

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РАЗНОСТИ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПЛОСКОСТИ

И. В. Ушакова

Асимптотические оценки медленно растущих субгармонических функций в плоскости вне системы кружков с конечной суммой логарифмических длин радиусов были изучены Хейманом в [1]. В этой работе исследуются асимптотические свойства субгармонических функций $u(z)$, удовлетворяющих условию

$$B(r) = O(\ln^{\alpha} r) \quad (\alpha \leq 2),$$

где

$$B(r) = \max_{|z|=r} u(z).$$

Целью настоящей статьи является установление асимптотических оценок для функций $u(z)$, представимых в виде разности субгармонических функций в плоскости, когда характеристическая функция $T(r)$ удовлетворяет аналогичному условию

$$T(r) = O(\ln^{\alpha} r),$$

причем предполагается лишь, что $\alpha > 0$.

Из полученных оценок разности субгармонических функций мы выведем результат для одной субгармонической функции. Этот результат интересен при $\alpha > 2$, так как оценки субгармонических функций вне упомянутой системы кружков в этом случае не исследовались. Попутно в работе будут указаны оценки разности субгармонических функций, если характеристика этой разности имеет не нулевой порядок роста.

Применяемый здесь метод по сути тот же, что и в работе [2], где изучались субгармонические функции в круге. Поэтому мы подробно остановимся на доказательстве лишь того нового, что здесь возникает в связи с тем, что мы рассматриваем разность субгармонических функций не в круге, а в бесконечной области, а именно плоскости.

Пусть функция $u(z)$ есть разность двух субгармонических функций в плоскости:

$$u(z) = u_2(z) - u_1(z).$$

Поскольку нас интересуют асимптотические оценки, можно, не нарушая общности, считать, что $u_1(z)$ и $u_2(z)$ гармоничны в некоторой окрестности начала координат и что

$$u_1(0) = u_2(0) = 0.$$

Введем характеристику $T(r)$ Неванлинна — Привалова [3] для $u(z)$:

$$T(r) = \varphi(r) + N_1(r). \tag{1}$$

Здесь

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta}) d\theta,$$

$$N_1(r) = \int_0^r \frac{n_1(t)}{t} dt \quad (0 < r < \infty),$$

где $n_1(t)$ — масса круга радиуса t , порождаемая функцией $u_1(z)$ (из гармоничности $u_1(z)$ в окрестности начала координат следует, что $n_1(t) = 0$ на некотором промежутке $[0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$).

Функция $u^+(re^{i\theta})$ определяется как обычно:

$$u^+(re^{i\theta}) = \begin{cases} u(re^{i\theta}), & \text{если } u(re^{i\theta}) > 0, \\ 0, & \text{если } u(re^{i\theta}) \leq 0. \end{cases}$$

Характеристика $T(r)$ является непрерывной, монотонно возрастающей функцией от r .

Пусть $\mu(r)$ — непрерывная функция, для которой

$$\int_0^\infty \mu(t) dn_2(t) < \infty \quad (2)$$

($n_2(t)$ — масса круга радиуса t , порождаемая функцией $u_2(z)$). Такую функцию $\mu(r)$ можно связать с характеристикой $T(r)$. Для этого рассмотрим положительную непрерывную функцию $\sigma(r)$, которая гасит рост характеристики в том смысле, что

$$\int_0^\infty T(r) \sigma(r) dr < \infty. \quad (3)$$

Очевидно,

$$\int_0^\infty \sigma(r) dr < \infty.$$

Если положить

$$\mu(r) = \int_r^\infty \frac{dt}{t} \int_t^\infty \sigma(\tau) d\tau, \quad (3a)$$

то нетрудно показать, что функция $\mu(r)$ обладает свойством (2).

Введем понятие ε -нормальной точки относительно некоторого положительного распределения $d\gamma(\zeta)$ конечной массы. Назовем точку z ε -нормальной относительно этого распределения, если для всех кружков $S(z)$ с центром в точке z и радиусом h ($h \leq \frac{|z|}{2}$) имеет место неравенство

$$\int_{S(z)} d\gamma(\zeta) \leq \frac{\varepsilon h}{|z|}. \quad (4)$$

Как и в [2], для получения асимптотических оценок потребуется следующая

Лемма. Все точки, которые не ε -нормальны относительно положительного распределения конечной массы $d\gamma(\zeta)$, можно заключить в систему кружков с конечной суммой логарифмических длин радиусов.

Для доказательства леммы нам потребуется следующий геометрический факт.

Если множество A на плоскости покрыто кружками ограниченных радиусов так, что каждая точка $z \in A$ является центром некоторого кружка радиуса $h(z)$, то из системы кружков можно выделить счетную систему, покрывающую A , и такую, что каждая точка плоскости будет принадлежать не более чем 6 кружкам этой системы. Этот результат впервые встречается у Альфорса [4], применительно к любому конечномерному пространству его доказал Н. С. Ландкоф [5].

Пусть точка z не ε -нормальна. Тогда найдется такой кружок $C(z)$ с центром в этой точке и радиусом h , что

$$\int_{C(z)} d\gamma(\zeta) > \frac{\varepsilon \cdot h}{|z|} \quad \left(h \leq \frac{|z|}{2}\right).$$

Поэтому множество не ε -нормальных точек (обозначим это множество B) покрыто системой кружков $C(z)$.

Разобьем плоскость на кольца

$$2^{2n} < |z| \leq 2^{2n+2} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

и обозначим через A_n множество не ε -нормальных точек в n -м кольце. Пользуясь приведенным геометрическим результатом, мы можем выделить систему кружков, покрывающих A_n так, что каждая точка плоскости будет принадлежать не более чем 6 кружкам системы.

В силу условия $h \leq \frac{|z|}{2}$ кружки, имеющие центры в точках A_{2k+1} при различных k , не пересекаются. Это относится и к кружкам, имеющим центры в точках A_{2k} .

Введем теперь в рассмотрение два множества:

$$B_1 = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1} \text{ и } B_2 = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}.$$

Каждое из этих множеств покрыто счетной системой кружков, причем, кратность покрытия не превосходит 6. Обозначим систему кружков, покрывающих B_1 , через $\{C(z_j^1)\}$, их радиусы — h_j^1 , а систему, покрывающую B_2 , — через $\{C(z_j^2)\}$. Пусть D_1 — совокупность точек плоскости, покрытых только одним кружком, D_2 — покрытых двумя кружками и т. д. Тогда

$$\int_{D_1} d\gamma(\zeta) + 2 \int_{D_2} d\gamma(\zeta) + \dots + 6 \int_{D_6} d\gamma(\zeta) = \sum_j \int_{C(z_j^1)} d\gamma(\zeta) \leq 6 \int_{\Pi} d\gamma(\zeta),$$

где Π — вся плоскость. А так как

$$\int_{C(z_j^1)} d\gamma(\zeta) > \frac{\varepsilon h_j^1}{|z_j^1|},$$

то ряд

$$\sum_j \frac{h_j^1}{|z_j^1|}$$

сходится. Аналогично получается сходимость ряда

$$\sum_j \frac{h_j^2}{|z_j^2|}.$$

Поэтому все множество $B = B_1 + B_2$ будет покрыто системой кружков $C(z_j)$ радиусов h_j , для которой сходится ряд

$$\sum_i \frac{h_j}{|z_j|}.$$

Отсюда вытекает сходимость ряда

$$\sum_i \ln \left(1 + \frac{h_j}{|z_j|} \right),$$

который представляет сумму логарифмических длин радиусов покрывающих кружков.

Доказательство леммы закончено.

Возьмем круг радиуса $R > r = |z|$ и представим $u_1(z)$ и $u_2(z)$ в этом круге по Риссу [3]:

$$u(z) = \iint_{|\zeta| < R} \ln \left| \frac{(\zeta - z)R}{R^2 - \bar{z}\zeta} \right| dm_2(\zeta) + h_R^2(z) - \iint_{|\zeta| < R} \ln \left| \frac{(\zeta - z)R}{R^2 - \bar{z}\zeta} \right| dm_1(\zeta) - h_R^1(z) = v_R^2(z) + h_R^2(z) - v_R^1(z) - h_R^1(z),$$

где $h_R^1(z)$, $h_R^2(z)$ — наилучшие гармонические мажоранты функций $u_1(z)$ и $u_2(z)$. Так как $-v_R^1(z) \geq 0$, то

$$u(z) \geq v_R^2(z) + h_R^2(z) - h_R^1(z). \quad (5)$$

Затем, как и в [2], проводится оценка потенциала $v_R^2(z)$ во всякой ε -нормальной точке z относительно положительного распределения $d\gamma(\zeta) = \mu(|\zeta|) dm_2(\zeta)$. Это распределение, в силу (2), обладает конечной массой. Будем считать R функцией от r : $R = R(r)$, $r = |z|$. Имеют место неравенства

$$v_R^2(z) > - \frac{\delta(R) + \varepsilon \ln 12}{\mu(R)} \left(R \leq \frac{3r}{2} \right), \quad (6)$$

где $\mu(R)$ построена по (3а), $\delta(R) \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$) и

$$v_R^2(z) > -n_2(R) \ln \frac{4R}{r} - \frac{\varepsilon}{\mu\left(\frac{3r}{2}\right)} \left(\ln \frac{R}{r} + 3 \ln 2 \right). \quad (7)$$

Эти оценки справедливы во всякой ε -нормальной точке, т. е. вне множества, которое в силу леммы «мало». Чтобы получить оценку (6), положим

$$\frac{\zeta}{R} = \zeta_1, \quad \frac{z}{R} = z_1.$$

Не нарушая общности, можно считать, что z , а значит и z_1 , лежит на положительном луче. Тогда

$$v_R^2(z) = \iint_{|\zeta_1| < 1} \ln \left| \frac{\zeta_1 - z_1}{1 - \bar{z}_1 \zeta_1} \right| dm_2(R\zeta_1).$$

Рассмотрим кружок с неевклидовым центром в точке z_1 :

$$(K_{z_1}) : \left| \frac{\zeta_1 - z_1}{1 - \bar{z}_1 \zeta_1} \right| \leq \lambda.$$

Подберем λ так, чтобы окружность K_{z_1} проходила через точку $\zeta_0 = z_1 + \frac{1}{2}(1 - z_1)$. Заметим, что $\lambda > \frac{1}{3}$. Разобьем интеграл по единичному кругу $K\{|\zeta| \leq 1\}$ на сумму интегралов

$$\iint_K = \iint_{K_{z_1}} + \iint_{K-K_{z_1}}.$$

Так как вне K_{z_1} выполняется неравенство

$$\left| \frac{\zeta_1 - z_1}{1 - z_1 \bar{\zeta}_1} \right| > \lambda,$$

то

$$\iint_{K-K_{z_1}} \ln \left| \frac{\zeta_1 - z_1}{1 - z_1 \bar{\zeta}_1} \right| dm_2(R\zeta_1) > \ln \lambda n_2(R).$$

Остается оценить интеграл по K_{z_1} . Для этого воспользуемся приемом, применяемым в [2]. Введем систему неевклидовых колец $\{K_{z_1}^n\}_{n=0}^\infty$

$$\frac{\lambda}{2^{n+1}} < \left| \frac{\zeta_1 - z_1}{1 - z_1 \bar{\zeta}_1} \right| \leq \frac{\lambda}{2^n}.$$

Тогда

$$\iint_{K_{z_1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \iint_{K_{z_1}^n} \ln \left| \frac{\zeta_1 - z_1}{1 - z_1 \bar{\zeta}_1} \right| dm_2(R\zeta_1) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \ln \frac{\lambda}{2^{n+1}} \iint_{K_{z_1}^n} dm_2(R\zeta_1).$$

Это неравенство только усилится, если интегралы по кольцам $K_{z_1}^n$ заменить интегралами по кружкам $C_{z_1}^n$, центры которых в точке z_1 , а радиусы равны

$$r_n = \max_{\zeta_1 \in K_{z_1}^n} |\zeta_1 - z_1|.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$r_n \leq \frac{R-r}{2^n R}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \iint_{K_{z_1}} &> \sum_{n=0}^{\infty} \ln \frac{\lambda}{2^{n+1}} \iint_{C_{z_1}^n} dm_2(R\zeta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \ln \frac{\lambda}{2^{n+1}} \iint_{C_z^n} dm_2(\zeta) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \ln \frac{\lambda}{2^{n+1}} \iint_{C_z^n} \frac{\mu(|\zeta|) dm_2(\zeta)}{\mu(|\zeta|)} \geq \frac{1}{\mu(R)} \sum_{n=0}^{\infty} \ln \frac{\lambda}{2^{n+1}} \iint_{C_z^n} d\gamma(\zeta) \end{aligned}$$

(C_z^n — кружок, в который перейдет $C_{z_1}^n$ при преобразовании $R\zeta_1 = \zeta$). Так как точка z ϵ -нормальна, а радиус любого из C_z^n не превосходит $\frac{r}{2} \left(R - r \leq \frac{r}{2} \right)$, то можно воспользоваться оценкой (4):

$$\iint_{C_z^n} d\gamma(\zeta) \leq \frac{Rr_n \epsilon}{r} \leq \frac{(R-r)\epsilon}{2^n r}.$$

Поэтому

$$\iint_{K_{z_1}} > \frac{(R-r)\epsilon}{r\mu(R)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln \frac{\lambda}{2^{n+1}} = \frac{2\epsilon(R-r)}{r\mu(R)} [\ln \lambda - 2 \ln 2].$$

Если соединить оценки интегралов по K_{z_1} и $K - K_{z_1}$, получится неравенство

$$v_R^2(z) > n_2(R) \ln \lambda + \frac{2\varepsilon(R-r)}{r\mu(R)} [\ln \lambda - 2 \ln 2] > - \frac{n_2(R) \mu(R) \ln 3 + \varepsilon \ln 2}{\mu(R)}.$$

Чтобы получить (6), обозначим

$$n_2(R) \mu(R) \ln 3 = \delta(R)$$

и покажем, что $\delta(R) \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$). Действительно, в соответствии с (3) и (3а) имеем

$$\begin{aligned} \mu(R) n_2(R) &= n_2(R) \cdot \int_R^\infty \frac{dt}{t} \int_t^\infty \sigma(\tau) d\tau \leq \int_R^\infty \frac{n_2(t)}{t} dt \int_t^\infty \sigma(\tau) d\tau = \\ &= \left(\int_R^t \frac{n_2(t)}{t} dt \right) \left(\int_t^\infty \sigma(\tau) d\tau \right) + \int_R^\infty \sigma(t) dt \int_R^t \frac{n_2(s)}{s} ds = \\ &= \int_R^\infty \sigma(t) dt \int_R^t \frac{n_2(s)}{s} ds \leq \int_R^\infty \sigma(t) T(t) dt \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Для получения оценки (7) логарифмического потенциала $v_R^2(z)$ введем в рассмотрение кружок

$$(K_z) \quad |\zeta - z| \leq \frac{r}{2}.$$

Так как $R \geq \frac{3r}{2}$, то кружок K_z лежит внутри круга $|\zeta| \leq R$, который мы обозначим K . Разобьем интеграл по K на сумму интегралов

$$\iint_K = \iint_{K_z} + \iint_{K-K_z}.$$

Вне кружка K_z , очевидно,

$$\left| \frac{(\zeta - r)R}{R^2 - \zeta^2} \right| > \frac{|\zeta - z|}{2R} \geq \frac{r}{4R}.$$

В силу этого неравенства

$$\iint_{K-K_z} \ln \left| \frac{(\zeta - z)R}{R^2 - \zeta^2} \right| d\gamma_2 |\zeta| > -n_2(R) \ln \frac{4R}{r}.$$

Разобьем теперь K_z на систему концентрических колец $\{K_z^n\}_{n=0}^\infty$

$$\frac{r}{2^{n+2}} < |\zeta - z| \leq \frac{r}{2^{n+1}}.$$

Тогда

$$\iint_{K_z} = \sum_{n=0}^\infty \iint_{K_z^n} \ln \left| \frac{(\zeta - z)R}{R^2 - \zeta^2} \right| dm_2(\zeta) \geq \sum_{n=0}^\infty \ln \frac{r}{2^{n+2}R} \iint_{K_z^n} dm_2(\zeta).$$

Эта оценка только усилится, если вместо интеграла по кольцу взять интеграл по кругу $|\zeta - z| \leq \frac{r}{2^{n+1}}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \iint_{K_z} &> \sum_{n=0}^{\infty} \ln \frac{r}{2^{n+2}R} \iint_{(\zeta-z) \leq \frac{r}{2^{n+1}r}} dm_2(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \ln \frac{r}{2^{n+2}R} \iint_{(\zeta-z) \leq \frac{r}{2^{n+1}r}} \frac{\mu(|\zeta|) dm_2(\zeta)}{\mu(|\zeta|)} \geq \\ &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu\left(\frac{3r}{2}\right)} \ln \frac{r}{2^{n+2}R} \iint_{(\zeta-z) \leq \frac{r}{2^{n+1}r}} d\gamma(\zeta). \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь тем, что точка z ε -нормальна относительно распределения $d\gamma(\zeta)$, а значит,

$$\iint_{(\zeta-z) \leq \frac{r}{2^{n+1}r}} d\gamma(\zeta) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Тогда

$$\iint_{K_z} > \frac{\varepsilon}{\mu\left(\frac{3r}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \ln \frac{r}{2^{n+2}R} \geq - \frac{\varepsilon}{\mu\left(\frac{3r}{2}\right)} \left[\ln \frac{R}{r} + 3 \ln 2 \right].$$

Таким образом, во всякой ε -нормальной точке

$$v_R^2(z) > -n_2(R) \ln \frac{4R}{r} - \frac{\varepsilon}{\mu\left(\frac{3r}{2}\right)} \left[\ln \frac{R}{r} + 3 \ln 2 \right],$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь случай, когда функция имеет медленно растущую характеристику:

$$T(r) = O(\ln^a r). \quad (8)$$

Обратимся к неравенству (5) и дадим оценку гармонической части, которую обозначим через $H_R(z)$:

$$H_R(z) = h_R^2(z) - h_R^1(z).$$

Наилучшие гармонические мажоранты $h_R^1(z)$ и $h_R^2(z)$ представим с помощью интеграла Пуассона. Тогда

$$H_R(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\psi - \theta)} [u_2(Re^{i\psi}) - u_1(Re^{i\psi})] d\psi \quad (z = re^{i\theta}). \quad (9)$$

Выберем функцию $R(r)$ так, чтобы

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{R(r)} = 0.$$

В таком случае, очевидно,

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\psi - \theta)} = 1 + O\left(\frac{r}{R}\right). \quad (10)$$

Следовательно,

$$H_R(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_2(Re^{i\psi}) d\psi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_1(Re^{i\psi}) d\psi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\psi}) O\left(\frac{r}{R}\right) d\psi.$$

По обобщенной теореме Иенсена [3] для субгармонических функций

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_1(Re^{i\psi}) d\psi = N_1(R), \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_2(Re^{i\psi}) d\psi = N_2(R).$$

Если учесть эти равенства и взять представление

$$u(Re^{i\psi}) = u^+(Re^{i\psi}) - u^-(Re^{i\psi}),$$

то мы получим

$$H_R(z) = N_2(R) - N_1(R) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^+(Re^{i\psi}) O\left(\frac{r}{R}\right) d\psi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^-(Re^{i\psi}) O\left(\frac{r}{R}\right) d\psi.$$

Интегралы, входящие в равенство, нетрудно оценить, пользуясь (10), а также известным свойством характеристики [3]:

$$T(r) = \varphi(r) + N_1(r) = \varphi(r, -u) + N_2(r). \quad (11)$$

Поэтому для $H_R(z)$ справедлива оценка

$$H_R(z) > N_2(R) - N_1(R) - C \frac{r}{R} T(r). \quad (12)$$

Остановимся теперь на построении функции $\mu(r)$. Если характеристика удовлетворяет условию (8), то можно положить в (2)

$$\mu(r) = \frac{1}{\ln^{\alpha-1} r + \eta_r} \quad (\eta > 0).$$

В самом деле,

$$\int_0^\infty \mu(t) dn_2(t) = \mu(t) n_2(t) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty n_2(t) \mu'(t) dt.$$

Но нетрудно видеть, что

$$n_2(r) = O(\ln^{\alpha-1} r).$$

Действительно,

$$N_2(r^2) = \int_0^{r^2} \frac{n_2(t)}{t} dt, \quad N_2(r^2) > \int_r^{r^2} \frac{n_2(t)}{t} dt \geq n_2(r) \ln r,$$

откуда и следует, что

$$n_2(r) < \frac{N_2(r^2)}{\ln r} = O(\ln^{\alpha-1} r). \quad (13)$$

Воспользуемся теперь оценкой (7) при $R = r \ln^{\alpha} r$. Поскольку при таком R

$$n_2(R) \ln \frac{4R}{r} = O(\ln^{\alpha-1} r \ln \ln r)$$

и

$$\frac{1}{\mu\left(\frac{3r}{2}\right)} \ln \frac{4R}{r} = O(\ln^{\alpha-1+\delta} r), \quad (\delta > \eta) \quad (14)$$

то

$$-v_R^2(z) = O(\ln^{\alpha-1+\delta} r),$$

если точка z не принадлежит системе исключительных кружков. Соединяя оценки для $v_R^2(z)$ и $H_R(z)$, получим

$$u(z) > N_2(r \ln^{\alpha} r) - N_1(r \ln^{\alpha} r) - O(\ln^{\alpha-1+\delta} r) \quad (\delta > 0),$$

если точка $z = re^{i\theta}$ не принадлежит системе кружков с конечной суммой логарифмических длин радиусов. Неравенство (14) только усилится, если

отбросить справа положительную величину $N_2(r \ln^2 r)$, а $N_1(r \ln^2 r)$ заменить характеристикой $T(r \ln^2 r)$.

Таким образом, имеет место

Теорема. Если $u(z)$ есть разность субгармонических функций в плоскости и имеет характеристику $T(r)$, удовлетворяющую условию (8), то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u(re^{i\theta})}{\ln^2 r} \geq - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r \ln^2 r)}{\ln^2 r},$$

когда точка $z = re^{i\theta}$ удаляется на ∞ , минуя некоторую систему кружков с конечной суммой логарифмических длин радиусов.

Этой теоремой можно воспользоваться для получения теорем единственности медленно растущих мероморфных функций в плоскости.

Выведем теперь из оценки (14) результат для одной субгармонической функции. В этом случае

$$u_1(z) = 0, \quad N_1(r) = 0, \quad N_2(r) = N(r).$$

Обозначим

$$B(r) = \max_{|z|=r} u(z)$$

и докажем неравенство

$$B(r) < N(r \ln^2 r) + O(1). \quad (15)$$

Для доказательства заметим, что

$$u(z) < h_R(z),$$

где $h_R(z)$ — наилучшая гармоническая мажоранта $u(z)$ в круге радиуса R . Пусть снова $R = r \ln^2 r$.

Тогда

$$\begin{aligned} u(z) &< \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\psi - \theta)} u(Re^{i\psi}) d\psi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln^2 r}\right) \right] u(Re^{i\psi}) d\psi = N(r \ln^2 r) + O(1). \end{aligned}$$

Отсюда и следует неравенство (15). Если воспользоваться этим неравенством, то из оценки (14) получим, что

$$u(z) > B(r) - O(\ln^{\alpha-1+\delta} r) \quad (\delta > 0), \quad (16)$$

когда z не принадлежит системе кружков с конечной суммой логарифмических длин радиусов. Этот результат дает возможность установить равенство

$$u(z) = B(r) + O(\ln^{\alpha-1+\delta} r)$$

вне упомянутой системы кружков.

Действуя нашим методом, можно получить одну из теорем Хеймана [1]:

Если $u(z)$ -субгармоническая функция в плоскости и

$$B(r) = O(\ln r), \quad (17)$$

то равномерно относительно $z = re^{i\theta}$, когда $z \notin \varepsilon$ -совокупности, выполняется асимптотическое равенство

$$u(z) = B(r) + O(1).$$

ε -Совокупность Хеймана представляет любое счетное множество кружков, не содержащих начала координат и видных из начала координат под углами, сумма которых конечна. ε -Совокупность и наше множество исклю-

чительных кружков с конечной суммой логарифмических длин радиусов — это одно и то же. В работе Хеймана [1] приведено доказательство этого факта.

Чтобы вывести теорему Хеймана, представим субгармоническую функцию $u(z)$ по Риссу [3] в круге радиуса $R = 2r$

$$u(z) = v_R(z) + h_R(z).$$

Как следует из (13), положительное распределение масс, которое порождает $u(z)$, в рассматриваемом случае обладает конечной массой. Поэтому можно положить $\mu(r) = 1$. Тогда из оценки (7) получается, что

$$-v_R(z) = O(1). \quad (18)$$

Оценим теперь гармоническую мажоранту $h_R(z)$:

$$\begin{aligned} h_R(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\psi - \theta)} [u(Re^{i\psi}) - B(R) + B(R)] d\psi \geq \\ &\geq \frac{R+r}{R-r} [N(R) - B(R)] + B(R). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$h_{2r}(z) \geq B(2r) + 3[N(2r) - B(2r)].$$

Чтобы закончить доказательство теоремы, воспользуемся следующим фактом.

Если $B(r)$ удовлетворяет условию (17), то

$$B(r) = N(r) + O(1). \quad (19)$$

Валирон [6] доказал, что если целая функция $f(z)$ удовлетворяет условию

$$B(r) = O(\ln^2 r), \quad B(r) = \ln \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

то

$$B(r) \sim N(r).$$

Хейман [1] заметил, что этот факт можно легко распространить на субгармонические функции, а в случае (17) имеет место более сильное соотношение (19).

Учитывая (19), можно закончить оценку для $h_R(z)$:

$$h_R(z) \geq B(r) + O(1). \quad (20)$$

Чтобы получить теорему Хеймана, остается соединить (18) и (20).

Асимптотические оценки медленно растущих субгармонических функций изучены в работе Барри [7]. Однако эти оценки даются не вне множества кружков, а на последовательностях концентрических окружностей радиуса r (при $r \rightarrow \infty$). В некоторых оценках множество E значений r более «густое», например, имеет положительную $\ln \ln - \text{dens } E^*$.

* Пусть E измеримо по Лебегу и

$$E_r = E \cap [r_0, r].$$

Рассмотрим

$$\int_{E_r} \frac{dt}{t \ln t} = \ln \ln_{-m} E.$$

Тогда

$$\frac{\ln \ln - \text{dens } E}{\lim_{r \rightarrow \infty}} = \frac{\ln \ln_{-m} E_r}{\ln \ln r}.$$

Барри вводит величину $A(r)$

$$A(r) = \inf_{|z|=r} u(z),$$

которая при некоторых r может обращаться в $-\infty$ и указывает наилучший возможный рост этой величины в случае (17)*.

Если субгармоническая функция удовлетворяет условию

$$B(r) = O(\ln r)^{p+\varepsilon},$$

то для всех $\varepsilon > 0$ и $p \geq 1$ на некоторой бесконечно возрастающей последовательности значений r Барри получает следующую оценку:

$$A(r) > \left\{ 1 - \frac{p(p-1)\pi^2 + \varepsilon}{2 \ln^2 r} \right\} B(r).$$

Эту, а также нашу оценку (16) интересно сравнить с результатом Валирона [4], полученным им для целых функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r)}{\ln^p r} \leq \sigma, \quad M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \quad (p \geq 2).$$

Результат Валирона гласит

Пусть

$$m(r) = \min_{|z|=r} |f(z)|$$

и $0 < \eta < 1$. Тогда

$$\ln m(r) > \ln M(r) - H\sigma \ln^{p-1} r$$

для множества значений r с нижней линейной плотностью большей, чем $1 - \eta$; H зависит от p и η .

Получим попутно оценки для разности субгармонических функций, имеющих быстро растущую характеристику. Воспользуемся для этого оценкой (6) потенциала $v_R^2(z)$ и для гармонической части $H_R(z)$ (см. (19)) запишем неравенство

$$H_R(z) > -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\psi - \theta)} u^-(Re^{i\psi}) d\psi.$$

Так как

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\psi - \theta)} \leq \frac{R^2 - r^2}{(R - r)^2} = \frac{R + r}{R - r},$$

* Так, Барри [7] получена следующая

Теорема. Если $h(t) > 0$ непрерывна при $t \geq c$ и

$$\int_c^\infty \frac{h(t)}{t} dt = \infty,$$

то найдется бесконечная возрастающая последовательность r , для которых

$$A(r) > B(r) - h(r).$$

Если же $\int_c^\infty \frac{h(t)}{t} dt < \infty$, то можно указать пример субгармонической функции, удовлетворяющей условию (17) и для которой при всех $r \geq r_0$

$$A(r) < B(r) - h(r).$$

то

$$H_R(z) > -\frac{R+r}{R-r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^-(Re^{i\psi}) d\psi.$$

Но в силу (11)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^-(Re^{i\psi}) d\psi = \varphi(R, -u) < T(R).$$

Поэтому

$$H_R(z) > -\frac{R+r}{R-r} T(R).$$

Оценка гармонической части получена через характеристику $T(R)$, в то время как оценка (6) дана через функцию $\mu(R)$. Чтобы выразить $\mu(R)$ через характеристику, обратимся к соотношению (3) и положим в нем

$$\sigma(r) = \frac{1}{T(r)r^{1+\eta}},$$

где η любое положительное число. Тогда

$$\mu(r) = \int_r^\infty \frac{dt}{t} \int_t^\infty \sigma(\tau) d\tau. \quad (21)$$

Пусть теперь $R = r + \theta r$ ($0 < \theta < \frac{1}{2}$). При таком R из (21) нетрудно вывести, что

$$\frac{1}{\mu(R)} \leq N_0 r^\eta T(r + 2\theta r) \quad (22)$$

(N_0 — положительная постоянная, зависящая от θ). Объединяя (6), (20) и (22), получим следующий результат:

Теорема. Если $u(z)$ является разностью субгармонических функций в плоскости с характеристикой $T(r)$, то для любого $\eta > 0$ найдется множество кружков с конечной суммой логарифмических длин радиусов, вне которого будет выполняться неравенство

$$u(z) > -C_0 T(r + \theta r) r^\eta$$

θ — любое число из $(0,1)$, C_0 — положительная постоянная.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Науман. Slowly growing integral and subharmonic function. «Comm. math. Helv», 34, 1960.
2. И. В. Ушакова. Некоторые оценки субгармонических функций в круге. «Зап. Харьковск. матем. о-ва», XXIX, 1963.
3. И. И. Привалов. Субгармонические функции, 1937.
4. L. Ahlfors. Ein Satz von Henri Cartan und seine Anwendung auf die Theorie der meromorphen Funktionen. Comm. Physico-Mathematical, t. V, 1931.
5. Н. С. Ландкоф. Емкости и меры Хаусдорфа. Оценка потенциалов. — «Усп. матем. наук», т. 20, вып. 2, 1965.
6. G. Valiron. Lectures on the general theory of integral functions. Chelsea, 1949.
7. P. Barry. The minimum modulus of small integral and subharmonic functions. J. Lond. math. soc., (3), 12, 1962.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В. П. Петренко

Введение

В этой работе мы всюду будем пользоваться терминами и обозначениями неванлинновской теории распределения значений мероморфных функций [1]. Кроме того обозначим

$$S(\alpha, f) = \sum_{(a)} \delta^{\alpha}(a, f) \quad (\alpha > 0),$$

$$\sigma(\alpha, \lambda) = \sup_{\{f\}} S(\alpha, f),$$

где $\sup$ берется по всем мероморфным функциям конечного нижнего порядка λ , обладающим не менее чем двумя дефектными значениями. Пусть Λ — некоторое подмножество всех мероморфных функций. Положим,

$$\sigma_{\Lambda}(\alpha, \lambda) = \sup_{f \in \Lambda} S(\alpha, f).$$

Известны следующие результаты, характеризующие величины дефектов мероморфных функций.

Теорема А [2, 3, 4]. *Справедливы оценки **

$$\sigma(\alpha, \lambda) \leq \begin{cases} K_1 \frac{\lambda^{2\alpha}}{(3\alpha - 1)^{\alpha}}, & 0 < \lambda \leq 0,5 \\ K_1 \frac{\lambda^{1-\alpha}}{(3\alpha - 1)^{\alpha}}, & \lambda > 0,5 \end{cases}$$

при $\frac{1}{3} < \alpha \leq 1$

и

$\sigma(\alpha, \lambda) \equiv \infty$ при $\alpha < \frac{1}{3}$.

Теорема Б [3, 4]. *Величины дефектов мероморфных функций конечного нижнего порядка λ подчинены условию*

$$\sum_{(a)} \frac{\delta^{\frac{1}{3}}(a, f)}{\ln \frac{1}{3} + \frac{e}{\delta(a, f)}} \leq K_2 \frac{1 + \lambda}{\epsilon} \quad (\epsilon > 0).$$

* Буквы K с индексами всюду означают абсолютные постоянные, буквы C с индексами — величины, зависящие только от рассматриваемой функции.

В этой работе мы интересуемся свойствами величины $\sigma_\Lambda(\alpha, \lambda)$ для одного важного класса мероморфных функций. Определим этот класс.

Будем говорить, что мероморфная функция $g(z)$ имеет угловой рост, если для нее существуют углы

$$D_p = \{z : \arg z \in I_p = (\theta_p, \bar{\theta}_p)\} \quad (p = 1, 2, \dots)$$

такие, что в любом угле, лежащем внутри любого из углов D_p равномерно относительно $\theta = \arg z$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \ln^+ |g(z)| = \infty \quad \left(\lim_{r \rightarrow \infty} \ln^+ \frac{1}{|g(z)|} = \infty \right), \quad (1.1)$$

при этом

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|\ln |g(re^{i\theta_p})||}{T(r, g)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|\ln |g(re^{i\bar{\theta}_p})||}{T(r, g)} = 0 \quad (1.2)$$

и

$\bigcup_p \bar{D}_p = E =$ всей замкнутой плоскости. Такие углы мы будем называть углами роста мероморфной функции $g(z)$.

Будем говорить, что мероморфная функция $f(z)$ конечного нижнего порядка λ принадлежит классу Λ , если для каждого ее дефектного значения a_n существуют углы

$$D_n^{(k)} = \{z : \arg z \in I_n^{(k)} = (\theta_n^{(k)}, \bar{\theta}_n^{(k)})\}, \quad k = 1, 2, \dots, \omega_n \leq \infty$$

такие, что при $|z| = r \rightarrow \infty$

$$f(z) \rightarrow a_n \quad (1.3)$$

равномерно относительно $\arg z$, если z принадлежит любому внутреннему углу из системы углов $\{D_n^{(k)}\}_{k=1}^{\omega_n}$ и при этом мероморфная функция $g(z) = \frac{1}{z \cdot f'(z)}$ имеет угловой рост с углами роста $D_n^{(k)}$.

Основными результатами этой работы являются следующие теоремы

Теорема 1. *Справедливы оценки*

$$\sigma_\Lambda\left(\frac{1}{3}, \lambda\right) \leq K_3 \cdot \lambda^{\frac{2}{3}}, \quad (1.4)$$

$$\sigma_\Lambda(\alpha, \lambda) \equiv \infty \text{ при } \alpha < \frac{1}{3}. \quad (1.5)$$

Пусть $g(z)$ — мероморфная функция конечного нижнего порядка λ и имеет угловой рост

$$\nu(g) = \max_p |I_p|,$$

где

$$|I_p| = \bar{\theta}_p - \theta_p \text{ и } \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \in I_p}} \ln^+ |g(re^{i\theta})| = \infty.$$

Теорема 2. *Справедлива оценка*

$$\nu(g) \geq \frac{V\pi}{\lambda} \cdot \delta^{\frac{1}{2}}(\infty, g).$$

Положим для произвольной мероморфной функции $g(z)$ $E(r, g) = \{ \theta : |g(re^{i\theta})| > 1 \}$, $I_p(r, g) \rightarrow$ составляющие интервалы множества $E(r, g)$,

$$\nu(r, \infty, g) = \nu(r, g) = \max_p |I_p(r, g)|,$$

где $|I_p(r, g)| = \text{mes } I_p(r, g)$.

Очевидно, если мероморфная функция $g(z)$ имеет угловой рост, тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $r > r_0(\varepsilon)$

$$\nu(r, \infty, g) \geq \nu(g) - \varepsilon \geq \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda} \delta^{\frac{1}{2}}(\infty, g) - \varepsilon.$$

Величина $\nu(r, \infty, g)$ исследовалась раньше для целых функций в работе [9] и для мероморфных функций — в [4]. Основной результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема В. [4]. Для любой мероморфной функции $g(z)$ конечного нижнего порядка λ справедливо соотношение

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \nu(r, \infty, g) \geq K_4 (2\alpha - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\delta^\alpha(\infty, g)}{\lambda} \quad (1 \geq \alpha > 0,5). \quad (1.6)$$

При $\alpha < 0,5$ для любого $\varepsilon > 0$ и $0,5 < \rho < \infty$ существует мероморфная функция $h_p^{(\varepsilon)}(z)$ порядка ρ , для которой

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \nu(r, \infty, h_p^{(\varepsilon)}) \leq K_5 \cdot \varepsilon^{\frac{1}{2} - \alpha} \cdot \frac{\delta^\alpha(\infty, h_p^{(\varepsilon)})}{\rho^{2\alpha}}. \quad (1.7)$$

§ 1. Примеры мероморфных функций из класса Λ

Простым примером функции из класса Λ есть

$$f_p(z) = \int_0^z e^{-t^p} dt, \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

Действительно, для нее [1, стр. 272] дефектные значения суть

$$a_n = e^{\frac{2\pi i n}{p}} \int_0^\infty e^{-t^p} dt, \quad n = 1, 2, \dots, p, \quad a_{p+1} = \infty.$$

Далее,

$$S(\alpha, f_p) = 1 + p^{1-\alpha} = 1 + \lambda^{1-\alpha}, \quad (2.1)$$

$$g(z) = \frac{1}{zf_p'(z)} = \frac{1}{ze^{-z^p}}$$

и углы роста для $g(z)$ являются

$$D_n = \left\{ z : \frac{2\pi n}{p} - \frac{\pi}{2p} < \arg z < \frac{2\pi n}{p} + \frac{\pi}{2p} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots, p),$$

$$D_{p+1}^{(k)} = \left\{ z : \left| \arg z - (2k-1) \frac{\pi}{2p} \right| < \frac{\pi}{2p} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, p).$$

Покажем теперь, что примеры типа примеров А. А. Гольдберга [2,5] также принадлежат классу Λ .

Пусть при * $\nu = 1, 2, \dots$ $p = 1, 3, \dots, 2m + 1, \dots$
 $0 < \eta_\nu < \frac{1}{3p}$

и

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \eta_\nu = \frac{1}{p},$$

$$\eta_{n+1} \leq \sum_{\nu=n+2}^{\infty} \eta_\nu. \quad (2.2)$$

Обозначим через

$$\{a_\nu\}_{-\infty}^{\infty} \text{ и } \{c_\nu\}_{-\infty}^{\infty}$$

последовательности различных комплексных чисел таких, что

$$S_1 = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |a_\nu c_\nu| < \infty, \quad S_2 = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |c_\nu| < \infty,$$

и $|c_\nu| \neq |c_m|$ при $\nu \neq m$.Пусть далее ($n \geq 1$)

$$\theta_n = \pi \sum_{\nu=0}^n \eta_\nu, \quad \theta_{-n} = -\theta_n, \quad \theta_0 = 0,$$

$$\varphi_n = \frac{1}{2} (\theta_n + \theta_{n-1}), \quad \varphi_{-n} = -\varphi_n,$$

$$\Phi_1(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu c_\nu \exp(z \cdot e^{-i\theta_\nu})^p,$$

$$\Phi_2(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \exp(ze^{-i\theta_\nu})^p,$$

$$h_p(z) = \frac{\Phi_1(z)}{\Phi_2(z)}.$$

С помощью рассуждений аналогичных [5], легко убедиться, что множество дефектных значений функции $h_p(z)$ совпадает с множеством $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ и что порядок $h_p(z)$ равен p . Покажем, что для каждого a_n

$$D_n^{(k)} = \left\{ z : \left| \arg z - \frac{\varphi_{n+1} + \varphi_n}{2} - 2k \cdot \frac{\pi}{p} \right| < \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{2} \right\}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{p-1}{2}.$$

Легко видеть, что

$$\bigcup_{(n)} \bigcup_{(k)} D_n^{(k)} = E = \text{всей замкнутой плоскости. Пусть } (\varepsilon > 0)$$

$$D_{n,\varepsilon}^{(k)} = \left\{ z : \left| \arg z - \frac{\varphi_{n+1} + \varphi_n}{2} - 2k \cdot \frac{\pi}{p} \right| < \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{2 + \varepsilon} \right\}.$$

Используя условие (2.2), легко показать, что при

$$\begin{aligned} z = re^{i\varphi} \in D_{n,\varepsilon}^{(k)} \text{ и } \nu \neq n \pm 1, n \\ \cos p(\theta_\nu - \varphi) \leq \cos p(\theta_{n+1} - \varphi), \\ \cos p(\theta_\nu - \varphi) \leq \cos p(\theta_n - \varphi), \\ \cos p(\theta_\nu - \varphi) \leq \cos p(\theta_{n-1} - \varphi). \end{aligned} \quad (2.3)$$

* Мы вводим условие (2.2), а также выбираем $p = 2m + 1$ лишь для простоты дальнейших рассуждений.

Далее, при фиксированном n , $k = 0, \pm 1, \dots \pm \frac{p-1}{2}$ и $z = re^{i\varphi} \in D_{n,\varepsilon}^{(k)}$,

$$h_p(z) - a_n = \frac{\sum_{v \neq n} c_v a_v \exp z^p (e^{-i\theta_v p} - e^{-i\theta_n p})}{c_n + \sum_{v \neq n} c_v \exp z^p (e^{-i\theta_v p} - e^{-i\theta_n p})} = \frac{\alpha_n(z)}{c_n + \beta_n(z)}; \quad (2.4)$$

$$h'_p(z) = \frac{\alpha'_n(z) [c_n + \beta_n(z)] - \beta'_n(z) \cdot \alpha_n(z)}{[c_n + \beta_n(z)]^2}. \quad (2.5)$$

Из (2.3) следует

$$\begin{aligned} |\alpha_n(z)| &\leq \sum_{v \neq n} |c_v a_v| \exp \{r^p [\cos(\varphi - \theta_v) p - \cos(\varphi - \theta_n) p]\} = \\ &= \exp \left\{ -r^p 2 \cdot \sin \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{2} p \cdot \sin \left(\varphi - \frac{\theta_{n-1} + \theta_n}{2} \right) p \right\} \times \\ &\times \{ |c_{n-1} a_{n-1}| + \sum_{v \leq n-2} |c_v a_v| \exp \{r^p [\cos p(\varphi - \theta_v) - \cos p(\varphi - \theta_{n-1})]\} \} + \\ &+ \exp \left\{ -r^p \cdot 2 \sin \frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{2} p \cdot \sin \left(\frac{\theta_{n+1} + \theta_n}{2} - \varphi \right) p \right\} \times \\ &\times \{ |c_{n+1} a_{n+1}| + \sum_{v \geq n+2} |c_v a_v| \exp \{r^p [\cos p(\varphi - \theta_v) - \cos p(\varphi - \theta_{n+1})]\} \} \leq \\ &\leq S_1 \cdot \exp \{-\varepsilon \cdot r^p \cdot \gamma_n\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\gamma_n > 0$, аналогично

$$|\alpha'_n(z)| \leq p \cdot r^{p-1} \cdot S_1 \exp \{-\varepsilon \cdot \gamma_n \cdot r^p\}, \quad (2.7)$$

$$|\beta_n(z)| \leq S_2 \cdot \exp \{-\varepsilon \cdot \gamma_n \cdot r^p\}, \quad (2.8)$$

$$|\beta'_n(z)| \leq p \cdot r^{p-1} \cdot S_2 \exp \{-\varepsilon \cdot \gamma_n \cdot r^p\}. \quad (2.9)$$

Из соотношений (2.4), (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) и (2.9) находим при $r > r_0(\varepsilon, n)$ и $z \in D_{n,\varepsilon}^{(k)}$

$$|h_p(z) - a_n| \leq \frac{S_1 \exp \{-\varepsilon \cdot \gamma_n \cdot r^p\}}{|c_n| - S_2 \exp \{-\varepsilon \cdot \gamma_n \cdot r^p\}}, \quad (2.10)$$

$$|h'_p(z)| \leq \frac{p \cdot r^{p-1} \cdot S_1 \exp \{-\varepsilon \cdot \gamma_n \cdot r^p\} (|c_n| + 2)}{|c_n| - S_2 \exp \{-\varepsilon \cdot \gamma_n \cdot r^p\}}, \quad (2.11)$$

где $\gamma_n > 0$ и не зависит от ε и r .

Так как [2, стр. 152]

$$T(r, h_p) \leq 2 \cdot r^p,$$

то из (2.10) и (2.11) вытекает, что при $z \in D_{n,\varepsilon}^{(k)}$, $k = 0, \pm 1, \dots \pm \frac{p-1}{2}$ и $|z| = r > r_0(\varepsilon, n)$

$$\begin{aligned} \frac{\ln^+ \frac{1}{|h_p(z) - a_n|}}{T(r, h_p)} &\geq \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot \gamma_n + o(1), \\ \frac{\ln^+ \frac{1}{|zh'_p(z)|}}{T(r, h_p)} &\geq \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot \gamma_n + o(1). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Таким образом, для доказательства того, что функция $h_p(z) \in \Lambda$, нам достаточно показать, что для функции

$$g(z) = \frac{1}{z \cdot h'_p(z)}$$

выполняется условие (1.2) с

$$\theta_p = \theta_n^{(k)} = \varphi_n + 2k \cdot \frac{\pi}{p}, \quad \theta_p = \theta_n^{(k)} = \varphi_{n+1} + 2k \cdot \frac{\pi}{p} \\ (k = 0, \pm 1, \dots \pm \frac{p-1}{2}, n = 0, \pm 1, \dots).$$

Пусть, например, $\arg z = \varphi_n$, тогда из определения $h_p(z)$ находим

$$h_p(re^{i\varphi_n}) = \frac{c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} \exp 2 \cdot r^p i \sin \frac{p}{2} (\theta_n - \theta_{n-1}) + A_n(r)}{c_n + c_{n-1} \exp 2 \cdot r^p i \sin \frac{p}{2} (\theta_n - \theta_{n-1}) + B_n(r)},$$

где

$$A_n(r) = \sum_{v \neq n, n-1} c_v a_v \exp r^p [e^{ip(\varphi_n - \theta_v)} - e^{ip(\varphi_n - \theta_n)}], \\ B_n(r) = \sum_{v \neq n, n-1} c_v \exp r^p [e^{ip(\varphi_n - \theta_v)} - e^{ip(\varphi_n - \theta_n)}].$$

Положим далее

$$P_n(r) = c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} \exp 2r^p i \sin \frac{p}{2} (\theta_n - \theta_{n-1}) + A_n(r), \\ L_n(r) = c_n + c_{n-1} \exp 2r^p i \sin \frac{p}{2} (\theta_n - \theta_{n-1}) + B_n(r),$$

тогда

$$\frac{d}{dr} h_p(re^{i\varphi_n}) = L_n^{-2}(r) \cdot \left\{ 2p \cdot r^{p-1} i c_{n-1} \sin \frac{p}{2} (\theta_n - \theta_{n-1}) \times \right. \\ \left. \times \exp 2r^p i \sin \frac{p}{2} (\theta_n - \theta_{n-1}) [a_{n-1} \cdot L_n(r) - P_n(r)] + A_n'(r) \cdot L_n(r) - B_n'(r) \cdot P_n(r) \right\}$$

Так как

$$|A_n(r)| \leq \left\{ \exp \left[-2r^p \sin \frac{\theta_{n-1} - \theta_{n-2}}{2} p \cdot \sin p \cdot \frac{\theta_n - \theta_{n-2}}{2} \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[-2r^p \sin p \frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{2} \sin p \frac{\theta_{n+2} - \theta_n}{2} \right] \right\} \cdot S_1 \exp \{-r^p \gamma_n\}, \quad (\gamma_n > 0). \\ |A_n'(r)| \leq S_1 \cdot 2p \cdot r^{p-1} \exp \{-\gamma_n r^p\}; \\ |B_n(r)| \leq S_2 \exp \{-\gamma_n \cdot r^p\}; \\ |B_n'(r)| \leq S_2 \cdot 2p \cdot r^{p-1} \exp \{-\gamma_n r^p\}; \\ |L_n(r)| \leq |c_n| + |c_{n-1}| + S_2 \exp \{-\gamma_n r^p\}; \\ |P_n(r)| \leq |c_n a_n| + |c_{n-1} a_{n-1}| + S_1 \exp \{-\gamma_n r^p\},$$

то из соотношения (2.12) получаем оценки

$$|h_p'(re^{i\varphi_n})| = \left| \frac{d}{dr} h_p(re^{i\varphi_n}) \right| \geq \\ \geq \frac{2p \cdot r^{p-1} \sin \frac{p}{2} (\theta_n - \theta_{n-1}) \{ |c_{n-1}| \cdot |a_{n-1} L_n(r) - P_n(r)| - d_n \exp(-\gamma_n r^p) \}}{(|c_n| + |c_{n-1}| + S_2 \exp(-\gamma_n r^p))^2}, \quad (2.13)$$

где

$$d_n = \frac{(S_1 + S_2)^2}{\sin \frac{p}{2} (\theta_n - \theta_{n-1})}$$

и

$$|h_p'(re^{i\varphi_n})| \leq \frac{4p \cdot r^{p-1} |c_{n-1}| \{ |a_{n-1}| S_2 + S_1 \} + 8p r^{p-1} S_1 \cdot S_2}{(|c_n| - |c_{n-1}| - S_2 \exp(-\gamma_n r^p))^2}. \quad (2.14)$$

Замечая, что

$$|c_{n-1}| \cdot |a_{n-1} \cdot L_n(r) - P_n(r)| \geq |c_{n-1}c_n| \cdot |a_{n-1} - a_n| - A_n(r) - |a_{n-1}| \cdot B_n(r) \geq \\ \geq |c_{n-1} \cdot c_n (a_{n-1} - a_n)| - 2S_1 \exp(-\gamma_n r^\rho),$$

мы из оценок (2.13) и (2.14) заключаем, что при $r > r_0(n)$

$$p \cdot r^\rho \cdot \eta_n |c_{n-1}c_n (a_{n-1} - a_n)| \leq r \cdot |h'_p(re^{i\varphi_n})| \leq 32 \cdot p \cdot r^\rho \frac{S_1 \cdot S_2}{||c_n| - |c_{n-1}||}.$$

Так как

$$r |h'_p(re^{i(\varphi_n + 2k \frac{\pi}{p})})| = r |h'_p(re^{i\varphi_n})|$$

и n любое, то мы полностью доказали, что мероморфная функция $g(z) = \frac{1}{zh'_p(z)}$ имеет угловой рост и, следовательно, мероморфная функция $h_p(z) \in \Lambda$.

Проводя аналогичные рассуждения как и в [2, стр. 153], получаем такую оценку для величин дефектов мероморфной функции $h_p(z)$:

$$\delta(a_n, h_p) \geq K_6 \cdot p^3 \cdot \eta_n^3 \quad (n = 0, \pm 1, \dots, \eta_{-n} = \eta_n). \quad (2.15)$$

В качестве η_n можно выбрать

$$\eta_n = \frac{\sigma_p \cdot \varepsilon}{n^{1+\varepsilon}} \left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2}, n = 1, 2, \dots \right), \quad (2.16)$$

где

$$\sigma_p = \frac{1}{p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{n^{1+\varepsilon}}} \\ \left(\frac{1}{p+\varepsilon} < \sigma_p < \frac{1}{p} \right),$$

тогда при $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}(1 - \varepsilon)$ из (2.15) и (2.16) легко находим, что

$$S(\alpha, h_p) = \infty.$$

Тем самым оценка (1.5) доказана.

§ 2. Вспомогательные соотношения

Рассмотрим асимптотические свойства мероморфных функций, имеющих угловой рост. Пусть

$$D_p = \{z : \arg z \in I_p = (\theta_p, \bar{\theta}_p)\}$$

— углы роста мероморфной функции $g(z)$, занумерованы в порядке убывания $|\theta_p| = \theta_p - \bar{\theta}_p$.

$$N_p(r, g) = \int_1^r \frac{n_p(t, g)}{t} dt,$$

где $n_p(t, g)$ — число полюсов мероморфной функции $g(z)$, лежащих в секторе

$$D_{p,i} = D_p \cap (|z| \leq t).$$

Для простоты дальнейших рассуждений мы будем проводить все доказательства в предположении, что мероморфная функция $g(z)$ конечного порядка ρ . Путем некоторых усложнений в рассуждениях можно получить соответствующие утверждения и без этих ограничений на мероморфную функцию $g(z)$ (см., например, [3], [7], [4]).

Лемма 3.1. Пусть $g(z)$ — мероморфная функция порядка ρ и имеющая угловой рост с углами роста

$$D_\rho = \{z : \arg z \in I_\rho = [\theta_\rho, \bar{\theta}_\rho]\},$$

тогда для любого I_ρ такого, что $|I_\rho| \leq \frac{\pi}{2(\rho+1)}$, и любого $\varepsilon > 0$ существует $r_0 = r_0(\varepsilon, \rho)$ такое, что *

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{0,5R} \frac{1}{|I_\rho|^2} \int_{\theta_\rho}^{\bar{\theta}_\rho} \ln^+ |g(re^{i\varphi})| d\varphi \\ \frac{dr}{r^{\rho+1}} \leq 2\rho^2 \int_{r_0}^{0,5R} \frac{N_\rho(r, g)}{r^{\rho+1}} dr + K_7 \cdot \varepsilon \times \\ \times \int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, g)}{r^{\rho+1}} dr + C_1 \cdot \frac{N_\rho(2R, g)}{R^\rho} + C_2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Доказательство. Мы будем исходить из следующего представления мероморфной функции $g(z)$ в угле D_ρ ([7]):

$$\begin{aligned} \ln |g(re^{i\varphi}e^{i\nu\rho})| &= \frac{1}{2\alpha_\rho} \int_0^R \ln |g(te^{i(\nu\rho+\alpha_\rho)})| \cdot t^{x_\rho-1} \cdot P_\rho^+(t, r, \varphi, R) dt + \\ &+ \frac{1}{2\alpha_\rho} \int_0^R \ln |g(te^{i(\nu\rho-\alpha_\rho)})| \cdot t^{x_\rho-1} \cdot P_\rho^-(t, r, \varphi, R) dt + \\ &+ \frac{1}{4\alpha_\rho} \int_{-\alpha_\rho}^{\alpha_\rho} \ln |g(Re^{i(\nu\rho+\theta)})| \operatorname{Re} \left\{ \frac{(Re^{i\theta})^{x_\rho} + z^{x_\rho}}{(Re^{i\theta})^{x_\rho} - z^{x_\rho}} - \frac{R^{2x_\rho} - z^{x_\rho}(Re^{i\theta})^{x_\rho}}{R^{2x_\rho} + z^{x_\rho}(Re^{i\theta})^{x_\rho}} \right\} d\theta + \\ &+ \sum_{c_k \in D_{\rho, R}} \Delta_k \ln \left| \frac{z^{x_\rho} + \bar{c}_k^{x_\rho}}{z^{x_\rho} - c_k^{x_\rho}} \right| + \sum_{c_k \in D_{\rho, R}} \Delta_k \ln \left| \frac{R^{2x_\rho} - z^{x_\rho} \bar{c}_k^{x_\rho}}{R^{2x_\rho} + z^{x_\rho} c_k^{x_\rho}} \right|, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $z = re^{i\varphi}$,

$$\begin{aligned} P_\rho^\pm(t, r, \varphi, R) &= \frac{(R^{2x_\rho} - t^{2x_\rho})(R^{2x_\rho} - r^{2x_\rho}) \cdot r^{x_\rho} \cos x_\rho \varphi}{(r^{2x_\rho} \mp 2t^{x_\rho} \cdot r^{x_\rho} \sin x_\rho \varphi + t^{2x_\rho})(r^{2x_\rho} \mp 2R^{2x_\rho} t^{x_\rho} r^{x_\rho} \sin x_\rho \varphi + R^{4x_\rho})}; \\ \nu_\rho &= \frac{\bar{\theta}_\rho + \theta_\rho}{2}, \quad \alpha_\rho = \frac{|I_\rho|}{2}, \quad x_\rho = \frac{\pi}{2\alpha_\rho}, \\ D_{\rho, R} &= D_\rho \cap \{|z| < R\}, \end{aligned}$$

$\Delta_k = +1$, если c_k — полюс и $\Delta_k = -1$, если c_k — нуль мероморфной функции $g(ze^{i\nu\rho})$.

* Величина $m_{\theta_\rho \bar{\theta}_\rho}(r, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_\rho}^{\bar{\theta}_\rho} \ln^+ |g(re^{i\theta})| d\theta$ изучалась раньше в общем случае

И. В. Островским [10], однако оценка [3.1] не следует из соответствующих оценок для величины $m_{\theta_\rho \bar{\theta}_\rho}(r, g)$.

Отметим далее следующие оценки. При $0 < r < 0,5R$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\alpha_p} \int_{-\alpha_p}^{\alpha_p} \ln |g(Re^{i(\nu_p + \theta)})| Re \left\{ \frac{(Re^{i\theta})^{x_p} + z^{x_p}}{(Re^{i\theta})^{x_p} - z^{x_p}} - \frac{R^{2x_p} - z^{x_p}(Re^{i\theta})^{x_p}}{R^{2x_p} + z^{x_p}(Re^{i\theta})^{x_p}} \right\} d\theta \leq \\ \leq \frac{r^{x_p}}{\alpha_p \cdot R^{x_p}} \int_{-\alpha_p}^{\alpha_p} \ln |g(Re^{i(\nu_p + \theta)})| d\theta. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Далее, при $0 < t \leq R$

$$\begin{aligned} t^{x_p-1} \int_{r_0}^{0,5R} r^{\rho-1} P_p^{\pm}(t, r, \varphi, R) dr \leq t^{x_p-1} \cos x_p \varphi \int_{r_0}^{0,5R} \frac{r^{x_p-\rho-1} dr}{r^{2x_p} \mp 2t^{x_p} r^{x_p} \sin x_p \varphi + t^{2x_p}} + \\ + \frac{t^{x_p-1} \cos x_p \varphi}{\left(1 - \frac{1}{2^{x_p-1}}\right)} \int_{r_0}^{0,5R} \frac{r^{x_p-\rho-1}}{R^{2x_p}} dr \leq \frac{\pi}{t^{\rho+1} x_p} \cdot \frac{\sin \rho(\alpha_p \pm \varphi)}{\sin 2\rho\alpha_p} + \\ + \frac{\cos x_p \varphi \cdot 2^\rho}{(x_p - \rho) \cdot 2^{x_p} \left(1 - \frac{1}{2^{x_p-1}}\right) R^{\rho+1}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Так как по условию

$$\alpha_p = \frac{|I_p|}{2} < \frac{\pi}{4(\rho+1)},$$

то

$$x_p = \frac{\pi}{2\alpha_p} > 2(\rho+1)$$

и, значит,

$$1 - \frac{1}{2^{x_p-1}} \geq \frac{1}{2}. \quad (3.5)$$

Кроме того,

$$2^{x_p} \geq 2^{\frac{x_p}{2}} \frac{x_p^2}{4} \frac{\ln^2 2}{2!} \geq 2^{\rho+1} \frac{x_p^2 \ln^2 2}{8}. \quad (3.6)$$

Из (3.4), (3.5) и (3.6) имеем

$$\begin{aligned} t^{x_p-1} \int_{r_0}^{0,5R} r^{\rho-1} P_p^{\pm}(t, r, \varphi, R) dr \leq \frac{\pi}{t^{\rho+1} x_p} \cdot \frac{\sin \rho(\alpha_p \pm \varphi)}{\sin 2\rho\alpha_p} + \\ + \frac{4}{\ln^2 2} \cdot \frac{1}{x_p^2} \cdot \frac{1}{R^{\rho+1}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Далее

$$\int_{r_0}^{0,5R} r^{\rho-1} \ln \left| \frac{r^{x_p} + |b_k|^{x_p}}{r^{x_p} - |b_k|^{x_p}} \right| dr \leq \frac{1}{|b_k|^\rho} \int_0^\infty s^{\rho-1} \ln \left| \frac{s^{x_p} + 1}{s^{x_p} - 1} \right| ds = \frac{\pi}{|b_k|^\rho} \cdot \frac{tg \alpha_p \rho}{\rho},$$

где b_k — полюсы мероморфной функции $g(z)$.

При $|b_k| \leq \frac{1}{2} r_0$ мы имеем такую оценку:

$$\begin{aligned} \sum_{b_k \in D_p, \frac{1}{2} r_0}^{0,5R} \int_{r_0}^{0,5R} r^{\rho-1} \ln \left| \frac{r^{x_p} + |b_k|^{x_p}}{r^{x_p} - |b_k|^{x_p}} \right| dr < \\ < \frac{1}{\rho \cdot r_0^\rho} \ln(1 + 2^{2-x_p}) \cdot n_p(r_0, g) \leq \frac{C_1}{x_p} \cdot n_p(r_0, g). \end{aligned} \quad (3.9)$$

При $0 \leq t \leq \frac{1}{2} r_0$, $r > r_0$

$$P_p^\pm(t, r, \varphi, R) \leq \frac{1}{(1 - 2^{-x_p+1})^2} \frac{1}{r^{x_p}} \leq K_9 \cdot \frac{1}{r^{x_p}},$$

поэтому

$$\begin{aligned} t^{x_p-1} \cdot \int_{r_0}^{0,5R} r^{-\varphi-1} P_p^\pm(t, r, \varphi_1, R) dr &\leq K_9 \cdot \frac{t^{x_p-1}}{(x_p - \varphi) \cdot r_0^{\varphi+x_p}} \leq \\ &\leq K_{10} \cdot \frac{1}{x_p^2 \cdot r_0^{\varphi+1}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Наконец, при $0 < r < 0,5R$

$$\begin{aligned} \sum_{b_k \in D_{p_1 R}} \int_{r_0}^{0,5R} r^{-\varphi-1} \ln \left| \frac{R^{2x_p} - z^{x_p} \bar{b}_k^{x_p}}{R^{2x_p} + z^{x_p} \bar{b}_k^{x_p}} \right| &\leq \\ \leq \frac{3 \cdot 2^\varphi}{(x_p - \varphi) \cdot 2^{x_p}} \cdot \frac{n_p(R, g)}{R^\varphi} &\leq \frac{K_{11}}{x_p^2} \cdot \frac{n_p(R, g)}{R^\varphi}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Используя оценки (3.3), (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) и (3.11), мы из соотношения (3.2) получаем

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{0,5R} \frac{\ln^+ |g(re^{i\varphi} e^{i\gamma_p})|}{r^{\varphi+1}} dr &\leq \frac{K_{10}}{x_p \cdot r_0^{\varphi+1}} \int_0^{\frac{1}{2} r_0} \ln^+ M(t, g) dt + \\ + \frac{\sin \varphi (\alpha_p + \varphi)}{\sin 2\varphi \alpha_p} \int_{\frac{1}{2} r_0}^R \frac{\ln^+ |g(tl^{(\gamma_p + \alpha_p)})|}{t^{\varphi+1}} dt &+ \frac{\sin \varphi (\alpha_p - \varphi)}{\sin 2\varphi \alpha_p} \int_{\frac{1}{2} r_0}^R \frac{\ln^+ |g(te^{i(\gamma_p - \alpha_p)})|}{t^{\varphi+1}} dt + \\ + K_{12} \cdot \alpha_p \cdot \frac{1}{R^{\varphi+1}} \int_{\frac{1}{2} r_0}^R \{ \ln^+ |g(te^{i(\gamma_p + \alpha_p)})| &+ \ln^+ |g(te^{i(\gamma_p - \alpha_p)})| \} dt + \\ + K_{13} \cdot \alpha_p \cdot \frac{1}{R^\varphi} \int_{-\alpha_p}^{\alpha_p} \ln^+ |g(Re^{i(\theta + \gamma_p)})| d\theta &+ \frac{\pi}{\varphi} \operatorname{tg} \alpha_p \int_{\frac{1}{2} r_0}^R \frac{dn_p(t, g)}{t^\varphi} + \\ + \frac{K_{11}}{x_p^2} \cdot \frac{n_p(R, g)}{R^\varphi} + \frac{C_1}{x_p} \cdot n_p(r_0, g). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Принтегрируем теперь соотношение (3.12) по φ от $-\alpha_p$ до α_p , тогда из того, что

$$\frac{1}{\sin 2\alpha_p \varphi} \int_{-\alpha_p}^{\alpha_p} \sin \varphi (\alpha_p \pm \varphi) d\varphi = \frac{1 - \cos 2\alpha_p \varphi}{\varphi \sin 2\varphi \alpha_p} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_p \varphi}{\varphi} \leq \frac{4}{\pi} \alpha_p,$$

имеем

$$\begin{aligned} & \int_{r_0}^{0,5R} \frac{1}{|I_p|^2} \int_{-a_p}^{a_p} \ln^+ |g(re^{i\varphi} e^{i\nu p})| d\varphi \\ & \quad \frac{1}{r^{\rho+1}} dr \leq 2\rho^2 \int_{r_0}^{0,5R} \frac{N_p(r, g)}{r^{\rho+1}} dr + \\ & \quad + \frac{K_{14}}{|I_p|} \cdot \int_{\frac{1}{2}r_0}^R \frac{\ln^+ |g(re^{i(\nu p + a_p)})| + \ln^+ |g(re^{i(\nu p - a_p)})|}{r^{\rho+1}} dr + \\ & \quad + K_{13} \cdot \frac{1}{R^\rho} \int_{-a_p}^{a_p} \ln^+ |g(Re^{i(\theta + \nu p)})| d\theta + C_2 \cdot \frac{N_p(2R, g)}{R^\rho} + C_3. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Так как мероморфная функция $g(z)$ имеет угловой рост, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $r_0(\varepsilon, p)$, что при любом $p = 1, 2 \dots$

$$\frac{K_{14}}{|I_p|} \{ \ln^+ |g(re^{i(\nu p + a_p)})| + \ln^+ |g(re^{i(\nu p - a_p)})| \} \leq \varepsilon |I_p| \cdot T(r, g). \quad (3.14)$$

Лемма 3.1 следует из (3.13) и (3.14).

Лемма 3.2. Для произвольной мероморфной функции $g(z)$ конечного порядка ρ и для любой конечной или бесконечной системы промежутков $I_p = (\underline{\theta}_p, \bar{\theta}_p)$ ($-\pi < \underline{\theta}_p < \bar{\theta}_p \leq \pi$), такой, что

$$\sum_p |I_p| \leq \varepsilon \quad \left(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2(\rho + 1)} \right), \quad (3.15)$$

справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_{r_0}^{0,5R} \sum_p \int_{I_p} \frac{\ln^+ |g(re^{i\theta})| d\theta}{r^{\rho+1}} dr \leq K_{15} \cdot \varepsilon \cdot \rho \int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, g)}{r^{\rho+1}} dr + \\ & \quad + \varepsilon \cdot C_4 \cdot \frac{T(2R, g)}{R^\rho} + \varepsilon \cdot C_5. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Доказательство. Используем следующую оценку роста мероморфной функции по лучу, которая установлена в работе [6]:

$$\int_{\frac{1}{2}r_0}^R \frac{\ln^+ |g(re^{i\varphi_0})|}{r^{\rho+1}} dr \leq \pi\rho \cdot \int_{\frac{1}{2}r_0}^R \frac{T(r, g)}{r^{\rho+1}} dr + C_6 \cdot \frac{T(4R, g)}{R^\rho} + C_7.$$

Тогда соотношение (3.13) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_{r_0}^{0,5R} \sum_p \int_{I_p} \frac{\ln^+ |g(re^{i\varphi})| d\varphi}{r^{\rho+1}} dr \leq 2\rho^2 \int_{r_0}^{0,5R} \frac{N(r, g)}{r^{\rho+1}} dr \left\{ \sum_p |I_p|^2 \right\} + \\ & \quad + \pi\rho \int_{\frac{1}{2}r_0}^R \frac{T(r, g)}{r^{\rho+1}} dr \left\{ \sum_p |I_p| \right\} + \left\{ C_8 \cdot \frac{T(4R, g)}{R^\rho} + C_9 \right\} \sum_p |I_p|. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Оценка (3.16) следует из (3.17) и (3.15).

Пусть, по-прежнему, $D_p = \{z : \arg z \in I_p\}$ — углы роста мероморфной функции $g(z)$ занумерованы в порядке убывания $|I_p|$. По данному $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2(\rho+1)}$ определим N_ε такое, что

$$\sum_{p > N_\varepsilon} |I_p| \leq \varepsilon.$$

Пусть

$$B_\varepsilon = \bigcup_{p > N_\varepsilon} I_p. \quad (3.18)$$

Положим далее

$$\eta_\varepsilon = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{N_\varepsilon + 1}, \frac{|I_{N_\varepsilon}|}{3} \right\}$$

и рассмотрим для каждого угла D_p ($1 \leq p \leq N_\varepsilon$) новые углы

$$D_p^{(\varepsilon)} = \{z : \vartheta_p - \eta_\varepsilon < \arg z < \vartheta_p + \eta_\varepsilon\} \cup \{z : \bar{\vartheta}_p - \eta_\varepsilon < \arg z < \bar{\vartheta}_p + \eta_\varepsilon\}.$$

Пусть

$$D_\varepsilon = \bigcup_{1 \leq p \leq N_\varepsilon} \{(\vartheta_p - \eta_\varepsilon, \vartheta_p + \eta_\varepsilon) \cup (\bar{\vartheta}_p - \eta_\varepsilon, \bar{\vartheta}_p + \eta_\varepsilon)\}, \quad (3.19)$$

$$(|D_\varepsilon| \leq 4\varepsilon),$$

$$M_p^*(r, g) = \max_{\substack{z \in D_p^{(\varepsilon)} \\ |z|=r}} |g(z)|.$$

Лемма 3.3. Пусть $g(z)$ — мероморфная функция порядка ρ и имеет угловой рост, тогда для любого $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2(\rho+1)}$ существует $r_0(\varepsilon) > 0$, что

$$\int_{r_0}^{0,5R} \frac{\sum_{p=1}^{N_\varepsilon} \ln M_p^*(r, g)}{r^{\rho+1}} dr \leq K_{16} \cdot \rho \cdot \int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, g)}{r^{\rho+1}} dr + C_{19} \cdot \frac{T(2R, g)}{R^\rho} + C_{11}. \quad (3.20)$$

Доказательство. Пусть

$$\ln M_p^*(r, g) = \ln |g(re^{i\vartheta_p^*})|,$$

где

$$\vartheta_p - \eta_\varepsilon \leq \vartheta_p^* \leq \vartheta_p + \eta_\varepsilon$$

или

$$\bar{\vartheta}_p - \eta_\varepsilon \leq \vartheta_p^* \leq \bar{\vartheta}_p + \eta_\varepsilon.$$

Из определения мероморфной функции, имеющей угловой рост, следует, что существует такое $r_0(\varepsilon)$, что при

$$|z| = r > r_0(\varepsilon)$$

и всех

$$1 \leq p \leq N_\varepsilon$$

$$\ln |g(re^{i\vartheta_p})| = o(T(r, g)) \text{ и } \ln |g(re^{i\bar{\vartheta}_p})| = o(T(r, g)).$$

Поэтому

$$\int_{\vartheta_p}^{\vartheta_p^*} r \left| \frac{g'(re^{i\varphi})}{g(re^{i\varphi})} \right| d\varphi \geq \left| \int_{\vartheta_p}^{\vartheta_p^*} \frac{\partial \ln |g(re^{i\varphi})|}{\partial \varphi} d\varphi \right| \geq \ln M_p^*(r, g) - \ln |g(re^{i\vartheta_p})|,$$

значит,

$$\ln^+ M_p^*(r, g) \leq \ln^+ |g(re^{i\theta_p})| + \int_{\theta_p - \eta_\varepsilon}^{\theta_p + \eta_\varepsilon} r \left| \frac{g'(re^{i\varphi})}{g(re^{i\varphi})} \right| d\varphi + \int_{\theta_p - \eta_\varepsilon}^{\theta_p + \eta_\varepsilon} r \left| \frac{g'(re^{i\varphi})}{g(re^{i\varphi})} \right| d\varphi$$

и

$$\sum_{p=1}^{N_\varepsilon} \ln^+ M_p^*(r, g) \leq 2r \cdot \int_0^{2\pi} \left| \frac{g'(re^{i\varphi})}{g(re^{i\varphi})} \right| d\varphi + N_\varepsilon \cdot o(T(r, g)). \quad (3.21)$$

Оценка (3.20) вытекает из оценки (3.21) и из следующего соотношения ([8]):

$$\int_{r_0}^{0.5R} \frac{r \cdot \int_0^{2\pi} \left| \frac{g'(re^{i\varphi})}{g(re^{i\varphi})} \right| d\varphi}{r^{\rho+1}} dr \leq K_{17} \cdot \int_{r_0}^{0.5R} \frac{T(r, g)}{r^{\rho+1}} dr + C_{12} \cdot \frac{T(2R, g)}{R^\rho} + C_{13}$$

Лемма 3.3. доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Пусть мероморфная функция $f(z)$ — конечного порядка ρ и принадлежит классу Λ .

Выберем произвольное конечное множество различных дефектных значений $\{a_m\}_{m=1}^q$ мероморфной функции $f(z)$. Для каждого дефектного значения a_m существуют углы

$D_m^{(k)} = \{z : \arg z \in I_m^{(k)}\}$, $k = 1, 2, \dots, \omega_m$ такие, что при $|z| = r \rightarrow \infty$ $f(z) \rightarrow a_m$ равномерно относительно $\arg z$, если z принадлежит углу, лежащему внутри любого из углов системы $\{D_m^{(k)}\}_{m=1}^{\omega_m}$. Эти углы $D_m^{(k)}$ являются углами роста для мероморфной функции $g(z) = \frac{1}{z^{f'(z)}}$. Будем далее считать, что выбранное конечное множество дефектных значений $\{a_m\}_{m=1}^q$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\omega_m} |D_m^{(k)}| = \sum_{k=1}^{\omega_m} |I_m^{(k)}| \leq \frac{\pi}{2(\rho+1)}. \quad (4.1)$$

Положим

$$A_m = \bigcup_{k=1}^{\omega_m} I_m^{(k)}, \quad A_m^{(1)} = A_m \cap B_\varepsilon,$$

$$A_m^{(2)} = A_m \cap D_\varepsilon, \quad A_m^{(3)} = A_m \setminus (A_m^{(1)} \cup A_m^{(2)}),$$

где при $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2(\rho+1)}$ B_ε и D_ε определяются соотношениями (3.18) и (3.19). Отметим, что множества $A_m^{(2)}$ и $A_m^{(3)}$ состоят из конечного числа ($\leq N_\varepsilon$) интервалов. Кроме того, множество $\arg z \in A_m^{(3)}$, $0 < |z| < \infty$ состоит из углов, лежащих внутри системы углов $\{D_m^{(k)}\}_{k=1}^{\omega_m}$, поэтому существует $r_1(\varepsilon, m)$, что при $|z| = r > r_1$ и $\arg z \in A_m^{(3)}$

$$|f(z) - a_m| < 1.$$

Далее, так как $C(D_\varepsilon \cup A_m^{(3)} \cup B_\varepsilon)$ состоит из конечного числа ($\leq N_\varepsilon$) углов, полностью лежащих внутри системы углов $\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{w_m} D_m^{(k)}$, то существует конечное число дефектных значений мероморфной функции $f(z) \{a_l\}$ ($1 \leq l \leq N_\varepsilon, l \neq m$), что $f(z) \rightarrow a_l^*$, если $\arg z$ принадлежит одному из этих углов. Пусть

$$d_\varepsilon = \min_{\substack{1 \leq l, k \leq N_\varepsilon \\ l \neq k}} |a_l - a_k|,$$

тогда существует $r_2(\varepsilon, m)$, такое, что при $r = |z| > r_2(\varepsilon, m)$ и $\arg z \in C(D_\varepsilon \cup B_\varepsilon \cup A_m^{(3)})$

$$|f(z) - a_m| \geq |a_l - a_m| - |f(z) - a_l| \geq d_\varepsilon - \frac{d_\varepsilon}{2} = \frac{d_\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, при $z \rightarrow \infty$ $f(z)$ может быть близка к a_m только при $\arg z \in A_m^{(3)} \cup D_\varepsilon \cup B_\varepsilon$. Выберем теперь $r_0 = r_0(\varepsilon, m) = \max \{r_1(\varepsilon, m), r_2(\varepsilon, m)\}$, тогда при $r > r_0$

$$\begin{aligned} m(r, a_m, f) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{B_\varepsilon}^+ \ln |g(re^{i\varphi})| d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_{D_\varepsilon}^+ \ln |g(re^{i\varphi})| d\varphi + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{A_m^{(3)}}^+ \ln |g(re^{i\varphi})| d\varphi + m\left(r, \frac{r'}{f - a_m}\right) + \ln^+ r + \ln^+ \frac{2}{d_\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из (3.1), (3.15), (3.20), (4.1) и (4.2) находим

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{0,5R} \frac{m(r, a_m, f)}{\left(\sum_{k=1}^{w_m} |D_m^{(k)}|\right)^2 \cdot r^{\rho+1}} dr &\leq K_{18} \cdot \varepsilon \cdot \rho \cdot \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{w_m} |D_m^{(k)}|\right)^2} \int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, g)}{r^{\rho+1}} dr + \\ &+ \frac{1}{2\pi \left(\sum_{k=1}^{w_m} |D_m^{(k)}|\right)^2} \sum_{l_m^{(k)} \in A_m^{(3)}} \int_{r_0}^{0,5R} \frac{\int_{l_m^{(k)}}^+ \ln |g(re^{i\varphi})| d\varphi}{r^{\rho+1}} + dr + C_{14} \times \\ &\times \frac{T(2R, g)}{\left(\sum_{k=1}^{w_m} |D_m^{(k)}|\right)^2 R^\rho} + \frac{C_{15}}{\left(\sum_{k=1}^{w_m} |D_m^{(k)}|\right)^2} \leq \frac{\rho^2}{\pi} \sum_{l_m^{(k)} \in A_m^{(3)}} \int_{r_0}^{0,5R} \frac{N_m^{(k)}(r, g)}{r^{\rho+1}} dr + \\ &+ K_{18} \cdot \varepsilon \cdot \rho \int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, g)}{r^{\rho+1}} dr + C_{16} \cdot \frac{T(2R, g)}{R^\rho} + C_{17}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$N_m^{(k)}(r, g) = \int_1^r \frac{n_m^{(k)}(t, g)}{t} dt,$$

$n_m^{(k)}(t, g)$ — число полюсов мероморфной функции $g(z)$, лежащих в секторе

$$\arg z \in I_m^{(k)}, \quad |z| \leq t.$$

Просуммируем оценку (4.3) по m от 1 до q , тогда [9, стр. 52]

$$\sum_{m=1}^q \int_{r_0}^{0,5R} \frac{m(r, a_m, f)}{\left(\sum_{k=1}^{\omega_m} |D_m^{(k)}|\right)^2 \cdot r^{\rho+1}} dr \leq \frac{\rho^2}{\pi} \int_{r_0}^{0,5R} \frac{N(r, g)}{r^{\rho+1}} dr + \\ + K_{19} q \varepsilon \rho \int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, f)}{r^{\rho+1}} dr + C_{16} \cdot q \cdot \frac{T(4R, f)}{R^{\rho}} + C_{17} q.$$

Замечая, что $N(r, g) \leq 2N(r, f)$, мы из последнего неравенства с помощью рассуждений, аналогичных как и в [3], [4], [8], получаем в силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$\sum_{m=1}^q \frac{\delta(a_m, f)}{\left(\sum_{k=1}^{\omega_m} |D_m^{(k)}|\right)^2} \leq \frac{2}{\pi} \rho^2. \quad (4.4)$$

Если дефектные значения a_e не удовлетворяют условию (4.1), т. е.

$$\sum_{k=1}^{\omega_e} |D_e^{(k)}| > \frac{\pi}{2(\rho+1)},$$

тогда

$$\sum_{(e)} \frac{\delta(a_e, f)}{\left(\sum_{k=1}^{\omega_e} |D_e^{(k)}|\right)^2} \leq \frac{4}{\pi^2} (\rho+1)^2 \sum_{(e)} \delta(a_e, f) \leq \frac{8}{\pi^2} (\rho+1)^2. \quad (4.5)$$

Из оценок (4.4) и (4.5) получаем, что величины дефектов мероморфной функции $f(z)$ конечного порядка ρ и принадлежащей классу Λ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{(a_m)} \frac{\delta(a_m, f)}{\left(\sum_{k=1}^{\omega_m} |D_m^{(k)}|\right)^2} \leq \frac{8}{\pi^2} (\rho+1)^2, \quad (4.6)$$

где

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\omega_m} |D_m^{(k)}| \leq 2\pi.$$

Оценка (1.3) легко следует из неравенства (4.6) с помощью неравенства Гельдера, действительно,

$$\left(\sum_{(a_m)} \delta^{\frac{1}{3}}(a_m, f) \right)^3 = \left\{ \sum_{(a_m)} \frac{\delta^{\frac{1}{3}}(a_m, f)}{\left(\sum_{k=1}^{\omega_m} |D_m^{(k)}|\right)^{2/3}} \sum_{k=1}^{\omega_m} |D_m^{(k)}| \right\}^3 \leq \\ \leq \sum_{(a_m)} \frac{\delta(a_m, f)}{\left(\sum_{k=1}^{\omega_m} |D_m^{(k)}|\right)^2} \left(\sum_{k=1}^{\omega_m} |D_m^{(k)}| \right)^2 \leq (2\pi)^2 \cdot \frac{8}{\pi^2} (\rho+1)^2.$$

Теорема 1 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Теорема 2 вытекает из оценок (3.1), (3.16) и (3.20). Действительно, занумеруем по-прежнему все углы роста мероморфной функции $g(z)$ в порядке убывания $|I_p|$. Пусть $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2(p+1)}$

$$A = \bigcup_{p=1}^{\infty} I_p, \quad A_1 = A \cap D_\varepsilon, \\ A_2 = A \setminus (A_1 \cup B_\varepsilon),$$

где B_ε и D_ε определены соотношениями (3.18) и (3.19). Множество A_2 состоит из конечного числа интервалов, лежащих полностью внутри интервалов $\{I_p\}$. Поэтому существует $r_0(\varepsilon)$ такое, что при $r = |z| > r_0$ и $\arg z \in A_2$

$$|g(z)| > 1 \quad \text{либо} \quad |g(z)| < 1,$$

в зависимости от того, какому составляющему интервалу из A_2 принадлежит $\arg z$. Таким образом, при $|z| = r > r_0(\varepsilon)$

$$m(r, \infty, g) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{B_\varepsilon}^+ \ln |g(re^{i\varphi})| d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_{D_\varepsilon}^+ \ln |g(re^{i\varphi})| d\varphi + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{A_2}^+ \ln |g(re^{i\varphi})| d\varphi$$

и, используя оценки (3.1), (3.16) и (3.20), имеем

$$\int_{r_0}^{0,5R} \frac{m(r, \infty, g)}{v^2(g) r^{\rho+1}} dr \leq \frac{\rho^2}{\pi} \int_{r_0}^{0,5R} \frac{N(r, g)}{r^{\rho+1}} dr + K_{20} \cdot \rho \cdot \frac{\varepsilon}{v^2(g)} \int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, g)}{r^{\rho+1}} dr + \\ + C_{18} \cdot \frac{T(2R, g)}{R^\rho} + C_{19}.$$

Откуда, учитывая, что $\varepsilon > 0$ любое, находим

$$\frac{\delta(\infty, g)}{v^2(g)} \leq \frac{\rho^2}{\pi},$$

т. е.

$$v(g) \geq \frac{\sqrt{\pi}}{\rho} \delta^{\frac{1}{2}}(\infty, g).$$

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции. Гостехиздат. М.—Л., 1941.
2. У. К. Хейман. Мероморфные функции, М., 1966.
3. В. П. Петренко. Некоторые оценки для величин дефектов мероморфной функции. — «Сиб. матем. ж.», 7, № 6 (1966), 1319—1336.
4. В. П. Петренко. О росте мероморфных функций и величинах их дефектов. — «Сиб. матем. ж.», 7, № 6 (1966).
5. А. А. Гольдберг. О множестве дефектных значений мероморфных функций конечного порядка. — «Укр. матем. ж.», 11, № 4 (1959), 438—443.
7. В. П. Петренко. Рост мероморфной функции по лучу, Докл. АН СССР, 155, № 2 (1964), 281—284.

7. В. П. Петренко. О величинах дефектов мероморфных функций. Докл. АН СССР, 158, № 5 (1964), 1030—1033.
 8. Г. Виттих. Новейшие исследования по одностепенным аналитическим функциям. Физматгиз, М., 1960.
 9. K. Arima. On maximum modulus of integral functions Journal of the mathematical Society of Japan, 4, № 1 (1952), 62—66.
 10. И. В. Островский. Связь роста мероморфной функции с распределением ее значений по аргументам. Изв. АН СССР, серия матем. 25, № 2 (1961), 277—328.
-

РАВНОВЕСИЕ БАЛКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ НА УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

М. Д. Дольберг, Н. Н. Ясницкая

Предметом наших исследований является задача о равновесии балки конечной длины, нагруженной произвольной нагрузкой и лежащей на упругой полуплоскости. Пусть балка расположена на интервале $0 \leq x \leq l$, а полуплоскость определена неравенством $y \geq 0$.

Подчиним перемещения точек полуплоскости вдоль осей Ox и OY — $u(x, y)$ и $v(x, y)$ условиям $u(x, y) = \text{const} + O\left(\frac{1}{R}\right)$, $v(x, y) = \text{const} + O\left(\frac{1}{R}\right)$, где R — расстояние точки до начала координат. При сделанном предположении потенциальная энергия деформации полуплоскости I_2 , если отсутствует трение между полуплоскостью и балкой, будет равна (как следует из формулы Грина)

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^l \sigma_y(x) v(x) dx. \quad (1)$$

Кроме того, непосредственно видно, что

$$\int_0^l \sigma_y(x) dx = 0. \quad (2)$$

Нетрудно проверить, что перемещение $v(x)$ от нормальной нагрузки $\sigma_y(x)$, приложенной на интервале $(0, l)$, удовлетворяющее условию (2) и указанному условию на бесконечности, представимо в виде

$$v(x, y) = \int_0^l P(x, y, s, 0) \sigma_y(s) ds, \quad (3)$$

где P является перемещением вдоль оси OY от единичной силы, приложенной в точке с координатами $(s, 0)$ в задаче Фламена — Буссинеска [1]:

$$P = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E^*} \ln |R-s| - \frac{1+\nu}{\pi E^*} \left(\frac{y}{R}\right)^2$$

(здесь E^* — модуль Юнга полуплоскости, а ν — ее коэффициент Пуассона). Как известно [2], интегральное соотношение (3) допускает обращение

$$L(v) = \sigma_y(x) = -\frac{E^*}{2(1-\nu^2)} \frac{1}{\sqrt{x(l-x)}} \int_0^l v'(s, 0) \sqrt{s(l-s)} \frac{ds}{s-x}. \quad (4)$$

Таким образом напряжение под балкой представимо в виде линейного оператора $L(v)$ от перемещения в направлении нагрузки. Легко видеть, что оператор $L(v)$ симметричен, т. е.

$$\int_0^l L(v_1) v_2 dx = \int_0^l L(v_2) v_1 dx.$$

Заметив, что потенциальная энергия балки

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^l EI [v'']^2 dx,$$

приходим к выражению для потенциальной энергии рассматриваемой системы

$$I = \frac{1}{2} \int_0^l EI [v'']^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l L(v) v dx. \quad (5)$$

Если считать концы балки свободными, то потенциальная энергия системы будет рассматриваться на классе непрерывных функций с интегрируемыми квадратами вторых производных при весе EI , а в остальном произвольных.

Понятно, что если $y(x)$ — перемещение точек балки, то, как следует из общих соотношений теории упругости и условий, наложенных на функции $u(x)$ и $v(x)$, $y(x) + \text{const}$ будет также перемещением точек балки. Исходя из этого замечания, для однозначности решения задачи будем рассматривать потенциальную энергию лишь на функциях $v(x)$, подчиненных условию

$$\int_0^l v(x) dx = 0. \quad (6)$$

Функции, удовлетворяющие перечисленным условиям и условию (6) назовем допустимыми.

Из принципа возможных перемещений следует [3], что перемещения точек балки $y(x)$ удовлетворяют уравнению

$$M(y, v) = \int_0^l y'' v'' EI dx + \int_0^l L(y) v dx = \int_0^l v dQ(x),$$

где $dQ(x)$ — поперечная нагрузка, приложенная к элементу длины балки.

Поскольку потенциальная энергия всей системы допускает разбиение на два положительных слагаемых, то целесообразно, следуя [3], решать уравнения равновесия как уравнения равновесия соединенной системы.

Система называется соединенной, если она получена из двух независимых систем путем соединения их точек. Точнее пусть заданы две независимые упругие системы S_1 и S_2 , занимающие соответственно области* D_1 и D_2 . Предположим, что между точками $\xi_1 \in E_1 \subset D_1$ и $\xi_2 \in E_2 \subset D_2$ каким-нибудь способом установлено взаимно-однозначное и непрерывное соответствие. Система, состоящая из двух указанных, называется соединенной, если все ее возможные перемещения в соответствующих точках ξ_1 и ξ_2 совпадают.

* Под областью, занятой системой, понимают совокупность областей, поверхностей, линий, взятых в конечном числе, на которых определены допустимые функции

Соединение систем можно произвести наложением связей на две независимые подсистемы. Пусть $P_i^{(1)}(x_1)$, $x_1 \in D_1$, $i = 1, 2, \dots$ — последовательность функций из L_2 таких, что $P_i^{(1)}(x_1) \equiv 0$, $x_1 \notin E_1$ и замкнутая в E_1 .

По функциям $P_i^{(1)}(x)$ построим функции $P_i^{(2)}(x_2)$, $x_2 \in D_2$ по следующему правилу: $P_i^{(2)} \equiv 0$, $x_2 \notin E_2$ и $P_i^{(1)}(\xi_1) = P_i^{(2)}(\xi_2)$. Тогда понятно, что из условий

$$\int_{E_1} v^{(1)}(x) P_i^{(1)}(x) dx - \int_{E_2} v^{(2)}(x) P_i^{(2)}(x) dx = 0 \quad (7)$$

следует, что $v^{(1)}(\xi_1) = v^{(2)}(\xi_2)$.

Систему связей, определяемых функциями $P_i^{(1)}(x)$ назовем замкнутой.

Если функция влияния первой подсистемы $G_1(x, s)$ непрерывна по обоим переменным, а функция влияния второй подсистемы $G_2(x, s)$ при каждом фиксированном x принадлежит L_2 , то существует функция влияния $G(x, s)$ соединенной системы и справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. При $x, s \in D_1$ последовательность ядер

$$G_n(x, s) = G_1(x, s) - \sum_{i=1}^n \Psi_i^{(1)}(x) \Psi_i^{(1)}(s) \quad (8a)$$

равномерно сходится к ядру $G(x, s)$, при $x \in D_1$

$$\int_{D_2} G_n(x, s) Q(s) ds = - \sum_{i=1}^n \Psi_i^{(1)}(x) \int_{D_2} \Psi_i^{(2)}(s) Q(s) ds \quad (8б)$$

при каждом $Q(s)$ из L_2 равномерно сходится к $\int_{D_2} G(x, s) Q(s) ds$ и при произвольных P и Q из L_2 последовательность

$$\begin{aligned} \int_{D_2} \int_{D_2} G_n(x, s) P(x) Q(s) dx ds &= \int_{D_2} \int_{D_2} G_2(x, s) P(x) Q(s) dx ds - \\ &- \sum_{i=1}^n \int_{D_2} \Psi_i^{(2)}(x) P(x) dx \int_{D_2} \Psi_i^{(2)}(s) Q(s) ds \end{aligned} \quad (8в)$$

сходится к $\int_{D_2} \int_{D_2} G(x, s) P(x) Q(s) dx ds$.

Здесь

$$\Psi_i^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{A_n A_{n-1}}} \begin{vmatrix} \psi_1^{(1)}(x) & \psi_2^{(1)}(x) & \dots & \psi_n^{(1)}(x) \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix};$$

$$\Psi_i^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{A_n A_{n-1}}} \begin{vmatrix} \psi_1^{(2)}(x) & \psi_2^{(2)}(x) & \dots & \psi_n^{(2)}(x) \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix};$$

$$\psi_i^{(1)} = \int_{E_1} G_1(x, s) P_i(s) ds; \quad \psi_i^{(2)} = \int_{E_2} G_2(x, s) P_i(s) ds;$$

$$a_{ik} = \int_E (\psi_i^{(1)} + \psi_i^{(2)}) P_k dx$$

$$A_n = \det \|a_{ik}\|_{i,k=1}^n, \quad A_0 = 1.$$

Теорема 1 предполагает существование функций влияния обеих соединяемых систем. Однако могут встретиться задачи, в которых это условие не выполнено, но вместе с тем существует функция влияния соединенной системы. На одной из таких задач мы сейчас остановимся.

Пусть пространства допустимых функций соединяемых систем содержат функции, обращающие в нуль потенциальную энергию. Такие функции будем называть функциями с нулевой энергетической нормой, а системы, пространства допустимых функций которых содержат элементы с нулевой энергетической нормой, будем называть системами с неполным числом связей.

Перемещения систем с неполным числом связей существуют лишь для нагрузок, ортогональных функциям с нулевой энергетической нормой. Перемещения от таких специальных нагрузок истокпредставимы с помощью симметрического ядра, которое называется обобщенной функцией влияния

Можно доказать, что если в пространстве допустимых функций есть m линейно независимых функций $u_1, u_2, \dots, u_m$ с нулевой энергетической нормой, то функция влияния системы, построенной из исходной наложением связей

$$\int v u_i dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

будет обобщенной функцией влияния исходной системы. Здесь и в дальнейшем интегралы берутся по области, занятой системой.

Более детальные исследования систем с неполным числом связей приводят к следующей теореме.

Теорема 2. Если на систему с неполным числом связей, в пространстве допустимых функций которой есть m линейно независимых функций с нулевой энергетической нормой, наложено m связей вида

$$\int v(x) q_i(x) dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

причем

$$\det \left\| \int u_i q_j dx \right\|_{i,j=1}^m \neq 0, \quad (9)$$

то полученная система имеет функцию влияния $K(x, s)$. Если выбрать функции q_i так, что

$$\int u_i q_j dx = \delta_{ij}$$

(в силу условия (9) это всегда возможно), то функция влияния $K(x, s)$ будет связана с обобщенной функцией влияния исходной системы равенством

$$K(x, s) = G(x, s) - \sum_{i=1}^m \left[\int G(x, s) q_i(s) ds u_i(x) + \int G(x, s) q_i(x) dx u_i(s) \right] + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \int \int G(x, s) q_i(x) q_j(s) dx ds \cdot u_i(x) u_j(s). \quad (10)$$

Для построения из двух независимых подсистем, одна из которых является системой с неполным числом связей (например, первая) соединенной системы, на указанные подсистемы по-прежнему должна быть наложена замкнутая система связей. Однако формулы (8а), (8б), (8в) будут в этом случае справедливыми лишь при наложении связей, определяемых такими функциями $P_i(x)$, для которых перемещения первой системы от нагрузок $P_i(x)$ существуют. Это означает, что функции, входящие

в формулы (8а), (8б), (8в), должны быть ортогональными к допустимым функциям с нулевой энергетической нормой первой подсистемы, т. е. должны выполняться условия

$$\int_{E_1} P_i(x) u_j(x) dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, m).$$

Наложение только связей, определяемых указанными функциями, не обеспечивает соединение систем, поскольку такая система связей не является замкнутой. Если все же считать, что совокупность указанных связей $P_i(x)$ может быть дополнена до замкнутой функциями-связями $q_i(x)$, подчиненными условию (9), то функция влияния соединенной системы вычисляется по формуле (10), если под $G(x, s)$ понимать предел последовательности ядер $G_n(x, s)$.

Если $G_1(x, s)$ — функция влияния системы, построенной из S_1 наложением связей

$$\int_{E_1} v u_i dx = 0,$$

и функции u_i подчинены условию

$$\int_{E_1} u_i u_j dx = \delta_{ij},$$

то можно положить $q_i = u_i$. Тогда из предыдущего следует, что если ядро $G_1(x, s)$ непрерывно, то при $x, s \in D_1$ функция влияния соединенной системы $K(x, s)$ — есть предел равномерно сходящейся последовательности ядер

$$K_n(x, s) = G_1(x, s) + \sum_{j, k=1}^m \iint G_2(t, \tau) u_j(t) u_k(\tau) u_i(x) u_j(s) dt d\tau - \\ - \sum_{i=1}^n \left[\Psi_i^{(1)}(x) - \sum_{j=1}^m \Psi_i^{(2)}(t) u_j(t) dt u_j(x) \right] \left[\Psi_i^{(1)}(s) - \sum_{j=1}^m \Psi_i^{(2)}(\tau) u_j(\tau) d\tau u_j(s) \right]. \quad (11)$$

Следовательно, из непрерывности ядра $G_1(x, s)$ вытекает непрерывность функции влияния соединенной системы $K(x, s)$ при $x, s \in D_1$.

Пусть $\{u(x)\}$ — совокупность всех допустимых функций и $I(u)$ — потенциальная энергия системы. Построим функционал

$$M(u, v) = I(u + v) - I(u) - I(v)$$

и будем рассматривать лишь системы, у которых функционал $M(u, v)$ билинеен и строго положителен.

Если $\{\Phi_i(x)\}$ — последовательность допустимых функций, ортонормированная и полная в том смысле, что

$$M(\Phi_i, \Phi_j) = \delta_{ij},$$

и каждая непрерывная функция $f(x)$, удовлетворяющая условию

$$M(f, \Phi_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots)$$

тождественно равна нулю в D , то всякое непрерывное ядро $K(x, s)$ может быть представлено в виде равномерно сходящейся по обоим переменным последовательности функций [4]

$$\bar{K}_n(x, s) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) \Phi_i(s). \quad (12)$$

Итак, функция влияния соединенной системы может быть представлена в виде предела двух последовательностей ядер K_n и $\bar{K}_n$.

В работе [3] дана равномерная оценка погрешности при замене точного решения уравнения равновесия приближенным. Если $w(x)$ — перемещение соединенной системы под действием нагрузки $Q(x)$, приложенной в D_1 и

$$w_n(x) = \int_{D_1} K_n(x, s) Q(s) ds, \quad \bar{w}_k(x) = \int_{D_1} \bar{K}_k(x, s) Q(s) ds,$$

то при $x, s \in D_1$

$$\left| w(x) - \frac{w_n(x) + \bar{w}_k(x)}{2} \right| \leq \frac{1}{2} [K_k(x, x) - K_n(x, x)]^{1/2} \times \\ \times \left[\iint [\bar{K}_k(x, s) - K_n(x, s)] Q(x) Q(s) dx ds \right]. \quad (13)$$

Если при построении последовательности ядер $\bar{K}_n(x, s)$ первые m функций Φ_i являются линейными комбинациями u_i ($i = 1, 2, \dots, m$), то w_k ($k > m$) будет истокопредставимо для каждой самоуравновешенной нагрузки Q , т. е. нагрузки, подчиненной условиям

$$\int Q(x) u_i(x) dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

с помощью ядра

$$\bar{H}_k(x, s) = \sum_{i=m+1}^k \Phi_i(x) \Phi_i(s).$$

Кроме того, понятно, что для таких же нагрузок $w_n(x)$ истокопредставимо с помощью ядра

$$H_n(x, s) = G_1(x, s) - \sum_{i=1}^n \left[\Psi_i^{(1)}(x) - \sum_{j=1}^m \int \Psi_i^{(2)}(t) u_j(t) dt u_j(x) \right] \Psi_i^{(1)}(s).$$

Поэтому для таких нагрузок можно при оценке погрешности в правой части неравенства (13) заменить ядро $\bar{K}_k(x, s)$ на $\bar{H}_k(x, s)$, а ядро $K_n(x, s)$ на $H_n(x, s)$.

Изложенную теорию применим к решению задачи, поставленной в начале этой статьи, считая, что изгибная жесткость балки постоянна. Рассматриваемая система может быть получена соединением во всех точках отрезка $(0, l)$ балки (система S_1) с упругой полуплоскостью (система S_2). Обе эти системы расположены на интервале $(0, l)$. Пространство допустимых функций первой подсистемы (балки) состоит из непрерывных функций $v_i^{(1)}$ с интегрируемыми квадратами вторых производных, ортогональных единице на интервале $(0, l)$. Пространство допустимых функций $v_i^{(2)}(x)$ второй подсистемы (упругой полуплоскости) состоит из функций, имеющих непрерывные первые производные и ортогональных единице на том же интервале.

Потенциальные энергии рассматриваемых подсистем соответственно равны I_1 и I_2 . Очевидно, что пространство допустимых функций балки содержит один элемент $u = \left(x - \frac{l}{2}\right)$ с нулевой энергетической нормой, поэтому у этой системы нет функции влияния. Ее обобщенная функция

влияния $G_1(x, s)$ равна функции влияния системы, полученной из S_1 наложением связи

$$\int_0^l v^{(1)} u dx = 0.$$

После несложных выкладок найдем, что

$$G_1(x, s) = \frac{l^3}{EI} \left[-\frac{xs^5 - sx^5}{10l^6} + \frac{xs^4 + sx^4}{4l^5} + \frac{x^5 + s^5}{20l^5} - \frac{x^4 + s^4}{6l^4} + \frac{13xs}{35l^2} - \frac{11(x+s)}{210l} + \right. \\ \left. + \frac{1}{105} \right] + \frac{1}{EI} \begin{cases} -\frac{xs^2}{2} + \frac{s^3}{6}, & x \leq s, \\ \frac{x^3}{6} - \frac{sx^2}{6}, & x \geq s. \end{cases}$$

В качестве функций-связей $P_i(x)$ выбраны функции

$$P_1(x) = \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{2}{\pi}; \quad P_2(x) = \sin \frac{2\pi x}{l} - \frac{6}{\pi} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right); \quad P_3(x) = \sin \frac{3\pi x}{l} - \frac{2}{3\pi}.$$

Соответствующее приближенное значение функции влияния при этом равно

$$K_3(x, s) = \frac{\pi^2 l^3 \alpha}{EIA_3} \begin{vmatrix} \frac{EIG_1(x, s)}{\pi^2 l^3 \alpha} & v_1(x) & v_2(x) & v_3(x) \\ v_1(s) & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ v_2(s) & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ v_3(s) & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + l^3 \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) \left[\left(\frac{s}{l} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\alpha} + \right. \\ \left. + \alpha \cdot 6,505 v_2(s) \right];$$

$$a_{11} = 8,3584 + \alpha \cdot 0,0019; \quad a_{12} = a_{21} = 0; \quad a_{13} = a_{31} = 0,7008 + \alpha \cdot 0,0246;$$

$$a_{22} = 27\,3659 + \alpha \cdot 0,0203; \quad a_{23} = a_{32} = 0; \quad a_{33} = 1,8624 + \alpha \cdot 0,0042;$$

$$A_3 = \det \| a_{ik} \|_{i,k=1}^3; \quad \alpha = \frac{E^* \pi l^3}{2(1-\nu^2)EI};$$

$$v_1(x) = \pi^{-4} \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{12\pi} \left(\frac{x^4}{l^4} - \frac{2x^3}{l^3} + \frac{x}{l} \right) + \frac{1}{60\pi} - \frac{2}{\pi^5};$$

$$v_2(x) = (2\pi)^{-4} \sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{x^5}{20\pi l^5} - \frac{x^4}{8\pi l^4} + \frac{x^3}{12\pi l^3} + \frac{x}{\pi l} \left(\frac{3}{8\pi^4} - \frac{3}{280} \right);$$

$$v_3(x) = (3\pi)^{-4} \sin \frac{3\pi x}{l} - \frac{1}{36\pi} \left(\frac{x^4}{l^4} - \frac{2x^3}{l^3} + \frac{x}{l} \right) + \frac{1}{180\pi} - \frac{2}{(3\pi)^5}.$$

Для разложения (12) выбраны функции

$$\Phi_1(x) = \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{2}{\pi}; \quad \Phi_2(x) = \sin \frac{2\pi x}{l} - \frac{6}{\pi} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right); \quad \Phi_3(x) = \sin \frac{3\pi x}{l} - \frac{2}{3\pi};$$

$$\Phi_4(x) = \frac{x}{l} - \frac{1}{2},$$

и значение $K_4(x, s)$ получилось равным

$$\bar{K}_4(x, s) = -\frac{l^3}{EI\pi^2 A_4} \begin{vmatrix} 0 & \Phi_1(x) & \Phi_2(x) & \Phi_3(x) & \Phi_4(x) \\ \Phi_1(s) & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \Phi_2(s) & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \Phi_3(s) & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \Phi_4(s) & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix};$$

$$a_{11} = \frac{\pi^2}{2} + \alpha \cdot 0,0798; \quad a_{22} = 8\pi^2 + \alpha \cdot 0,3695; \quad a_{13} = a_{31} = -\alpha \cdot 0,0599;$$

$$a_{14} = \alpha \cdot 0,0199; \quad a_{33} = 40,5\pi^2 + \alpha \cdot 0,4225; \quad a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = a_{41} =$$

$$= a_{14} = a_{43} = a_{34} = 0.$$

Оценка (13) при $dQ(x) = P \left[dx - \frac{\delta(x)}{2} - \frac{\delta(x-l)}{2} \right]$, $\alpha = 0,1$ в соответствии с замечанием, сделанным о самоуравновешенных нагрузках приводит к неравенству

$$\left| w(x) - \frac{w_3(x) + \bar{w}_4(x)}{2} \right| \leq \frac{l^3 P}{\pi^2 EI} 1,3 \cdot 10^{-4}.$$

Относительная погрешность при этом в точках $x = 0, l$, $x = \frac{l}{2}$ соответственно равна 4,5% и 1,5%.

Можно показать, что ряды, с помощью которых представима функция влияния, можно почленно дифференцировать по каждой переменной один раз. Полученные при этом ряды будут равномерно сходиться по обоим переменным ко второй смешанной производной функции влияния рассматриваемой системы. Отсюда следует возможность вычисления первой производной функции прогиба балки с равномерной оценкой погрешности. Тогда, как видно из (4), можно приближенно вычислить (с оценкой погрешности) напряжения под балкой и напряжения в самой балке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Лейбензон. Курс теории упругости. Гостехиздат, 1947.
2. Л. А. Галин. Контактные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1953.
3. М. Д. Дольберг, В. И. Малыгин. Сб. «Расчет пространственных конструкций», 8, 1962.
4. М. Д. Дольберг. «Докл. АН СССР», 120, 1958, 945.

О НАИМЕНЬШЕЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Г. И. Карпиловский

В настоящей статье определяется наименьшая степень точного представления произвольной конечной абелевой группы над полями рациональных и вещественных чисел, над алгебраически замкнутым полем произвольной характеристики, а также, наименьшая степень точного представления конечной абелевой p -группы над произвольным полем с характеристикой, отличной от p . На этом пути получается также простое доказательство теоремы А. Я. Повзнера о наименьшей степени точного представления конечной абелевой группы подстановками.

Пусть G — конечная группа показателя n , $T(\bar{T})$ — произвольное (алгебраически замкнутое) поле, характеристика которого не делит порядок группы G , $m(G, T)$ — наименьшая степень точного представления G над T , $Q(D)$ — поле рациональных (вещественных) чисел, ε — первообразный корень n -й степени из 1, F — группа Галуа поля $T(\varepsilon)$ над T , $\bar{F}$ — группа Галуа поля $Q(\varepsilon)$ над Q . Заметим, что $(\bar{F}:1) = \varphi(n)$, где φ — функция Эйлера, а $(F:1) = (T(\varepsilon):T)$. Назовем минимальные идемпотенты центра групповой алгебры $G\bar{T}$ F -эквивалентными, если они переходят друг в друга под действием автоморфизма $\psi \in F$ ($\psi(\varepsilon) = \varepsilon^p$; $(p, n) = 1$). Множество $e_1, e_2, \dots, e_r$ минимальных идемпотентов центра $G\bar{T}$ (r — число классов сопряженных элементов группы G) распадается на непересекающиеся подмножества F -эквивалентных между собой идемпотентов.

Известно [3], что совокупность идемпотентов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_q$, каждый из которых является суммой идемпотентов из этих непересекающихся подмножеств, составляет полную систему минимальных идемпотентов групповой алгебры GT . Пусть G — абелева группа. Тогда минимальные идемпотенты центра групповой алгебры $G\bar{T}$ совпадают с минимальными идемпотентами, и поэтому произвольный минимальный идемпотент e групповой алгебры GT имеет вид $e = e_1 + e_2 + \dots + e_t$, где e_i ($i = 1, \dots, t$) — F -эквивалентные минимальные идемпотенты групповой алгебры $G\bar{T}$. Так как $G\bar{T}e = G\bar{T}e_1 + G\bar{T}e_2 + \dots + G\bar{T}e_t$, то неприводимое над полем T представление Γ , реализующееся в идеале $G\bar{T}e$, можно представить в виде

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_t,$$

где Γ_i — представление, которое реализуется в идеале $G\bar{T}e_i$ ($i = 1, 2, \dots, t$). Все представления $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_t$ имеют одно и то же ядро N ; а представление Γ является эпиморфизмом группы G на циклическую группу G/N . Если $(G:N) = m$, то $\deg \Gamma = (T(\xi):T)$, где ξ — первообразный корень степени m из 1. В частности, при $T = Q$ $\deg \Gamma = \varphi(m)$, а при $T = D$

$$\deg \Gamma = \begin{cases} 1, & \text{при } m = 1, 2, \\ 2, & \text{при } m > 2. \end{cases}$$

Разложение абелевой группы G в прямое произведение циклических множителей вида

$$G = (a_1) \times (a_2) \times \dots \times (a_s) (a_i^{m_i} = 1; i = 1, 2, \dots, s),$$

где $m_i \equiv 0 \pmod{m_{i+1}}$ назовем разложением по минимальному базису. Легко видеть, что если G' — подгруппа группы G , а $G' = (b_1) \times (b_2) \times \dots \times (b_k)$ ($b_i^{n_i} = 1; i = 1, 2, \dots, k$) — ее разложение по минимальному базису, то $k \leq s$ и $n_i \leq m_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Следующие очевидные предложения сформулируем в виде лемм для удобства ссылок.

Лемма 1. Пусть $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_s$, а n_i ($i = 1, \dots, s$) — степень точного представления группы G_i над произвольным полем P . Тогда существует точное над P представление группы G степени $n_1 + n_2 + \dots + n_s$.

Лемма 2. Пусть N_i ($i = 1, 2, \dots, t$), t — произвольные нормальные делители группы G , причем $\bigcap_{i=1}^t N_i = 1$. Тогда $G \cong G'$, где G' — некоторая подгруппа группы $\bar{G} = G/N_1 \times \dots \times G/N_t$.

Лемма 3. Пусть $n = p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s}$ — каноническое разложение числа n . Тогда $n \geq \sum_{i=1}^s p_i^{a_i}$, а при $n \neq 2p_i^{a_i}$ (p_i — простое нечетное) $\varphi(n) \geq \sum_{i=1}^s \varphi(p_i^{a_i})$. Приведем теперь простое доказательство теоремы, ранее опубликованной в [4].

Теорема 1. Пусть $G = (a_1) \times \dots \times (a_s)$ ($a_i^{p_i^{a_i}} = 1; p_i$ — простое; $i = 1, 2, \dots, s$) — произвольная конечная абелева группа. Тогда наименьшая степень точного представления группы G подстановками равна $\sum_{i=1}^s p_i^{a_i}$.

Доказательство. Будем рассматривать мономиальные представления группы G матрицами с нулями и единицами и отождествлять эти представления с представлениями группы G подстановками. Если мономиальное представление некоторой группы не разлагается в сумму мономиальных представлений, то оно является представлением транзитивной группой подстановок. Известно [1], что всякое точное представление абелевой группы транзитивной группой подстановок является регулярным. Поэтому, если Γ — произвольное представление абелевой группы транзитивной группой подстановок, то $\deg \Gamma = (G : N)$, где N — ядро представления Γ . То, что существует точное мономиальное представление группы G степени $\sum_{i=1}^s p_i^{a_i}$,

следует из леммы 1. Пусть Γ — произвольное точное представление группы G мономиальными матрицами. Пусть, далее $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_t$, где Γ_i ($i = 1, 2, \dots, t$) — неразложимое мономиальное представление. Если N_i — ядро Γ_i , то

$$\deg \Gamma = \sum_{i=1}^t \deg \Gamma_i = \sum_{i=1}^t (G : N_i).$$

Группа G согласно лемме 2 изоморфно погружается в группу

$$\tilde{G} = G/N_1 \times \dots \times G/N_t.$$

Если $q_1^{i1}, q_2^{i2}, \dots, q_{m_i}^{im_i}$ — все инварианты, группы G/N_i , то, очевидно,

$$(G : N_i) \geq \sum_{j=1}^m q_j^{ji} \quad (i = 1, 2, \dots, t).$$

Так как сумма инвариантов группы G , очевидно, не превосходит суммы инвариантов G , то

$$\deg \Gamma = \sum_{i=1}^t (G : N_i) \geq \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^m q_j^{ji} \geq \sum_{i=1}^s p_i^{\alpha_i}.$$

Теорема доказана.

Займемся теперь вопросом о нахождении наименьшей степени точного представления конечной абелевой группы G над полями T, Q, D и $\bar{T}$.

Лемма 4. Пусть $G = (a)$ — циклическая группа порядка p^s (p — простое). Тогда $m(G, T) = (T(\xi) : T)$, где ξ — первообразный корень степени p^s из 1.

Доказательство. Очевидно, что группа G обладает точным неприводимым над полем T представлением указанной степени. Представление степени $(T(\eta) : T)$, где η — первообразный корень степени p^i ($i < s$) из 1 является эпиморфизмом группы G на циклическую группу порядка p^i , а потому не является точным. Далее, ввиду включений

$$G = (a) \supset (a^p) \supset \dots \supset (a^{p^{s-1}}) \supset 1$$

произвольная сумма неприводимых представлений, каждое из которых имеет степень меньшую, чем $(T(\xi) : T)$, дает представление над полем T с ядром $N \supseteq (a^{p^{s-1}})$.

Лемма доказана

Теорема 2. Пусть $G = (a_1) \times (a_2) \times \dots \times (a_s)$ ($a_i^{p_i^{\alpha_i}} = 1$; $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_s$, p -простое). Тогда

$$m(G, T) = \sum_{i=1}^s (T(\xi_i) : T),$$

где ξ_i — первообразный корень степени $p_i^{\alpha_i}$ из 1 ($i = 1, 2, \dots, s$).

Доказательство. Согласно леммам 1 и 4 точное представление группы G над полем T степени $\sum_{i=1}^s (T(\xi_i) : T)$ существует. Пусть $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_q$ — разложение произвольного точного над полем T представления Γ в сумму неприводимых представлений. Поскольку $\deg \Gamma_i = (T(\theta_i) : T)$ (θ_i — первообразный корень степени $p_i^{\beta_i}$ из 1 ($\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_q$)) то ввиду леммы 2 примарная абелева группа с инвариантами $p_1^{\beta_1}, p_2^{\beta_2}, \dots, p_q^{\beta_q}$ ($\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_q$) содержит подгруппу с инвариантами $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_s^{\alpha_s}$ ($\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_s$). Значит, $s \leq q$ и $\alpha_i \leq \beta_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Таким образом

$$\deg \Gamma_i = (T(\theta_i) : T) \geq (T(\xi_i) : T) \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

$$\deg \Gamma \geq \sum_{i=1}^s (T(\xi_i) : T)$$

Теорема доказана.

Произвольную конечную абелеву группу G запишем в виде

$$G = (a_1) \times (a_2) \times \dots \times (a_t) \times (b_1) \times (b_2) \times \dots \times (b_k) \times (c_1) \times \dots \times (c_s)$$

($a_i^2 = 1$; $i = 1, 2, \dots, t$; $b^{2^{a_j}} = 1$; $a_j \neq 1$; $j = 1, 2, \dots, k$; $c_i^{p_i^{a_i}} = 1$; p_i — простое нечетное; $i = 1, 2, \dots, s$).

Теорема 3.

$$m(G, Q) = \begin{cases} \sum_{P \in M} \varphi(P) & \text{при } s \geq t, \\ t - s + \sum_{P \in M} \varphi(P) & \text{при } s < t, \end{cases}$$

где M — множество всех отличных от числа 2 инвариантов группы G .

Доказательство. Пусть Γ — произвольное точное представление группы G над полем Q . Тогда $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_l$, где Γ_i — неприводимое над Q представление ($i = 1, 2, \dots, l$). Если N_i — ядро представления

Γ_i , то $\deg \Gamma = \sum_{i=1}^l \deg \Gamma_i = \sum_{i=1}^l \varphi(G : N_i)$. Если $s \geq t$, то группу G можно представить в виде $G = (b_1) \times \dots \times (b_k) \times (c_1 a_1) \times \dots \times (c_t a_t) \times \dots \times (c_s)$. Очевидно, что $m((c_i a_i), Q) = m((c_i), Q)$ ($i = 1, 2, \dots, t$), а потому ввиду лемм 1 и 4 существует точное представление группы G над полем Q степени $\sum_{P \in M} \varphi(P)$. Покажем, что эта степень является наименьшей. Дей-

ствительно, ввиду лемм 2 и 3 имеем

$$\deg \Gamma = \sum_{i=1}^l \varphi(G : N_i) \geq \sum_{Q \in L} \varphi(Q) \geq \sum_{P \in M} \varphi(P),$$

где L — множество всех отличных от чисел 2 инвариантов группы $G = G/N_1 \times \dots \times G/N_l$. Пусть $s < t$. Тогда группу G можно представить в виде

$$G = (a_{s+1}) \times \dots \times (a_t) \times (b_1) \times \dots \times (b_k) \times (c_1 a_1) \times \dots \times (c_s a_s). \quad (1)$$

Из разложения (1) видно, что группа G обладает точным представлением над полем Q степени $\sum_{P \in M} \varphi(P) + t - s = \sum_{P' \in M'} \varphi(P') - s$ (M' — множество всех инвариантов группы G).

Пусть $(G : N_j) = 2p_j^{\beta_j}$ ($j = 1, 2, \dots, m$; $m \leq l$; p_j — простое нечетное), $a(G : N_\tau) \neq 2p_\tau^{\beta_\tau}$ ($\tau = m + 1, \dots, l$; p_j — простое нечетное). Тогда ввиду леммы 3 имеем

$$\deg \Gamma \geq \sum_{Q' \in L'} \varphi(Q') - m \quad (2)$$

(L' — множество всех инвариантов группы $\tilde{G}$). Если $m \leq s$, то ввиду (2)

$$\deg \Gamma \geq \sum_{Q' \in L'} \varphi(Q') - s \geq \sum_{P' \in M'} \varphi(P') - s = \sum_{P \in M} \varphi(P) + t - s.$$

Пусть $m > s$. Тогда в группе G имеется по меньшей мере на $m - s$ больше инвариантов взаимно простых с числом 2 чем в группе G , откуда следует, что

$$\deg \Gamma \geq \sum_{P' \in M'} \varphi(P') + (m - s) - m = \sum_{P \in N} \varphi(P) + t - s.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $G = (g_1) \times (g_2) \times \dots \times (g_s)$ ($g_i^{m_i} = 1$; $i = 1, 2, \dots, s$) — разложение группы G по минимальному базису. Тогда имеют место следующие формулы: $m(G, T) = s$ (3)

$$m(G, D) = \sum_{i=1}^s m((g_i), D), \text{ где } m((g_i), D) = \begin{cases} 1 & \text{при } m_i = 2, \\ 2 & \text{при } m_i > 2. \end{cases} \quad (4)$$

Доказательство. Пусть $\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_q$ — разложение произвольного точного над полем $\bar{T}$ представления Γ в сумму неприводимых представлений Γ_i с ядром N_i ($i = 1, 2, \dots, q$). Согласно лемме 2 группа G изоморфно погружается в группу $G/N_1 \times \dots \times G/N_q$. Пусть l — число элементов минимального базиса группы G . Тогда $l \leq q$ и, с другой стороны, $l \geq s$, откуда следует, что $q \geq s$, т. е. $\deg \Gamma \geq s$. Аналогичным образом доказывается формула (4).

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос о наименьшей степени точного представления произвольной конечной абелевой группы над алгебраически замкнутым полем с характеристикой, делящей порядок группы.

Пусть π — простое поле характеристики p , $\bar{F}(F)$ — алгебраически замкнутое (произвольное) поле той же характеристики, j_m — жорданов ящик порядка m с единицами на главной диагонали.

Лемма 5. Пусть G_1 — подгруппа группы G . Если Γ — точное представление группы G степени $m(G_1, F)$, то $m(G_1, F) = m(G, F)$.

Доказательство очевидно.

Лемма 6. Пусть A_m — матрица порядка m вида

$$A_m = \begin{pmatrix} 1\alpha & & & \\ & 1\alpha & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \alpha \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (\alpha \neq 0 \in F).$$

Тогда матрица A_m подобна j_m .

Утверждение леммы немедленно следует из известных фактов линейной алгебры.

Лемма 7. Пусть $A_m = \|t_{ij}\|$ ($i, j = 1, 2, \dots, m$). Равенство $A_m j_m = j_m A_m$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} t_{11} &= t_{22} = \dots = t_{mm}, \\ t_{12} &= t_{23} = \dots = t_{m-1,m}, \\ &\dots \dots \dots \\ t_{1m-1} &= t_{2m}. \end{aligned} \quad t_{ij} = 0, \text{ если } i > j.$$

Доказательство леммы легко получить прямым вычислением.

Из леммы 7 следует, что всякая квадратная матрица, коммутирующая с j_m , определяется своей первой строкой.

Лемма 8. Пусть $G = (a)$ — циклическая группа порядка p^n . Тогда $m(G, F) = p^{n-1} + 1$.

Доказательство. Известно, что все неразложимые представления группы G над полем F исчерпываются представлениями $\Gamma_0, \dots, \Gamma_{n-1}$, где

представление Γ_i реализуется в идеале $I_i = ((a - 1)^i)$ групповой алгебры GF и в матричной форме имеет вид

$$\Gamma_i(a) = j_{p^{n-1}} \quad (i = 0, 1, \dots, p^n - 1). \quad (5)$$

Очевидно, что точное представление наименьшей степени группы G над полем F будет неразложимым.

Далее имеет место следующее неравенство:

$$p^{n-1} < m(G, F) \leq p^n.$$

Действительно, пусть Γ — точное представление группы G наименьшей степени. Тогда $\Gamma(a) = j_{m(G, F)}$.

Если $m(G, F) \leq p^{n-1}$, то $\Gamma(a^{p^{n-1}}) = j_{m(G, F)}^{p^{n-1}} = 1$, что невозможно, поскольку Γ — точное представление.

Итак, достаточно показать, что представление Γ вида $\Gamma(a) = j_{p^{n-1}+1}$ является точным.

Пусть $N \neq 1$ — ядро представления Γ . Тогда $N \supseteq (a^{p^{n-1}})$, откуда следует, что

$$\Gamma(a^{p^{n-1}}) = j_{p^{n-1}+1}^{p^{n-1}} = 1, \text{ что противоречит (5). Лемма доказана.}$$

Лемма 9. Пусть $F \supseteq \pi(\theta)$, причем $(\pi(\theta) : \pi) \geq s$, а p -группа G разлагается в прямое произведение циклических групп

$$G = (a_1) \times (a_2) \times \dots \times (a_s) \quad (a_i^{p^n} = 1; i = 1, 2, \dots, s).$$

Тогда $m(G, F) = p^{n-1} + 1$.

Доказательство. Ввиду лемм 5 и 8 достаточно показать, что существует точное представление группы G над полем F степени $p^{n-1} + 1$. Рассмотрим соответствие

$$\begin{aligned} a_1 &\rightarrow \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ & 1 \\ 0 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} = j_{p^{n-1}+1}, \\ a_i &\rightarrow \begin{pmatrix} 1\theta^{i-1} & & 0 \\ 1 & & \\ & 0 & \\ 0 & & \theta^{i-1} \\ & & 1 \end{pmatrix} = A_i \quad (i = 2, \dots, s). \end{aligned} \quad (6)$$

В силу лемм 6 и 7 имеем $A_i^{p^n} = 1$; $j_{p^{n-1}+1} A_i = A_i j_{p^{n-1}+1}$. Легко проверить, что первая строка матрицы $A_i A_j$ совпадает с первой строкой матрицы $A_j A_i$, а потому (ввиду леммы 7)

$$A_i A_j = A_j A_i.$$

Итак, соответствие (6) задает представление группы G степени $p^{n-1} + 1$. Пусть $g = a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_s^{i_s}$ — произвольный элемент группы G , тогда

$$g \rightarrow j_{p^{n-1}+1}^{i_1} A_2^{i_2} \dots A_s^{i_s} = A = \|t_{ij}\| \quad (i, j = 1, 2, \dots, p^{n-1} + 1).$$

Очевидно, что лемма будет доказана, если мы установим, что из равенств $t_{1p^i+1} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$ следует, что $i_m \equiv 0 \pmod{p^n}$ ($m = 1, 2, \dots, s$). Действительно, как легко видеть, $t_{12} = i_1 + i_2\theta + \dots + i_s\theta^{s-1}$, а потому равенство $t_{12} = 0$ влечет за собой сравнения $i_m \equiv 0 \pmod{p}$ ($m = 1, 2, \dots, s$).

Пусть уже установлено, что из равенств $t_{1p^i+1} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, k-1; k \leq n)$ следует, что $i_m \equiv 0 \pmod{p^k}$, т. е. $i_m = j_m p^k$ ($m = 1, 2, \dots, s$). Ввиду очевидной формулы

$$\begin{pmatrix} 1\beta & & & \\ 1\beta & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \beta \\ & & & & 1 \end{pmatrix} p^q = \begin{pmatrix} 1 & \overbrace{0 \dots 0}^{p^q-1 \text{ раз}} & \beta^{p^q} & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \beta^{p^q} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \beta^{p^q} \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (\beta \in \pi(\theta))$$

имеем

$$t_{12} = t_{13} = \dots = t_{1p^k} = 0, \text{ а } t_{1p^k+1} = j_1 + j_2\theta^{p^k} + \dots + j_s\theta^{p^k(s-1)}.$$

Значит равенства $t_{1p^i+1} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, k)$ влекут за собой сравнения $i_m \equiv 0 \pmod{p}$ и $i_m = j_m p^k$ ($m = 1, 2, \dots, s$), откуда следует, что $i_m \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}$. Лемма доказана.

Следствие. Пусть $G = (a_1) \times (a_2) \times \dots \times (a_s)$

$$(a_i^{p^{n_i}} = 1; n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_s; i = 1, 2, \dots, s),$$

Тогда $m(G, F) = p^{n_1-1} + 1$.

Доказательство. Утверждение следствия немедленно вытекает из лемм 5 и 8 и того факта, что группа G изоморфно погружается в группу $\tilde{G}$ типа $(p^{n_1}, \dots, p^{n_s})$, которая обладает точным представлением над полем F степени $p^{n_1-1} + 1$ (лемма 9).

Рассмотрим теперь вопрос о наименьшей степени точного представления абелевой группы порядка $h = p^2 m$ ($(p, m) = 1$; p -простое) над полем $\bar{F}$. Если G — группа такого порядка, то $G = G_1 \times G_2$, где G_1 — силовская p -подгруппа группы G , а $(G_2:1) \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Отметим, что в силу теоремы 4 наименьшая степень точного представления группы G_2 над полем $\bar{F}$ равна числу элементов ее минимального базиса.

Лемма 10. Пусть $G = G_1 \times G_2$, где $G_1 = (a)$ ($a^{p^x} = 1$; $(G_2:1) \not\equiv 0 \pmod{p}$), t — число элементов минимального базиса группы G_2 и $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_s$ — разложение точного представления группы G над полем $\bar{F}$ в сумму неразложимых представлений Γ_i ($i = 1, 2, \dots, s$). Тогда $s \geq t$.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_q$ — полная система минимальных попарно ортогональных идемпотентов полупростой алгебры $G_2 \bar{F}$

$$(1 = e_1 + e_2 + \dots + e_q; e_i^2 = e_i; e_i e_j = 0, \text{ если } i \neq j).$$

Известно [6], что все неразложимые представления группы G над полем $\bar{F}$ реализуются в идеалах

$$V_{m,i} = ((a-1)^m e_i) \quad (i = 1, 2, \dots, q; m = 0, 1, \dots, p^x - 1).$$

Если $y = x(a-1)^m e_i$ ($x \in G\bar{F}$) — произвольный элемент идеала $V_{m,i}$, то для $g \in G_2$ имеем

$$gy = gx(a-1)^m e_i = x(a-1)^m g e_i = \varepsilon x(a-1)^m e_i = \varepsilon y,$$

где ε — корень из 1 степени n ($g^n = 1$). Поэтому неразложимое представление $\Gamma_{m,i}$, реализующееся в идеале $V_{m,i}$, имеет вид

$$\Gamma_{m,i}(g) = \varepsilon E \quad (g \in G_2, E \text{ — единичная матрица}).$$

Таким образом, ограничение представления Γ_i на группе G_2 представляется в виде

$$\Gamma_i \downarrow (G_2) = m_i \Gamma'_i, \text{ где } m_i = \deg \Gamma_i,$$

а $\deg \Gamma'_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, s$), откуда следует, что

$$\Gamma \downarrow (G_2) = m_1 \Gamma'_1 + \dots + m_s \Gamma'_s.$$

Представление $\bar{\Gamma} = \Gamma'_1 + \Gamma'_2 + \dots + \Gamma'_s$, очевидно, также является точным, а потому $\deg \bar{\Gamma} = s \geq t$, что и требовалось доказать.

Лемма 11. Пусть $G = (a_1) \times (a_2) \times \dots \times (a_s) \times (b_1)$, где $a_i^{p^{n_i}} = 1$; $b_i^{m_i} = 1$; $m_i \not\equiv 0 \pmod{p}$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Тогда $m(G, \bar{F}) = p^{n-1} + 1$.

Доказательство. Ввиду лемм 5 и 8 достаточно найти точное представление группы G над полем $\bar{F}$ степени $p^{n-1} + 1$. Таким представлением, очевидно, является тензорное произведение $\Gamma = \Gamma_1 \otimes \Gamma_2$, где $\Gamma_1 \downarrow (G_1)$ — точное представление группы $G_1 = (a_1) \times (a_2) \times \dots \times (a_s)$ степени $p^{n-1} + 1$, а $\Gamma_2(b_1) = \varepsilon$ (ε — первообразный корень степени m_1 из 1)

$$\Gamma_1(b_1) = E; \Gamma_2(a_i) = 1; i = 1, 2, \dots, s).$$

Теорема 5. Пусть $\dot{G} = (a_1) \times (a_2) \times \dots \times (a_s) \times (b_1) \times (b_2) \times \dots \times (b_t)$ ($a_i^{p^{n_i}} = 1$; $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_s$; $b_j^{m_j} = 1$; $j = 1, 2, \dots, t$; $i = 1, 2, \dots, s$),

где $G_2 = (b_1) \times (b_2) \times \dots \times (b_t)$ — разложение группы G_2 по минимальному базису и $(G_2:1) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Тогда

$$m(G, \bar{F}) = \begin{cases} p^{n-1} + 1 & \text{при } t = 0, \\ p^{n-1} + t & \text{при } t \geq 1. \end{cases}$$

Доказательство. При $t = 0$ теорему доказывает следствие из леммы 9. Пусть $t \geq 1$. Рассмотрим группу $G_1 = (a_1) \times (b_1) \times \dots \times (b_t)$. Поскольку группа $(a_1) \times (b_1)$ обладает (в силу леммы 11) точным пред-

ставлением над полем $\bar{F}$ степени $p^{n_1-1} + 1$, то ввиду леммы 1 существует точное над $\bar{F}$ представление группы G_1 степени $p^{n_1-1} + t$.

Пусть Γ — произвольное точное представление группы G_1 , тогда $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_q$, где Γ_i ($i = 1, 2, \dots, q$) — неразложимые представления. Хотя бы одно из представлений Γ_i является точным на (a_1) , а потому можно считать, что $\deg \Gamma_1 \geq p^{n_1-1} + 1$. В силу леммы 10 $q \geq t$. Значит, $\deg \Gamma \geq p^{n_1-1} + 1 + t - 1 = p^{n_1-1} + t$.

Итак, $m(G_1, \bar{F}) = p^{n_1-1} + t$. Поэтому ввиду леммы 5 достаточно найти точное представление группы G степени $p^{n_1-1} + t$.

Рассмотрим группу $\tilde{G} = (a'_1) \times \dots \times (a'_s) \times (b_1) \times (b_2) \times \dots \times (b_t)$, где $a_i'^{p^{n_i}} = 1$; $i = 1, 2, \dots, s$. Тогда $\tilde{G}$ содержит подгруппу $\tilde{H} \cong G$. Согласно лемме 11 существует точное представление группы $\tilde{G}' = (a'_1) \times \dots \times (a'_s) \times (b_1)$ степени $p^{n_1-1} + 1$ над полем $\bar{F}$ и, значит, группа $\tilde{G}$ обладает точным представлением Γ степени $p^{n_1-1} + 1 + t - 1 = p^{n_1-1} + t$. Следовательно, $\Gamma \downarrow (H)$ является точным представлением группы H степени $p^{n_1-1} + t$, и группа G также обладает точным представлением этой степени. Теорема доказана.

Выражаю благодарность С. Д. Берману за ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Холл. Теория групп. Изд-во иностр. лит., 1962.
2. О. Ю. Шмидт. Абстрактная теория групп. Изд. 2. Гостехиздат, М., 1933.
3. С. Д. Берман. Характеры линейных представлений конечных групп над произвольным полем. — «Матем. сб.», т. 44 (86), № 4, 1958, 409—456.
4. А. Я. Повзнер. Про знаходження групи підставлень найменшого степеня, ізоморфній даній абелевій групі. — «Зап. Матем. о-ва» (4), 14 (1937), 151—158.
5. Э. М. Жмудь. Об изоморфных неприводимых линейных представлениях конечных групп. — «Зап. Матем. о-ва», 25 (1957), 199—204.
6. С. Д. Берман. Представления конечных групп над произвольным полем и над кольцами целых чисел. Изв. АН СССР, сер. матем., 30 (1966), 70—131.
7. Г. И. Карпиловский. О наименьшей степени точного представления конечной абелевой группы. Всесоюзный colloquium по общей алгебре, резюме сообщений и докладов, Рига, 1967.