову. Розглянуто практичне застосування паралельного переносу та ковзної симетрії у задачах на побудову. Показано, що використання цих перетворень спрощує процес побудови, робить його більш наочним та логічно обґрунтованим. Сформульовано методичні рекомендації щодо занять з використанням цих перетворень у шкільному курсі геометрії. Звертається увага на їхню навчально-виховну цінність, а також на можливість розвитку просторового мислення і вміння логічно міркувати. Надано рекомендації щодо використання платформи Geogebra на уроках геометрії.

Наведено низку задач на побудову у яких ефективно застосовуються паралельний перенос або ковзна симетрія. Це дозволило знайти елегантні рішення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Володимир Прошкін, Марія Астаф'єва, Світлана Радченко. Геометричні задачі на побудову як дієвий інструментарій формування навичок ХХІ століття / Освітологічний дискурс, 2017, № 3-4 (18-19), с. 122 - 136
Режим доступу:
https://elibrary.kubg.edu.ua/id/eprint/22157/1/V.Proshkin_OD_3-4_FITU.pdf
(останнє звернення 06.03.2025)
2. Істер О. С., Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2017 р. - 240 с. - іл.
3. Бурда М.І., Тарасенкова Н.А., Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. УОВЦ "Оріон", 2017 р. - 224 с. - іл.
4. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Х. :Гімназія. 2017 р. - 240 ст. - іл.
5. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н.Г., Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Видавничий дім "Освіта", 2017 р. - 272 с. - іл.
6. В. К. Маловичко. Теорія і практика геометричних побудов / Київ, 1941, 190 с.
Режим доступу: https://library.udpu.edu.ua/library_files/rarytety/18471.pdf
(останнє звернення 07.03.2025)
7. В.Н. Боровик. Геометричні перетворення площини. Навчальний посібник / Боровик В.Н., Зайченко І.В., Мурач М.М., Яковець В.П. / 2003, Суми: Університетська книга, 504 с.
Режим доступу: <https://ddpu.edu.ua/fmk/studentam/eg1/borovik++.pdf>
(останнє звернення 10.03.2025)
8. О.М. Станжицький. Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики» Частина IV «Методика вивчення геометрії» / Станжицький О.М. Собчук В.В., Капустян О.В., Федоренко Ю.В., Цань В.Б. / 2023, Київ, 110 с.

Режим доступу:

<https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2023/10/mp-heometriia-v-shkm-2023.08.28-fin-1.pdf> (останнє звернення 20.03.2025)

9. Т. Коростіянець. Планіметрія в шкільному курсі математики. Навчально-методичний посібник / Одеса, 2023, 155 с.

Режим доступу: <https://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi74/0054811.pdf> (останнє звернення 12.03.2025)

10. М. Губа. Міжпредметні зв'язки курсів геометрії та креслення під час вивчення теми "Геометричні побудови на площині" / Фізико-математична освіта (ФМО) / Суми, № 1(1), 2013, с. 11 - 17

Режим доступу:

https://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/publ/1-1-0-4?utm_source (останнє звернення 10.04.2025)

11. Ю.Ю. Снопченко. Метод геометричних місць в задачах на побудову / «ІТМ*плюс – 2011», м. Суми, с. 67 – 68

<https://repository.sspu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/def5a2f7-eaf6-40e6-9a2e-4e82f35fc237/content> (останнє звернення 11.04.2025)

12. В.О. Єланський. Використання паралельного переносу для розв'язання задач на побудову / Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях. Тези доповідей XIX Міжнародної науково-практичної конференції студентів та молодих вчених, (6 - 7 травня 2025) с. 142 - 145

13. Geogebra. URL: <https://www.geogebra.org> (дата звернення: 10.04.2025)

14. Крамаренко Т. Г., Пилипенко О. С. Математика в STEMі: навч. метод. посіб. Кривий Ріг : Криворізький держ. пед. ун-т, 2023. 274 с.

https://elibrary.kdpu.edu.ua/bitstream/123456789/7849/1/%21%D0%9A%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%B0%D1%80%D0%B5%D0%BD%D0%BA%D0%BE%20%D0%9F%D0%B8%D0%BB%D0%B8%D0%BF%D0%B5%D0%BD%D0%BA%D0%BE%20%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%20%D0%B2%20STEMi_28_09_2023.pdf

(останнє звернення 12.03.2025)

15. Крамаренко Т. Г. Колекція. Задачі на побудову. Geogebra. URL: <https://www.geogebra.org/m/phhwyuu6> (дата звернення: 17.05.2025)

Додатки

Додаток I

Додаткові задачі для самостійного розв'язання та використання на позакласних заняттях

Задача д1. Дано два кола з центрами в точках O_1 і O_2 та пряму f . Побудувати так пряму $BA \parallel f$, щоб відрізки $AB=CD$ (Рис. д1).

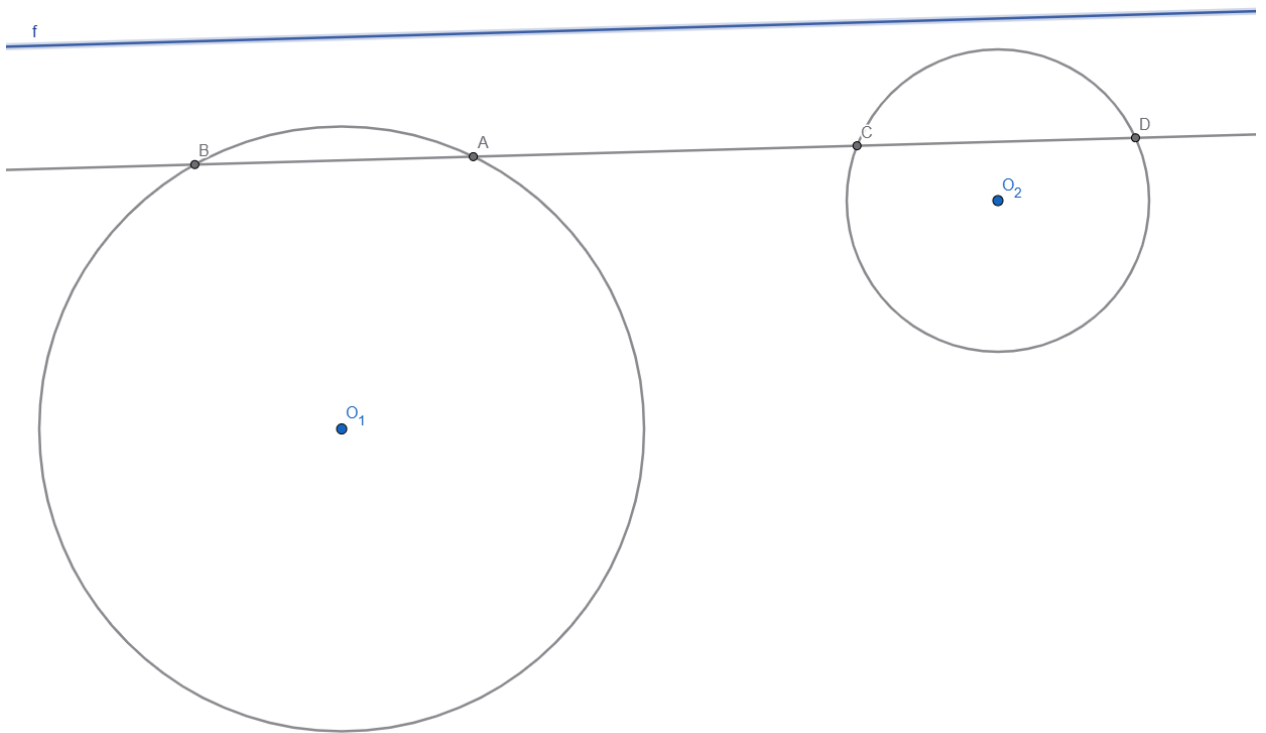


Рис. д1

Вказівка: Ми можемо опустити перпендикуляри з точок O_1 та O_2 на пряму f . Таким чином, можемо зробити паралельний перенос кола з центром в O_2 на відстань між цими перпендикулярами.

Задача д2. Дано коло радіуса R і дві хорди AB і CD . Знайти таку точку X , як показано на рисунку б, щоб відрізки AX і BX відтинали на хорді CD відрізок довжини a ($EF=a$).

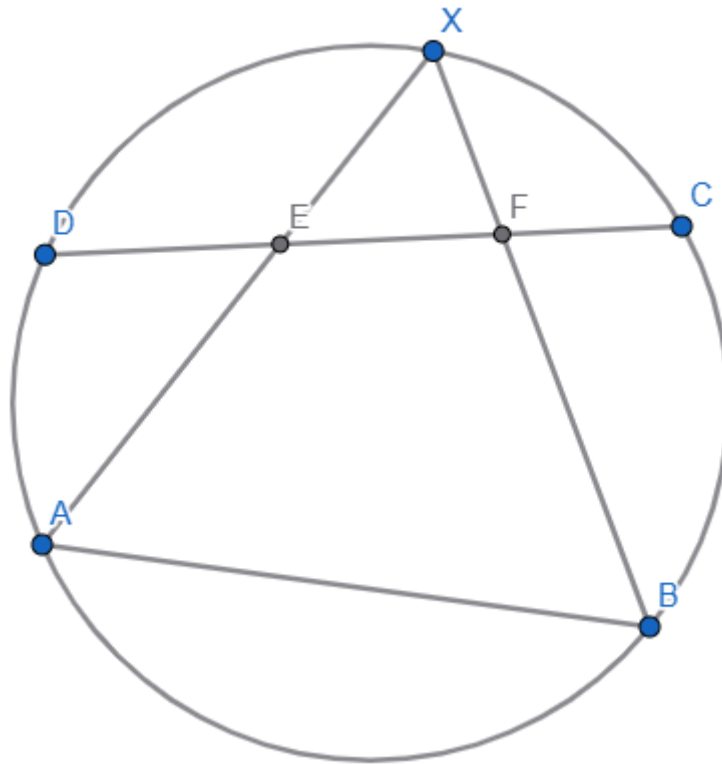


Рис. д2

Вказівка: Використовуючи паралельний перенос відносно прямої CD, перенесемо точку A на довжину a і отримаємо точку A'. Ми також можемо знайти кут AXB, бо вписані кути, що спираються на одну хорду, рівні. Потрібно побудувати коло на хорді A'B так, щоб кути, які спираються на хорду були рівні куту AXB.

Задача д3. Дано два кола з центрами в точках O_1 і O_2 та пряма f . Побудувати таку точку X, щоб дотичні двох кіл утворювали з прямою однакові кути.

Вказівка: Потрібно симетрично відобразити одне з кіл відносно прямої f та побудувати спільну дотичну між колами, що знаходяться по різні боки від прямої f .

Задача д4. Дано три прямі l_1 , l_2 та l_3 , які перетинаються в одній точці. Побудувати такий трикутник ABC, для якого ці прямі є бісектрисами.

Вказівка: Потрібно взяти якусь точку A, що належить одній з прямих та симетрично відобразити її відносно інших двох.

Задача д5. Дано коло S і прямі l_1 , l_2 та l_3 , які проходять через центр кола. Описати навколо заданого кола трикутник, вершини якого знаходяться на заданих прямих.

Вказівка. Скористатись тим, що центр вписаного в трикутник кола є перетин бісектрис кутів трикутника. Отже, задані прямі l_1 , l_2 та l_3 є бісектриси кутів шуканого трикутника. Далі скористатись задачею д4.

Задача д6. Нехай задана фігура F , яка після ковзної симетрії відносно прямої f перейшла у фігуру F' . Побудувати фігуру F' , замінивши ковзну симетрію на три осьових, якщо відомо, що для ковзної симетрії фігуру F паралельно перенесли на відстань a .

Вказівка: Пропонується першою дією відобразити фігуру F симетрично відносно прямої f . Тоді дві інші вісі симетрії будуть перпендикулярними до f .

Задача д7. Дано трикутник з вершинами в точках $A'(3; -2)$, $B'(2; 1)$, $C'(5; 0)$, що є образом в ковзній симетрії трикутника ABC відносно осі OX . Знайти координати вершин трикутника ABC , якщо відомо, що відстань між точкою A та A' дорівнює 5.

Вказівка: Потрібно подумати, як змінюються координати точки при осьовій симетрії відносно осі OX та паралельному переносі на відстань a , паралельно до вісі OX .

Задача д8. Відомі сторони чотирикутника $ABCD$. Побудувати чотирикутник, якщо діагональ AC є бісектриса кута A чотирикутника.

Вказівка: Скористатись тим, що бісектриса кута є його вісь симетрії. Окремо розглянути випадки, коли AB і AD не рівні, і коли $AB=AD$.

Задача д9. На площині дано прямі l_1 , l_2 та l_3 . Вважаємо, що промінь лазера ідеально віддзеркалюється від прямої (кут падіння дорівнює куту віддзеркалення). У якому напрямку треба направити промінь лазера із заданої точки A , щоб після послідовного віддзеркалення від прямих l_1 , l_2 та l_3 він пройшов через іншу задану точку B .

Вказівка: Врахувати, що коли промінь, що вийшов з точки A і віддзеркалився від прямої l_1 здається таким, ніби він вийшов з точки A' , симетричній точці A відносно прямої l_1 .

Елементи онлайн-платформи Geogebra

Доступ до GeoGebra безкоштовний, і може бути здійснений через браузер [13]. На головній сторінці, ми бачимо основну інформацію про Geogebra. Зверху розташований рядок з вкладками “Ресурси”, “Калькулятори”, з вікном пошуку та авторизації на заняття або вхід в особистий акаунт (Рис. д3).



Рис. д3

У вкладці “Ресурси” можна знайти готові матеріали для занять з різних предметів, таких як алгебра, геометрія, тригонометрія, інші. У вкладці “Калькулятори” нас буде цікавити саме “Геометрія” (Рис. д4).

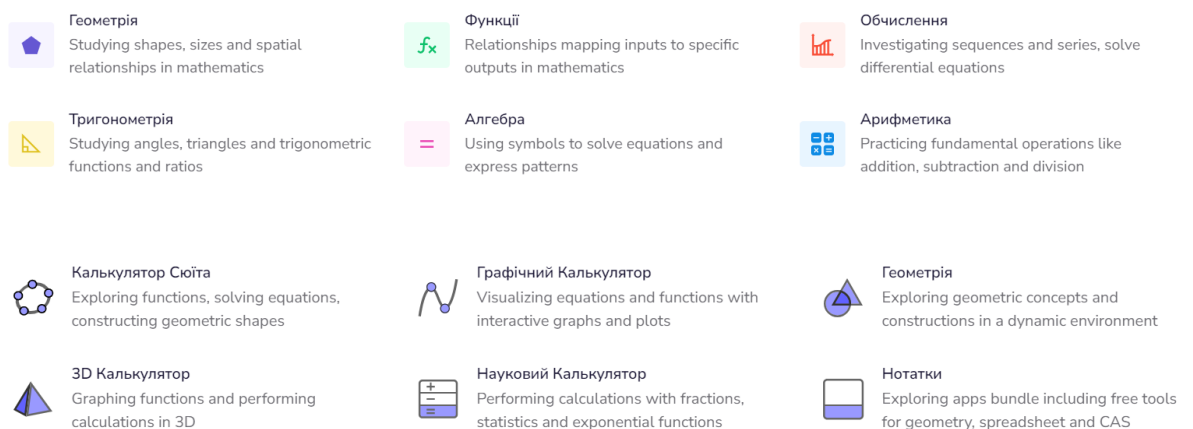


Рис. д4

Зліва знаходиться вертикальна строка переключення між інструментами геометрії та алгебри, правіше йде панель інструментів, і найбільше місця займає робочий простір (Рис. д5).



Рис. д5

З базовими налаштуваннями робочий простір пустий, але, використовуючи панель налаштувань, яка з'являється при натисканні шестерні у верхньому правому кутку робочого простору, можна змінити параметри, наприклад, додати сітку та вісі координат. (Рис. д6)

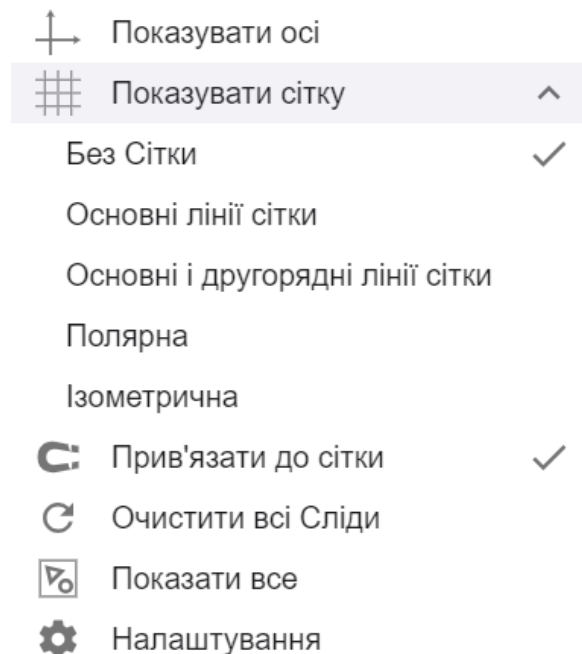


Рис. д6

Основні інструменти складаються з курсора (“Переміщення”), точки, прямої, відрізка, кола та многокутника.

Курсором можна рухати саму робочу область, або рухати елементи робочого простору, наприклад, змінювати положення точок. Цей інструмент

буде дуже зручним, для того, щоб, наприклад, показати, як змінюється побудова висоти, в залежності від кута трикутника. (Рис. д7, д8)

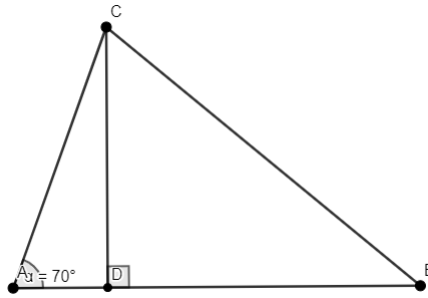


Рис. д7

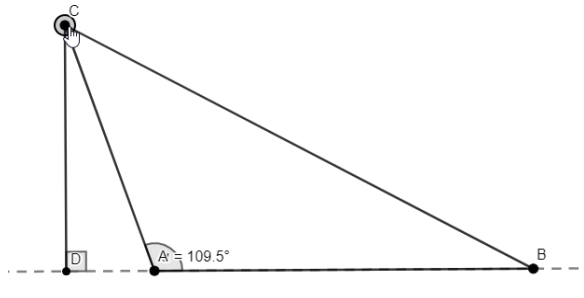


Рис. д8

Якщо натиснути “більше” на панелі інструментів, з’явиться велика кількість нових елементів, кожен з яких має свою функцію. Вони слугують для швидшої та більш зручної побудов фігур або допоміжні елементи, які полегшують роботу. Наприклад, інструменти “Показати/приховати” слугують для роботи з візуальними параметрами елементів. Тобто приховати можна саму фігуру або позначення її складових. (Рис. д9)

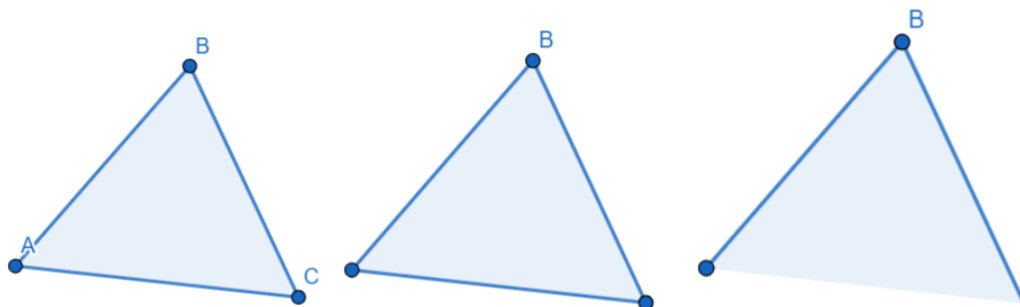


Рис. д9

Приховані елементи присутні фактично але не відображаються. Їх також не можна видалити. Для того, щоб проявити всі приховані елементи, потрібно натиснути правою кнопкою миші і вибрати у контекстному меню “Показати все”.

Використовуючи Geogebra можна продемонструвати формулювання деяких визначень, які складні для сприйняття. Наприклад, використовуючи інструменти “Правильний багатокутник”, “Серединний перпендикуляр” (для побудови точки “середини”), можна продемонструвати, як зі збільшенням кількості точок, які мають однакову відстань від заданої точки так званого

“центра”, все більше буде вимальовуватись коло. Фактично, ми визначення кола “продемонстрували”. (Рис. д10)

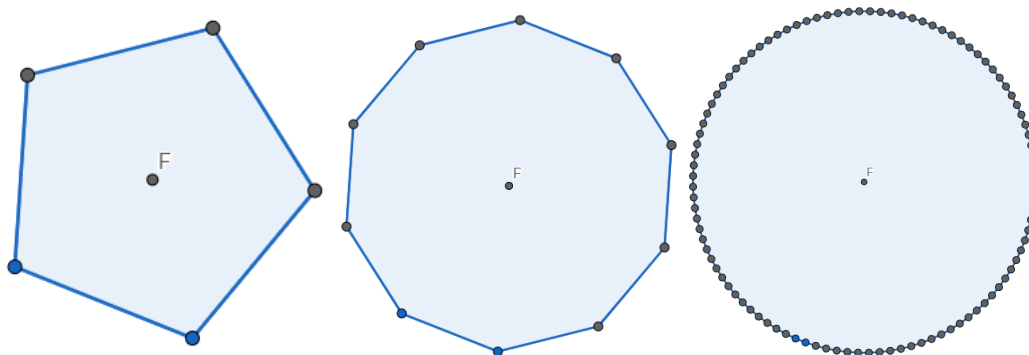


Рис. д10

Таким чином, в онлайн-платформі Geogebra є великий спектр інструментів, які нам знадобляться для вирішення різноманітних задач.

Базові побудови циркулем та лінійкою з використанням Geogebra

Побудова прямого кута та поділ відрізка навпіл

Алгоритм для побудови прямого кута та поділу відрізка навпіл однаковий. Нехай в нас є якийсь відрізок АВ. На його кінцях за допомогою циркуля потрібно побудувати два кола однакових радіусів так, щоб вони мали дві точки перетину. (Рис. д11). Тепер потрібно просто з'єднати точки перетину кіл. Вийде, що відрізки АВ та CD перпендикулярні і точкою перетину діляться навпіл.

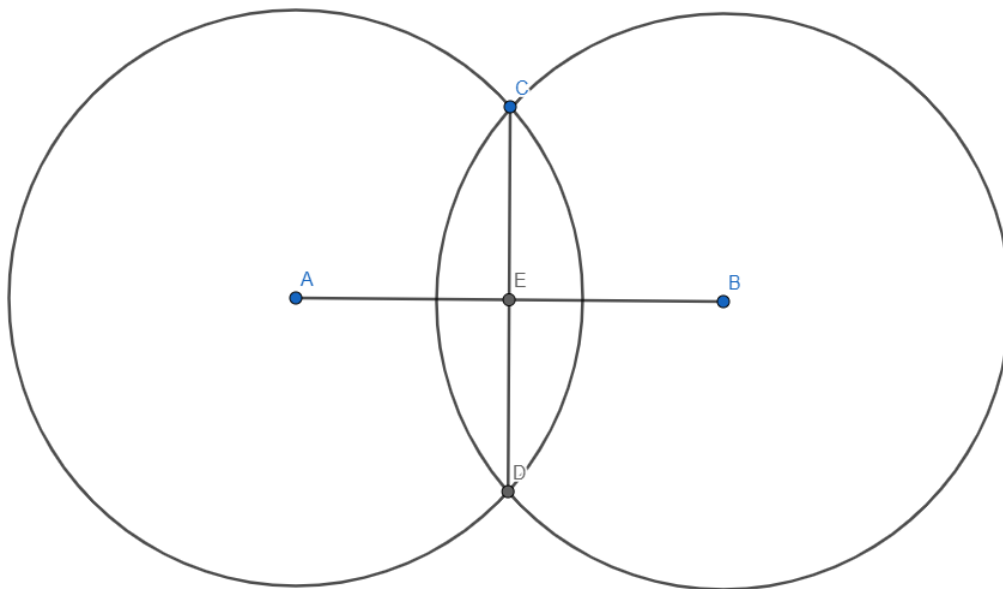


Рис. д11

Побудова кута вдвічі меншого та вдвічі більшого даному

Нехай в нас є якийсь кут і нам потрібно побудувати кут вдвічі меншої градусної міри. Для цього потрібно побудувати таке коло, центр якого знаходиться у вершині кута, а основи кута перетинають коло. На більшій дузі потрібно поставити будь-яку точку і з'єднати її з точками перетину основ кута і кола. Утвориться новий кут вдвічі меншої градусної міри. (Рис. д12)

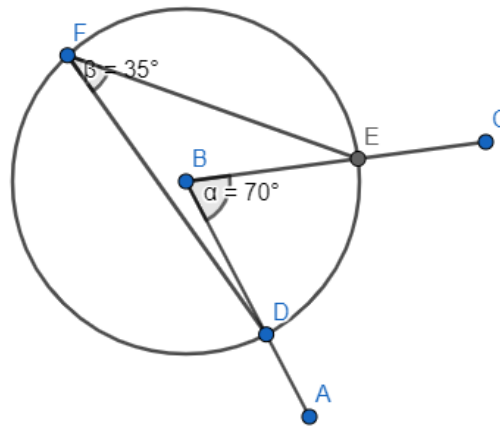


Рис. д12

Щоб побудувати кут вдвічі більшої градусної міри ніж заданий *гострий* кут потрібно намалювати таке коло, щоб вершина кута належала колу, а основи кута перетинали коло. Тепер залишилось з'єднати центр кола з точками перетину основ кута і кола. (Рис. д13)

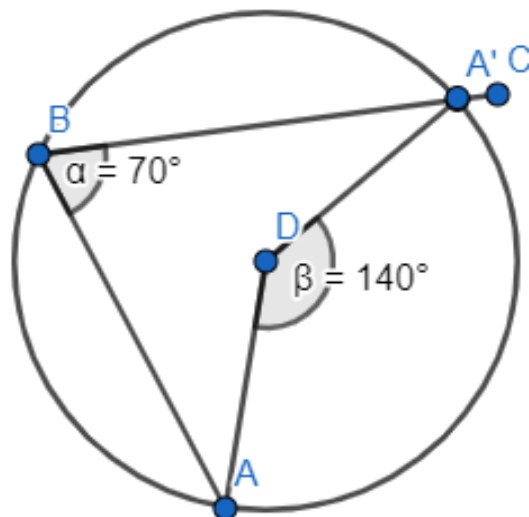


Рис. д13

Побудова кута, рівного даному

Нехай в нас є побудований довільний кут, і нам потрібно побудувати такий самий кут в іншому місці. Дуже часто в нас буде вже відома одна основа кута або ще й вершина кута. Будемо будувати кут ABC на прямій DE, де точка D - це вершина кута. Будемо коло з центром в точці B так, щоб основи перетинали коло в двох точках. Таке ж саме коло будемо з центром в точці D. (Рис. д14)

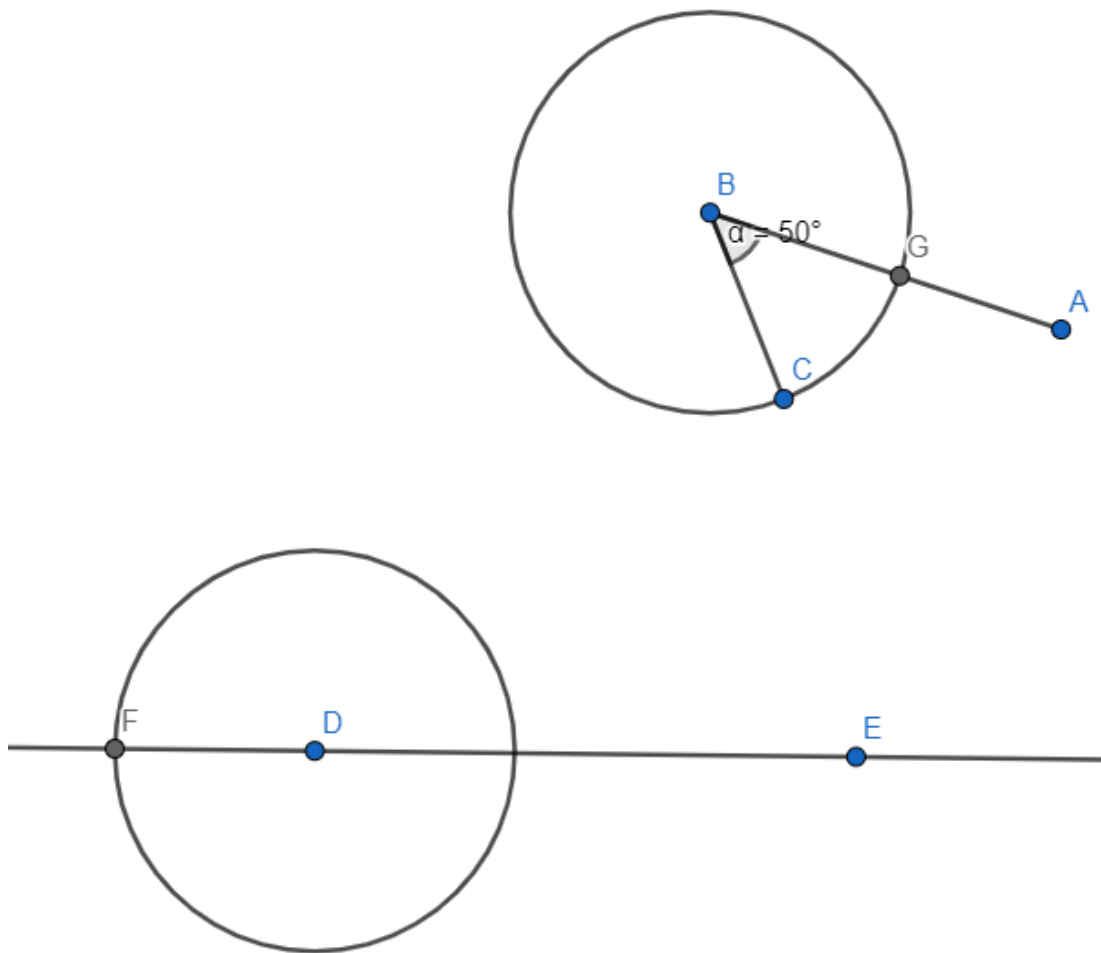


Рис. д14

Тепер з центром в точці F будемо коло радіуса такої довжини, яка рівна довжині відрізка CG. Останнім кроком буде з'єднати точку перетину двох кіл з вершиною нового кута в точці D. Вийшло, що кути CBG і FDH рівні. Ми фактично побудували рівні трикутники, а ми знаємо, що у них відповідні кути рівні. (Рис. д15)

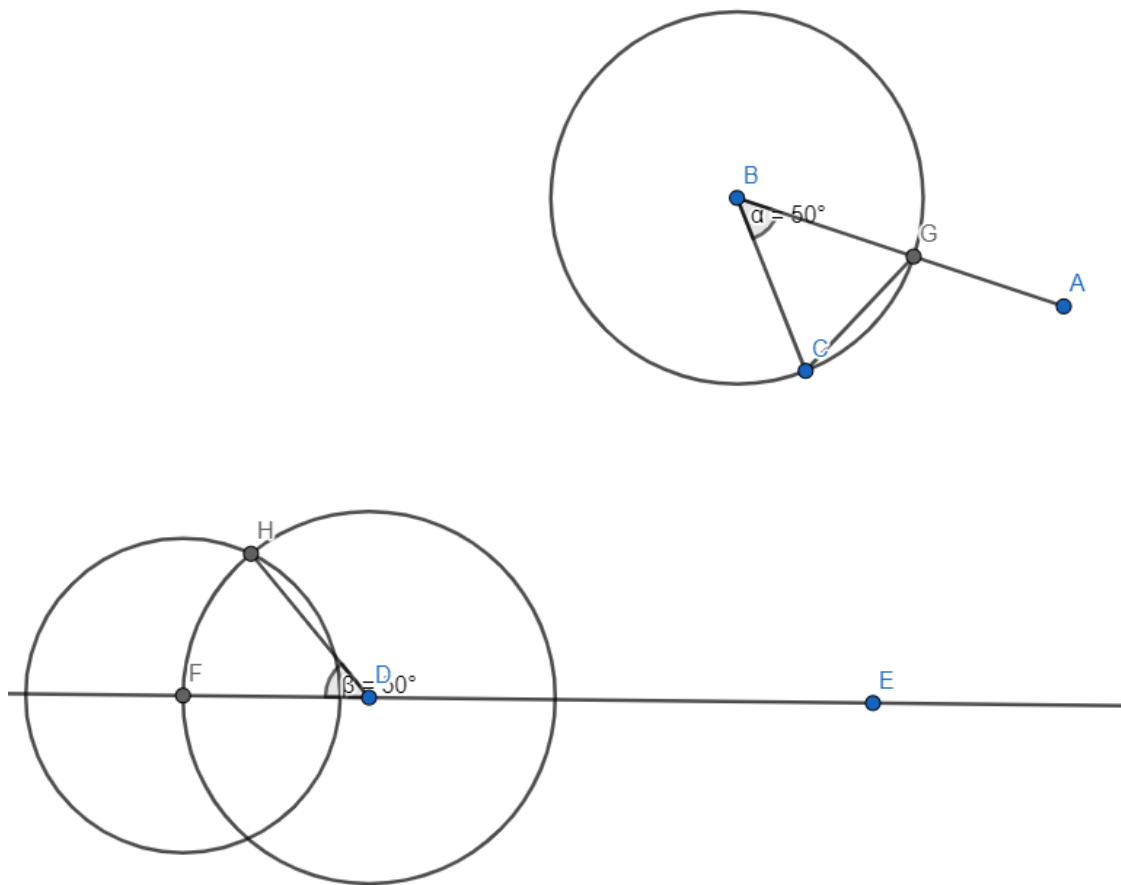


Рис. д15

Побудова відстані між прямою та точкою, яка не належить прямій

Нехай в нас є пряма та якась точка, яка цій прямій не належить. За допомогою циркуля, накреслимо коло з центром у заданій точці так, щоб коло перетинало пряму у двох точках. Тепер, використовуючи вже набуті знання, потрібно побудувати середину відрізка ED. Залишиться тільки з'єднати задану точку з побудованою серединою відрізка. Довжина відрізка CF і буде відстанню між заданою точкою. (Рис. д16)

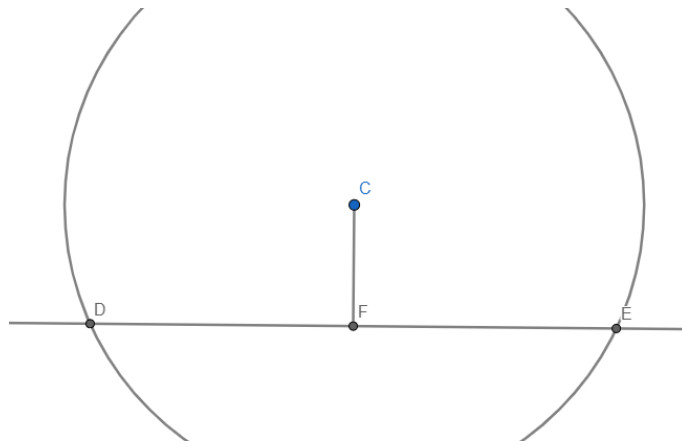


Рис. д16

Побудова бісектриси даного кута

Нехай в нас є кут. Побудуємо коло, з центром у вершині даного кута так, щоб воно перетинало обидві основи кута. Тепер залишилось провести відрізок АВ, знайти його середину, що ми вже можемо робити за допомогою циркуля та лінійки, і провести відрізок через вершину кута та середину АВ, що і буде бісектрисою. (Рис. д17)

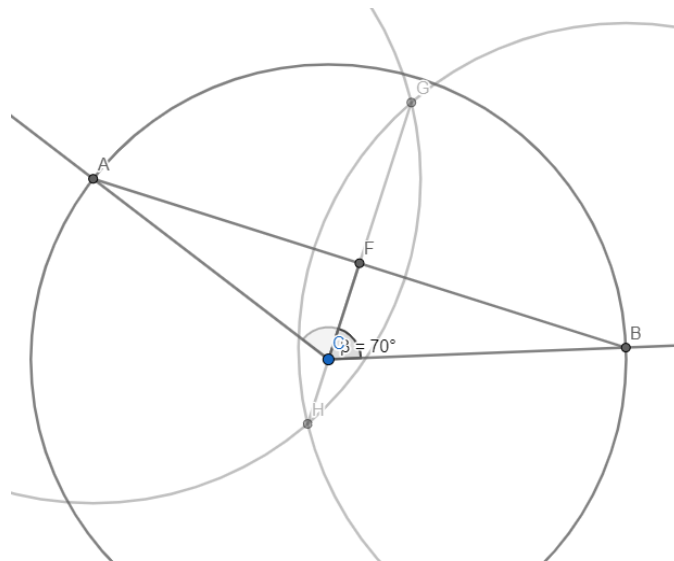


Рис. д17

Побудова прямої, паралельної даній

Нехай в нас є пряма і якась точка, що не належить цій прямій. Нам потрібно провести через точку пряму, паралельну даній. Як це зробити? Спочатку проведемо коло з центром у будь-якій точці прямої, і з радіусом довжини рівною відстані між даною точкою та точкою прямої, обраної нами. Такого ж радіусу проведемо коло, тільки тепер з центром в точці E. (Рис. д18)



Рис. д18

Тепер з центром в точці G проведемо коло радіусу EC. Залишилось тільки провести пряму через точки CH, яка і буде паралельною даній. (Рис. д19, д20)

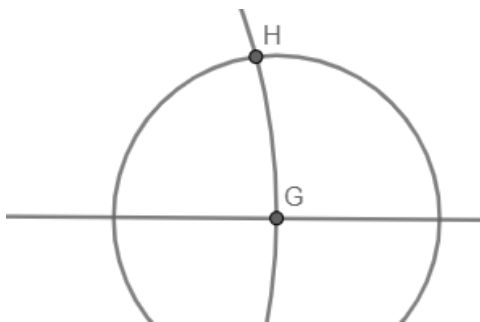


Рис. д19



Рис. д20

Ми фактично побудували паралелограм, за допомогою циркуля і лінійки. А ми знаємо, що у паралелограма протилежні сторони паралельні.

Поділ даного відрізка на n рівних частин та збільшення даного відрізка в m разів

Нехай дано відрізок АВ. Для того, щоб збільшити цей відрізок в m разів, потрібно побудувати його на прямій, а потім з будь-якої вершини за допомогою циркуля будуюмо коло радіусу довжини цього відрізка і так робимо m разів.

Для того, щоб відрізок поділити відрізок на n рівних частин, потрібно з будь-якої сторони відрізка провести якусь пряму під тупим кутом до відрізка. Потім за допомогою циркуля, починаючи з вершини відрізка, відкласти n кількість рівних відрізків, які належать прямій. Для прикладу, давайте поділимо відрізок АВ на три рівні частини, тобто відкладаємо на прямій три рівні відрізки, починаючи з точки А. (Рис. д21)

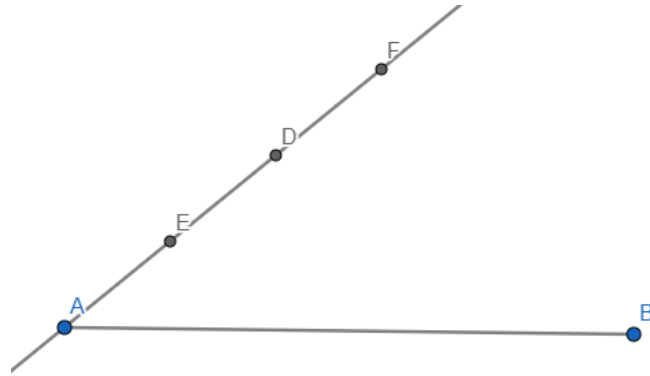


Рис. д21

Тепер потрібно з'єднати відрізком точки В та F. Щоб поділити відрізок на три рівні частини, потрібно тепер провести через точки D та E прямі, паралельні до відрізка FB. Це ми вже навчилися робити раніше. (Рис.д. 22)

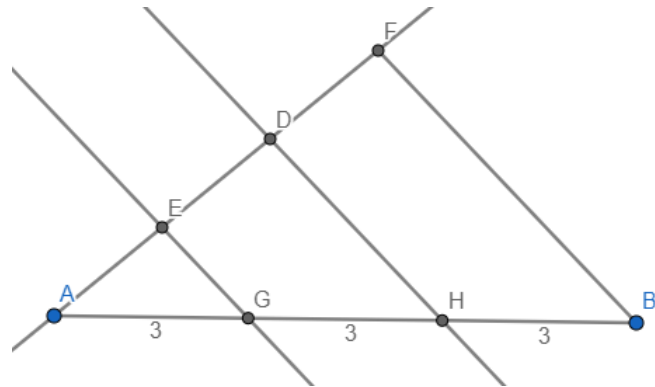


Рис. д22

Вийшло, що $AG=GH=HB$. Чому це так? Тут потрібно просто згадати теорему Фалеса про пропорційні відрізки. До речі, це буде дуже корисним для дітей, бо цю теорему часто забувають.

Побудова трикутника за трьома сторонами

Нехай нам дано три відрізка. Сказано, що ці відрізки є сторонами трикутника. Потрібно його побудувати. Для цього, побудуємо якусь одну сторону, на кінцях якої потрібно побудувати два кола, радіуси яких відповідно дорівнюють довжинам другої та третьої сторони. Ці кола будуть мати дві точки перетину. Будь-яка точка з них і буде третьою вершиною трикутника. Ось, наприклад, побудований трикутник зі сторонами 4.5; 5 та 6 см: Рис. д23

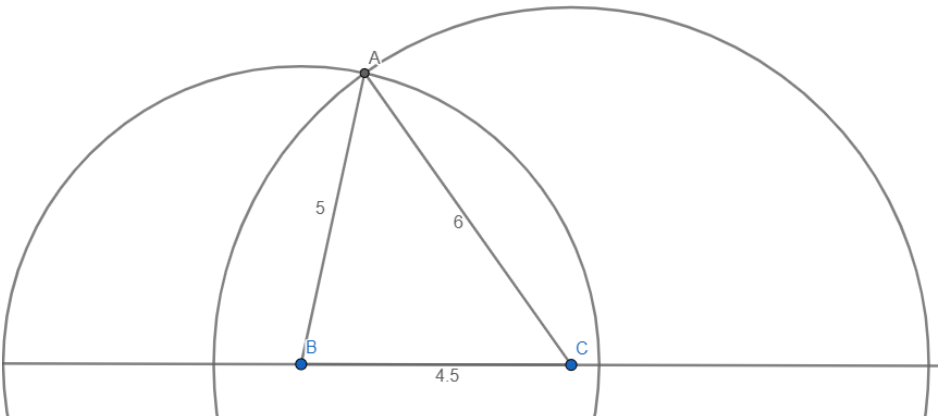


Рис. д23