

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Фізичний факультет

Кафедра астрономії та космічної інформатики

«Допущено до захисту»
Зав. кафедри астрономії та
космічної інформатики
проф. Юрій ШКУРАТОВ

16.12.2024 р.



Оцінка «добре»

Голова ЕК
проф. Віктор ТИШКОВЕЦЬ

19.12.2024 р.



Баннікова Єлизавета Яковлівна

Еволюція астероїдів під впливом ЯОРП-ефекту

Кваліфікаційна робота на здобуття освітньо-
—кваліфікаційного рівня «Магістр»
спеціальність 104 – «фізика та астрономія»
освітньо—професійна програма «*Астрономія
та космічна інформатика*»

(підпис студента)

Науковий керівник – професор
кафедри астрономії та космічної
інформатики О.А. Голубов

(підпис керівника)

Харків 2024

АНОТАЦІЯ

Баннікова Є. Я. Еволюція астероїдів під впливом ЯОРП ефектів

Дипломна робота на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр» за спеціальністю 104 «Фізика та астрономія». Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, 2024.

В даній дипломній роботі розглядалась еволюція астероїдів під впливом ЯОРП-ефекту. Перша частина роботи була пов'язана з аналітичним рішенням системи диференціальних рівнянь, які описують еволюцію астероїду в найпростішому випадку, коли ЯОРП-ефект як функція нахилу осі астероїда, можна наблизити однією Фур'є гармонікою. Завдяки цьому була отримана залежність кутової швидкості астероїда від кута нахилу його осі. Після цього було отримано ряд графіків з різними початковими умовами і різними значеннями параметрів, що керують величиною ЯОРП ефекту. Також, після цього було додано наступний член ряду Фур'є для ЯОРП-ефекту як функції нахилу осі астероїда, знайдено чисельні розв'язки системи диференціальних рівнянь для еволюції астероїда і досліджено поведінку цих розв'язків в залежності від значень керуючих параметрів. Виявлено, що наявність четвертої гармоніки здатна якісно змінювати еволюцію астероїда і граничні значення його нахилу.

Ключові слова: астероїд, світловий тиск, ефект Ярковського, ефект ЯОРП.

Abstract

Bannikova E.Y. Evolution of asteroids under the action of YORP-effects

Thesis for the degree of Higher Education "bachelor" in specialty 104 "Physics and astronomy". V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 2024.

This diploma work considered the evolution of asteroids under the influence of the YORP effect. The first part of the work was related to the analytical solution of the system of differential equations, which describe the evolution of the asteroid in the simplest case when the YORP effect as a function of the inclination of the asteroid axis can be approximated by a single Fourier harmonic. Thanks to this, the dependence of the angular velocity of the asteroid on the angle of inclination of its axis was obtained. After that, several graphs were obtained with different initial conditions and different values of the parameters that control the magnitude of the NRV effect. Also, after that, the next term of the Fourier series was added for the YORP effect as a function of the inclination of the asteroid axis, the numerical solutions of the system of differential equations for the evolution of the asteroid were found, and the behavior of these solutions was investigated depending on the values of the control parameters. It was found that the presence of the fourth harmonic can qualitatively change the evolution of the asteroid and the limit values of its inclination.

Keywords: asteroids, light pressure, Yarkovsky effect, YORP effect.

Зміст

Вступ.....	4
Розділ 1. Найвні математичні моделі еволюції астероїда під впливом ЯОРП ефекту.....	8
1.1. Постановка задачі.....	8
1.2. Залежність ЯОРП ефекту від кута нахилу між віссю астероїду і нормалі до орбіти.....	9
1.3. Канонічне рішення рівнянь еволюції астероїда.....	10
Розділ 2. Еволюція астероїда під впливом ЯОРП з урахуванням четвертої Фур`є гармоніки.....	16
Перелік літератури.....	23

Вступ

Астероїди є дуже цікавою і популярною темою у сучасній науці. Вони проливають світло на питання раннього планетоутворення, а також можуть бути потенційною небезпекою для Землі. Тема астероїдів надзвичайно поширена у сучасній науці у тому числі завдяки їх потенційній користі при космічному будівництві. Наразі астероїди широко вивчаються завдяки методам спектроскопії, поляриметрії, фотометрії та ін.

Перший астероїд Церера був відкритий на початку 1800-х років астрономом Джузеппе Піацці. Спочатку вважалось, що Церера – це планета. Наразі сучасні астрономи налічують більше 1 млн відомих людству астероїдів.

Перш ніж познайомитись з ефектом ЯОРП, варто розглянути ефект Ярковського, а точніше, ефект впливу теплового випромінювання астероїда на його орбіту.

Ефект Ярковського було запропоновано у 1901 році фізиком-аматором Іваном Ярковським. Ярковський не мав спеціальної освіти у галузі фізики, і свої припущення щодо теплового руху астероїдів він ґрунтував на основі існування етеру – розповсюдженої в той час теорії про те, що увесь простір заповнює невидима речовина, завдяки якій переноситься взаємодія.

Пізніше, лише у 50-х роках ХХ століття, естонський астроном Ернст Юліус Епik згадував про цей ефект у своїх роботах. І тільки у 1980-ті роки американський астроном Девід Рубінкам знайшов експериментальне підтвердження ефекту Ярковського, досліджуючи аномалії у русі штучного супутника LAGEOS. На базі цих, а також деяких інших спостережень, Девід Рубінкам разом з Девідом Вокроухлицьким та Паоло Фарінеллою написали ряд статей, що були присвячені ефекту Ярковського.

Ефект Ярковського — це сила, що з'являється під впливом тиску світла, випроміненого астероїдом, що обертається. Ефект Ярковського призводить до систематичних змін великих пів осей орбіт астероїдів. (Рис. 1).

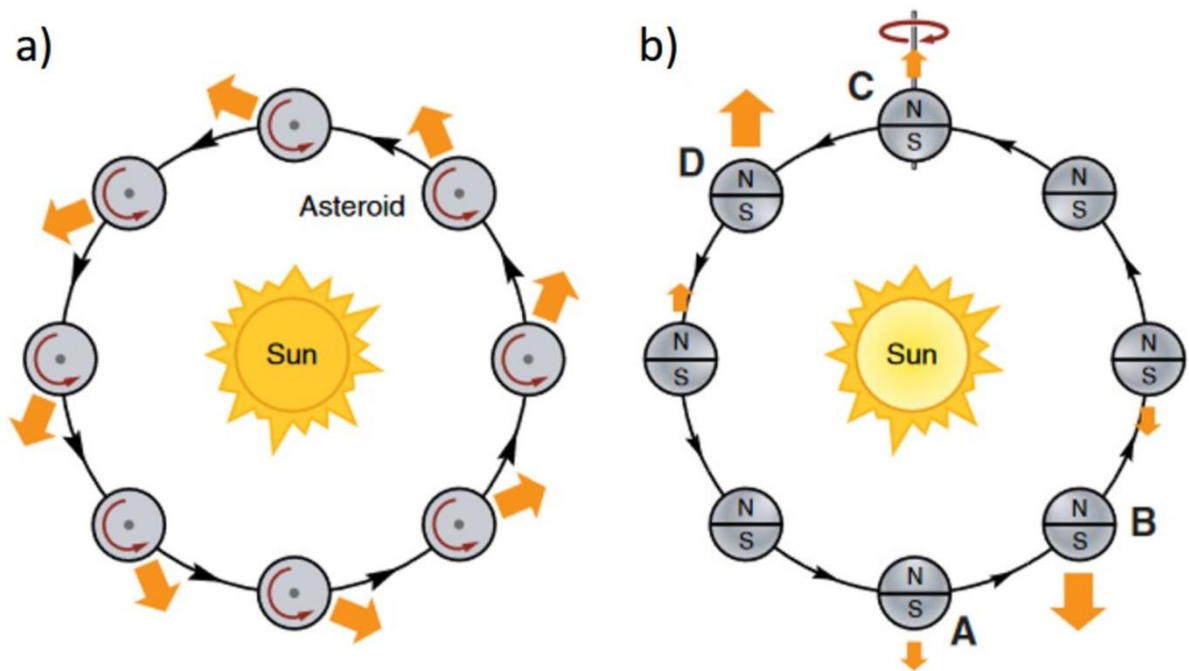


Рис. 1. Ілюстрація добового і сезонного компонентів ефекту Ярковського (Bottke et al., 2006)

Таким чином, астероїд, що поглинає частину сонячного світла, повторно випромінює цю енергію у вигляді теплового випромінювання, що створює невелику силу, що діє на астероїду. Така сила світлового тиску виникає у двох випадках: через сезонну та добову зміни температури (Рис. 1). Оскільки «вечірня» сторона астероїда тепліша за «ранкову», вона випромінює більше інфрачервоного світла, і, відповідно, це випромінювання штовхає астероїд. Варто відмітити, що вплив сонячного випромінювання на орбіту астероїда настільки маленький, що значні зміни орбіти можуть виникати тільки за час від мільйонів до мільярдів років. Але ефект Ярковського грає важливу роль у поповненні популяції навколоземних астероїдів, транспортуючи їх в резонансні точки.

Ефект Ярковського було запропоновано у 1901 році фізиком-аматором Іваном Ярковським. Ярковський не мав спеціальної освіти у галузі фізики, і свої припущення щодо теплового руху астероїдів він ґрунтував на основі існування етеру – розповсюдженій в той час теорії про те, що весь простір заповнює невидима речовина, завдяки якій переноситься взаємодія.

c)

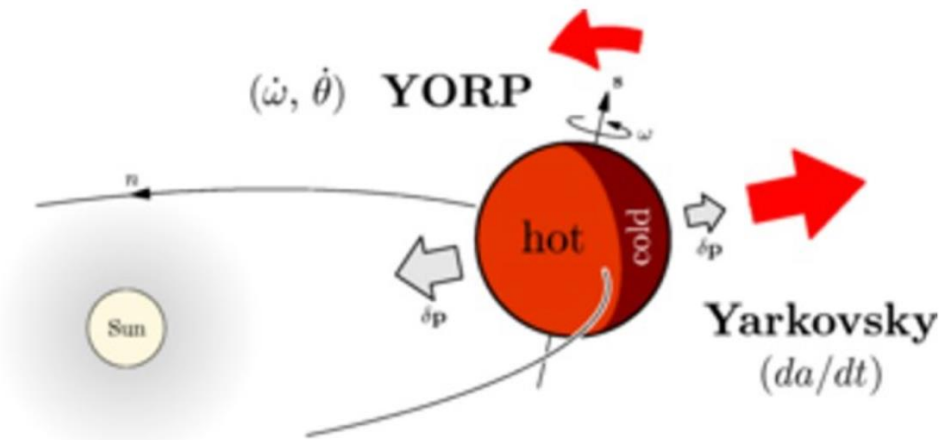


Рис. 2. Ілюстрація сили Ярківського і моменту сили ЯОРП, що діють на астероїд (Bottke et al., 2006)

Термін «ЯОРП-ефект» був вперше запропонований Девідом Рубінкамом у статті 2000 року (Rubincam, 2000). Він проілюстрував цей ефект завдяки сферичного астероїда з двома призми по боках (Рис. 3). Пізніше цю картинку назвали пропелером Рубінкама. У цього астероїда передня грань призми гальмує обертання слабше, ніж задня пришвидшує.

Ефект ЯОРП (ефект «Ярківського-О`Кіфа-Радзієвського-Педдека») у свою чергу полягає у зміні обертання астероїда через тиск світла. Цей ефект важливий для малих астероїдів розміром до 20 км. ЯОРП-ефект призводить до зміни швидкості осьового обертання та нахилу осі астероїда, а з часом можливо і до зміни його форми через дію відцентрових сил. (Рис. 2). Ефект ЯОРП є чинником, здатним повністю змінити осьове обертання астероїда розміром у кілька кілометрів на часовому масштабі у мільйони років. Вчені вважають, що цей ефект є важливою причиною формування подвійних астероїдів та астероїдів, що мають форму дзиги. Змінюючи період обертання астероїда і нахил його осі обертання, що ефект ЯОРП в значній мірі впливає на величину дії ефекту Ярківського.

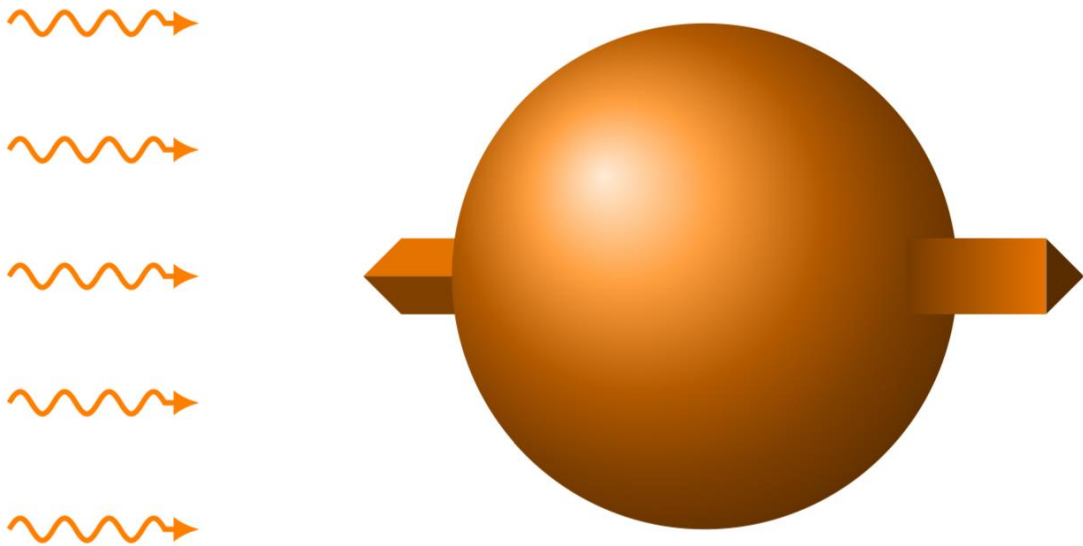


Рис. 3 Ілюстрація пропелера Рубінкама

Зараз ефект Ярковського (Greenberg et al., 2020) і ефект ЯОРП (Durech et al., 2023) дуже активно вивчаються, і було знайдено немало астероїдів, на які впливають данні ефекти Крім того, описані ефекти використовуються при розрахунках навколоземних орбіт штучних супутників, прогнозуванні астероїдної небезпеки та для інших наукових застосувань.

Розділ 1. Наявні математичні моделі еволюції астероїда під впливом ЯОРП ефекту

1.1. Постановка задачі

В статтях (Golubov et al., 2016a), (Golubov et al., 2018a) були отримані наступні рівняння для кутового моменту ЯОРП ефекту:

$$\begin{cases} T_z = \frac{1}{R^3} \oint dS r \sin\Delta \cos\eta \cos\psi p_z^\alpha(\psi, \varepsilon) \\ T_\varepsilon = -\frac{1}{R^3} \oint dS r \sin\Delta \cos\eta \cos\psi p_{sin}^\alpha(\psi, \varepsilon) \end{cases}$$

Кути Δ, η та ψ визначаються орієнтацією астероїда в просторі, тому їх можна вважати сталими величинами.

Значення p_z^α та p_{sin}^α визначаються наступним чином:

$$p_z^\alpha = \frac{2}{3\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \sqrt{1 - (\sin\phi \cos\psi \sin\varepsilon - \sin\psi \cos\varepsilon)^2}$$

$$p_{sin}^\alpha = \frac{2}{3\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \sin\phi \sqrt{1 - (\sin\phi \cos\psi \sin\varepsilon - \sin\psi \cos\varepsilon)^2}$$

У статті (Golubov and Scheeres, 2019) шляхом розкладення квадрату кореня у ряди Тейлора, були отримані наступні апроксимальні значення:

$$p_z^\alpha \approx \frac{1}{3\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2\psi \cos^2\varepsilon - \frac{1}{4} \cos^2\psi \sin^2\varepsilon \right)$$

$$p_{sin}^\alpha \approx \frac{1}{12\pi} \sin 2\psi \sin 2\varepsilon$$

Тоді для моменту, що виникає завдяки ЯОРП ефекту можна записати наступний вираз:

$$I \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Phi R^3}{c} C_z (\cos\{2\varepsilon\} + \beta)$$

$$\omega I \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\Phi R^3}{c} C_\varepsilon \sin\{2\varepsilon\} \quad ,$$

$$\frac{C_\varepsilon}{C_z} = \frac{2}{3}$$

Де Φ – це потік сонячної енергії, R – радіус астероїда, а C_z , C_ε та β – безрозмірні коефіцієнти.

Якщо обрати коефіцієнт $\beta = \frac{1}{3}$, то система рівнянь буде узгоджуватись зі спрощеною теоретичною моделлю ЯОРП ефекту.

1.2. Залежність ЯОРП ефекту від кута нахилу між віссю астероїду і нормалі до орбіти

Маємо раніше отримані рівняння, які можна розв'язати шляхом простих математичних викладок:

$$\begin{cases} I \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Phi R^3}{c} C_z (\cos\{2\varepsilon\} + \frac{1}{3}) \\ \omega I \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\Phi R^3}{c} C_\varepsilon \sin\{2\varepsilon\} \\ \frac{C_\varepsilon}{C_z} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Поділивши рівняння одне на друге, отримуємо наступний вираз:

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{3 \cos\{2\varepsilon\} + \frac{1}{3}}{2 \sin\{2\varepsilon\}} d\varepsilon$$

Таким чином, шляхом розділу перемінних отримуємо наступний вираз:

$$\ln|\omega| = \frac{3}{4} (\int \operatorname{ctg}(2\varepsilon) d(2\varepsilon) + \int \frac{d(2\varepsilon)}{3 \sin(2\varepsilon)}) + C$$

У першому інтегралі заносимо косинус під знак диференціалу і отримаємо вираз:

$$\int \operatorname{ctg}(2\varepsilon) d(2\varepsilon) = \ln|\sin(2\varepsilon)|$$

Другий інтеграл вирішується завдяки заміні:

$$\sin(2\varepsilon) = 2 \frac{t}{1+t^2}$$

Шляхом інтегрування отримуємо наступний вираз:

$$\ln\omega = \frac{3}{4} \left\{ \ln(\sin 2\varepsilon) + \frac{\ln\left(\frac{\sin 2\varepsilon}{1 + \cos 2\varepsilon}\right)}{6} \right\}$$

Тоді залежність $\omega(\varepsilon)$ можна записати у наступному вигляді:

$$\omega = \frac{(\sin 2\varepsilon)^{\frac{3}{4}}}{(1 + \cos 2\varepsilon)^{\frac{1}{6}}}$$

Таким чином аналітично була отримана залежність кутової швидкості від кута нахилу для $\alpha = \frac{2}{3}$ та $\beta = \frac{1}{3}$.

1.3. Канонічне рішення рівнянь еволюції астероїда

Шляхом чисельних розрахунків було отримано наступні графіки.

Моделювання виконувалась завдяки власноруч написаному коду на мові Python. Система двох диференціальних рівнянь розв'язувалася методом Ейлера. Перші три графіки були отриманні при значеннях $\alpha = \frac{2}{3}$ та $\beta = \frac{1}{3}$. Для отримання графіків кутова швидкість та час були знерозмірені:

$$\omega = \Omega \omega_c$$

$$t = T t_c,$$

$$\text{де } \omega_c = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}}, \text{ а } t_c = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}.$$

Таким чином була отримана наступна система рівнянь:

$$\frac{d\Omega}{dT} = \cos(2\varepsilon) + \beta$$

$$\Omega \frac{d\varepsilon}{dT} = \alpha \sin(2\varepsilon)$$

Тепер перетворимо ці диференціальні рівняння у рівняння в скінченних різницях:

$$\frac{\Delta\Omega}{\Delta T} = \cos(2\varepsilon) + \beta$$

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta T} = \frac{\alpha \sin(2\varepsilon)}{\Omega}$$

Тепер можна написати програму для чисельного розрахунку, користуючись методом Ейлера.

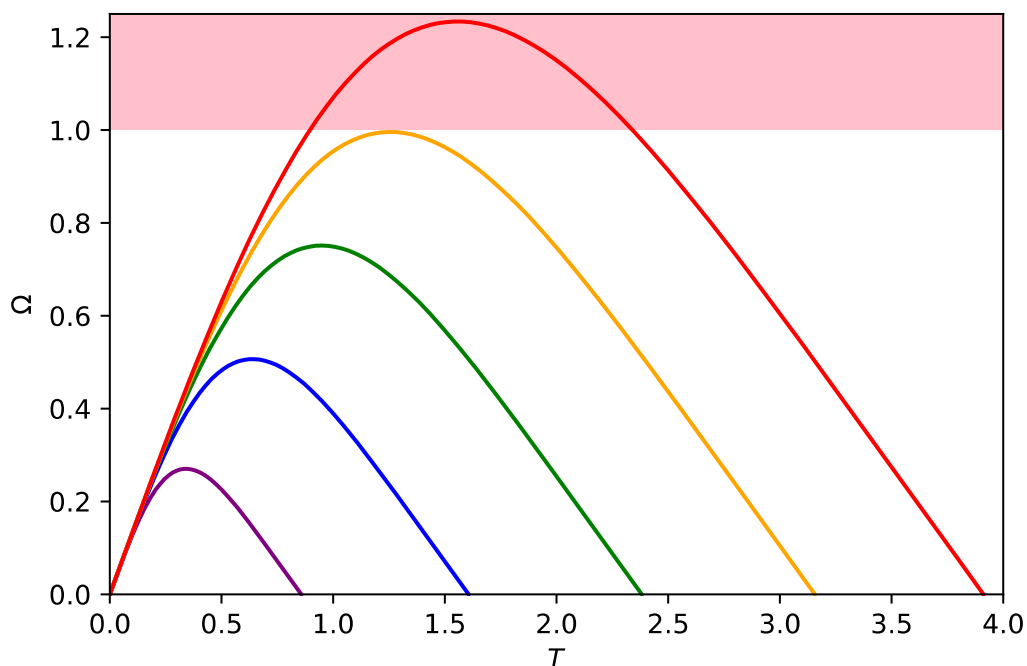


Рис. 4. Залежність кутової швидкості від часу

На Рис. 4-6 змінювались початкові умови. Як можна бачити на Рис. 4, при зменшенні значення початкових умов максимуми графіків зсуваються ліворуч по шкалі часу та значно збільшуються. Червоним прямокутником означена границя руйнування астероїдів.

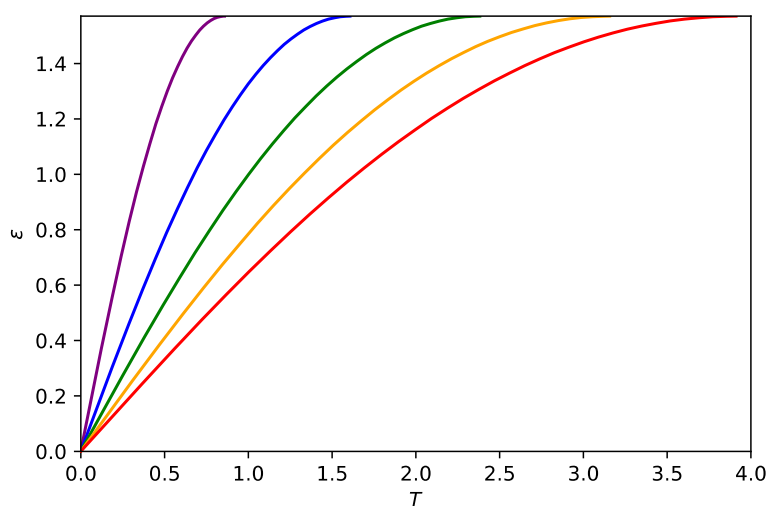


Рис. 5. Залежність кута нахилу від часу

На Рис. 5 показана залежність кута нахилу від часу при різних початкових умовах. При зменшенні значення початкових умов вихід на асимптоту здається все пізніше.

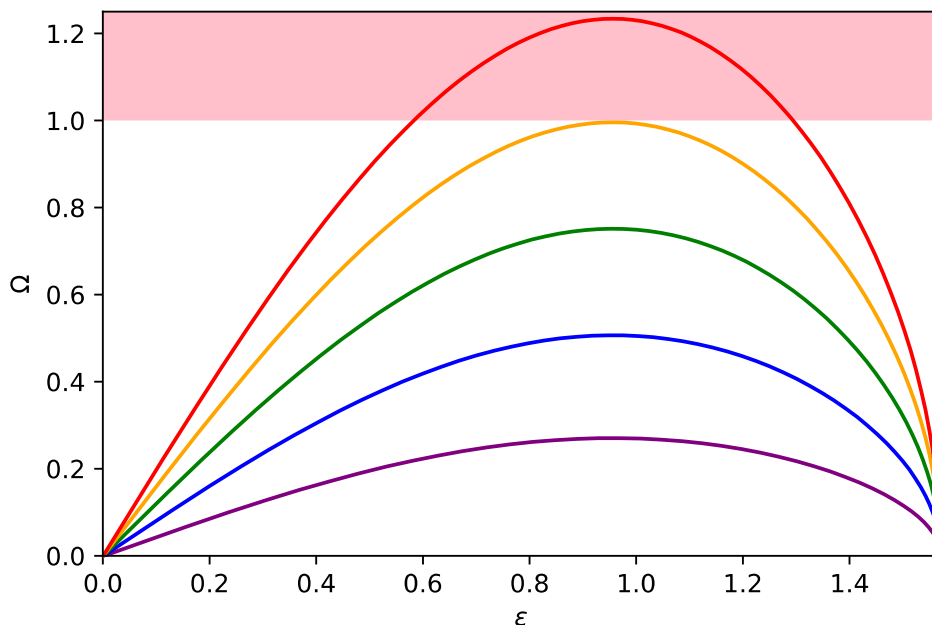


Рис. 6. Залежність кутової швидкості від кута нахилу

На рис. 6 показані графіки залежності кутової швидкості від кута нахилу при різних початкових умовах. Графіки, в залежності від початкових умов, вигинались сильніше, і максимуми ставали вище.

Загалом зміна початкових умов в значній мірі впливає на зовнішній вигляд графіків та фізику поведінки астероїда, і, в залежності від ситуації, піднімають чи опускають максимуми функцій, а також витягують графіки.

Треба звернути увагу, що для астероїдів з від'ємним $C_z t_c$ стає від'ємним.

Це означає, що зв'язок між T і t стає таким, що зі збільшенням t зменшується T , і навпаки. Таким чином, Рис. 4-5 можна читати як зліва направо, так і справа наліво. Так само, еволюція астероїда на Рис. 6 може відбуватися в обидва боки в залежності від знаку коефіцієнта t_c . Фізично астероїд змінює знак коефіцієнту, коли змінює напрямок осі обертання. Приблизно половина астероїдів на графіку буде обертатись в один бік, а інша половина в інший бік.

Також в цій найпростішій моделі еволюції астероїдів кожен астероїд починає кожен свій ЯОРП цикл з маленької кутової швидкості, з якої він виходить з режиму нутації. Після цього він прискорює, а потім знову сповільнює своє обертання, а нахил астероїда при цьому змінюється від 0 до 90 градусів, чи від 90 до 0 градусів в залежності від знаку коефіцієнта. Після цього астероїд, сповільнивши обертання, входить в режим нутації, на виході з якого починає новий ЯОРП ефект. За певних початкових умов може статись, що на даному ЯОРП циклі астероїд досягне критичної кутової швидкості обертання. Тоді можуть відбутися зсуви ґрунту на поверхні або в надрах астероїду, зміна форми (як наслідок, зміна величини ЯОРП ефекту), прояви астероїдної активності, утворення подвійних астероїдів, астероїдові пари і багато іншого. Далі, на Рис. 7-12, будуть розглянуті графіки поведінки астероїдів при різних коефіцієнтах α та β .

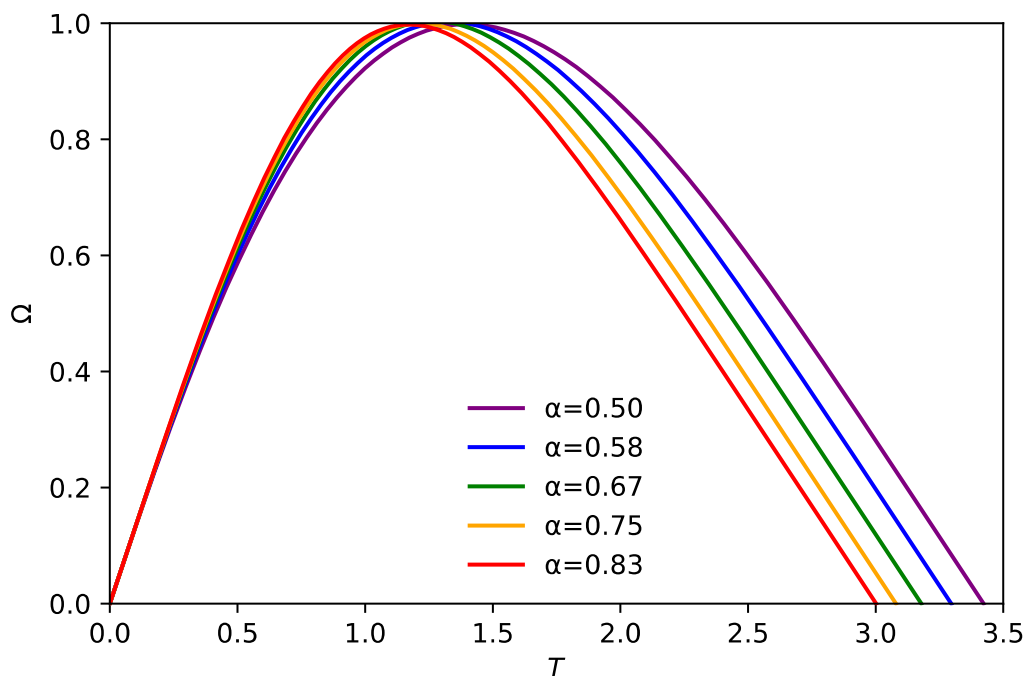


Рис. 7. Залежність кутової швидкості від часу при різних параметрах α

На Рис. 7 зі зменшенням коефіцієнту α графіки підіймаються в незначній мірі, а максимум зсуваються по осі часу у праву сторону.

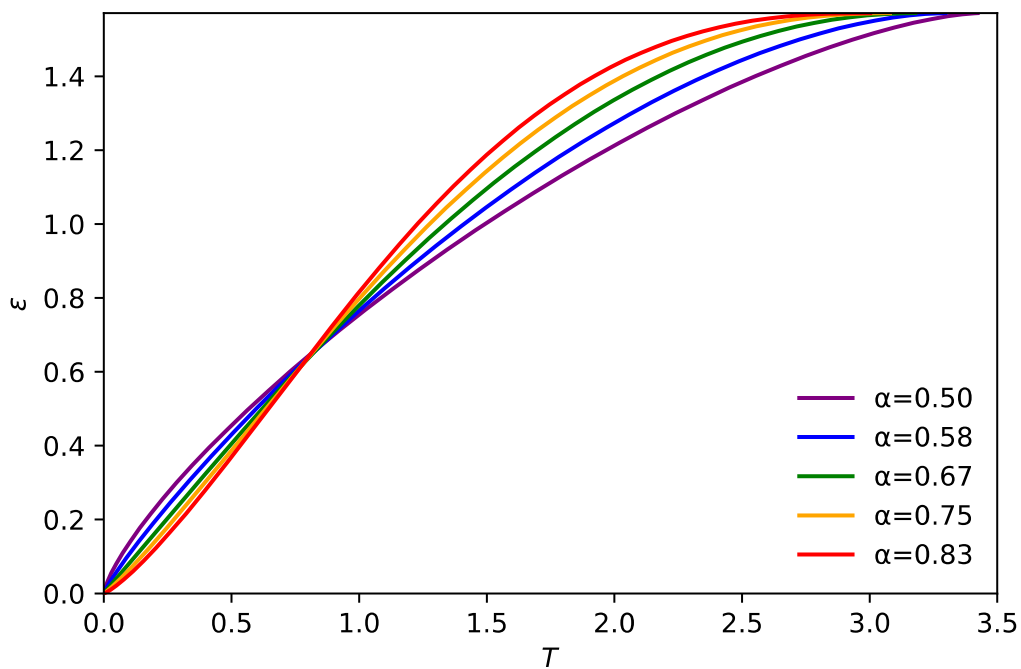


Рис. 8. Залежність кута нахилу від часу при різних параметрах α

На рис. 8 теж помічена слабка залежність функції від параметру α . При зменшенні параметру функції трішки більше вигинаються, але в цілому залишаються майже незмінними.

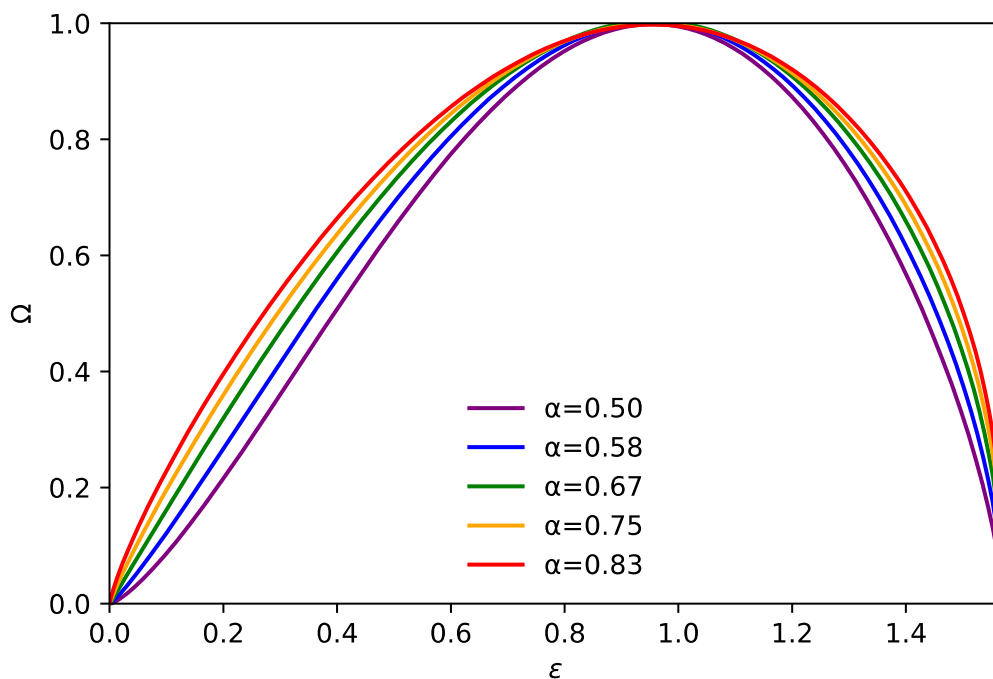


Рис. 9 Залежність кутової швидкості від кута нахилу при різних параметрах α

На Рис. 9 можна бачити незначне змінення функції при зменшенні параметру α . Функція стає більш вигнутою, але максимуми не змінюються.

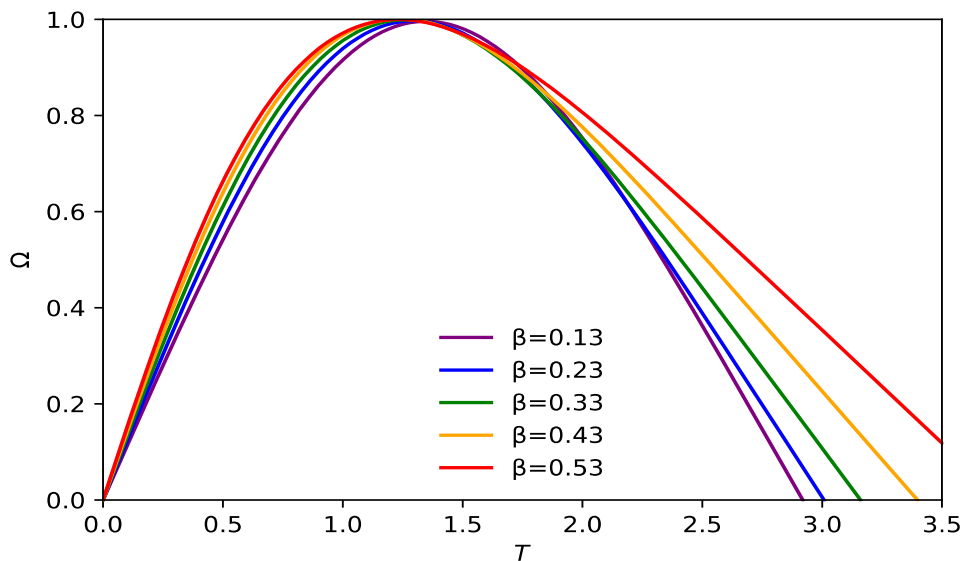


Рис. 10. Залежність кутової швидкості від часу при різних параметрах β

На Рис. 10-12 показані зміни графіків функцій при різних значеннях параметра β . Як можна бачити на першому графіку, при збільшенні параметру β функція вигинається вгору, але у незначній мірі.

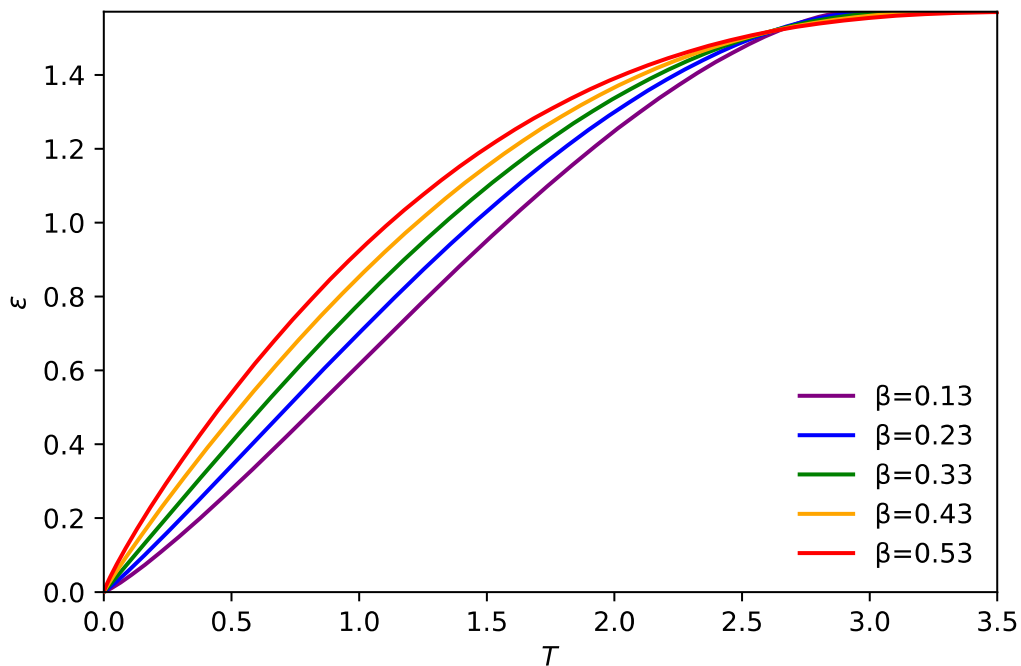


Рис. 11. Залежність кута нахилу від часу при різних параметрах β

На Рис. 12 видно, що при збільшенні параметру β функції та їх максимуми рухаються праворуч, але не змінюють свою поведінку.

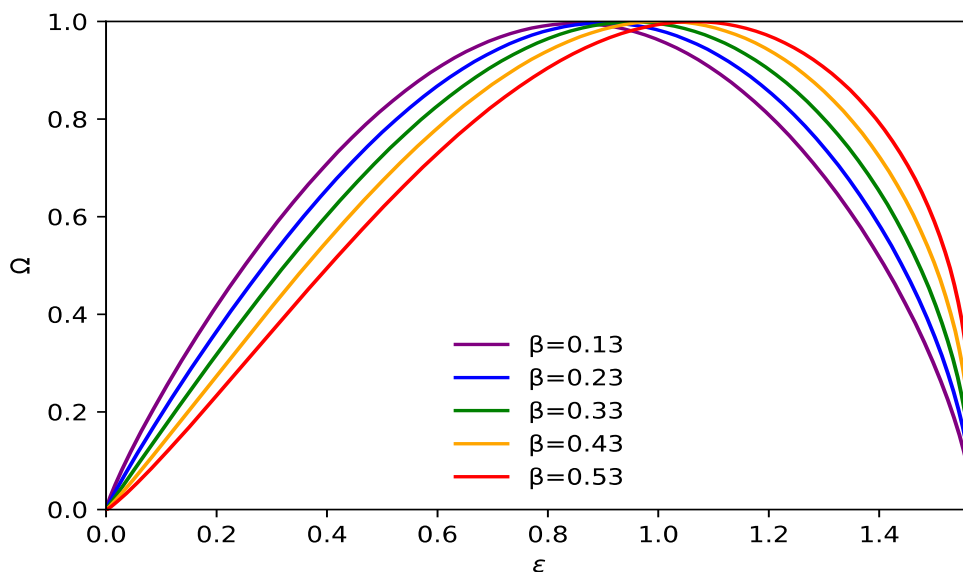


Рис. 12. Залежність кутової швидкості від кута нахилу при різних параметрах β

Загалом, як можна бачити, зміна початкових умов доволі сильно впливають на значення графіків кількісно, але не якісно. В той же час, зміна параметрів майже ніяк не впливає на показники.

В цілому параметри і не повинні сильно змінюватись, як показано в статті (Golubov and Scheeres, 2019) с простих теоретичних міркувань на основі теоретичної моделі зі статті (Golubov, Unukovych, and Scheeres, 2021) теоретично доводиться, що оптимальними параметрами є $\alpha = \frac{2}{3}$ та $\beta = \frac{1}{3}$. Для деяких астероїдів помічені відхилення, але вони незначні і вкладаються в рамки тих значень, що ми промоделиували на графіках.

Розділ 2. Еволюція астероїда під впливом ЯОРП з урахуванням четвертої Фур`є гармоніки

Оскільки минула система рівнянь не повністю описує поведінку астероїдів під впливом ЯОРП ефекту, було вирішено додати четвертий член ряду Фур`є. З міркувань симетрії задачі у виразі для цих двох компонент можуть існувати тільки парні синуси та косинуси. Таким чином четверта гармоніка виявляється головною з поки що не врахованих нами гармонік. Саме її врахування дозволяє описати астероїди класу III та VI за класифікацією (Vokrouhlický and Šarek,

2002). Як показав аналіз фотометричних і радарних форм астероїдів (Golubov and Scheeres, 2019), на такі астероїди класу III та VI припадає близько 20% усіх відомих форм астероїдів. Крім того, ще близько 30% форм астероїдів, хоч і належать до класів I і II, але демонструють значні відхилення від канонічної моделі з другою гармонікою. Врахування четвертої Фур'є-гармоніки дає найпростіший спосіб промоделювати такі відхилення.

Тоді рівняння руху астероїда набувають форми:

$$\frac{d\Omega}{dT} = \cos 2\varepsilon + \gamma \cos 4\varepsilon + \beta$$

$$\Omega \frac{d\varepsilon}{dT} = \alpha \sin 2\varepsilon + \delta \sin 4\varepsilon$$

де γ та δ довільні коефіцієнти, а для коефіцієнтів α та β можна прийняти канонічні значення $\frac{2}{3}$ та $\frac{1}{3}$ відповідно.

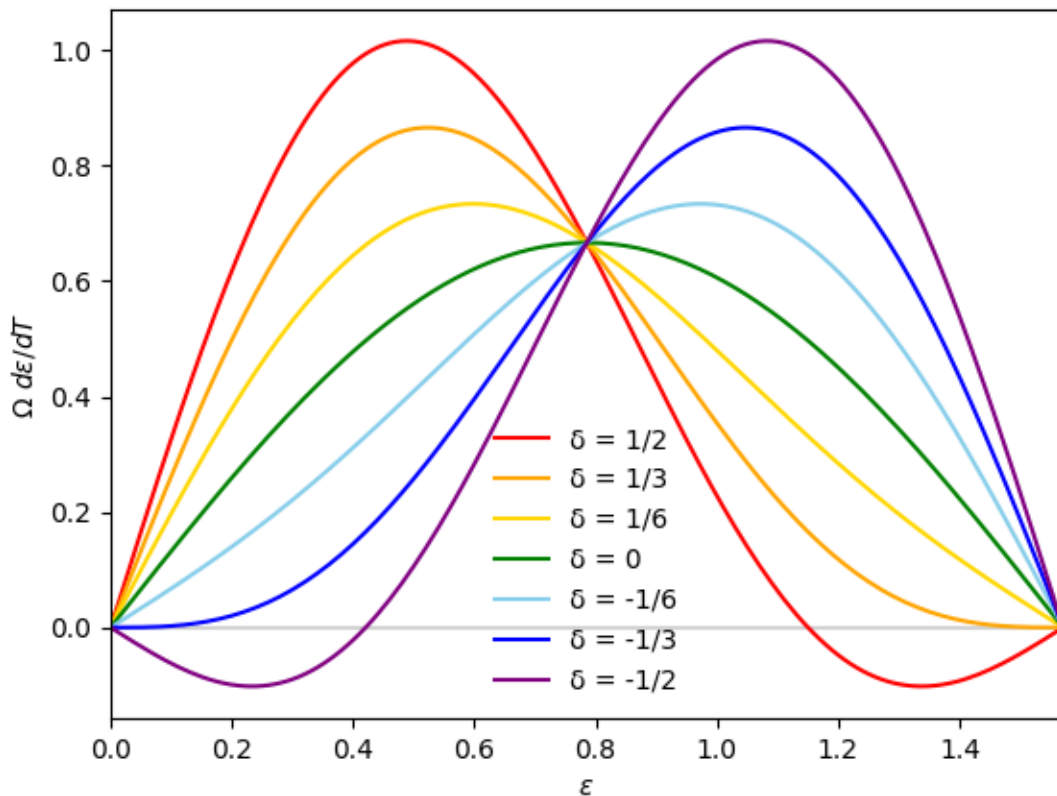


Рис. 12. Залежність $\Omega \frac{d\varepsilon}{dT}$ від кута нахилу

На Рис.12 показано залежність функції $\Omega \frac{d\varepsilon}{dT}$ від кута нахилу при різних значеннях коефіцієнта δ . При значенні коефіцієнта $-\frac{1}{2}$ та $\frac{1}{2}$ у функції з'являється додатковий корінь. При значенні коефіцієнта 0 графік функції є простою синусоїдою як в канонічній моделі.

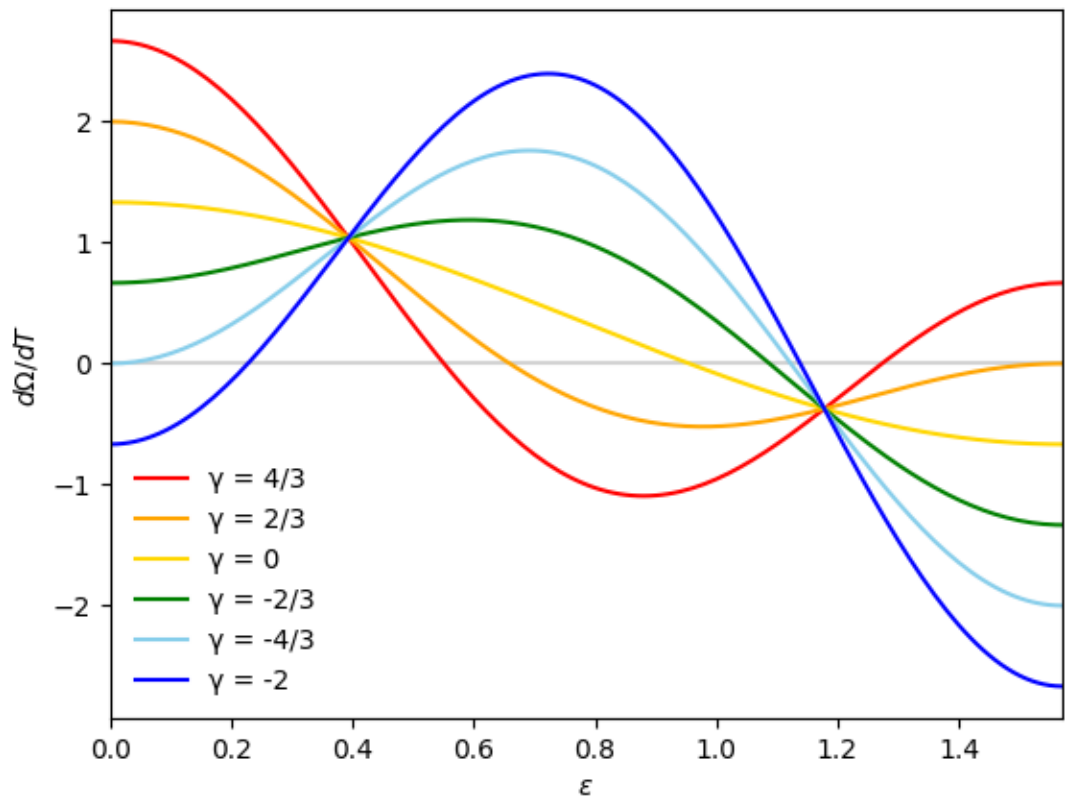


Рис. 13. Залежність $\frac{d\Omega}{dT}$ від кута нахилу

На Рис. 13 показана залежність $\frac{d\Omega}{dT}$ від кута нахилу при різних значеннях коефіцієнта γ . При значенні коефіцієнта 0 ми маємо просту синусоїдальну залежність, як в канонічній моделі. При γ від $-\frac{4}{3}$ до $\frac{2}{3}$ графік відхиляється від синусоїди, але має таку ж якісну поведінку – з єдиним коренем між 0 та $\frac{\pi}{2}$. Для значень γ менших за $-\frac{4}{3}$ з'являється додатковий корінь біля 0. А для γ більше $\frac{2}{3}$ з'являється додатковий корінь біля $\frac{\pi}{2}$.

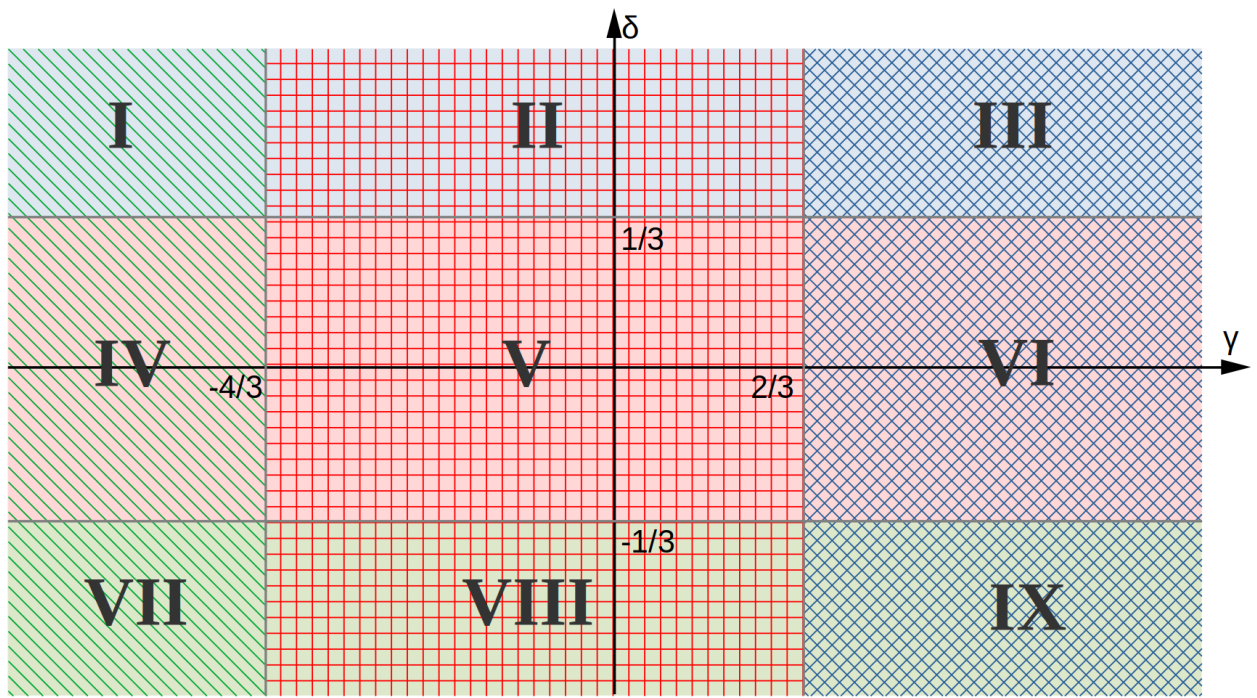


Рис. 14. Діаграма коефіцієнтів δ та γ

В результаті площина значень коефіцієнтів δ та γ розпадається на 9 областей, представлених на Рис. 14 з різною поведінкою розв'язків. В областях IV-VI $\frac{d\varepsilon}{dT}$ не має нетривіальних коренів. А в областях II, V, VIII $\frac{d\Omega}{dT}$ має єдиний корінь. В результаті канонічному розв'язку рівняння, дослідженому в роботі (Golubov and Scheeres, 2019), відповідає область V.

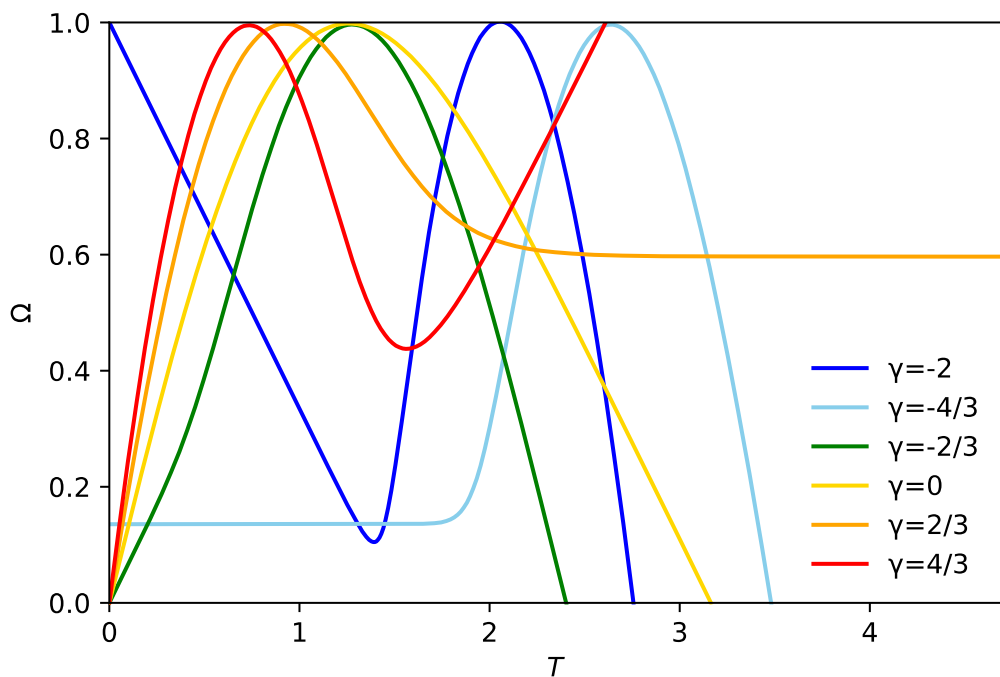


Рис. 15. Залежність кутової швидкості від часу для різних γ

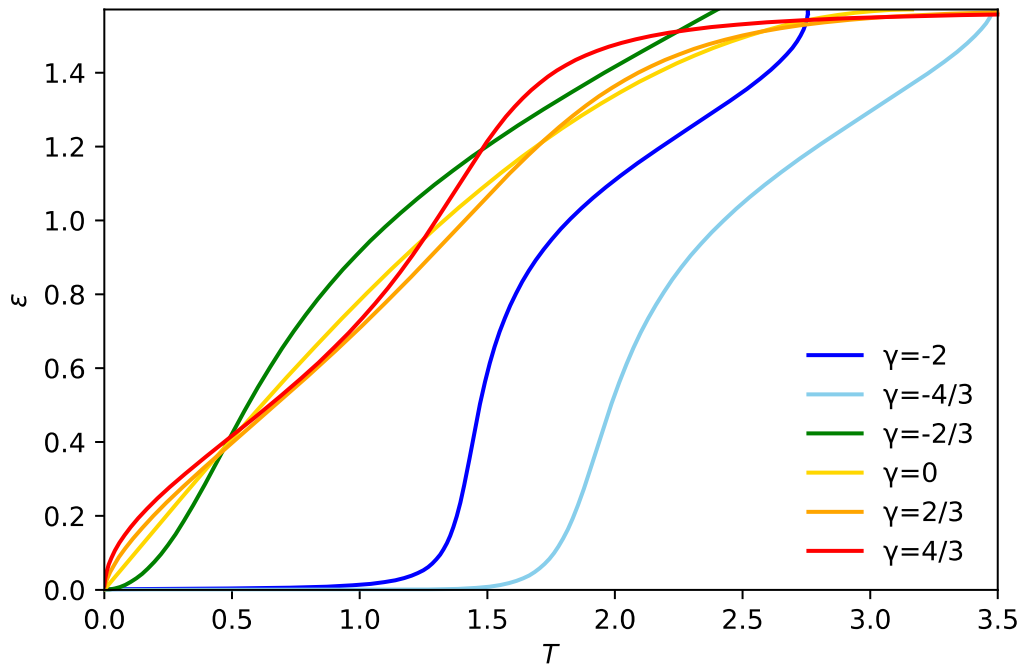


Рис. 16. Залежність кута нахилу від часу для різних γ

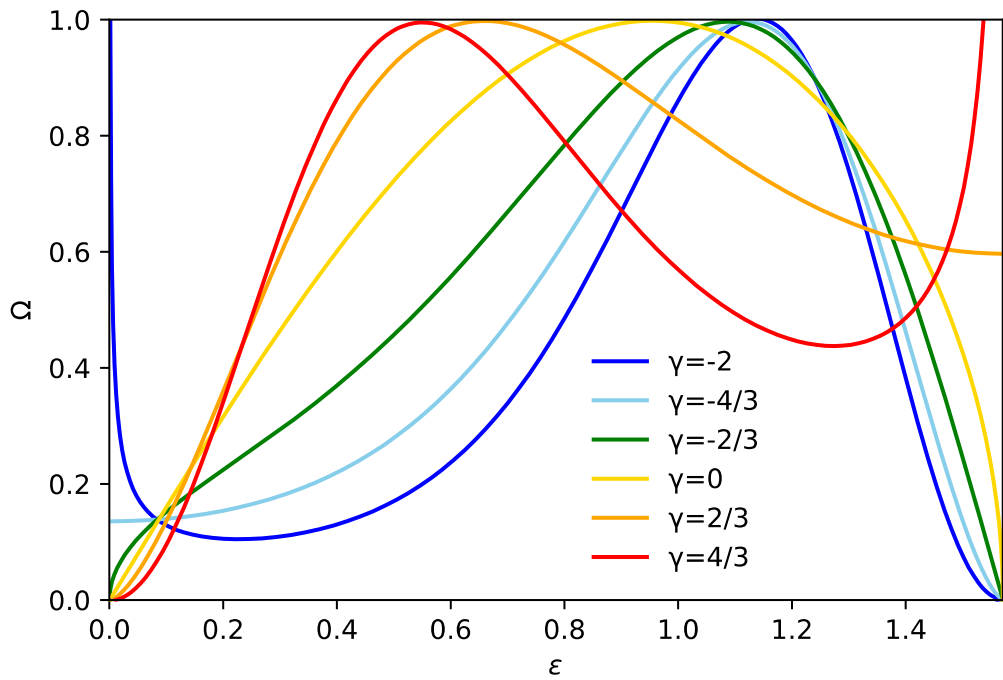


Рис. 17. Залежність кутової швидкості від кута нахилу при різних γ

На Рис. 15-17 представлена поведінка розв'язків для різних значень γ . Бачимо, що для $-\frac{4}{3} < \gamma < \frac{2}{3}$ якісна поведінка астероїда така ж, як і в канонічному випадку: еволюційні траєкторії починаються від малих значень Ω зі значеннями ε близькими до 0 або $\frac{\pi}{2}$, після чого астероїд прискорюється, знову сповільнюється, монотонно змінює ε і закінчує свій ЯОРП-цикл з малими значеннями Ω і значеннями ε близькими до $\frac{\pi}{2}$ або 0. Ця поведінка відповідає області V на Рис. 14.

На границях області V значення Ω для фазових траєкторій астероїда не прямує до 0, коли ε прямує до 0 або $\frac{\pi}{2}$. Більш того, в областях II і VIII Ω прямує до нескінченності, коли ε прямує до 0 або $\frac{\pi}{2}$. Такі «розомкнуті» траєкторії не повертають астероїд до нутаційного стану в кінці ЯОРП-циклу, натомість неминуче призводять його до руйнування. Така поведінка якісно відрізняється від канонічної поведінки астероїдів з області V. Це може означати, що на форми астероїдів діє «природний добір», який ефективніше руйнує астероїди з областей II і VIII, призводячи до надлишку астероїдів з області V в популяції.

Висновки:

1. В рамках канонічної моделі ЯОРП-ефекту (наближення моменту сил тригонометричними функціями від 2ε , де ε – нахил осі астероїда) знайдено аналітичні і чисельні розв'язки для рівняння еволюції оберտального стану астероїда і досліджено їхню залежність від керуючих параметрів.
2. Зроблено перші кроки в бік побудови більш загальної моделі, яка включає наступний член ряду Фур'є (тригонометричні функції від 4ε у виразі для моменту сил ЯОРП). Аналітично проведено класифікацію типів еволюції астероїдів в залежності від значень

керуючих параметрів і знайдено чисельні розв'язки для ілюстрації різних типів еволюції.

3. Виявлено, що включення четвертої гармоніки може призводити до неминучого руйнування астероїда на кожному ЯОРП-циклі – ефекту, що був відсутній у канонічній моделі.

Перелік використаної літератури

1. William F. Bottke, Jr., David Vokrouhlicky, David P. Rubincam, and David Nesvorny (2006). The Yarkovsky and YORP Effects: Implications for Asteroid Dynamics *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, 34:157–91.
2. J.Durech, D.Vokrouhlický, P.Pravec, Yu.Krugly , D.Polishook, J.Hanuš, F.Marchis, A.Rozěk, C. Snodgrass, L. Alegre, V. V. Ayvasian, Z. Donchev, P. Fatka, N. Gaftonyuk, K. Hornoch, R. Ya. Inasaridze, E. Khalouei, H. Kucřáková, P. Kušnirák, O. Kvaratskhelia, J. Oey, A. Sergeev, and I. Slyusarev (2023). YORP detections. *Astronomy & Astrophysics*.
3. Oleksiy Golubov, Vladyslav Unukovych, and Daniel J. Scheeres (2021). Limiting Behavior of Asteroid Obliquity and Spin Using a Semi-analytic Thermal Model of the YORP Effect. *The Astronomical Journal*, 162(1).
4. Golubov, O., Kravets, Y., Krugly, Yu. N., & Scheeres, D. J. 2016a, *MNRAS*, 458, 3977
5. Golubov, O., Kravets, Y., Krugly, Yu. N., & Scheeres, D. J. 2018a, *MNRAS*, 473, 1784
6. Oleksiy Golubov and Daniel J. Scheeres (2019). Systematic Structure and Sinks in the YORP Effect. *The Astronomical Journal*, 157:105.
7. Rubincam, D (2000). "Radiative Spin-up and Spin-down of Small Asteroids". *Icarus*, 148 (1): 2–11.
8. Adam H. Greenberg, Jean-Luc Margot, Ashok K. Verma, Patrick A. Taylor, and Susan E. Hodge (2023). Yarkovsky Drift Detections for 247 Near-Earth Asteroids 'The *Astronomical Journal*, 159:92.
9. Vokrouhlický, D. and Čapek, D., 2002. YORP-induced long-term evolution of the spin state of small asteroids and meteoroids: Rubincam's approximation. *Icarus*, 159(2), pp.449-467.