ЗАПИСКИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

1949 Том XXI

О РАЗЛОЖЕНИЯХ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Т. М. Карасева

(Харьков)

В 1922 году Е. Треффц доказал, что для частного вида операторов

$$L(y)=\frac{d^n}{dx^n}\left(l_n\frac{d^n}{dx^n}\right), \qquad (n=1,2)$$

и некоторой системы граничных условий имеет место следующее утверждение: всякая функция, имеющая n-ую производную с интегрируемым квадратом и удовлетворяющая главным граничным условиям, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям системы.

В 1937 году М. Г. Крейн [1] обобщил теорему Е. Треффца на случай диференциальных операторов любого порядка. Использование некоторых идей работы М. Г. Крейна позволило автору обобщить результат Е. Треффца в другом направлении и получить теорему разложения для нагружённой самосопряжённой системы линейных квазидиференциальных уравнений второго порядка.

Рассмотрим гильбертово пространство $H_R\{y,z,\dots\}$, элементами которого являются совокупности n функций

$$y(x)=\{y_1(x), y_2(x),\dots,y_n(x)\}, \qquad (a\leqslant x\leqslant b),$$

определённых на конечном интервале $(a\leqslant x\leqslant b)$ и удовлетворяющих условию

$$\|y\|^2=\int_a^b\sum_{i,k=1}^n\overline{y}_i(x)\,R_{ik}(x)\,y_k(x)\,dx<\infty. \tag{1}$$

$R(x)=\left\{R_{ik}(x)\right\}_{i,k=1}^n$ означает матрицу, удовлетворяющую условиям:

а) матрица $R(x)$ эрмитово неотрицательна на конечном множестве точек интервала $[a, b]$ и эрмитово положительна во всех остальных точках $[a, b]$;

б) матрица

$$\int_a^b R_{i,k}(x)\,dx, \qquad (i,\ k=1,2,\dots,n) \tag{2}$$

ограничена.

Скалярное произведение двух элементов $y,\ z \subset H_R$ определяется формулой:

$$(y,\ z) = \int_a^b \sum_{i,k=1}^{n} \bar{z}_i(x)\, R_{ik}(x)\, y_k(x)\, dx\,. \tag{3}$$

Элемент $y = \{ y_1, y_2, \ldots, y_n \} \subset H_R$ будем называть вектор-функцией или просто функцией, а $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ её координатами.

Вводя сокращённое обозначение

$$\sum_{i,k=1}^{n} \bar{z}_i(x)\, D_{ik}(x)\, y_k(x) = z^*(x) D(x)\, y(x),$$ [1]

перепишем формулы (1) и (3) в виде:

$$\| y \|^2 = \int_a^b y^*(x)\, R(x)\, y(x)\, dx, \tag{1'}$$

$$(y,\ z) = \int_a^b z^*(x)\, R(x)\, y(x)\, dx. \tag{3'}$$

Вектор-функцию $y(x)$ будем называть непрерывной (соответственно абсолютно непрерывной, диференцируемой), если непрерывны (соответственно абсолютно непрерывны, диференцируемы) все её координаты.

Определим в H_R квазидиференциальный оператор L следующим образом.

Область определения D_L оператора L состоит из всех диференцируемых вектор-функций $y \subset H_R$, для которых

а) вектор-функция

$$\dot{y} = Ay' + By \tag{4}$$

в свою очередь диференцируема и $\dot{y}' \subset H_R$. Здесь [2]

$$A = \{ A_{ik}(x) \}_{i,k=1}^{n} \quad \text{и} \quad B = \{ B_{ik}(x) \}_{i,k=1}^{n}$$

суть некоторые непрерывные матрицы;

б) вектор-функции $y(x)$ и $\dot{y}(x)$ удовлетворяют $\rho\,(0 \leqslant \rho \leqslant 4n)$ линейным граничным условиям

---

[1] Вообще $\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{y}_i(x)\, z_i(x)$ будем обозначать символом y^*z в отличие от символа $y\, z^* = \{ y_i \bar{z}_k \}_{i,k=1}^{n}$, обозначающего матрицу n-го порядка.

[2] Во избежание недоразумений отметим, что соотношение (4) есть векторная запись n скалярных равенств

$$\dot{y}_i(x) = \sum_{k=1}^{n} \{ A_{ik}(x)\, y_k'(x) + B_{ik}(x)\, y(x) \}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4'}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} y_k(a) + \beta_{ik} y_k(b) + \gamma_{ik} \dot{y}_k(a) + \delta_{ik} \dot{y}_k(b) = 0. \qquad (5)$$

Если $y \subset D_L$, то оператор $L(y)$ определяется формулой:

$$L(y) = -\frac{d}{dx}(Ay' + By) + Cy' + Dy \qquad \cancel{y \subset D_L},$$

где

$$C = \left\{C_{ik}(x)\right\}_{i,\,k=1}^{n} \qquad \text{и} \qquad D = \left\{D_{ik}(x)\right\}_{i,\,k=1}^{n}$$

суть непрерывные матрицы.

В дальнейшем мы будем считать, что матрицы $A(x)$ и $D(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ эрмитовы и $C(x) = B^*(x)$. В соответствии с этим оператор L примет вид:

$$L(y) = -\frac{d}{dx}(Ay' + By) + B^* y' + Dy, \quad A = A^*, \quad D = D^*. \qquad (6)$$

В силу этих предположений оказывается справедливой следующая формула:

$$\int_a^b \left\{ y^* L(z) - L^*(y) z \right\} dx = -y^* \dot{z} + \dot{y}^* z \Big|_a^b.$$

Положим далее, что $\rho = 2n$ и матрицы

$$\left\{\alpha_{ik}\right\}, \left\{\beta_{ik}\right\}, \left\{\gamma_{ik}\right\} \text{ и } \left\{\delta_{ik}\right\}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n; \qquad i = 1, 2, \ldots 2n)$$

таковы, что форма

$$-y^* \dot{z} + \dot{y}^* z \Big|_a^b$$

обращается в нуль для всех вектор-функций

$$y(x),\ z(x) \subset D_L.$$

Нетрудно показать[1], что перечисленные условия являются необходимыми и достаточными для того, чтобы оператор L был самосопряжённым.

Полагая в дальнейшем матрицу $A(x)$ эрмитово положительной, приведём без доквзательства несколько теорем, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Теорема 1. Если граничные условия (5) неособенны[2], то оператор L является обратным некоторому вполне

---

[1] См. М. Морзе [2].

[2] Граничные условия называют неособенными, если уравнение

$$L(y) = 0 \qquad (y \subset D_L)$$

имеет единственным решением вектор-функцию

$$y(x) \equiv 0.$$

непрерывному эрмитовому оператору интегрального типа. Иными словами, существует непрерывная матричная функция Грина $G(x,s)=G^*(s,x)$ такая, что соотношения

$$L(y)=z(x), \qquad y\subset D_L, \qquad z\subset H_R$$

и

$$y(x)=\int_a^b G(x,s)\,z(s)\,ds$$

эквивалентны.

Характеристические числа векторного уравнения

$$L(y)-\lambda Ry=0, \qquad (y\subset D_L)$$

действительны, имеют конечную кратность и образуют счётное множество. Множество отрицательных характеристических чисел не более чем конечно, множество положительных характеристических чисел не имеет ни одной предельной точки (кроме $\lambda=\infty$).

Собственные функции, соответствующие различным характеристическим числам, взаимно ортогональны.

Для характеристических чисел и соответствующих собственных функций оператора L введём обозначения:

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots$$
$$\varphi_1(x),\ \ \varphi_2(x),\ \ \ldots$$

Теорема 2 (типа Мерсера). Функция Грина $G(x,s)$, соответствующая оператору $L(y)$, допускает разложение

$$G(x,s)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu^*(s)}{\lambda_\nu},$$

сходящееся абсолютно и равномерно относительно обеих переменных x и s.

Теорема 3. Всякая вектор-функция, которая может быть представлена в виде

$$f(x)=\int_a^b G(x,s)\,h(s)\,ds,$$

где $h(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ произвольная суммируемая вектор-функция, допускает разложение в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu\,\varphi_\nu(x),$$

где

$$c_\nu = \int_a^b \varphi_\nu^*(x)\, R(x)\, f(x)\, dx\,.$$

Переходим теперь к формулировке основной теоремы настоящей заметки.

Будем называть граничное условие главным, если оно не содержит $\dot{y}(a)$ и $\dot{y}(b)$ и является следствием системы граничных условий (5).

Теорема. Следующие три утверждения эквивалентны:

1. Вектор-функция $y(x)$ абсолютно непрерывна, имеет производную с интегрируемым квадратом

$$\int_a^b y'^*(x)\, y'(x)\, dx < \infty$$

и удовлетворяет главным условиям.

2. Вектор-функция $y(x)$ удовлетворяет условию: ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu |c_\nu|^2,$$

где

$$c_\nu = (y, \varphi_\nu) = \int_a^b \varphi_\nu^*(x)\; R(x)\; y(x)\, dx,$$

сходится.

3. Для вектор-функции $y(x)$ имеет место разложение

$$y(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu\, \varphi_\nu(x), \tag{7}$$

сходящееся абсолютно и равномерно, и разложение

$$y'(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu\, \varphi_\nu'(x), \tag{8}$$

сходящееся в среднем квадратичном[1].

Доказательство. Обозначим через Q множество всех абсолютно непрерывных вектор-функций $y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, имеющих первую производную такую, что вектор-функция $\dot{y} = Ay' + By$ непрерывно диференцируема, и удовлетворяющих всем граничным условиям (5).

---

[1] То есть предел выражения $\int_a^b \left(y'(x) - \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu'(x)\right)^* \left(y'(x) - \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu'(x)\right) dx$ равен нулю.

Легко видеть, что для всякой вектор-функции $y(x) \subset Q$ имеет место тождество

$$\int_a^b y^*(x)\, L(y)\, dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu |c_\nu|^2. \tag{9}$$

Действительно, к функции $y(x) \subset Q$ может быть применён оператор L, причём функция

$$z(x) = L(y)$$

непрерывна. В силу теорем 1 и 3 функция $y(x)$ может быть представлена в виде

$$y(x) = \int_a^b G(x, s)\, z(s)\, ds$$

и разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд

$$y(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x).$$

Отсюда тождество (9) следует непосредственно.

Вводя обозначения

$$T^* = A^{-1} B \quad \text{и} \quad H = B^* A^{-1} B - D,$$

перепишем оператор L в виде:

$$L(y) = -\dot{y}' + T\dot{y} - Hy, \qquad (y \subset D_L).$$

Преобразуем левую часть тождества (9)

$$\int_a^b y^* L(y)\, dx = -\int_a^b y^* \dot{y}' dx + \int_a^b y^* T \dot{y}\, dx - \int_a^b y^* H y\, dx =$$

$$= -y^* \dot{y} \Big|_a^b + \int_a^b y^{*\prime} \dot{y}\, dx + \int_a^b y^* T \dot{y}\, dx - \int_a^b y^* H y\, dx =$$

$$= -y^* \dot{y} \Big|_a^b + \int_a^b (y^{*\prime} + y^* T)\, \dot{y}\, dx - \int_a^b y^* H y\, dx =$$

$$= -y^* \dot{y} \Big|_a^b + \int_a^b \dot{y}^* A^{-1} \dot{y}\, dx - \int_a^b y^* H y\, dx.$$

В силу граничных условий (5) выражение

$$-y^* \dot{y} \Big|_a^b \tag{9'}$$

определяется исключительно значениями функции $y(x)$ в точках $x=a$ и $x=b$.[1]

Теперь тождество (9) можно переписать в следующем виде:

$$\Phi[y(a), y(b)] + \int_a^b \dot{y}^* A^{-1} \dot{y}\, dx - \int_a^b y^* H y\, dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu |c_\nu|^2. \qquad (10)$$

1. Покажем, что из второго утверждения доказываемой теоремы следует третье.

Построим ряд $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x)$. Докажем, что он сходится абсолютно и равномерно. Для этого рассмотрим его частичную сумму для j-ой координаты.

Начиная с некоторого p, по неравенству Шварца, получаем:

$$\sum_{\nu=p}^{q} |c_\nu \varphi_{j\nu}(x)| = \sum_{\nu=p}^{q} \left| c_\nu \sqrt{\lambda_\nu}\, \frac{\varphi_{j\nu}(x)}{\sqrt{\lambda_\nu}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{\nu=p}^{q} \lambda_\nu |c_\nu|^2}\, \sqrt{\sum_{\nu=p}^{q} \frac{|\varphi_{j\nu}(x)|^2}{\lambda_\nu}}.$$

---

[1] Приведём доказательство этого утверждения. Рассмотрим $2n$-мерное векторное пространство E_{2n}. К каждой функции $z(x) \subset Q$ отнесём вектор $z \subset E_{2n}$

$$\{ z_1(a), z_2(a), \ldots, z_n(a); z_1(b), z_2(b), \ldots, z_n(b) \}.$$

Совокупность всех $z(x) \subset Q$ отобразится при этом в некоторое подпространство E_Q, число измерений которого мы обозначим через p $(p \leqslant 2n)$.

Выберем теперь p функций из Q

$$z^{(1)}(x), \ z^{(2)}(x), \ldots, z^{(p)}(x)$$

таким образом, чтобы соответствующие векторы

$$z^{(1)}, \ z^{(2)}, \ldots, z^{(p)}$$

были линейно независимы. В таком случае для любой функции $y(x) \subset Q$ имеет место соотношение

$$y = \sum_{j=1}^{p} c_j z^{(j)},$$

где коэфициенты c_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ зависят исключительно от координат вектора y и могут быть через них выражены.

Имея в виду тождества

$$-y^* \dot{z}^{(j)} + \dot{y}^* z^{(j)} \Big|_a^b = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p; \ y \subset Q),$$

преобразуем выражение (9′)

$$-y^* \dot{y} \Big|_a^b = -\sum_{j=1}^{p} \bar{c}_j z^{(j)*} \dot{y} \Big|_a^b = -\sum_{j=1}^{p} \bar{c}_j \dot{z}^{(j)*} y \Big|_a^b = \Phi[y(a), y(b)].$$

Последняя формула показывает, что (9′) является квадратичной формой с постоянными коэфициентами относительно чисел

$$y_1(a), y_2(a), \ldots, y_n(a); y_1(b), y_2(b), \ldots, y_n(b).$$

Последнее выражение может быть сделано сколь угодно малым, так как по теореме 2

$$\sum_{\nu=p}^{q} \frac{|\varphi_{j\nu}(x)|^2}{\lambda_\nu} = \left\{ \sum_{\nu=p}^{q} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu^*(x)}{\lambda_\nu} \right\}_{jj} \leqslant G_{jj}(x, x)$$

и функция $C_{jj}(x, s)$ в силу непрерывности ограничена. Таким образом, ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x)$$

сходится абсолютно и равномерно к некоторой функции $y_1(x)$.

Так как коэфициенты Фурье функций $y_1(x)$ и $y(x)$ равны, то ряды Фурье этих функций совпадают.

Таким образом, имеет место разложение

$$y(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x)$$

в абсолютно и равномерно сходящийся ряд.

Далее введём обозначения:

$$y_k(x) = \sum_{\nu=1}^{k} c_\nu \varphi_\nu(x) \quad \text{и} \quad y_{qp} = y_q - y_p = \sum_{\nu=p+1}^{q} c_\nu \varphi_\nu(x).$$

Заменим в равенстве (10) $y(x)$ через $y_{qp}(x) \in Q$.

$$\sum_{\nu=p+1}^{q} \lambda_\nu |c_\nu|^2 = \Phi[y_{qp}(a), y_{qp}(b)] + \int_a^b \dot{y}_{qp}^* A^{-1} \dot{y}_{qp}\, dx - \int_a^b y_{qp}^* H y_{qp}\, dx. \quad (11)$$

Устремим q и p к бесконечности. В силу сходимости ряда $\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu |c_\nu|^2$, равномерной сходимости ряда (7) и непрерывности матрицы H левая часть и первый и третий члены правой части равенства (11) стремятся к нулю.

Поэтому

$$\lim_{p, q \to \infty} \int_a^b (\dot{y}_q - \dot{y}_p)^* A^{-1} (\dot{y}_q - \dot{y}_p)\, dx = 0.$$

Из эрмитовой положительности непрерывной матрицы $A^{-1}(x)$ следует, что существует такое число $d > 0$, что

$$\int_a^b \xi^*(x) A^{-1}(x) \xi(x)\, dx \geqslant d \int_a^b \xi^*(x) \xi(x)\, dx,$$

какова бы ни была суммируемая функция $\xi(x)$.

Следовательно,

$$\lim_{q,\,p\to\infty}\int_a^b (\dot y_q-\dot y_p)^*(\dot y_q-\dot y_p)\,dx=0.$$

Это означает, что последовательность $\dot y_p = Ay_p' + By$ сходится в среднем квадратичном. Так как матрицы $A^{-1}(x)$ и $B(x)$ ограничены и последовательность y_p сходится равномерно, то последовательность

$$y_p' = A^{-1}(\dot y_p - By_p)$$

сходится в среднем квадратичном к некоторой функции $g(x)$.

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b (g-y_p')^*(g-y_p')\,dx=0. \tag{12}$$

В силу неравенства Шварца

$$\left|\int_a^b [g_j-(y_p')_j]\,dx\right|^2 \leqslant \int_a^b |g_j-(y_p')_j|^2\,dx\,(b-a)\to 0 \qquad (j=1,2,\ldots,n).$$

Следовательно,

$$\int_a^x g(x)\,dx = \lim_{p\to\infty}\int_a^x y_p'(x)\,dx = \lim y_p(x)\Big|_a^x = y(x)-y(a).$$

Отсюда функция $g(x)$ почти всюду равна производной функции $y(x)$. Из равенства (12) следует, что ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu\,\varphi_\nu'(x)$$

сходится в среднем квадратичном к функции $y'(x)$, т. е. утверждение третье имеет место.

2. Покажем теперь, что из первого утверждения следует второе, т. е. из того, что функция $y(x)$ абсолютно непрерывна, имеет производную с интегрируемым квадратом и удовлетворяет главным условиям, следует сходимость ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu |c_\nu|^2<\infty.$$

Предварительно дадим новую характеристику множеству Q. Построим матрицу S[1] такую, что

$$S' = SA^{-1}B \equiv ST^* \tag{13}$$

или

$$S_{jk} = \sum_{m=1}^{n} S_{jm}T_{mk}^* \qquad (j,k=1,2,\ldots,n). \tag{13'}$$

[1] Для краткости опускаем аргументы.

Рассматривая (13) при фиксировании j, мы получаем систему n линейных диференциальных уравнений первого порядка, разрешённых относительно производной.

Такая система, как известно, имеет n линейно независимых решений

$$S_j = \{ S_{j1}, S_{j2}, \ldots, S_{jn} \} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

С помощью этих решений построим ограниченную неособенную матрицу

$$S = \left\{ S_{jk} \right\}_{j, k = 1}^{n},$$

которая и является решением матричного уравнения (13).

Вводя обозначение

$$K = AS^{-1},$$

охарактеризуем класс Q следующим образом.

Q — класс всех абсолютно непрерывных функций $y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, имеющих первую производную такую, что $K(Sy)'$ есть непрерывно диференцируемая функция.

Действительно,

$$K(Sy)' = KSy' + KS'y = Ay' + AS^{-1}SA^{-1}By = Ay' + By.$$

Введём в рассмотрение множество $F \supset Q$ всех абсолютно непрерывных вектор-функций $y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, имеющих первую производную с интегрируемым квадратом

$$\int_a^b y'^*(x)\, y'(x)\, dx < \infty$$

и удовлетворяющих главным граничным условиям.

Положим для всех $y \in F$

$$\| y \| = \sqrt{\int_a^b (Sy)'^* (Sy)' dx} + \max_{a \leqslant x \leqslant b} | y(x) |.$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма. Какова бы ни была функция $y(x) \in F$, существует последовательность функций $y_k(x) \in Q$ $(k = 1, 2, \ldots)$ такая, что

$$\lim_{k \to \infty} \| y(x) - y_k(x) \| = 0.$$

(доказательство леммы см. ниже).

Пусть $y(x) \in F$. Определим последовательность $\{ y_k(x) \}_{k=1}^{\infty} \in Q$ такую, что

$$\lim_{k \to \infty} \| y(x) - y_k(x) \| = 0.$$

Тогда имеем, очевидно, соотношение

$$\lim_{l, k = \infty} \| y_k(x) - y_l(x) \| = 0.$$

Положим теперь в равенстве (10) $y = y_k - y_l$ и устремим k и l к бесконечности. Получим равенство

$$\lim_{k, l \to \infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \left| c_\nu^{(k)} - c_\nu^{(l)} \right|^2 = 0.$$

Отсюда следует, что существует такое $N > 0$, что для всех $k, l > N$

$$\sum_{\nu=1}^{m} \lambda \left| c_\nu^{(k)} - c_\nu^{(l)} \right|^2 < 1 \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Фиксируя здесь m и $k > N$, получим, переходя к пределу при $l \to \infty$, неравенство:

$$\sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu \left| c_\nu - c_\nu^{(k)} \right|^2 < 1,$$

где

$$c_\nu = \int_a^b \varphi_\nu^*(x) R(x) y(x) \, dx = \lim_{l \to \infty} c_\nu^{(l)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Переходя затем к пределу по $m \to \infty$, находим

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \left| c_\nu - c_\nu^{(k)} \right|^2 \leqslant 1.$$

Обозначим $c_\nu - c_\nu^{(k)} = a_\nu$. Тогда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu |a_\nu|^2 \leqslant 1. \tag{14}$$

Для функции $y_k(x) \in Q$ ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu |a_\nu - c_\nu|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \left| c_\nu^{(k)} \right|^2 = \int_a^b y_k^*(x) L(y_k) \, dx < \infty.$$

Поэтому

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda |a_\nu - c_\nu|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu |a_\nu|^2 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \bar{a}_\nu c_\nu - \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu a_\nu \bar{c}_\nu +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu |c_\nu|^2 < \infty.$$

Но в силу (14) и

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \bar{a}_\nu c_\nu \leqslant \sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^2} \sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu |c_\nu|^2}$$

получаем:

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu |a_\nu|^2 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu |c_\nu|^2 \right)^2 < \infty$$

и, следовательно,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu |c_\nu|^2 < \infty .$$

Таким образом, утверждение второе имеет место.

3. Осталось показать ещё, что из третьего утверждения следует первое.

Пусть для функции $y(x)$ имеют место разложения (8) и (7). Из (7) непосредственно ясно, что она обладает производной с суммируемым квадратом. Разложение (8) показывает далее, что $y(x)$ является абсолютно непрерывной и удовлетворяет главным условиям, т. е. для функции $y(x)$ имеет место утверждение первое.

Доказательство леммы. Обозначим через F_0 совокупность всех функций $g(x) \in F$, которые удовлетворяют условиям:

$$g(a) = g(b) = 0.$$

Обозначим, кроме того, через Q_0 совокупность всех функций $h(x) \in Q$, которые удовлетворяют условиям:

$$h(a) = h(b) = h'(a) = h'(b) = 0.$$

Пусть дана некоторая функция $y(x) \in F$.

Существует, очевидно, бесконечное множество функций $z(x) \in Q$ таких, что

$$z(a) = y(a), \qquad z(b) = y(b)$$

или, другими словами, таких, что

$$y(x) - z(x) = g(x) \in F_0.$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что для всякой функции $g(x) \in F_0$ существует последовательность $\{h_k(x)\} \in Q_0$ такая, что

$$\lim_{k \to \infty} \| g(x) - h_k(x) \| = 0,$$

так как из того будет следовать существование для всякой функции $y(x) \in F$ последовательности

$$\{ y_k(x) = z(x) + h_k(x) \} \in Q$$

такой, что

$$\lim_{k \to \infty} \| y(x) - y_k(x) \| = 0.$$

Но в случае, если $g(x) \in F_0$ и $\{h_k(x)\} \in Q_0$, это последнее соотношение эквивалентно следующему:

$$\lim \int_a^b \{(Sg)' - (Sh_k)'\}^* \{(Sg)' - (Sh_k)'\} \, dx = 0.$$

В самом деле, неравенство

$$\int_a^b \left| (Sg)_i' - (Sh_k)_i' \right|^2 dx < \varepsilon^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

влечёт за собой в силу неравенства Шварца следующее:

$$|(Sg)_i - (Sh_k)_i| = \left| \int_a^x \{(Sg)_i' - (Sh_k)_i'\} \, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_a^x \left| (Sg)_i' - (Sh_k)_i' \right|^2 dx} \, (x - a)^{\frac{1}{2}} \leqslant (b - a)^{\frac{1}{2}} \varepsilon$$

для любого $a \leqslant x \leqslant b$. Следовательно,

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |g(x) - h_k(x)| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} S^{-1} |Sg(x) - Sh_k(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b} S^{-1}(x)(b-a)^{\frac{1}{2}} \varepsilon \leqslant M (b - a)^{\frac{1}{2}} \varepsilon,$$

где $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} S^{-1}(x)$, который достигается в силу непрерывности матрицы $S(x)$.

Таким образом, лемма будет доказана, если мы докажем следующее предложение:

A) Какова бы ни была функция $g(x) \in F_0$, существует последовательность $\{h_k(x)\} \in Q_0$ такая, что

$$\lim_{k \to \infty} \int_a^b \{(Sg)' - (Sh_k)'\}^* \{(Sg)' - (Sh_k)'\} \, dx = 0.$$

Рассмотрим множество $(SF_0)'$ всех функций $G(x) = (Sg)'$, где $g(x) \in F_0$. Для всякой $G(x) \in (SF_0)'$ имеем:

$$\int_a^b (Sg)' \, dx = Sg \Big|_a^b = 0.$$

Наоборот, если функция $G(x)$ с суммируемым квадратом удовлетворяет условию

$$\int_a^b G(x) \, dx = 0, \tag{15}$$

то функция $g(x) = \int\limits_a^x G(x) \, dx$ принадлежит $(SF_0)'$, так как она имеет производную с суммируемым квадратом и удовлетворяет главным граничным условиям, так как

$$g(a) = g(b) = 0.$$

Таким образом, множество $(SF_0)'$ совпадает с замкнутой (в смысле сходимости в среднем квадратичном) совокупностью всех функций $G(x)$ с суммируемым квадратом, для которых имеет место равенство (15).

Рассмотрим далее совокупность Q_0'' всех функций

$$f(x) = (Ah' + Bh)' = [K(Sh)']', \qquad h(x) \in Q_0$$

и покажем, что она совпадает с совокупностью непрерывных функций, удовлетворяющих условиям:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0, \qquad \int_a^b \tau(x) f(x)\,dx = 0, \tag{16}$$

где

$$\tau'(x) = K^{-1}(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Действительно, если $f(x) = [K(Sh)']' \in Q_0''$,

то

$$\int_a^b [K(Sh)']'\,dx = K(Sh)'\Big|_a^b = KS'h + KSh'\Big|_a^b = 0,$$

$$\int_a^b \tau(x)[K(Sh)']'\,dx = \tau(x)K(Sh)'\Big|_a^b - \int_a^b K^{-1}(x)K(x)(Sh)'\,dx = Sh\Big|_a^b = 0.$$

Наоборот, если функция $f(x)$ непрерывна и удовлетворяет условиям (16), то функция

$$h(x) = \int_a^x S^{-1}(x)K^{-1}(t)\int_a^t f(\alpha)\,d\alpha\,dt$$

принадлежит Q_0'', ибо

$$h(a) = 0, \qquad h(b) = S^{-1}(b)\int_a^b\int_a^t K^{-1}(t) f(\alpha)\,d\alpha\,dt =$$

$$= S^{-1}(b)\int_a^b\Big(\int_\alpha^b K^{-1}(t)\,dt\Big) f(\alpha)\,d\alpha = S^{-1}(b)\int_a^b\big(\tau(b) - \tau(a)\big) f(\alpha)\,d\alpha =$$

$$= S^{-1}(b)\tau(b)\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha - S^{-1}(b)\int_a^b \tau(\alpha) f(\alpha)\,d\alpha = 0.$$

Легко видеть, что $f(x) = [K(Sh)']'$.

Покажем теперь, что соотношение

$$\int_a^b \chi(x) f(x)\,dx = 0 \quad \text{для всех} \quad f(x) \in Q_0'', \tag{17}$$

где $\chi(x)$ есть непрерывная матрица n-го порядка, возможно только в том случае, если $\chi(x)$ имеет вид:

$$\chi(x) = \alpha + \beta\tau(x),$$

где α и β постоянные матрицы n-го порядка.

Пусть (17) имеет место. Мы можем так подобрать матрицу

$$\Psi(x) = \alpha + \beta\tau(x),$$

что

$$\int_a^b \left[\chi(x) - \Psi(x)\right]^* dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_a^b \tau(x)\left[\chi(x) - \Psi(x)\right]^* dx = 0, \tag{18}$$

или более подробно, так что

$$\begin{gathered} \alpha^*(b-a) + \int_a^b \tau^*(x)\,dx\,\beta^* = A, \\ \int_a^b \tau(x)\,dx\,\alpha^* + \int_a^b \tau(x)\tau^*(x)\,dx\,\beta^* = B, \end{gathered} \tag{19}$$

где

$$A = \int_a^b \chi(x)\,dx \quad \text{и} \quad B = \int_a^b \tau(x)\chi^*(x)\,dx.$$

В самом деле, исключая неизвестную α^*, получим:

$$\begin{gathered} \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \tau(x)\,dx \int_a^b \tau^*(x)\,dx - \int_a^b \tau(x)\tau^*(x)\,dx\right]\beta^* = \\ = \frac{1}{b-a}\int_a^b \tau(x)\,dx \cdot A - B. \end{gathered} \tag{20}$$

Матрица

$$Q = \frac{1}{b-a}\int_a^b \tau(x)\,dx \int_a^b \tau^*(x)\,dx - \int_a^b \tau(x)\tau^*(x)\,dx$$

неособенная, так как форма

$$\begin{gathered} \xi^* Q \xi = \frac{1}{b-a}\int_a^b \xi^*\tau(x)\,dx \int_a^b \tau^*(x)\xi\,dx - \int_a^b \xi^*\tau(x)\tau^*(x)\xi\,dx = \\ = \frac{1}{b-a}\int_a^b \rho^*(x)\,dx \int_a^b \rho(x)\,dx - \int_a^b \rho^*(x)\rho(x)\,dx, \end{gathered}$$

где $\rho(x) = \tau^*(x)\xi$ является в силу неравенства Шварца строго отрицательной для произвольного постоянного вектора ξ. Равенство нулю невозможно, так как в противном случае вектор $\rho(x)$ был бы параллелен единичному вектору, т. е. был бы постоянен. А из этого вытекало бы, что $\tau(x)$ постоянна и $\tau'(x)=0$, т. е. матрица $K(x)$ особенна, что является противоречивым.

Умножая обе части равенства (20) на Q^{-1}, найдём β, а затем из (19) и α.

Из соотношений (16) и (17) следует, что

$$\int_a^b \Big(\chi(x)-\Psi(x)\Big) f(x)\,dx=0 \quad \text{для всех} \quad f(x)\in Q_0''.$$

Обозначая i-ую строку матрицы $\chi(x)-\Psi(x)$ через $\psi_i^*(x)$, получаем

$$\int_a^b \psi_i^*(x) f(x)\,dx=0 \qquad (i=1, 2, \dots, n)$$

для всех $f(x)\in Q_0''$.

Так как $\psi_i(x)$ $(i=1,2,\dots,n)$ непрерывные функции и

$$\int_a^b \psi_i(x)\,dx=0, \qquad \int_a^b \tau(x)\psi_i(x)\,dx=0 \qquad (i=1, 2, \dots, n),$$

что непосредственно следует из (18), то мы можем в качестве $f(x)$ взять

$$f(x)=\psi_i(x) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Тогда

$$\int_a^b \psi_i^*(x)\psi_i(x)\,dx=0 \qquad (i=1, 2, \dots, n),$$

откуда $\psi_i(x)=0$ $(i=1, 2, \dots, n)$, т. е.

$$\chi(x)=\Psi(x).$$

Рассмотрим ещё совокупность $(SQ_0)'$ всех функций $u(x)=(Sh)'$, где $h(x)\in Q_0$. Предложение (A) может быть сформулировано теперь следующим образом:

A) Множество $(SQ_0)'$ плотно в множестве $(SF_0)'$ (в смысле сходимости в среднем квадратичном).

Допустим противное. Так как множество $(SF_0)'$ замкнуто, то можно утверждать, что существует такая функция $g_0(x)\in F_0$, что

$$\int_a^b (Sg_0)'^*(Sh')\,dx=0 \quad \text{для всех } h(x)\in Q_0. \tag{21}$$

Проинтегрируем равенство (21) по частям

$$\int_a^b (Sg_0)'^* K^{-1}K(Sh)'\,dx=vK(Sh)'\Big|_a^b-\int_a^b v^*[K(Sh)']'\,dx=0 \tag{22}$$

для всех $h\in Q_0$, где $v(x)=\int_a^b K^{-1*}(Sg_0)'\,dx$.

Построим матрицу V^* следующим образом: элементами первой строки пусть будут координаты вектора $v^*(x) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, а все остальные элементы равны нулю. Из (22) следует, что для этой матрицы будут иметь место равенства:

$$\int_a^b V^*[K(Sh)']'\,dx = \int_a^b \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} v_i[K(Sh)']_i' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} dx = 0.$$

Следовательно, матрица V^* должна иметь вид:

$$V^*(x) = \alpha + \beta\tau(x).$$

Диференцирование этого равенства даёт

$$V^{*\prime}(x) = \beta K^{-1}(x). \qquad (23)$$

Сравнивая элементы первой строки полученного равенства (23), находим:

$$\left\{(Sg_0)'^{*} K^{-1}\right\}_i = \left\{\beta K^{-1}\right\}_{1i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

или подробнее

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{(Sg_0)}_j' K_{ji}^{-1} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{1j} K_{ji}^{-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\overline{(Sg_0)}_j' - \beta_{1j}\right] K_{ji}^{-1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Получили систему n уравнений, матрица коэфициентов которой неособенна. Следовательно, существует единственное решение

$$\overline{(Sg_0)}_j' - \beta_{1j} \equiv 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n;\ a \leqslant x \leqslant b).$$

Отсюда

$$\overline{(Sg_0)}_j = \beta_{1j}x + \gamma_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

причём не все β_{1j} и γ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ равны нулю.

Левая часть последнего равенства обращается в точках a и b в нуль, но это является невозможным для линейной функции, стоящей в правой части.

Таким образом, лемма, а тем самым и теорема полностью доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, „О разложениях произвольных функций в ряды по фундаментальным функциям краевой задачи". Матем. сб. т. 2 (44); 5 (1937).

2. M. Morse, „The calculus of variations in the large", гл. IV, (1939).