Харьковский национальный университет
имени В.Н. Каразина

Ю.М. Дюкарев

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие для студентов
физического и радиофизического факультетов

Харьков - 2008

Содержание

1 Классические и геометрические вероятности

1. Пусть некоторый эксперимент может закончиться одним из n *элементарных исходов* $\omega_1,\ \omega_2, \ldots, \omega_n$. Множество всех элементарных исходов называется *пространством элементарных событий* и обозначается

$$\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2, \ldots, \omega_n\}.$$

Произвольное подмножество A множества Ω называется *событием.* Вероятностью события A называется число

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}\ . \tag{1.1}$$

Здесь и в дальнейшем $\#A$ и $\#\Omega$ обозначают число элементов множеств A и Ω соответственно. Ясно, что вероятность каждого элементарного события равна $1/n$, т.е. все элементарные события "равновероятны". Отсюда следует, что вероятность произвольного события A равна сумме вероятностей элементарных событий, из которых оно состоит. Вероятности, задаваемые формулой (1.1), называются *классическими.*

Пример 1.1. *Брошено две игральные кости. Найти вероятность события* $A = \{$*сумма выпавших очков равна* $7\}$.

Элементарные события будем описывать парой чисел (i, j), где i – число очков, выпавших на первой кости, j – число очков, выпавших на второй кости. Поэтому пространство элементарных событий

$$\begin{array}{rclcccccc}
\Omega & = & \{ & (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (\mathbf{1},\mathbf{6}) \\
 & & & (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (\mathbf{2},\mathbf{5}) & (2,6) \\
 & & & (3,1) & (3,2) & (3,3) & (\mathbf{3},\mathbf{4}) & (3,5) & (3,6) \\
 & & & (4,1) & (4,2) & (\mathbf{4},\mathbf{3}) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
 & & & (5,1) & (\mathbf{5},\mathbf{2}) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
 & & & (\mathbf{6},\mathbf{1}) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)\ \ \}.
\end{array}$$

Здесь жирным шрифтом выделены элементарные события, составляющие событие A. Имеем

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}\ .$$

2. Пусть дано произвольное конечное множество

$$\mathcal{A} = \{a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_n\},$$

которое мы будем называть *генеральной совокупностью.*

Выборкой без возвращения объема $k \le n$ из генеральной совокупности $\mathcal{A}$ называется упорядоченная последовательность различных элементов генеральной совокупности $\{a_{j_1},\ a_{j_2}, \ldots a_{j_k}\}$. Выборку без возвращения объема $k \le n$ можно построить следующим образом: элемент a_{j_1} выбираем из множества $\mathcal{A}$; элемент a_{j_2} выбираем из множества $\mathcal{A} \setminus a_{j_1}$ и т.д. Ясно, что число таких выборок совпадает с числом размещений из n по k:

$$(n)_k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

При $k = n$ выборки без возвращения называются *перестановками.* Количество перестановок задается формулой

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1.$$

Рассмотрим пространство элементарных событий, состоящее из всех выборок без возвращения из заданной генеральной совокупности. Каждой такой выборке без возвращения припишем вероятность $1/(n)_k$ и будем называть ее случайной. Таким образом, на множестве выборок без возвращения определены классические вероятности.

Пример 1.2. *Найти вероятность того, что в случайной выборке без возвращения* $a_{j_1} = a_1$ *и* $a_{j_2} = a_2$.

Первые два места выборки заняты фиксированными элементами $a_{j_1} = a_1$ и $a_{j_2} = a_2$. Остальные $k = 2$ места могут быть заняты любыми оставшимися $n-2$ элементами генеральной совокупности. Следовательно, число выборок без возвращения с элементами a_1 и a_2 на первых местах равно $(n-2)_{k-2}$. Поэтому искомая вероятность равна

$$\frac{(n-2)_{k-2}}{(n)_k} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

3. *Выборкой с возвращением объема* k из генеральной совокупности $\mathcal{A}$ называется упорядоченная последовательность необязательно различных элементов генеральной совокупности $\{a_{j_1},\ a_{j_2}, \ldots, a_{j_k}\}$. Выборку с возвращением произвольного объема k можно построить следующим образом: элемент a_{j_1} выбираем из множества $\mathcal{A}$; элемент a_{j_2} снова выбираем из множества $\mathcal{A}$ и т.д. Ясно, что число таких выборок равно n^k.

Рассмотрим пространство элементарных событий, состоящее из всех выборок с возвращением объема k из заданной генеральной совокупности. Каждой такой выборке припишем вероятность $1/n^k$ и будем называть ее случайной. Таким образом, на множестве выборок с возвращением определены классические вероятности.

Пример 1.3. *Найти вероятность того, что в случайной выборке с возвращением объема* $k \le n$ *все элементы будут разными.*

Число выборок с возвращением с разными элементами равно числу выборок без возвращения. Поэтому искомая вероятность равна $(n)_k/n^k$.

4. Рассмотрим выборки без возвращения объема $k \le n$ из генеральной совокупности $\mathcal{A}$. Нас будет интересовать число выборок без возвращения, отличающихся друг от друга только *составом.* Число выборок без возвращения объемом $k \le n$, имеющих одинаковый состав и различающихся только порядком элементов, равно $k!$. Поэтому число выборок, различающихся только составом, равно

$$\frac{(n)_k}{k!} = \binom{n}{k}.$$

Последняя формула задает *число сочетаний* из n по k. Следует отметить, что число k-элементных подмножеств n-элементного множества равно $\binom{n}{k}$.

Пример 1.4. *В урне имеется* n *шаров, из них* n_1 *черных и* $n - n_1$ *белых. Производится выборка без возвращения объема* k*. Найти вероятность того, что в выборке будет ровно* k_1 *черных шаров.*

Количество всех выборок, различающихся составом, равно $\binom{n}{k}$. Из всех n_1 черных шаров k_1 черных шаров можно выбрать $\binom{n_1}{k_1}$ способами. Из всех $n-n_1$ белых шаров $k-k_1$ белых шаров можно выбрать $\binom{n-n_1}{k-k_1}$ способами. Любой набор черных шаров может сочетаться с любым набором белых шаров. Поэтому всех выборок объема k, различающихся только составом и содержащих ровно k_1 черных шаров, будет $\binom{n_1}{k_1}\binom{n-n_1}{k-k_1}$. Следовательно, искомая вероятность равна

$$P_{n_1,n}(k_1,k) = \binom{n_1}{k_1}\binom{n-n_1}{k-k_1} \Big/ \binom{n}{k}.$$

Последовательность чисел $P_{n_1,n}(0,k),\ P_{n_1,n}(1,k),\ P_{n_1,n}(2,k),\dots P_{n_1,n}(k,k)$ называется *гипергеометрическим распределением.*

5. Пусть элементарные исходы некоторого эксперимента заполняют ограниченную область Ω, содержащуюся в n-мерном пространстве и имеющую конечный объем $\mu(\Omega) > 0$. Событиями называются произвольные подмножества $A \subset \Omega$, имеющие конечный объем $\mu(A)$. Вероятностью события $A \subset \Omega$ называется

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}\ . \tag{1.2}$$

Вероятности, задаваемые формулой (1.2), называются *геометрическими.* Геометрические вероятности зависят только от объема события $\mu(A)$ и не зависят от формы и положения события A в пространстве элементарных событий Ω. Поэтому геометрические вероятности называют еще *равномерным распределением* в области Ω.

Пример 1.5. Задача Бюффона. *Плоскость расчерчена параллельными прямыми, расстояние между которыми равно $2a$. На плоскость наудачу брошена игла длины $2l$, $l < a$. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.*

Пусть r – расстояние от центра иглы до ближайшей прямой, а α, $0 \le \alpha \le \pi$ – угол между этой прямой и иглой. Нас интересует только взаимное расположение прямой и иглы, Поэтому в качестве пространства элементарных событий выберем прямоугольник

$$\Omega = \{(\alpha, r) : 0 \le \alpha \le \pi,\quad 0 \le r \le a\}.$$

Обозначим через A событие, состоящее в том, что игла пересекла прямую.

Тогда
$$A = \{(\alpha, r) : 0 \le \alpha \le \pi, \quad 0 \le r \le l \sin\alpha\}.$$
Вероятность события A равна
$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\int_0^\pi l \sin\alpha d\alpha}{a\pi} = \frac{2l}{a\pi}.$$

Упражнения для аудиторной работы.

1.1. Брошено три монеты. Описать пространство элементарных событий Ω и вычислить вероятности событий
$$A = \{\text{выпало не более двух гербов}\},$$
$$B = \{\text{выпало ровно два герба}\},$$
$$C = \{\text{первая монета выпала гербом вверх}\}.$$

1.2. Четырехтомное сочинение расположено на полке в случайном порядке. Чему равна вероятность того, что тома стоят в должном порядке слева направо? Что крайним слева стоит первый том?

1.3. Ребенок играет 10 буквами разрезной азбуки А А А Е И К М М Т Т. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв он получит слово МАТЕМАТИКА?

1.4. В лифт 8 этажного дома вошли 5 человек. Каждый из них может выйти на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пятеро выйдут на разных этажах.

1.5. Колода состоит из 52 карт. Случайно вытащили 6 карт. Найти вероятность того, что среди этих карт будет король пик.

1.6. В лаборатории работают 6 мужчин и 14 женщины. Случайным образом отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных ровно 3 мужчины.

1.7. Коэффициенты p и q квадратного уравнения
$$x^2 + px + q = 0$$

выбираются на удачу в отрезке $[0, 1]$. Какова вероятность того, что корни этого уравнения будут вещественными?

1.8. Отрезок $[0, 1]$ двумя случайными точками разбит на три отрезка. Какова вероятность того, что из этих отрезков можно сложить треугольник?

Упражнения для домашней работы.

1.9. Брошено две игральные кости. Описать пространство элементарных событий Ω и вычислить вероятности событий

$A = \{$в сумме выпало 6 очков$\}$,

$B = \{$на одной из костей выпало на два очка больше, чем на другой.$\}$

1.10. В семье 4 детей. Описать пространство элементарных событий и, считая вероятность рождения мальчика равной вероятности рождения девочки, вычислить вероятность того, что в семье два мальчика и две девочки.

1.11. В ящике имеются три шара с номерами 1,2,3. По одному из ящика вынимают все шары. Описать пространство элементарных событий и найти вероятность того, что хотя бы у одного шара порядковый номер извлечения из урны совпадает с изображенным на нем номере.

1.12. n друзей садятся по одну сторону прямоугольного стола. Найти вероятность того, что два фиксированных лица A и B сядут рядом, причем B слева от A.

1.13. n друзей садятся за круглый стол. Найти вероятность того, что два фиксированных лица A и B сядут рядом, причем B слева от A.

1.14. У человека в кармане имеется n ключей, из которых только один подходит к двери. Все ключи последовательно извлекаются из кармана. Найти вероятность того, что нужный ключ появился при k-ом извлечении.

1.15. Найти вероятность того, что в колоде из 36 карт места расположения 4 тузов образуют арифметическую прогрессию с шагом 7.

1.16. Симметричную игральную кость бросают 6 раз. Какова вероятность того, что появятся все грани.

1.17. В семье $2n$, $n \geq 1$ детей. Считая, что вероятность рождения мальчика равна вероятности рождения девочки, вычислить вероятность того, что в семье n мальчиков и n девочек.

1.18. Колода состоит из 36 карт. Случайно вытащили 3 карты. Найти вероятность того, что среди этих карт будет хотя бы один туз.

1.19. На полке в случайном порядке расположены 40 книг, среди которых имеется трехтомник А.С. Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома находятся в порядке возрастания слева направо (но не обязательно рядом).

1.20. В лотерее n билетов, из которых m выигрышные. Какова вероятность хотя бы одного выигрыша для того, кто имеет k билетов?

1.21. Колоду, состоящую из 36 карт, наудачу разделяют на две равные части. Чему равна вероятность того, что в обеих частях окажется по равному числу красных и черных карт?

1.22. На полу нарисована сетка с шагом 10 см. На пол случайным образом бросают диск диаметром 5 см. Какова вероятность того, что он не пересечет ни одной линии?

1.23. *Парадокс Бертрана.* В круге радиуса R проведена случайная хорда. Найти вероятность того, что длина этой хорды больше, чем сторона правильного вписанного треугольника.

Искомая вероятность зависит от того, как понимать термин "случайная хорда". Решить задачу для каждого из трех естественных толкований термина "случайная хорда".

а) Середина случайной хорды равномерно распределена в круге.

б) Все случайные хорды параллельны, а их центры равномерно распределены на перпендикулярном диаметре.

в) Один конец случайной хорды закреплен, а другой равномерно распределен на окружности.

2 Условные вероятности

1. Пусть Ω – произвольное пространство элементарных событий. Подмножества множества Ω называются *событиями*. Система подмножеств $\mathcal{A}$ множества Ω называется *алгеброй событий*, если

1) $\Omega \in \mathcal{A}$,

2) вместе с событиями $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{A}$ алгебре событий $\mathcal{A}$ принадлежат и такие подмножества из Ω:

$$
\begin{aligned}
A + B &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ или } \omega \in B\} && \text{(сумма событий)}\\
A \setminus B &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ и } \omega \notin B\} && \text{(разность событий)}\\
AB &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ и } \omega \in B\} && \text{(произведение событий)}\\
\bar{A} &= \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\} && \text{(дополнение события } A).
\end{aligned}
$$

Любой алгебре событий принадлежат пустое множество $\varnothing$ (*невозможное событие*) и множество Ω (*достоверное событие*).

Вероятностью на алгебре событий $\mathcal{A}$ называется отображение $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, которое удовлетворяет условиям

$\mathbf{P}(A) \geq 0$ *для всех* $A \in \mathcal{A}$,

$\mathbf{P}(\Omega) = 1$,

$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$, *если* $AB = \varnothing$.

Вероятностным пространством называется тройка $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P} \rangle$.

2. Пусть дано вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P} \rangle$. И пусть зафиксированы события $A, B \in \mathcal{A}$, $\mathbf{P}(A) > 0$. *Условной вероятностью события* B*, при условии что произошло событие* A*, называется*

$$\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(AB)/\mathbf{P}(A).$$

Отсюда следует формула для вероятности одновременного наступления двух событий (*теорема умножения*)

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A)$$

и формула для *одновременного наступления нескольких событий*

$$P(A_1A_2A_3\dots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\dots P(A_n/A_1A_2\dots A_n).$$

События $A, B \in \mathcal{A}$ называются *независимыми* , если

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Пример 2.1. *К экзамену подготовлено 25 билетов, из которых 5 являются счастливыми. Студенты берут билеты по очереди. Чему равна вероятность того, что первый студент взял счастливый билет? Что второй студент взял счастливый билет?*

Введем события

1с – первый студент взял счастливый билет,

1н – первый студент взял не счастливый билет,

2с – второй студент взял счастливый билет,

2н – второй студент взял не счастливый билет.

Рассмотрим пространство элементарных событий

$$\Omega = \{1с2с,\ 1с2н,\ 1н2с,\ 1н2н\}.$$

Найдем вероятности элементарных событий

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(1с2с) &= \mathbf{P}(1с)\mathbf{P}(2с|1с) = \frac{5}{25}\cdot\frac{4}{24}\ ,\\
\mathbf{P}(1с2н) &= \mathbf{P}(1с)\mathbf{P}(2н|1с) = \frac{5}{25}\cdot\frac{20}{24}\ ,\\
\mathbf{P}(1н2с) &= \mathbf{P}(1н)\mathbf{P}(2с|1н) = \frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24}\ ,\\
\mathbf{P}(1н2н) &= \mathbf{P}(1н)\mathbf{P}(2н|1н) = \frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\ .
\end{aligned}$$

Теперь имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(1с) &= \mathbf{P}(1с2с) + \mathbf{P}(1с2н) = \frac{5}{25}\cdot\frac{4}{24} + \frac{5}{25}\cdot\frac{20}{24} = \frac{1}{5}\ ,\\
\mathbf{P}(2с) &= \mathbf{P}(1с2с) + \mathbf{P}(1н2с) = \frac{5}{25}\cdot\frac{4}{24} + \frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24} = \frac{1}{5}\ .
\end{aligned}$$

Пример 2.2. *Вероятность попадания в цель из первого орудия равна 0.6, а из второго – 0.8. В цель выстрелили одновременно из двух орудий. Найти* *вероятность события*

$$A = \{\textit{в цель попали хотя бы из одного орудия}\}.$$

Введем события

1_+ – в цель попали из первого орудия,

1_- – в цель не попали из первого орудия,

2_+ – в цель попали из второго орудия,

2_- – в цель не попали из второго орудия.

Рассмотрим пространство элементарных событий

$$\Omega = \{1_+2_+,\ 1_+2_-,\ 1_-2_+,\ 1_-2_-\}.$$

Найдем вероятности элементарных событий

$$\mathbf{P}(1_+2_+) = 0.6 \cdot 0.8, \qquad \mathbf{P}(1_+2_-) = 0.6 \cdot 0.2,$$

$$\mathbf{P}(1_-2_+) = 0.4 \cdot 0.8, \qquad \mathbf{P}(1_-2_-) = 0.4 \cdot 0.2.$$

Теперь имеем

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(1_+2_+) + \mathbf{P}(1_+2_-) + \mathbf{P}(1_-2_+) = 0.48 + 0.12 + 0.32 = 0.92.$$

3. *Пусть дано вероятностное пространство* $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P} \rangle$ *и события*

$$B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$$

таковы, что $B_iB_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\Omega = B_1 + B_2 + \ldots B_n$. *Тогда для любого события* $A \in \mathcal{A}$ *имеет место формула полной вероятности*

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(A|B_1) + \mathbf{P}(B_2)\mathbf{P}(A|B_2) + \cdots + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(A|B_n). \qquad (2.1)$$

Пример 2.3. *В трех урнах имеется* N_1, N_2 *и* N_3 *шаров белого и черного цвета. Количество белых шаров в первой урне равно* n_1, *во второй –* n_2 *и в третей –* n_3. *Из случайно выбранной урны выбрали случайный шар. Найти вероятность того, что он оказался белым.*

Рассмотрим события

$$\begin{aligned}
A &= \{\text{выбранный шар оказался белым }\},\\
B_1 &= \{\text{выбрали 1-ю урну}\},\\
B_2 &= \{\text{выбрали 2-ю урну}\},\\
B_3 &= \{\text{выбрали 3-ю урну}\}.
\end{aligned}$$

По формуле полной вероятности имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(A|B_1) + \mathbf{P}(B_2)\mathbf{P}(A|B_2) + \mathbf{P}(B_3)\mathbf{P}(A|B_3)\\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{n_1}{N_1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{n_2}{N_2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{n_3}{N_3} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \frac{n_3}{N_3}\right).
\end{aligned}$$

4. *Пусть дано вероятностное пространство $\langle\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}\rangle$ и события*

$$B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{A}$$

таковы, что $B_iB_j = \varnothing,\ i \neq j,\quad \Omega = B_1 + B_2 + \dots B_n$. И пусть событие $A \in \mathcal{A}$. Тогда имеет место формулы Байеса

$$\mathbf{P}(B_1|A) = \frac{\mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(A|B_1)}{\mathbf{P}(A)}, \dots, \mathbf{P}(B_n|A) = \frac{\mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}(A|B_n)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Здесь $\mathbf{P}(A)$ вычисляется по формулам (2.1).

Пример 2.4. *Известно, что 4 % всех мужчин и 0.25 % всех женщин являются дальтониками. Наудачу выбранное лицо оказалось дальтоником. Чему равна вероятность того, что выбран мужчина? Что выбрана женщина?*

Рассмотрим события

$$\begin{aligned}
A &= \{\text{выбранное лицо является дальтоником}\},\\
B_1 &= \{\text{выбранное лицо является мужчиной}\},\\
B_2 &= \{\text{выбранное лицо является женщиной}\}.
\end{aligned}$$

По формуле полной вероятности имеем

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(A|B_1) + \mathbf{P}(B_2)\mathbf{P}(A|B_2) = \frac{1}{2}\cdot\Big(0.04 + 0.0025\Big) = \frac{17}{800}.$$

По формулам Байеса имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(B_1|A) &= \frac{\mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(A|B_1)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{(1/2)\cdot(0.04)}{17/800} = \frac{16}{17}.\\
\mathbf{P}(B_2|A) &= \frac{\mathbf{P}(B_2)\mathbf{P}(A|B_2)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{(1/2)\cdot(0.0025)}{17/800} = \frac{1}{17}.
\end{aligned}$$

Упражнения для аудиторной работы.

2.1. Вероятность того, что письмо находится в одном из 8 ящиков письменного стола равна p. Просмотрели 7 ящиков и письма не нашли. Какова вероятность того, что его можно найти в 8 ящике?

2.2. Студент пришел на экзамен, зная 20 вопросов из 25. Ему задают три вопроса. Найти вероятность следующих событий

$$A_i = \{\text{студент знает ответы на } i \text{ вопросов из трех}\}, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

2.3. Монету бросают дважды. Рассмотрим события

$$A = \{\text{ При первом бросании выпал герб}\},$$

$$B = \{\text{ При втором бросании выпал герб }\}.$$

Показать, что события A и B независимы.

2.4. В семье двое детей. Какова вероятность того, что оба ребенка мальчики, если известно, что:

а) старший ребенок – мальчик;

б) по крайне мере один из детей – мальчик?

2.5. Из урны, содержащей 3 белых и 5 черных шаров, два игрока по очереди вынимают шары. Выигрывает тот, кто первым вытащит белый шар. Найти вероятности выигрыша для первого и второго игрока.

2.6. Из полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую наудачу извлеченную кость можно приставить к первой.

2.7. Из урны, содержащей 2 белых и 3 черных шара наудачу извлекаются два шара, после чего в урну добавляют один белый шар. Найти вероятность того, что после этого наудачу выбранный из урны шар окажется белым.

2.8. В урне имеется две монеты: симметричная монета с вероятностью выпадения герба $1/2$, и несимметричная монета с вероятностью выпадения герба $1/3$. Наудачу выбирается и подбрасывается одна из монет. Она выпала гербом. Найти вероятность того, что выбрана симметричная монета и вероятность того, что выбрана несимметричная монета.

2.9. При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить заболевание у больного туберкулезом равна $1 - \beta$. Вероятность принять здорового за больного равна α. Пусть доля больных туберкулезом по отношению ко всему населению равна γ. Найти условную вероятность того, что человек здоров, если он был признан больным при обследовании.

Упражнения для домашней работы.

2.10. Брошено две игральные кости. Какова вероятность того, что выпали две цифры 3, если известно, что сумма выпавших очков делится на три?

2.11. Колода состоит из 52 карт. Вынимают две карты. Какова вероятность того, что обе эти карты тузы?

2.12. Исследовать связь между темным цветом глаз у отца (событие A) и у сына (событие B) на основании следующих данных, полученных при переписи населения Англии и Уэльса в 1891 году.

$$AB = 5\%,\ A\bar{B} = 7.9\%,\ \bar{A}B = 8.9\%,\ \bar{A}\bar{B} = 78.2\%$$

2.13. Известно, что вероятность двум близнецам быть одного пола равна 0.64, причем вероятность вообще рождения мальчика равна 0.51. Найти вероятность того, что второй близнец мальчик, если первый близнец мальчик.

2.14. Из колоды, содержащей 36 карт, последовательно вынимают две карты. а) Найти вероятность того, что вторая карта окажется тузом. б) Найти вероятность того, что вторая карта окажется тузом, если известно, что первая карта была тузом.

2.15. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шаров и 1 желтый шар, два игрока по очереди вынимают шары. Выигрывает тот, кто первым вытащит белый шар. Если один из игроков вытащил желтый шар, то объявляется ничья. Найти вероятности выигрыша для первого и второго игрока и вероятность ничьей.

2.16. Из колоды, содержащей 36 карт, наугад выбирается одна. Показать, что события

$$A = \{\text{выбрана пика }\} \;\; B = \{\text{выбрана дама}\}$$

независимы. Показать, что это не так, если в колоду добавлена одна "пустая"карта.

2.17. В единичный квадрат наудачу брошена точка. Пусть A – событие, состоящее в том, что абсцисса брошенной точки не меньше a, $0 < a < 1$, а B – событие, состоящее в том, что ордината брошенной точки не меньше b, $0 < b < 1$. Показать, что события A и B независимы.

2.18. Пусть дана монета, на которой герб выпадает с вероятностью p, а решка – с вероятностью q $(p, q > 0, \;\; p + q = 1)$. Два игрока по очереди бросают монету. Выигрывает тот игрок, у которого первым выпадет герб. Найти вероятности выигрыша для первого и второго игрока.

2.19. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом, второго – 10% и третьего – 5%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30% телевизоров с первого завода, 20% – со второго и 50% – с третьего?

2.20. В первой урне находится 1 белый и 9 черных шаров, а во второй – 1 черный и 5 белых шаров. Из каждой урны удалили по одному случайному шару, а оставшиеся шары ссыпали в третью урну. Найти вероятность того, что шар, вынутый из третьей урны, окажется белым.

2.21. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95. Для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0.8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Чему равна вероятность того, что винтовка была с оптическим прицелом? Без оптического прицела?

2.22. Для участия в отборочных спортивных соревнованиях выделено из первой группы курса 4 студента, из второй группа - 6 студентов и из третьей группы - 5 студентов. Вероятности того, что в результате отборочных соревнований в сборную института попадет студент первой, второй и третьей группы равны соответственно 0.9, 0.7 и 0.8. Некоторый студент в результате соревнований попал в сборную института. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот студент?

2.23. Пусть имеется n одинаковых урн. Известно, что урна с номером i содержит m_i белых шаров; всего же шаров в этой урне N_i. Наугад выбрана урна, а из нее шар. Какова вероятность того, что взят белый шар?

2.24. В урне находится n шаров белого и черного цвета. Имеется следующие равновероятные гипотезы о количестве белых шаров в урне

$$B_0 = \{\text{в урне 0 белых шаров}\}, ..., B_n = \{\text{в урне } n \text{ белых шаров}\}.$$

Пусть A – событие, состоящее в том, что наугад взятый шар оказался белым. Вычислить апостериорные вероятности $P(A/B_i),\ i = 0, 1, ..., n$.

2.25. По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: AAAA, BBBB, CCCC. Вероятности каждой последовательности равны соответственно 0.3; 0.4; 0.3. В результате шумов буква принимается правильно с вероятностью 0.6. Вероятности принять переданную букву за две другие равны 0.2 и 0.2. Буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что передано AAAA, если на приемном устройстве получено ABCA.

3 Схема Бернулли и теорема Пуассона

1. Пусть даны два вещественных числа $p > 0$ и $q > 0$ такие, что $p + q = 1$. В *схеме Бернулли* рассматривается последовательность из $n \geq 1$ независимых испытаний $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Каждое из этих испытаний может закончится одним из двух исходов:

1 – успех с вероятностью p; **0** – неудача с вероятностью q.

С этим экспериментом свяжем пространство элементарных событий

$$\Omega = \{\omega = (\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n) : \xi_i = \mathbf{1} \text{ } \textit{или} \text{ } \xi_i = \mathbf{0}, \quad 1 \leq i \leq n\}.$$

Вероятности элементарных событий, в силу независимости испытаний, задаются формулами

$$\mathbf{P}(\omega) = \mathbf{P}(\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n) = \mathbf{P}(\xi_1) \cdot \mathbf{P}(\xi_2) \cdot \cdots \cdot \mathbf{P}(\xi_n) = p^{\text{число } \mathbf{1} \text{ в } \omega} \cdot q^{\text{число } \mathbf{0} \text{ в } \omega}.$$

Таким образом, с рассматриваемым экспериментом мы связали дискретное вероятностное пространство. Рассмотрим отображение $\mu_n : \Omega \to \mathbb{R}$ пространства элементарных событий во множество вещественных чисел, которое задается формулой

$$\mu_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n.$$

Такие отображения называются *случайными величинами*. Из определения следует, что значением случайной величины μ_n на элементарном событии $\omega = (\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n)$ является количество **1** (успехов) в рассматриваемом элементарном событии.

Случайная величина μ_n может принимать целые значения в пределах от 0 до n. Для каждого возможного значения найдем вероятности $\mathbf{P}\{\mu_n = i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

В пространстве элементарных событий имеется только одно элементарное событие, в котором число успехов равно 0. Это элементарное событие $\omega = (\mathbf{00} \ldots \mathbf{0})$. Его вероятность $\mathbf{P}(\omega) = qq \ldots q = q^n$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\mu_n = 0\} = q^n = \binom{n}{0} p^0 q^n.$$

Одну **1** на n местах можно разместить n способами. Поэтому в пространстве элементарных событий имеется n элементарных событий, в которых число успехов равно 1. Вероятность каждого из таких событий равна pq^{n-1}. Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\mu_n = 1\} = npq^{n-1} = \binom{n}{1} p^1 q^{n-1}.$$

Две **1** на n местах можно разместить $\binom{n}{2}$ способами. Поэтому в пространстве элементарных событий имеется $\binom{n}{2}$ элементарных событий, в которых число успехов равно 2. Вероятность каждого из таких событий равна p^2q^{n-2}. Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\mu_n = 2\} = \binom{n}{2} p^2 q^{n-2}.$$

Продолжая таким образом, мы получим следующую таблицу, в которой указаны все возможные значения случайной величины μ_n и их вероятности:

Значения μ_n	0	1	2	...	n
Вероятности	$\binom{n}{0}p^0q^{n-0}$	$\binom{n}{1}p^1q^{n-1}$	$\binom{n}{2}p^2q^{n-2}$	...	$\binom{n}{n}p^nq^{n-n}$

(3.1)

Распределение вероятностей, задаваемое таблицей (3.1), называется *биномиальным.* Сумма чисел во второй строке таблицы равна 1.

Пример 3.1. *Известно, что вероятность рождения мальчика равна 0.515, а вероятность рождения девочки – 0.485. В семье шестеро детей. Найти вероятность того, что среди детей не более двух девочек.*

Построим упорядоченную последовательность из 6 нулей и единиц по такому правилу: если старший ребенок девочка то первой цифрой будет 1, а если мальчик, то 0; если следующий ребенок девочка то второй цифрой буде 1, а если мальчик, то 0; и т.д. Теперь с нашей задачей естественно связать схему Бернулли с $n = 6$, $p = 0.485$ и $q = 0.515$. Случайная величина μ_6 будет равна количеству девочек в семье. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\mu_6 \le 2\} = \mathbf{P}\{\mu_6 = 0\} + \mathbf{P}\{\mu_6 = 1\} + \mathbf{P}\{\mu_6 = 2\} \\
&\quad = \binom{6}{0} 0.485^0 \cdot 0.515^6 + \binom{6}{1} 0.485^1 \cdot 0.515^5 + \binom{6}{2} 0.485^2 \cdot 0.515^3 \\
&\quad \approx 0.018 + 0.105 + 0.247 = 0.370.
\end{aligned}$$

2. При больших n и малых p (или q) вычисление вероятностей по формулам (3.1) может оказаться затруднительным. В этих случаях бывает полезной следующая *теорема Пуассона.*

Теорема. *Если* $n \to \infty$ *и* $p \to 0$ *так, что* $np \to \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty$, *то*

$$\mathbf{P}\{\mu_n = m\} = \binom{n}{m} p^m q^{n-m} \to \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} \tag{3.2}$$

при любом фиксированном $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Правую часть (3.2) вычисляют (при фиксированном $\lambda > 0$) по таблице

Значения m	0	1	2	$\ldots$	n	$\ldots$
Вероятности	$\frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^1}{1!} \cdot e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda}$	$\ldots$	$\frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda}$	$\ldots$

(3.3)

которая задает *распределение Пуассона.* Сумма чисел во второй строке таблицы равна 1. При решении задач следует иметь виду, что среднее значение случайной величины μ_n равно np и в условиях теоремы Пуассона приблизительно равно параметру λ.

Пример 3.2. *На факультете учится 500 студентов. Какова вероятность того, что первое сентября является днем рождения для* $k = 0, 1, 2, 3$ *студентов данного факультета?*

Это схема Бернулли с количеством испытаний $n = 500 \gg 1$, вероятностью успеха $p = 1/365 = 0.0027397 \ll 1$ и вероятностью неудачи $q = 1 - 1/365 = 0.9972603$. В соответствующем распределении Пуассона параметр $\lambda = np = 500/365 = 1.36986$. Поэтому

$$\begin{aligned}
P\{\mu_{365} = 0\} &= \binom{365}{0} p^0 q^{365} \approx \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = 0.2541. \\
P\{\mu_{365} = 1\} &= \binom{365}{1} p^1 q^{364} \approx \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = 0.3481. \\
P\{\mu_{365} = 2\} &= \binom{365}{2} p^2 q^{363} \approx \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = 0.2385. \\
P\{\mu_{365} = 3\} &= \binom{365}{3} p^3 q^{363} \approx \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = 0.1089.
\end{aligned}$$

Соответствующие значения вероятностей, вычисленные по биномиальному распределению с четырьмя верными знаками, равны 0.2536, 03485, 0,2389, 0,1089.

Пример 3.3. *В партии из 200 изделий каждое изделие может быть бракованным с вероятностью 0.01. Найти вероятность того, что в партии будет ровно три бракованных изделия.*

С задачей естественно связать схему Бернулли с

$$n = 200, \qquad p = 0.01, \qquad q = 0.99, \qquad m = 3, \qquad \lambda = np = 2.$$

Воспользовавшись теоремой Пуассона и таблицей распределения Пуассона, получим

$$\mathbf{P}\{\mu_{200} = 3\} = \binom{200}{3} \cdot 0.01^3 \cdot 0.99^{197} \approx \frac{2^3}{3!} \cdot e^{-2} = 0.18.$$

Пример 3.4. *В лотерее разыгрывается в среднем 1 выигрыш на 100 билетов. Какова вероятность получить не менее 2 выигрышей, имея 100 билетов?*

С задачей естественно связать схему Бернулли с

$$n = 100, \qquad p = 0.01, \qquad q = 0.99, \qquad \lambda = np = 1.$$

Воспользовавшись теоремой Пуассона и таблицей распределения Пуассона, получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{\mu_{100} \geq 2\} &= 1 - \mathbf{P}\{\mu_{100} = 0\} - \mathbf{P}\{\mu_{100} = 1\} \\
&= 1 - \binom{100}{0} \cdot 0.01^0 \cdot 0.99^{100} - \binom{100}{1} \cdot 0.01^1 \cdot 0.99^{99} \\
&\approx 1 - \frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} - \frac{1^1}{1!} \cdot e^{-1} \approx 1 - 0.37 - 0.37 \approx 0.26.
\end{aligned}$$

Пример 3.5. *Какое минимальное количество изюмин в среднем должно быть в булке для того, что бы вероятность обнаружить в булке хотя бы одну изюмину была не менее 0.99.*

Из условия задачи следует, что вероятность того, что в булке не будет изюмин, должна не превосходить 0.01. В этой задаче следует воспользоваться распределением Пуассона (3.3), причем параметр λ нужно выбрать целым и наименьшим из условия $\frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} \leq 0.01$. Из таблицы распределения Пуассона находим, что $\lambda = 5$. Таким образом, среднее количество изюмин в булке должно равняться 5.

Упражнения для аудиторной работы.

3.1. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 1/10. Какова вероятность того, что сообщение из 10 знаков:

а) не будет искажено,

б) содержит ровно 3 искажения,

в) содержит не более трех искажений.

3.2. Симметричную игральную кость бросают n раз. Найти вероятность событий

$$A = \{\text{шестерка не выпала ни разу}\}$$
$$B = \{\text{шестерка выпала по крайне мере один раз}\}$$
$$C = \{\text{шестерка выпала только при первом бросании }\}$$
$$D = \{\text{шестерка выпала только один раз}\}$$

3.3 Пара игральных костей бросается 7 раз. Какова вероятность следующих событий

$$A = \{\text{сумма очков, равная 7, выпадет дважды}\};$$
$$B = \{\text{сумма очков, равная 7, выпадет по крайне мере 1 раз}\};$$
$$C = \{\text{каждый раз выпадает сумма очков, большая 7}\};$$
$$D = \{\text{ни разу не выпадает сумма очков, равная 12}\}.$$

3.4. Двое по очереди бросают монету. Выигрывает тот, кто первым получит "герб". Найти вероятность событий

а) игра закончится до 4-го бросания;

б) выиграет начавший игру (первый игрок);

в) выиграет второй игрок.

3.5. Брошено 6 правильных игральных костей. Какова вероятность выпадения : 1) хотя бы одной единицы; 2) ровно одной единицы; 3) ровно двух единиц? Найти точные значения и сравнить их со значениями, вычисленными по теореме Пуассона.

3.6. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0.001. Найти вероятность попадания в цель двумя и более выстрелами при залпе в 5000 выстрелов.

3.7 Найти среднее число бракованных изделий в партии изделий, если вероятность того, что в этой партии имеется хотя бы одно бракованное изделие, равна 0.95. Предполагается, что число бракованных изделий распределено по закону Пуассона.

3.8. Рыбак забросил спиннинг 100 раз. Какова вероятность того, что он поймал хотя бы одну рыбу, если одна рыба приходится в среднем на 200 забрасываний?

Упражнения для домашней работы.

3.9. Монету бросают пять раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: а) менее двух раз; б) не менее двух раз?

3.10. Проведено 20 независимых испытаний, каждое из которых состоит в одновременном подбрасывании трех монет. Найти вероятность того, что хотя бы в одном испытании появилось три герба.

3.11. Испытание заключается в бросании трех игральных костей. Найти вероятность того, что в пяти независимых испытаниях ровно два раза выпадет по три единицы.

3.12. Эксперимент состоит в подбрасывании симметричной монеты. Что вероятнее: выпадение двух гербов при четырех подбрасываниях монеты или трех гербов при шести подбрасываниях монеты?

3.13. Каждую секунду с вероятностью p независимо от других моментов времени по дороге проезжает автомобиль. Пешеходу для прохождения дороги необходимо 3 с. Какова вероятность того, что подошедший к дороге пешеход будет ожидать возможности перехода: а) 3с; б) 4с; в) 5с.

3.14. В партии из $n = 200$ изделий каждое изделие независимо от остальных может быть бракованным с вероятностью $p = 0.01$. Оценить вероятность того, что число бракованных изделий в этой партии равна трем.

3.15. Учебник издан тиражом 50000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно равна 0.0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 4 неправильно сброшюрованных учебника.

3.16. Напечатано 200 случайных чисел, каждое из которых независимо от остальных с вероятностью $1/10$ является одной из цифр $0, 1, 2, \dots, 9$. Цифра сгруппированны по две в порядке слева на право. Найти вероятность того, что среди 100 образовавшихся пар пара 09 встретится не менее 2 раз.

3.17. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету $p = 0.001$. Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью не меньшей, чем 0.55?

Дополнительные задачи.

3.18. Две игральные кости бросают до выпадения "6"хотя бы на одной из них. Найти вероятность того, что впервые "6"появится при k-ом бросании, $k = 1, 2, 3, \ldots$

3.19. В экспериментах на встречных электрон-позитронных пучках вероятность того, что за единицу времени произойдет j столкновений, сопровождающихся рождением новых элементарных частиц, равна

$$p_j = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}, \ j = 0, 1, 2, ...$$

где λ – положительный параметр (распределение Пуассона). При каждом столкновении в результате взаимодействия могут возникнуть разные группы элементарных частиц, при этом вероятность появления каждой группы элементарных частиц фиксирована и не зависит от результатов взаимодействия при остальных столкновениях. В качестве одной из таких групп рассмотрим пару μ – мезонов и обозначим через p вероятность их появления при одном столкновении. Чему равна вероятность события A_k, при котором за единицу времени рождается k пар μ-мезонов?

3.20. В одном из матчей чемпионата мира по шахматам ничьи не учитывались, и игра шла до тех пор, пока один из участников не набирал 6 очков (выигрыш – 1 очко, проигрыш – 0 очков). Считая участников матча одинаковыми по силе, а результаты отдельных игр независимыми, найти вероятность того, в момент окончания матча проигравший набирает k очков, $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$.

3.21. Обрабатываемые на станке детали сортируются по размерам на две группы. Каждая очередная деталь независимо от предыдущих с равными вероятностями попадает в первую или во вторую группу. В начале работы для каждой группы деталей подготовлено по ящику емкости r. Какова вероятность того, что в момент, когда очередную деталь будет некуда класть, в другом ящике будет m деталей?

3.22. Задача Банаха. Пусть a и b два коробка, содержащие по n спичек. Некто пользуется ими, выбирая коробки с вероятностями $p(a) = p$, $p(b) = 1 - p = q$ и доставая каждый раз по одной спичке. Какова вероятность того, что когда выбранная коробка окажется пустой, в другой коробке будет $r \le n$ спичек?

3.23. Задача о разорении игрока. Игра состоит в подбрасывании симметричной монеты на одной стороне которой написана $(+1)$, а на другой – (-1). Игрок начинает игру с начальным капиталом $n > 0$. Если выпадает $(+1)$, то капитал игрока увеличивается на единицу, если выпадает (-1) – уменьшается на единицу. Игра прекращается, если капитал игрока становится либо равным $N > n$ (игрок обогатился), или капитал игрока 0 (игрок разорился). Найти вероятность разорения игрока.

4 Интегральная теорема Муавра-Лапласа

1. Как мы уже говорили, вероятность некоторого количества успехов в схеме Бернулли при больших n и малых p (или q) может быть приближенно вычислена с помощью теоремы Пуассона. Часто возникает необходимость при больших n и фиксированных p и q оценить вероятность того, что количество успехов в схеме Бернулли будет находиться в заданных границах. В таких случаях используют следующую *интегральную теорему Муавра-Лапласа.*

Теорема 4.1. *Если $n \to \infty$, а p и q фиксированы, то*

$$\mathbf{P}\Big\{a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\Big\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Интеграл в правой части последнего равенства можно выразить через функ-

цию

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad x \geq 0.$$

Функция $\Phi_0(x)$ монотонно возрастает от 0 до 0.5, когда x монотонно возрастает от 0 до $+\infty$. Для функции $\Phi_0(x)$ при $x \in [0, 5]$ имеются подробные и доступные таблицы. Обычно считают, что $\Phi_0(x) \approx 0.5$ при $x \in (5, +\infty)$.

Пример 4.1. *Лекции по теории вероятностей должны посещать $n =$ 100 студентов. Каждый студент, независимо от других студентов, приходит на лекцию с вероятностью $p = 0.64$ и не приходит – с вероятностью $q = 0.36$. Найти вероятность того, что на лекции будет:*

а) от 70 до 95 студентов;

б) от 30 до 60 студентов;

в) от 55 до 75 студентов.

В случае а) имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{70 \leq \mu_{100} \leq 95\} &= \mathbf{P}\{70 - np \leq \mu_{100} - np \leq 95 - np\} \\
&= \mathbf{P}\Big\{\frac{70 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{\mu_{100} - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{95 - np}{\sqrt{npq}}\Big\} \\
&= \mathbf{P}\Big\{1.25 \leq \frac{\mu_{100} - np}{\sqrt{npq}} \leq 6.45\Big\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1.25}^{6.45} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\
&= \Phi_0(6.45) - \Phi_0(1.25) = 0.5 - 0.3944 = 0.1056.
\end{aligned}$$

В случае б) имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{30 \leq \mu_{100} \leq 60\} &= \mathbf{P}\Big\{\frac{30 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{\mu_{100} - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{60 - np}{\sqrt{npq}}\Big\} \\
&= \mathbf{P}\Big\{-7.083 \leq \frac{\mu_{100} - np}{\sqrt{npq}} \leq -0.833\Big\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-7.083}^{-0.833} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\
&= \Phi_0(7.08) - \Phi_0(0.83) = 0.5 - 0.2967 = 0.2033.
\end{aligned}$$

В случае в) имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{55 \leq \mu_{100} \leq 75\} &= \mathbf{P}\Big\{\frac{55 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{\mu_{100} - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{75 - np}{\sqrt{npq}}\Big\} \\
&= \mathbf{P}\Big\{-1.88 \leq \frac{\mu_{100} - np}{\sqrt{npq}} \leq 2.29\Big\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1.88}^{2.29} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\
&= \Phi_0(1.88) + \Phi_0(2.29) = 0.4699 + 0.4887 = 0.9586.
\end{aligned}$$

Далее мы рассмотрим основные типы задач, которые можно решать с помощью теоремы Муавра-Лапласа.

2. Пусть дана последовательность из $n >> 1$ испытаний Бернулли с фиксированной вероятностью успеха p и неудачи q. И пусть заданы два числа m_1 и m_2 такие, что $0 \le m_1 < m_2 \le n$. Требуется найти вероятность того, что число успехов μ_n заключено в пределах от m_1 до m_2.

Имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{m_1 \le \mu_n \le m_2\} &= \mathbf{P}\{m_1 - np \le \mu_n - np \le m_2 - np\} \\ &= \mathbf{P}\Big\{\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\Big\} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.\end{aligned}$$

Пример 4.2. *Игральную кость бросают 12000 раз. Найти вероятность того, что число выпавших единиц будет заключено в пределах от 1950 до 2070.*

Это схема Бернулли с $n = 12000$, $p = 1/6$, $q = 5/6$, $m_1 = 1995$ и $m_2 = 2010$. Поэтому

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{m_1 \le \mu_n \le m_2\} = \mathbf{P}\Big\{\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\Big\} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1.2247}^{1.7146} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi_0(1.2247) + \Phi_0(1.7146) = 0.8465.\end{aligned}$$

3. Пусть дана последовательность из $n >> 1$ испытаний Бернулли с фиксированной вероятностью успеха p и неудачи q. Пусть μ_n обозначает количество успехов в последовательности из n испытаний Бернулли. Тогда величина μ_n/n является *частой успехов* в последовательности из n испытаний Бернулли. На интервале $(0, 1)$ зафиксируем число α, которое считаем близким к нулю. *Требуется найти найти вероятность того, что частота успехов μ_n/n отличается по абсолютной величине от вероятности успеха p не* *более чем на* α, т.е. требуется найти вероятность $\mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{\mu_n}{n}-p\Big|\le\alpha\Big\}$. Имеем

$$\mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{\mu_n}{n}-p\Big|\le\alpha\Big\}=\mathbf{P}\Big\{-\alpha\le\frac{\mu_n}{n}-p\le\alpha\Big\}=\mathbf{P}\Big\{-\alpha\le\frac{\mu_n-np}{n}\le\alpha\Big\}$$

$$=\mathbf{P}\Big\{-\frac{\alpha\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\le\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}\le\frac{\alpha\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\Big\}\approx 2\Phi_0\Big(\frac{\alpha\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\Big).$$

Таким образом, для искомой вероятности имеем формулу

$$\mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{\mu_n}{n}-p\Big|\le\alpha\Big\}\approx 2\Phi_0\Big(\frac{\alpha\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\Big). \tag{4.1}$$

Пример 4.3. *Рассмотрим последовательность из* $n=1000$ *испытаний Бернулли с вероятностью успеха* $p=0.6$ *и неудачи* $q=0.4$. *Найти вероятность того, что частота успехов отличается по абсолютной величине от вероятности успеха на величину* $\alpha=0.01$.

По формуле (4.1) имеем

$$\mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{\mu_n}{1000}-0.6\Big|\le 0.01\Big\}\approx 2\Phi_0\Big(\frac{0.01\sqrt{1000}}{\sqrt{0.6\cdot 0.4}}\Big)=2\Phi_0(0.6455)=0.4814.$$

4. Пусть дана последовательность из n испытаний Бернулли с фиксированной вероятностью успеха p и неудачи q. На интервале $(0,1)$ зафиксируем два числа α и β, причем α считаем близким к нулю, а β – близким к единице. *Требуется найти наименьшее* n *такое, что выполнено неравенство*

$$\mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{\mu_n}{n}-p\Big|\le\alpha\Big\}\ge\beta. \tag{4.2}$$

По формуле (4.1)имеем

$$\mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{\mu_n}{n}-p\Big|\le\alpha\Big\}\approx 2\Phi_0\Big(\frac{\alpha\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\Big).$$

Таким образом, для выполнения неравенства (4.2) с наименьшим n, достаточно подобрать наименьшее n при котором выполняется неравенство

$$\Phi_0\Big(\frac{\alpha\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\Big)\ge\frac{\beta}{2}. \tag{4.3}$$

Из таблицы функции $\Phi_0(x)$ найдем наименьшее x_β, при котором выполняется неравенство $\Phi_0(x_\beta)\ge\beta/2$. После этого искомое значение n находим из уравнения

$$\frac{\alpha\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}=x_\beta.$$

Пример 4.4. *Какое наименьшее число раз нужно бросить монету для того, чтобы с вероятностью не меньшей чем 0.8 частота появления герба отличалась по абсолютной величине от вероятности его появления не более чем на 0.01.*

В этой задаче $p = q = 1/2$, $\alpha = 0.01$ и $\beta = 0.8$. Неравенство (4.3) имеет вид $\Phi_0(0.02\sqrt{n}) \geq 0.4$. По таблице функции $\Phi_0(x)$ находим, что наименьшее x_β, при котором выполняется неравенство $\Phi_0(x_\beta) \geq 0.4$, равно 1.28. Следовательно, $0.02\sqrt{n} = 1.28$. Поэтому $n = 4096$.

5. Пусть дана последовательность из n испытаний Бернулли с фиксированной вероятностью успеха p и неудачи q. И пусть на интервале $(0, 1)$ зафиксировано число β, которое считаем близким к единице. *Требуется найти наименьшее* $\alpha \in (0, 1)$ *такое, что частота успехов* μ_n/n *попадает в интервал* $[p - \alpha, p + \alpha]$ с вероятностью не меньшей чем β:

$$\mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{\mu_n}{n} - p\Big| \leq \alpha\Big\} \geq \beta. \tag{4.4}$$

Как и ранее, имеем

$$\mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{\mu_n}{n} - p\Big| \leq \alpha\Big\} \approx 2\Phi_0\Big(\frac{\alpha\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\Big).$$

Таким образом, для выполнения неравенства (4.4) с наименьшим α, достаточно подобрать наименьшее α при котором выполняется неравенство

$$\Phi_0\Big(\frac{\alpha\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\Big) \geq \frac{\beta}{2}. \tag{4.5}$$

Из таблицы функции $\Phi_0(x)$ найдем наименьшее x_β, при котором выполняется неравенство $\Phi_0(x_\beta) \geq \beta/2$. После этого искомое значение α находим из уравнения

$$\frac{\alpha\sqrt{n}}{\sqrt{pq}} = x_\beta.$$

Пример 4.5. *В каждом из* $n = 1000$ *испытаний Бернулли вероятность успеха* $p = 0.8$, *а вероятность неудачи* $q = 0.2$. *Найти наименьшее положительное число* α *так, чтобы с вероятностью не меньше чем 0.9 отклонение частоты успеха от вероятности успеха по абсолютной величине не превосходило* α.

В этой задаче неравенство (4.5) принимает вид $\Phi_0\left(\frac{\alpha\sqrt{400}}{\sqrt{0.8\cdot 0.2}}\right) \geq \frac{0.9}{2} = 0.45$. По таблице функции $\Phi_0(x)$ найдем, что наименьшее x_β, при котором выполняется неравенство $\Phi_0(x_\beta) \geq 0.45$, равно 1.64. Отсюда следует, что $\frac{\sqrt{1000}\cdot\alpha}{0.4} = 1.64$. Поэтому $\alpha = 1.64 \cdot 0.4/\sqrt{1000} = 0.0207$.

С помощью аналогичных рассуждений можно решать задачи следующего типа.

Пример 4.6. *Игральную кость бросают 80 раз. Найти с вероятностью 0.99 границы, в которых будет заключено число выпадений шестерки.*

Это схема Бернулли с $n = 80$, $p = 1/6$ и $q = 5/6$. Сначала найдем наименьшее $\alpha \in (0,1)$ такое, что частота успехов $\mu_{80}/80$ попадает в интервал $[1/6 - \alpha, 1/6 + \alpha]$ с вероятностью не меньшей чем 0.99. Неравенство (4.5) принимает вид $\Phi_0\left(\frac{\alpha\sqrt{80}}{\sqrt{1/6\cdot 5/6}}\right) \geq \frac{0.99}{2} = 0.495$. По таблице функции $\Phi_0(x)$ находим, что $x_\beta = 2.58$. Поэтому $\frac{6\sqrt{80}\alpha}{\sqrt{5}} = 2.58$. Отсюда следует, что $\alpha = (2.58\sqrt{5})/(6\sqrt{80}) = 0.1075$. Таким образом, с вероятностью 0.99 выполняется неравенство $\left|\frac{\mu_{80}}{80} - 1/6\right| \leq 0.1075$. Отсюда следует, что $-0.1075 + 1/6 \leq \mu_{80}/80 \leq 0.1075 + 1/6$, или $4.7 \leq \mu_{80} \leq 21.9$. Округляя до целых чисел, получим $5 \leq \mu_{80} \leq 22$.

Упражнения для аудиторной работы.

4.1. В последовательности из 1000 испытаний Бернулли вероятность успеха равна 0.7. Найти вероятности того, что успехов будет:

а) не менее 680 и не более 740 раз;

б) не менее 705 раз;

в) не более 698 раз.

4.2. Известно, что вероятность рождения мальчика приближенно равна 0.515. Чему равна вероятность того, что среди 10000 новорожденных число мальчиков будет не больше числа девочек?

4.3. Вероятность появления события в каждом из 625 независимых испытаний равна 0.8. Найти вероятность того, что частота события отклоняется от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0.04.

4.4. Французский ученый Бюффон (17 в.) бросил монету 4040 раз, причем герб появился 2048 раз. Найти вероятность того, что при повторении опыта Бюффона частота появления герба отличается от вероятности появления герба по абсолютной величине не более чем в опыте Бюффона.

4.5. Вероятность появления события A в каждом из независимых испытаний равна 0.5. Найти наименьшее число испытаний n, при котором с вероятностью 0,7698 частота появления события отклоняется от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0.02.

4.6. В каждом из 400 испытаний Бернулли вероятность успеха равна 0.8. Найти такое положительное число α, чтобы с вероятностью $\beta = 0.99$ абсолютная величина отклонения частоты успехов от вероятности успеха не превышала α.

4.7. Контролер проверяет на брак 3000 деталей. Вероятность того, что деталь бракована, равна 0.05. Найти с вероятностью 0.9 границы, в которых будет заключено число бракованных деталей среди проверенных.

4.8. Телефонная станция A, обслуживающая 2000 абонентов, должна соединять их с другой станцией B. Какое наименьшее число x линий должно связывать A и B, чтобы в 99 % случаев вызовов нашлась свободная линия. Пусть в течении наиболее напряженного часа дня каждый а абонент разговаривает с B в среднем две минуты.

Упражнения для домашней работы.

4.9. Вероятность появления события A в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0.7. Найти вероятности того, что событие A появится:

а) не менее 1430 и не более 1510 раз;

б) не менее 1475 раз;

в) не более 1468 раз.

4.10. Из урны, содержащей 1 белый и 4 черных шара по схеме случайного выбора с возвращением извлекают 2500 шаров. Найти вероятность того, что число появлений белого шара заключено между 480 и 540.

4.11. Две монеты бросают 4800 раз. Найти вероятность того, что событие "герб-герб"появится меньше 1140 раз.

4.12. Вероятность успеха в каждом из 900 независимых испытаний равна 0.5. Найти вероятность того, что частота успехов отклоняется от вероятности успеха по абсолютной величине не более чем на 0.02.

4.13. Вероятность положительного результата в каждом из n опытов равна 0.9. Сколько нужно провести опытов, чтобы с вероятностью не меньшей 0.98 можно было ожидать, что не менее 150 опытов дадут положительный результат?

4.14. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0.2. Найти число испытаний n, при котором с вероятностью 0,99 можно ожидать, что что частота появления события отклоняется от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0.04.

4.15. В урне содержатся белые и черные шары в отношении 4:1. после извлечения шара регистрируется его цвет и шар возвращается в урну. чему равно наименьшее число извлечений n, при котором с вероятностью 0,95 можно ожидать, что частота появления белого шара отклоняется от вероятности его появления по абсолютной величине не более чем на 0.01.

4.16. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0.5. Найти такое положительное число α, чтобы с вероятностью 0.77 абсолютная величина отклонения частоты появления события от его вероятности 0.5 не превышала α.

4.17. Отдел технического контроля проверяет на стандартность 900 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0.9. Найти с вероятностью 0.95 границы, в которых будет заключено число стандартных деталей среди проверенных.

4.18. Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два разных входа. Около каждого из входов имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом гардеробе для того, чтобы в 99 случаях из 100 все 1000 зрителей могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Рассмотреть два случая:

а) зрители приходят парами;

б) зрители приходят поодиночке.

Предположить, что входы зрители выбирают с равными вероятностями.

4.19. В поселке А проживает 2500 жителей. Каждый из них примерно 6 раз в месяц ездит в город В, выбирая дни поездок по случайным мотивам, независимо от остальных жителей. Какой наименьшей вместительностью должен быть поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней? (Поезд идет раз в сутки).

5 Случайные величины

1. Пусть даны два вещественных числа a и b такие, что $a < b$. Через $\langle a, b \rangle$ обозначим *обобщенный интервал*, т.е. одно из подмножеств вещественной оси следующего вида: $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b), $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$, $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$.

Пусть задано вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P} \rangle$, функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ и обобщенный интервал $\langle a, b \rangle$. *Полным прообразом* обобщенного интервала $\langle a, b \rangle$ при отображении ξ называется подмножество множества Ω вида

$$\xi^{-1}\langle a, b \rangle = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in \langle a, b \rangle\} \subset \Omega.$$

Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*, если для любого обобщенного интервала $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ его полный прообраз $\xi^{-1}\langle a, b \rangle = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in \langle a, b \rangle\} \subset \Omega$ принадлежит алгебре событий $\mathcal{A}$.

Пусть дан произвольный обобщенный интервал $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ и случайная величина $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$. *Вероятностью того, что случайная величина ξ принимает значения, принадлежащее обобщенному интервалу $\langle a, b \rangle$, называется вероятность полного прообраза обобщенного интервала $\langle a, b \rangle$ при отображении ξ*

$$\mathbf{P}\{\xi \in \langle a, b \rangle\} = \mathbf{P}\{\xi^{-1}\langle a, b \rangle\} = \mathbf{P}\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in \langle a, b \rangle\}. \tag{5.1}$$

Вычисление вероятностей вида (5.1) является одной из основных задач в теории случайных величин.

Функцией распределения случайной величины ξ называется ($\forall x \in \mathbb{R}$)

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi \in (-\infty, x)\} = \mathbf{P}\{\xi^{-1}(-\infty, x)\} = \mathbf{P}\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\}. \quad (5.2)$$

Функция распределения $F_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и обладает следующими свойствами:

1) если $x_1 < x_2$, то $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$;

2) $\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$;

3) $\lim_{x\to x_0-0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0)$ (непрерывность слева).

Через функцию распределения (5.2) можно вычислить вероятность (5.1) для любого обобщенного интервала. Например,

$$\mathbf{P}\{\xi \in [a,b)\} = F_\xi(b) - F_\xi(a), \qquad \mathbf{P}\{\xi \in [a,b]\} = F_\xi(b+0) - F_\xi(a),$$
$$\mathbf{P}\{\xi \in (a,b]\} = F_\xi(b+0) - F_\xi(a+0), \quad \mathbf{P}\{\xi \in (a,b)\} = F_\xi(b) - F_\xi(a+0).$$

Пример 5.1. *В двух урнах имеется по четыре шара, которые занумерованы цифрами 1,2,3,4. Из урн извлекают по одному случайному шару. Найти функцию распределения случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, которая равна абсолютной величине разности между номерами извлеченных шаров. Найти вероятность того, что ξ примет значения, принадлежащие одному из следующих интервалов:* $(1,2]$; $[0,2]$; $[1,3)$; $(2,3)$.

Пространство элементарных событий имеет вид $\Omega = \{(i,j) : 1 \le i, j \le 4\}$. Случайная величина $\xi(i,j) = |i-j|$. В более подробной записи пространство элементарных событий имеет вид

$$\begin{aligned}\Omega \;=\; \big\{&(1,1) \quad (1,2) \quad (1,3) \quad (1,4)\\ &(2,1) \quad (2,2) \quad (2,3) \quad (2,4)\\ &(3,1) \quad (3,2) \quad (3,3) \quad (3,4)\\ &(4,1) \quad (4,2) \quad (4,3) \quad (4,4)\big\}.\end{aligned}$$

При $x \le 0$ имеем

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\} = \mathbf{P}\{(i,j) \in \Omega : |i-j| < x\} = \mathbf{P}\{\varnothing\} = 0.$$

При $0 < x \leq 1$ имеем

$$
\begin{aligned}
F_\xi(x) &= \mathbf{P}\{\xi < x\} = \mathbf{P}\{(i,j) \in \Omega : |i-j| < x\} \\
&= \mathbf{P}\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\} = 4/16 = 1/4.
\end{aligned}
$$

При $1 < x \leq 2$ имеем

$$
\begin{aligned}
F_\xi(x) &= \mathbf{P}\{\xi < x\} = \mathbf{P}\{(i,j) \in \Omega : |i-j| < x\} \\
&= \mathbf{P}\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)(1,2),(2,3),(3,4),(2,1),(3,2),(4,3)\} \\
&= 10/16 = 5/8.
\end{aligned}
$$

При $2 < x \leq 3$ имеем

$$
\begin{aligned}
F_\xi(x) &= \mathbf{P}\{\xi < x\} = \mathbf{P}\{(i,j) \in \Omega : |i-j| < x\} \\
&= \mathbf{P}\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)(1,2),(2,3),(3,4),(2,1),(3,2),(4,3), \\
&\quad (1,3),(2,4),(3,1),(4,2)\} = 14/16 = 7/8.
\end{aligned}
$$

При $3 < x$ имеем

$$
F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\} = \mathbf{P}\{(i,j) \in \Omega : |i-j| < x\} = \mathbf{P}\{\Omega\} = 1.
$$

Окончательно функция распределения задается формулой

$$
F_\xi(x) = \begin{cases}
0 & \text{при} \quad x \leq 0, \\
1/4 & \text{при} \quad 0 < x \leq 1, \\
5/8 & \text{при} \quad 1 < x \leq 2, \\
7/8 & \text{при} \quad 2 < x \leq 3, \\
1 & \text{при} \quad 3 < x.
\end{cases}
$$

Далее имеем

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\{\xi \in (1,2]\} &= F_\xi(2+0) - F_\xi(1+0) = 7/8 - 5/8 = 1/4, \\
\mathbf{P}\{\xi \in [0,2]\} &= F_\xi(2+0) - F_\xi(0) = 7/8 - 0 = 7/8, \\
\mathbf{P}\{\xi \in [1,3)\} &= F_\xi(3) - F_\xi(1) = 7/8 - 1/4 = 5/8, \\
\mathbf{P}\{\xi \in (2,3)\} &= F_\xi(3) - F_\xi(2+0) = 7/8 - 7/8 = 0.
\end{aligned}
$$

Пример 5.2. *В единичный квадрат* $\Omega = \{(u, v) : 0 \le u, v \le 1\}$ *наудачу бросается точка* $M(u, v)$. *Найти функцию распределения случайной величины* $\xi(u, v) = u$ *и вероятность того, что значение случайной величины* ξ *принадлежит интервалу* $(1/2, 2]$.

При $x \le 0$ имеем

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\} = \mathbf{P}\{(u, v) \in \Omega : u < x\} = \mathbf{P}\{\varnothing\} = 0.$$

При $0 < x \le 1$ имеем

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\} = \mathbf{P}\{(u, v) \in \Omega : u < x\} = x.$$

При $1 < x$ имеем

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\} = \mathbf{P}\{(u, v) \in \Omega : u < x\} = 1.$$

Окончательно функция распределения задается формулой

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ x & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad 1 < x. \end{cases}$$

Далее имеем $\mathbf{P}\{\xi \in (1/2, 2]\} = F_\xi(2 + 0) - F_\xi(1/2 + 0) = 1 - 1/2 = 1/2$.

2. Пусть задано вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P} \rangle$. Случайная величина $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *абсолютно непрерывной*, если существует функция $p_\xi(x)$ такая, что функция распределения $F_\xi(x)$ допускает представление

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t) dt.$$

Функция $p_\xi(x)$ называется *плотностью* распределения абсолютно непрерывной случайной величины ξ.

В абсолютно непрерывном случае для любого обобщенного интервала $\langle a, b \rangle$ вероятность (5.1) выражается через плотность по формуле

$$\mathbf{P}\{\xi \in \langle a, b \rangle\} = \int_{a}^{b} p_\xi(t) dt. \tag{5.3}$$

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

1) $p_\xi(x) \geq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R};$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx = 1.$

В точках непрерывности функции плотности $p_\xi(x)$ выполняется равенство $F'_\xi(x) = p_\xi(x)$

Пример 5.3. *В круг $\Omega = \{(u,v) : u^2 + v^2 = R^2\}$ наудачу бросается точка $M(u,v)$. Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\xi(u,v) = \sqrt{u^2+v^2}$. С помощью плотности распределения найти вероятность того, что значение случайной величины ξ принадлежит интервалу $(R/2, 2R)$.*

Функция распределения задается формулой

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leq 0, \\ (x/R)^2 & \text{при} \quad 0 < x \leq R, \\ 1 & \text{при} \quad R < x. \end{cases}$$

Плотность распределения задается формулой

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leq 0, \\ 2x/R^2 & \text{при} \quad 0 < x \leq R, \\ 0 & \text{при} \quad R < x. \end{cases}$$

Далее имеем

$$\mathbf{P}\{\xi \in (R/2, 2R)\} = \int_{R/2}^{2R} p_\xi(t)dt = \int_{R/2}^{R} 2t/R^2 dt = 3/4.$$

3. Пусть задано вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P} \rangle$. Случайная величина $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *дискретной*, если на любом конечном интервале вещественной оси функция распределения $F_\xi(x)$ имеет конечное число точек роста.

Из определения следует, что дискретная случайная величина может принимать не более чем счетное множество значений $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, вероятности которых (скачки функции распределения) равны соответственно $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$. Эту информацию удобно задавать *таблицей распределе-*

ния дискретной случайной величины

$$\begin{array}{|l|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{Значения } \xi & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots \\ \hline \text{Вероятности значений } \xi & p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n & \dots \\ \hline \end{array} \qquad (5.4)$$

Числа в нижней строке таблицы (5.4) должны удовлетворять условиям

$$p_i > 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Ясно, что по функции распределения $F_\xi(x)$ однозначно строится таблица (5.4) и наоборот. В дискретном случае для любого обобщенного интервала $\langle a, b\rangle$ вероятности (5.1) выражаются через элементы таблицы (5.4) по формуле

$$\mathbf{P}\{\xi \in \langle a, b\rangle\} = \sum_{i\,:\,x_i \in \langle a,b\rangle} p_i. \qquad (5.5)$$

Пример 5.4. *Из урны, содержащей 4 белых и 6 черных шаров, случайным образом без возвращения извлекли три шара. Случайная величина ξ равна числу белых шаров в выборке. С помощью таблицы описать распределение значений случайной величины ξ. Найти вероятность того, что значение случайной величины ξ будет принадлежать интервалу $[1, 3)$.*

Случайная величина ξ может принимать значения 0,1,2,3. Для вероятностей этих значений имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi = 0\} &= \binom{4}{0}\binom{6}{3}\Big/\binom{10}{3} = 1/6, \\ \mathbf{P}\{\xi = 1\} &= \binom{4}{1}\binom{6}{2}\Big/\binom{10}{3} = 1/2, \\ \mathbf{P}\{\xi = 2\} &= \binom{4}{2}\binom{6}{1}\Big/\binom{10}{3} = 3/10, \\ \mathbf{P}\{\xi = 3\} &= \binom{4}{3}\binom{6}{0}\Big/\binom{10}{3} = 1/30. \end{aligned}$$

Следовательно, таблица распределения значений имеет вид

Значения ξ	0	1	2	3
Вероятности значений ξ	1/6	1/2	3/10	1/30

Далее имеем $\mathbf{P}\{\xi \in [1, 3)\} = 1/2 + 3/10 = 4/5$.

4. Пусть распределение дискретной случайной величины ξ задается таблицей (5.4).

Математическим ожиданием (средним значением) случайной величины ξ называется

$$\mathbf{M}\,\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \tag{5.6}$$

если последний ряд абсолютно сходится.

Дисперсией случайной величины ξ называется

$$\mathbf{D}\,\xi = \mathbf{M}\,(\xi - \mathbf{M}\,\xi)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \big(x_i - \mathbf{M}\,\xi\big)^2 p_i, \tag{5.7}$$

если последний ряд сходится.

Можно доказать, что дисперсию можно вычислять и по такой формуле

$$\mathbf{D}\,\xi = \mathbf{M}\,(\xi^2) - (\mathbf{M}\,\xi)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - \Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i\Big)^2. \tag{5.8}$$

Модой $M_0\,\xi$ дискретной случайной величины ξ называется то возможное значение x_i, при котором соответствующая вероятность p_i достигает наибольшего значения $p_i = \max_{k\geq 1} p_k$.

Мода дискретной случайной величины может иметь одно значение *(унимодальное распределение)* или несколько значений *(мультимодальное распределение)*.

Пример 5.5. *Распределение дискретной случайной величины* ξ *называется геометрическим, если оно задается таблицей* $(p, q > 0,\ p + q = 1)$

Значения ξ	1	2	3	$\dots$	n	$\dots$
Вероятности значений ξ	p	qp	q^2p	$\dots$	$q^{n-1}p$	$\dots$

(5.9)

Найти математическое ожидание, дисперсию и моду для геометрического распределения.

Найдем математическое ожидание ξ. Имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\xi &= 1p + 2qp + 3q^2p + \dots + nq^{n-1}p + \dots \\ &= p\frac{d}{dq}(q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots) \\ &= p\,\frac{d}{dq}\frac{q}{1-q} = p\,\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}\,.\end{aligned}$$

Найдем дисперсию ξ. Имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}\,\xi &= \mathbf{M}\,(\xi^2) - (\mathbf{M}\,\xi)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - \frac{1}{p^2} = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 q^{i-1} p - \frac{1}{p^2} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (i^2 - i) q^{i-1} p + \sum_{i=1}^{\infty} i q^{i-1} p - \frac{1}{p^2} = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) q^{i-1} p + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \\
&= p\,q \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) q^{i-2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = p\,q \frac{d^2}{dq^2} \sum_{i=0}^{\infty} q^i + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \\
&= p\,q \frac{d^2}{dq^2} (1-q)^{-1} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = p\,q 2(1-q)^{-3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.
\end{aligned}$$

Для нахождения моды геометрического распределения заметим, что вероятности во второй строке таблицы (5.9) монотонно убывают. Поэтому максимальная вероятность во второй строке равна p. Отсюда следует, что мода геометрического распределения равна $M_0\,\xi = 1$.

5. Пусть распределение абсолютно непрерывной случайной величины ξ задается плотностью $p_\xi(x)$.

Математическим ожиданием (средним значением) случайной величины ξ называется

$$\mathbf{M}\,\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} t p_\xi(t) dt, \tag{5.10}$$

если последний интеграл абсолютно сходится.

Дисперсией случайной величины ξ называется

$$\mathbf{D}\,\xi = \mathbf{M}\,(\xi - \mathbf{M}\,\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbf{M}\,\xi)^2 p_\xi(t) dt, \tag{5.11}$$

если последний интеграл сходится.

Можно доказать, что дисперсию можно вычислять и по такой формуле

$$\mathbf{D}\,\xi = \mathbf{M}\,(\xi^2) - (\mathbf{M}\,\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 p_\xi(t) dt - \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} t p_\xi(t) dt\Big)^2. \tag{5.12}$$

Модой $M_0\,\xi$ абсолютно непрерывной случайной величины ξ называется то возможное значение x_i, при котором соответствующая плотность вероятности $p_\xi(t)$ достигает наибольшего значения.

Мода абсолютно непрерывной случайной величины может принимать одно значение *(унимодальное распределение)* или несколько значений *(мультимодальное распределение)*. Кроме того, в абсолютно непрерывном случае может и не существовать моды (например, если плотность распределения $p_\xi(t)$ является неограниченной функцией).

Медианой $M_e\xi$ абсолютно непрерывной случайной величины ξ называется вещественное число $M_e\xi$, которое удовлетворяет условию

$$\mathbf{P}\{\xi < M_e\xi\} = \mathbf{P}\{\xi > M_e\xi\}.$$

Из этого определения следует, что медиана является решением уравнения $F_\xi(x) = 1/2$. Данное уравнение может иметь много корней. Поэтому медиана определена, вообще говоря, неоднозначно.

Пример 5.6. *Говорят, что абсолютно непрерывная случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность распределения имеет вид*

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \;\; x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \;\; x \geq 0. \end{cases} \tag{5.13}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию, моду и медиану показательного распределения.

Найдем математическое ожидание для показательного распределения. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\,\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} tp_\xi(t)dt = \int_0^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t}dt = -\int_0^{+\infty} td(e^{-\lambda t}) \\ &= -te^{-\lambda t}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Найдем дисперсию для показательного распределения. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\,\xi &= \mathbf{M}\,(\xi^2) - (\mathbf{M}\,\xi)^2 = \int_0^{+\infty} t^2\lambda e^{-\lambda t}dt - \frac{1}{\lambda^2} = -\int_0^{+\infty} t^2 d(e^{-\lambda t}) - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= -t^2e^{-\lambda t}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} te^{-\lambda t}dt - \frac{1}{\lambda^2} = 2\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что единственного максимального значения λ плотность показательного распределения достигает при $x = 0$. Поэтому мода показательного распределения $M_0\,\xi = 0$.

Медианой показательного распределения является такое значение x, при котором $\int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt = 1/2$. Или, что тоже самое, $\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = 1/2$. Отсюда следует, что $e^{-\lambda x} = 1/2$. Поэтому $x = \frac{\ln 2}{\lambda}$. Таким образом, медиана показательного распределения $M_e\,\xi = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Упражнения для аудиторной работы.

5.1. Шесть раз бросается правильная монета. Случайная величина ξ равна абсолютной величине разности между числом появлений герба и числом появлений решки. Найти: а) таблицу распределения значений случайной величины ξ; б) вероятность того, что случайная величина ξ примет значение из интервала $(3/2, 4]$; в) математическое ожидание ξ; г) дисперсию ξ; д) моду ξ.

5.2. Распределение дискретной случайной величины ξ называется распределением Паскаля, если оно задается таблицей $(r > 0)$

Значения ξ	0	1	2	$\dots$	n	$\dots$
Вероятности значений ξ	$\frac{r^0}{(1+r)^1}$	$\frac{r^1}{(1+r)^2}$	$\frac{r^2}{(1+r)^3}$	$\dots$	$\frac{r^n}{(1+r)^{n+1}}$	$\dots$

(5.14)

Для распределения Паскаля найти: а) математическое ожидание ξ; б) дисперсию ξ; в) моду ξ.

5.3. В единичный квадрат $\Omega = \{(u, v) : 0 \le u, v \le 1\}$ наудачу бросается точка $M(u, v)$. Случайная величина $\xi(u, v) = u + v$. Найти: а) функцию распределения значений случайной величины ξ; б) плотность распределения значений случайной величины ξ; в) математическое ожидание ξ; г) дисперсию ξ; д) моду ξ.

5.4. Говорят, что абсолютно непрерывная случайная величина ξ имеет распределение Парето с параметрами $a > 2$ и $x_0 > 0$, если ее плотность распределения имеет вид

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le x_0, \\ \frac{a}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{a+1} & \text{при} \quad x > x_0. \end{cases} \tag{5.15}$$

Для распределения Парето найти: а) функцию распределения; б) математическое ожидание; в) дисперсию; г) моду; д) медиану.

5.5. Говорят, что абсолютно непрерывная случайная величина ξ имеет *распределение арксинуса* с параметром $a > 0$, если плотность ее распределения имеет вид

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |x| \geq a, \\ \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} & \text{при} \quad |x| < a. \end{cases} \tag{5.16}$$

Для распределения арксинуса найти: а) функцию распределения; б) математическое ожидание; в) дисперсию; г) моду; д) медиану.

Упражнения для домашней работы.

5.6. Из полного набора 28 костей домино наудачу извлекается одна кость. случайная величина ξ равна абсолютной величине разности очков на извлеченной кости. Найти: а) таблицу распределения значений случайной величины ξ; б) вероятность того, что случайная величина ξ примет значение из интервала $[1, 6)$; в) математическое ожидание ξ; г) дисперсию ξ; д) моду ξ.

5.7.В квадрат $\Omega = \{(u, v) : -1 \leq u, v \leq 1\}$ наудачу бросается точка $M(u, v)$. Случайная величина $\xi(u, v) = |u| + |v|$. Найти: а) функцию распределения значений случайной величины ξ; б) плотность распределения значений случайной величины ξ; в) математическое ожидание ξ; г) дисперсию ξ; д) моду ξ; е) медиану ξ.

5.8. Распределение дискретной случайной величины ξ определяется формулами

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{C}{k(k+1)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Найти: а) постоянную C; б) $\mathbf{P}\{\xi \leq 3\}$; в) $\mathbf{P}\{n_1 \leq \xi \leq 3n_2\}$.

5.9. Плотность распределения абсолютно непрерывной случайной величины задается формулами

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 1, \\ C/x^4 & \text{при} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Найти константу C и $\mathbf{P}\{1 < \xi < 2\}$.

5.10. Известно, что при стрельбе по плоской мишени в неизменных условиях расстояние от центра мишени до точки попадания является абсолютно непрерывной случайной величиной, плотность которой ($\sigma > 0$)

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \frac{x}{\sigma^2} e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{при} \quad x > 0. \end{cases} \tag{5.17}$$

Это распределение вероятностей называется *распределением Рэлея.* Найти математическое ожидание, дисперсию, моду и медиану распределения Рэлея.

5.11. Скорость молекул идеального газа, находящегося в равновесии при определенной температуре, является абсолютно непрерывной случайной величиной, плотность которой имеет вид

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \beta^{3/2} x^2 e^{-\frac{1}{2}\beta x^2} & \text{при} \quad x > 0, \end{cases} \tag{5.18}$$

где параметр $\beta > 0$ определяется температурой и массой молекул *(распределение Максвелла)*. Найти математическое ожидание и дисперсию для распределения Максвелла.

6 Предельные теоремы

1. Мы ожидаем, что средние арифметические большого числа независимых реализаций одной и той же случайной величины должны чаще всего находится вблизи математического ожидания рассматриваемой случайной величины. Точная формулировка этого интуитивного факта выражается следующей теоремой.

Теорема 6.1. *Пусть независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ одинаково распределены и математические ожидания $\mathbf{M}\xi_k = a, \quad \forall k \in \mathbb{R}$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \left| \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} - a \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Мы ожидаем также, что средние арифметические большого числа независимых реализаций разных случайных величин должны чаще всего находится вблизи среднего арифметического математических ожиданий рассматриваемых случайных величин. Точная формулировка этого интуитивного факта выражается следующей теоремой.

Теорема 6.2. *Пусть дисперсии попарно независимых случайных величин* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *конечны и ограничены* $0 \le \mathbf{D}\xi_k \le C$, $\forall k \in \mathbb{N}$. *Тогда при любом* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{n} - \frac{\mathbf{M}\xi_1+\mathbf{M}\xi_2+\cdots+\mathbf{M}\xi_n}{n}\Big| < \varepsilon\Big\} = 1.$$

В теории вероятностей теоремы 6.1, 6.2 и их аналоги называются *законами больших чисел.*

2. Пусть дано произвольное вещественное число a и произвольное положительное число $\sigma > 0$. Говорят, что абсолютно непрерывная случайная величина ξ имеет *нормальное распределение с параметрами* a *и* $\sigma > 0$, если ее плотность задается формулой

$$p_\xi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Математическое ожидание нормального распределения равно a, а дисперсия равна σ^2. Параметр нормального распределения σ называется *среднеквадратичным отклонением.* Нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$ называется *стандартным.*

Если случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и $\sigma > 0$, то случайная величина $\eta = (\xi - a)/\sigma$ имеет стандартное нормальное распределение.

Пример 6.1. *Математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение нормально распределенной случайной величины* ξ *соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что* ξ *примет значение из интервала (12,14).*

Имеем

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{12 \le \xi \le 14\} = \mathbf{P}\{(12-10)/2 \le (\xi-10)/2 \le (14-10)/2\}\\ &= \mathbf{P}\{1 \le (\xi-10)/2 \le 2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_1^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \Phi_0(2)-\Phi_0(1) = 0.1359.\end{aligned}$$

Пример 6.2. *Математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение нормально распределенной случайной величины ξ соответственно равны a и $\sigma > 0$. Найти вероятность того, что ξ примет значение из интервала $(a-3\sigma, a+3\sigma)$.*

Имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{a-3\sigma \le \xi \le a+3\sigma\} &= \mathbf{P}\{(-3 \le (\xi-a)/\sigma \le 3\}\\ &= 2\Phi_0(3) = 0.9973.\end{aligned}$$

Таким образом, с вероятностью 0.9973 (почти достоверно) нормально распределенная случайная величина принимает значение из интервала $(a-3\sigma, a+3\sigma)$ *(правило 3σ)* .

Пример 6.3. *Автомат штампует детали. Контролируется длина детали ξ, которая распределена нормально с математическим ожиданием, равным 50 мм. Фактическая длина деталей с вероятностью 0.9973 находится в пределах от 32 до 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали a) больше 55 мм; b) меньше 40 мм.*

Из равенства $P\{32 \le \xi \le 68\} = P\{50-3\cdot 6 \le \xi \le 50+3\cdot 6\} = 0.9973$ и правила 3σ следует, что $\sigma = 6$. Поэтому:

$$\begin{aligned}a) \quad & P\{55 \le \xi\} = P\{5/6 \le (\xi-50)/6\}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{5/6}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 0.5 - \Phi_0(5/6) = 0.2023;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b) \quad & P\{0 \le \xi \le 40\} = P\{-50/6 \le (\xi-50)/6 \le -10/6\}\\ &= \Phi_0(50/6) - \Phi_0(10/6) = 0.0478.\end{aligned}$$

3. Пусть *независимые* случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеют одинаковые математические ожидания и дисперсии

$$\mathbf{M}\xi_i = \mathbf{M}\xi_1, \qquad \mathbf{D}\xi_i = \mathbf{D}\xi_1, \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим случайную величину

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n.$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{M}S_n = n\mathbf{M}\xi_1, \qquad \mathbf{D}S_n = n\mathbf{D}\xi_1.$$

Рассмотрим центрированную сумму

$$S_n^* = \frac{(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) - (\mathbf{M}\xi_1 + \mathbf{M}\xi_2 + \cdots + \mathbf{M}\xi_n)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi_1 + \mathbf{D}\xi_2 + \cdots + \mathbf{D}\xi_n}} = \frac{S_n - n\mathbf{M}\xi_1}{\sqrt{n\mathbf{D}\xi_1}}.$$

Ясно, что

$$\mathbf{M}S_n^* = 0, \qquad \mathbf{D}S_n^* = 1.$$

Пусть *произвольные независимые* случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеют математические ожидания и дисперсии. Рассмотрим случайную величину

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n.$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{M}S_n = \mathbf{M}\xi_1 + \mathbf{M}\xi_2 + \cdots + \mathbf{M}\xi_n, \qquad \mathbf{D}S_n = \mathbf{D}\xi_1 + \mathbf{D}\xi_2 + \cdots + \mathbf{D}\xi_n.$$

Рассмотрим центрированную сумму

$$S_n^* = \frac{(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) - (\mathbf{M}\xi_1 + \mathbf{M}\xi_2 + \cdots + \mathbf{M}\xi_n)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi_1 + \mathbf{D}\xi_2 + \cdots + \mathbf{D}\xi_n}}.$$

Ясно, что

$$\mathbf{M}S_n^* = 0, \qquad \mathbf{D}S_n^* = 1.$$

Оказывается, что во многих важных случаях при больших n можно считать, что распределение центрированной суммы S_n^* приблизительно совпадает со стандартным нормальным распределением. Теоремы, устанавливающие приблизительную нормальность распределения S_n^* при больших n, называются *центральными предельными теоремами (ЦПТ).*

4. Покажем, что теорему Муавра-Лапласа 4.1 можно рассматривать как ЦПТ. Пусть даны два числа $p,\, q > 0,\;\; p + q = 1$. И пусть распределение дискретной случайной величины ξ задается таблицей

Значения ξ	0	1
Вероятности значений ξ	q	p

(6.1)

Легко видеть, что $\mathbf{M}\xi = p,\;\mathbf{D}\xi = pq$.

Пусть каждая из независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеет распределение (6.1). Тогда случайная величина $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ равна количеству успехов в n испытаниях Бернулли (в теореме 4.1 аналогичная величина обозначена через μ_n). Ясно, что $\mathbf{M}S_n = np,\;\mathbf{D}S_n = npq$. Выражение для центрированной суммы имеет вид

$$S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}.$$

Теперь интегральную теорему Муавра-Лапласа 4.1 можно сформулировать в виде ЦПТ.

Теорема 6.3. *Пусть независимые случайные величины* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *имеют распределение (6.1). Тогда при* $n \to +\infty$

$$\mathbf{P}\Big\{a \le \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n - n\mathbf{M}\xi_1}{\sqrt{n\mathbf{D}\xi_1}} \le b\Big\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Оказывается, что в теореме 6.3 распределение (6.1) для случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ можно заменить более общими распределения.

Теорема 6.4. *Пусть независимые случайные величины* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *имеют одинаковые распределения и конечную дисперсию. Тогда при* $n \to +\infty$

$$\mathbf{P}\Big\{a \le \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n - n\mathbf{M}\xi_1}{\sqrt{n\mathbf{D}\xi_1}} \le b\Big\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Пример 6.4. *Случайные величины* $\xi_1, \ldots, \xi_6$ *независимы и имеют равномерное распределение в отрезке* $[0, 1]$. *Найти вероятность того, что сумма* $S = \xi_1 + \cdots + \xi_6$ *заключена в пределах от 2 до 4.*

Как известно, $\mathbf{M}\xi_i = 1/2$, $\mathbf{D}\xi_i = 1/12$. Поэтому

$$\mathbf{P}\Big\{2 \le S \le 4\Big\} = \mathbf{P}\Big\{\frac{2-6\mathbf{M}\xi_1}{\sqrt{6\mathbf{D}\xi_1}} \le \frac{S-6\mathbf{M}\xi_1}{\sqrt{6\mathbf{D}\xi_1}} \le \frac{4-6\mathbf{M}\xi_1}{\sqrt{6\mathbf{D}\xi_1}}\Big\}$$
$$= \mathbf{P}\Big\{-\sqrt{2} \le \frac{S-6\mathbf{M}\xi_1}{\sqrt{6\mathbf{D}\xi_1}} \le \sqrt{2}\Big\}$$
$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 2\Phi_0(\sqrt{2}) = 0.8427.$$

Пример 6.5. *Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_{2000}$ независимы и имеют распределение Парето (5.15) с параметрами $a = 3$, $x_0 = 2$. Найти вероятность того, что среднее арифметическое $\frac{S_{2000}}{2000} = \frac{\xi_1+\cdots+\xi_{2000}}{2000}$ отклоняется от математического ожидания ξ_i по абсолютной величине не более чем на 0.1.*

Как было показано ранее, $\mathbf{M}\xi_i = \frac{ax_0}{a-1} = 3$ и $\mathbf{D}\xi_i = \frac{ax_0^2}{(a-1)^2(a-2)} = 3$. Поэтому

$$\mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{S_{2000}}{2000} - \mathbf{M}\xi_i\Big| \le 0.1\Big\} = \mathbf{P}\Big\{-0.1 \le \frac{S_{2000}}{2000} - \mathbf{M}\xi_i \le 0.1\Big\}$$
$$= \mathbf{P}\Big\{-0.1\sqrt{\frac{2000}{\mathbf{D}\xi_i}} \le \frac{S_{2000}-2000\mathbf{M}\xi_i}{\sqrt{2000\mathbf{D}\xi_i}} \le 0.1\sqrt{\frac{2000}{\mathbf{D}\xi_i}}\Big\}$$
$$= \mathbf{P}\Big\{-2.582 \le \frac{S_{2000}-2000\mathbf{M}\xi_i}{\sqrt{2000\mathbf{D}\xi_i}} \le 2.582\Big\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2.582}^{2.582} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$
$$= 2\Phi_0(2.582) = 0.99.$$

5. ЦПТ 6.4 справедлива для одинаково распределенных случайных величин. Принципиальный интерес представляют ЦПТ для случайных величин, имеющих различные распределения. Рассмотрим ЦПТ для случайных величин, имеющих различные распределения, *в условиях Ляпунова.* Введем важные определения.

Моментом k-го порядка случайной величины ξ называется

$$\mathbf{M}\xi^k = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p_i & \text{дискретный случай,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p_\xi(x)dx & \text{абсолютно непрерывный случай.} \end{cases}$$

Абсолютным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется

$$\mathbf{M}|\xi|^k = \begin{cases} \sum_{k=i}^{\infty} |x_i|^k p_i & \text{дискретный случай,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k p_\xi(x)dx & \text{абсолютно непрерывный случай.} \end{cases}$$

Центральным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется

$$\mathbf{M}\xi^k = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - \mathbf{M}\xi)^k p_i & \text{дискретный случай,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}(x - \mathbf{M}\xi))^k p_\xi(x)dx & \text{абсолютно непрерывный случай.} \end{cases}$$

Абсолютным центральным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется

$$\mathbf{M}|\xi - \mathbf{M}\xi|^k = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty}|x_i - \mathbf{M}\xi|^k p_i & \text{дискретный случай,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}|x - \mathbf{M}\xi)|^k p_\xi(x)dx & \text{абсолютно непрерывный случай.} \end{cases}$$

Теорема 6.5. *Пусть независимые случайные величины* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *имеют конечный третий абсолютный момент. Положим*

$$\begin{array}{lll} a_n = \mathbf{M}\xi_n, & b_n^2 = \mathbf{D}\xi_n, & c_n^3 = \mathbf{M}|\xi_n - a_n|^3, \\ A_n = \sum_{k=1}^n a_k, & B_n^2 = \sum_{k=1}^n b_k^2, & C_n^3 = \sum_{k=1}^n c_k^3. \end{array}$$

Если $C_n/B_n \to 0$ *при* $n \to +\infty$, *то при* $n \to +\infty$

$$\mathbf{P}\Big\{a \le \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n - A_n}{B_n} \le b\Big\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Упражнения для аудиторной работы.

6.1. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение, причем $\mathbf{M}\xi = 8$, а $\mathbf{D}\xi = 4$. Найти вероятность того, что случайная величина ξ принимает значения из интервала $(-2, 8)$.

6.2. Известно, что случайная величины ξ имеет нормальное распределение с $a = 3$. Вероятность же того, что ξ примет значение из интервала $[2, 4]$ равна 0.383. Найти среднеквадратичное отклонение σ.

6.3. Пусть случайные величины $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$ независимы и имеют нормальное распределение с математическими ожиданиями $1,\ 0,\ -1$ и дисперсиями $1,\ 4,\ 1$ соответственно. Найти:

$$a)\quad \mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 < 0); \qquad b)\quad \mathbf{P}(|2\xi_1 - \xi_2 + \xi_3| < 3).$$

(Воспользоваться тем фактом, что линейная комбинация независимых нормально распределенных случайных величин имеет нормальное распределение).

6.4. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_{20}$ независимы и имеют показательное распределение (5.13) с параметром $\lambda = 2$. Найти вероятность того, что сумма $S = \xi_1 + \cdots + \xi_{20}$ заключена в пределах от 4 до 12.

Ответ: 0.8108

6.5. Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_{100}$ независимы и имеют распределение арксинуса (5.16) с параметром $a = 1$. Найти наименьшее α такое, что с вероятностью не меньшей 0.9 среднее арифметическое $\frac{S_{100}}{100} = \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_{100}}{100}$ отклоняется от математического ожидания ξ_i по абсолютной величине не более чем на α.

Упражнения для домашней работы.

6.6. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение, причем $\mathbf{M}\xi = 20$, а $\mathbf{D}\xi = 25$. Найти вероятность того, что случайная величина ξ принимает значения из интервала $(15, 25)$.

6.7. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $a = 25$. Вероятность попадания ξ в интервал $(10, 15)$ равна 0.2. Чему равна вероятность попадания ξ и интервал $(35, 40)$?

6.8. Производится измерение диаметра вала без систематических (одного знака) ошибок. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратичным отклонением $\sigma = 10$ мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превышающей по абсолютной величине 15 мм.

6.9. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_{100}$ независимы и имеют распределение Паскаля (5.14) с параметром $r = 1$. Найти вероятность того, что сумма $S_{100} = \xi_1 + \cdots + \xi_{100}$ заключена в пределах от 80 до 130.

6.10. Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют распределение Рэлея (5.17) с параметром $\sigma = 1$. Найти наименьшее n такое, что с вероятностью не меньшей 0.99 среднее арифметическое $\frac{S_n}{n} = \frac{\xi_1+\dots+\xi_n}{n}$ отклоняется от математического ожидания ξ_i по абсолютной величине не более чем на $\alpha = 0.01$.

7 Таблица распределения Пуассона

Значения функции $p_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$

	$\lambda = 0.1$	$\lambda = 0.2$	$\lambda = 0.3$	$\lambda = 0.4$	$\lambda = 0.5$
$m = 0$	0.90484	0.81873	0.74082	0.67032	0.60653
$m = 1$	0.09048	0.16375	0.22225	0.26813	0.30327
$m = 2$	0.00452	0.01637	0.03334	0.05363	0.07582
$m = 3$	0.00015	0.00109	0.00333	0.00715	0.01264
$m = 4$	0.00000	0.00005	0.00025	0.00072	0.00158
$m = 5$	0.00000	0.00000	0.00002	0.00006	0.00016
$m = 6$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001

	$\lambda = 0.6$	$\lambda = 0.7$	$\lambda = 0.8$	$\lambda = 0.9$	$\lambda = 1$
$m = 0$	0.54881	0.49659	0.44933	0.40657	0.36788
$m = 1$	0.32929	0.34761	0.35946	0.36591	0.36788
$m = 2$	0.09879	0.12166	0.14379	0.16466	0.18394
$m = 3$	0.01976	0.02839	0.03834	0.04940	0.06131
$m = 4$	0.00296	0.00497	0.00767	0.01111	0.01533
$m = 5$	0.00036	0.00070	0.00123	0.00200	0.00307
$m = 6$	0.00004	0.00008	0.00016	0.00030	0.00051
$m = 7$	0.00000	0.00001	0.00002	0.00004	0.00007
$m = 8$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001

Продолжение на следующей странице.

Значения функции $p_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$ **(продолжение)**

	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$	$\lambda = 6$
$m = 0$	0.13534	0.04979	0.01832	0.00674	0.00248
$m = 1$	0.27067	0.14936	0.07326	0.03369	0.01487
$m = 2$	0.27067	0.22404	0.14653	0.08422	0.04462
$m = 3$	0.18045	0.22404	0.19537	0.14037	0.08924
$m = 4$	0.09022	0.16803	0.19537	0.17547	0.13385
$m = 5$	0.03609	0.10082	0.15629	0.17547	0.16062
$m = 6$	0.01203	0.05041	0.10420	0.14622	0.16062
$m = 7$	0.00344	0.02160	0.05954	0.10445	0.13768
$m = 8$	0.00086	0.00810	0.02977	0.06528	0.10326
$m = 9$	0.00019	0.00270	0.01323	0.03627	0.06884
$m = 10$	0.00004	0.00081	0.00529	0.01813	0.04130
$m = 11$	0.00001	0.00022	0.00192	0.00824	0.02253
$m = 12$	0.00000	0.00006	0.00064	0.00343	0.01126
$m = 13$	0.00000	0.00001	0.00020	0.00132	0.00520
$m = 14$	0.00000	0.00000	0.00006	0.00047	0.00223
$m = 15$	0.00000	0.00000	0.00002	0.00016	0.00089
$m = 16$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00005	0.00033
$m = 17$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00012
$m = 18$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00004
$m = 19$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001

8 Таблица нормального распределения

Значения функции $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$

СОТЫЕ ДОЛИ x

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986

9 Ответы

1. Классические и геометрические вероятности

1.1. $7/8, \quad 3/8, \quad 1/2.$

1.2. $1/4!\,, \quad 1/3!$

1.3. $3!2!2!/10!$

1.4. $(7)_5/7^5$

1.5. $\binom{51}{5}/\binom{52}{6}$

1.6. $\binom{6}{3}\binom{14}{4}/\binom{20}{7}$

1.7. $1/12.$

1.8. $1/4.$

1.9. $5/36\,, \quad 2/9\ .$

1.10. $3/8$

1.11. $2/3$

1.12. $(n-1)(n-2)!/n!$

1.13. $n(n-2)!/n!$

1.14. $(n-1)!/n! = 1/n$

1.15. $15\ 32!\ 4!\ /\ 36!$

1.16. $6!/6^6$

1.17. $\binom{2n}{n}/2^{2n}$

1.18. $1-\binom{32}{3}/\binom{36}{3}$

1.19. $\binom{40}{3}37!/40!$

1.20. $1-\binom{n-m}{k}/\binom{n}{k}$

1.21. $\binom{18}{9}\binom{18}{9}/\binom{36}{18}$

1.22. $1/4.$

1.23. а) $1/4$, б) $1/2$, в) $1/3$.

2. Условные вероятности

2.1. $p/(8-7p)$

2.2. Рассмотреть пространство элементарных событий

$$\Omega = \{ \; 1_+2_+3_+,\ 1_+2_+3_-,\ 1_+2_-3_+,\ 1_+2_-3_-,\ 1_-2_+3_+,\ 1_-2_+3_-,\ 1_-2_-3_+,\ 1_-2_-3_- \; \}.$$

Определить на нем вероятности и получить ответ

$$\mathbf{P}(A_0) = \frac{1}{230}\,, \qquad \mathbf{P}(A_1) = \frac{2}{23}\,, \qquad \mathbf{P}(A_2) = \frac{19}{46} \qquad \mathbf{P}(A_3) = \frac{57}{115}\,.$$

2.4. $1/2, \quad 1/3$.

2.5. Рассмотреть пространство элементарных событий

$$\Omega = \{\text{Б, ЧБ, ЧЧБ, ЧЧЧБ, ЧЧЧЧБ, ЧЧЧЧЧБ}\}.$$

Определить на нем вероятности и найти вероятность выигрыша для первого и второго игрока.

2.6. $7/18$.

2.7. $11/20$.

2.8. $3/5, \quad 2/5$

2.9. $\alpha(1-\gamma)/[\alpha(1-\gamma)+\gamma(1-\beta)]$

2.10. $1/12$.

2.11. $\frac{4}{52}\frac{3}{51}$

2.12. $P(B/A) = 0.05/0.129 \approx 0.4,\ P(B/\bar{A}) = 0.089/0.871 \approx 0.1$.

2.13. Рассмотреть пространство элементарных событий

M_1M_1 (0.33)	M_1D_2 (0.18)	0.51
D_1D_2 (0.31)	D_1M_2 (0.18)	0.49
0.64	0.36	1

Задать на нем вероятности и получить ответ $\frac{0.33}{0.33+0.18} \approx 0.647$.

2.14. $1/9$ и $3/35$.

2.18. $p/(1-q^2),\ qp/(1-q^2)$.

2.19. 0.895

2.20. $\frac{5}{60}\frac{4}{14} + \frac{1}{60}\frac{5}{14} + \frac{45}{60}\frac{5}{14} + \frac{9}{60}\frac{6}{14} \approx 0.3619$

2.21. $19/43,\ 24/43$.

2.22. Ко второй группе.

2.23. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{M_i}$

2.24. $\frac{2i}{n(n+1)},\ i=0,1,...,n.$

2.25. 9/16.

3. Схема Бернулли и теорема Пуассона

3.1. 0,348678..., 0,057395..., 0,987204...

3.2. $(5/6)^n,\ 1-(5/6)^n,\ 5^{n-1}/6^n,\ n5^{n-1}/6^n$

3.3 $P\{A\}\approx 0.234,\ P\{B\}\approx 0.721,\ P\{C\}\approx 0.00218,\ P\{D\}\approx 0.821.$

3.4. 7/8; 2/3; 1/3.

3.5. 1) 0.6651...,0.6321.... 2) 0.40187...,0.3679... 3)0.2009...,0.1839...

3.6. 0.95957

3.7 $\lambda=3.$

3.8. $\lambda=np=0.5$ Искомая вероятность равна 0.39347

3.9. 3/16 и 13/16.

3.10. $1-(7/8)^{20}=0.930791...$

3.11.

$$\binom{5}{2}\left(\frac{1}{6^3}\right)^2\left(1-\frac{1}{6^3}\right)^3=0.00021137....$$

3.12. $\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16};\quad \binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}.$

3.13. а) Пусть 1 - автомобиль проехал и 0 - автомобиль не проехал в течении 1с. Имеем схему Бернулли с $n=6$ и ищем вероятность событий вида

$$ab1000.$$

Здесь ab - произвольная последовательность 0 и 1. Имеем

$$\begin{aligned} P(ab1000) &= P(111000)+P(001000)+P(011000)+P(101000) \\ &= (p^3+q^2p+qp^2+qp^2+)q^3=(p+q)^2pq^3=pq^3. \end{aligned}$$

б) $(1-q^3)pq^3$. в) $(1-q^3-pq^3)pq^3$.

3.14. $\binom{200}{3}(0.01)^3(0.99)^{197}\approx\frac{2^3}{3!}e^{-2}=0.18045...$

3.15. 0.17547.

3.16. 0.26424.

3.17. 800.

3.18. $\left(\frac{25}{36}\right)^{k-1}\left(\frac{11}{36}\right)$.

3.19. Пусть B_j – событие, состоящее в том, что за единицу времени происходит j столкновений. Тогда

$$\begin{aligned} P(A_k) &= \sum_{j=k}^{\infty} P(B_j)P(A_k|B_j) = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\binom{j}{k}p^k(1-p)^{j-k} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+l}}{(k+l)!}e^{-\lambda}\binom{k+l}{k}p^k(1-p)^l \\ &= e^{-\lambda}p^k\frac{\lambda^k}{(k)!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^l}{(k+l)!}k!\frac{(k+l)!}{k!l!}(1-p)^l \\ &= e^{-\lambda}\frac{p^k\lambda^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{[(1-p)\lambda]^l}{l!} = \frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda p}. \end{aligned}$$

3.20. $\binom{5+k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+5}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$.

3.21. Пусть A_i, $i = 1, 2$ обозначает событие состоящее в том, что первым переполнился ящик для деталей i-ой группы. Найти вероятности событий A_i, $1 = 1, 2$ и, сложив полученные вероятности, получить ответ $\binom{r+m}{m}2^{-r-m}$, $r = 0, 1, \ldots, m$

3.22. Коробки вынимались $2n - r$ раз, причем одна из них – n раз. Пусть A обозначает событие, что вынутая коробка пуста. Тогда

$$P(A) = P(A/a)p(a) + P(A/b)p(b) = \binom{2n-r}{n}p^n q^{n-r}p + \binom{2n-r}{n}q^n p^{n-r}q$$

3.23. Пусть A–разорение игрока, A_1–выпала 1 и A_2–выпала (-1). И пусть $P(n)$–вероятность разорения игрока с начальным капиталом n. Имеем

$$P(n) = P(n/A_1)P(A_1) + P(n/A_2)P(A_2) = [P(n-1) + P(n+1)]/2.$$

Отсюда $P(n) = 1 - n/N$

4. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

4.1. 0,9133, 0,3650, 0.4451

4.2. 0.0010

4.3. 0.9876

4.4. 0.6196

4.5. $n = 900$

4.6. $\alpha = 0.05$

4.7. $130 \leq m \leq 170$

4.8. Это схема Бернулли с $n = 2000$, вероятностью успеха $p = 1/30$ и неудачи $q = 29/30$. Число x определяется из условия $P\{x \leq \mu_n\} < 0.01$.

Имеем

$$\begin{aligned} P\{x \leq \mu_n\} &= P\left\{\frac{x - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-np}{\sqrt{npq}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{x - np}{\sqrt{npq}}\right) < 0.01. \end{aligned}$$

Таким образом, нужно найти наименьшее x такое, что $\Phi_0\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right) > 0.49$. По таблицам функции $\Phi_0(x)$ находим, что $\frac{x-np}{\sqrt{npq}} = 2.327$. Поэтому $x = \frac{200}{3} + 2.327 \cdot 8.027 = 85.4$. Округляя до целого числа, получим $x = 86$.

4.9. 0.9432, 0.406, 0.462

4.10. 0.8186

4.11. 0.0228

4.12. 0.7698

4.13. 177

4.14. $n = 661$

4.15. $n = 6147$

4.16. $\alpha = 0.02$

4.17. $792 \leq \mu_n \leq 828$

4.18. a) Пусть x обозначает количество мест в каждом из гардеробов. Через μ обозначим число пар, выбравших гардероб одного из входов. Тогда гардероб другого входа выбрали $500-\mu$ пар. Теперь имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{2\mu \le x,\ 1000-2\mu \le x\} &= \mathbf{P}\{500-x/2 \le \mu \le x/2\}\\ &= \mathbf{P}\left\{\frac{250-x/2}{0.5\sqrt{500}} \le \frac{\mu_n-250}{0.5\sqrt{500}} \le \frac{-250+x/2}{0.5\sqrt{500}}\right\}\\ &\approx 2\Phi_0\left(\frac{-250+x/2}{0.5\sqrt{500}}\right) \ge 0.99.\end{aligned}$$

Отсюда находим $x=558$.

б) $x=541$.

4.19. 547 **5. Случайные величины**

5.1. а)

Значения ξ	0	2	4	6
Вероятности значений ξ	$10/32$	$15/32$	$6/32$	$1/32$

б)$21/32$; в) 1.875; г) 2.4844; д) 2.

5.2. а) r;   б) $r(r+1)$;   в) 0.

5.3. а)

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0 & \text{при } \ x\le 0,\\ x^2/2 & \text{при } \ 0<x\le 1,\\ x^2/2-(x-1)^2 & \text{при } \ 1<x\le 2,\\ 1 & \text{при } \ 2<x.\end{cases}$$

б)

$$p_\xi(x)=\begin{cases}0 & \text{при } \ x\le 0,\\ x & \text{при } \ 0<x\le 1,\\ 2-x & \text{при } \ 1<x\le 2,\\ 0 & \text{при } \ 2<x.\end{cases}$$

в) 1; г) $1/6$; д) 1.

5.4. а)

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0 & \text{при } \ x\le x_0,\\ 1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^a & \text{при } \ x>x_0.\end{cases}$$

б) $\frac{ax_0}{a-1}$;   в) $\frac{ax_0^2}{(a-1)^2(a-2)}$;   г)$x_0$;   д) $x_0\sqrt[a]{2}$.

5.5. а)

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -a, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a} & \text{при} \quad |x| < a, \\ 1 & \text{при} \quad x \ge a \end{cases}$$

б)0;   в) $\frac{a^2\pi}{2}$;   г) не существует ;   д) 0 .

5.6. а)

Значения ξ	0	1	2	3	4	5	6
Вероятности значений ξ	7/28	6/28	5/28	4/28	3/28	2/28	1/28

б)20/28; в) 2; г) 3; д) 0.

5.7. а)

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ x^2/2 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ -x^2/2 + 2x - 1 & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad 2 < x. \end{cases}$$

б)

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ x & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 2 - x & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 0 & \text{при} \quad 2 < x. \end{cases}$$

в) 1; г) 1/6; д) 1; е) 1.

5.8. а) воспользовавшись равенствами

$$1 = C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = C\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = C$$

получим, что $C = 1$;   б) 3/4;   в)$\frac{n_2-n_1+1}{n_1(n_2+1)}$.

5.9. Из равенства $\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx = 1$ следует, что $C = 3$. $\mathbf{P}\{1 < \xi < 2\} = 7/8$.

5.10. $\sigma\sqrt{\pi/2}$, $\sigma^2(2 - \pi/2)$, σ, $\sigma\sqrt{2\ln 2}$).

5.11. $2\sqrt{2/(\beta\pi)}$, $\frac{1}{\beta}\Big(3 - \frac{8}{\pi}\Big)$

6. Предельные теоремы

6.1. 0.5

6.2. $\sigma = 2$.

6.3. 0.5,   0.6536

6.4. 0.8108

6.5. Как было показано ранее, $\mathbf{M}\xi_i = 0$ и $\mathbf{D}\xi_i = \frac{a^2\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{S_{100}}{100} - \mathbf{M}\xi_i\Big| \le \alpha\Big\} = \mathbf{P}\Big\{-\alpha \le \frac{S_{100}}{100} \le \alpha\Big\}$$
$$= \mathbf{P}\Big\{-\alpha\sqrt{\frac{100}{\mathbf{D}\xi_i}} \le \frac{S_{100}}{\sqrt{100\mathbf{D}\xi_i}} \le \alpha\sqrt{\frac{100}{\mathbf{D}\xi_i}}\Big\}$$
$$= \mathbf{P}\Big\{-7.979\alpha \le \frac{S_{100} - 100\mathbf{M}\xi_i}{\sqrt{100\mathbf{D}\xi_i}} \le 7.979\alpha\Big\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-7.979\alpha}^{7.979\alpha} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$
$$= 2\Phi_0(7.979\alpha) \ge 0.9.$$

Итак, α является наименьшим решением неравенства $\Phi_0(7.979\alpha) \ge 0.45$. Из таблицы функции $\Phi_0(x)$ находим, что $7.979\alpha = 1.65$. Отсюда следует, что $\alpha = 0.207$

6.6. 0.6826.   6.7. 0.2.   6.8. 0.8664   6.9. 0.9044.   6.10. 43980.

10 Список использованных источников

1. В.П. Чистяков. Курс теории вероятностей. - М.: Наука, 1987.

2. Б.В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. - М.: Наука, 1969.

3. А.Н. Ширяев. Вероятность. - М.: Наука, 1989.

4. Ю.П. Пытьев, И.А. Шишмарев. Курс теории вероятностей и математической статистики для физиков. Изд. Московского университета, 1983.

5. А.М. Зубков, Б.А. Севастьянов, Е.П. Чистяков. Сборник задач по теории вероятностей. - М.: Наука, 1989.

6. А.В. Прохоров, В.Г. Ушаков, Н.Г. Ушаков. Задачи по теории вероятностей. - М.: Наука, 1986.