

О НЕКОТОРЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Я. Л. Геронимус

Введение

Пусть многочлены $\{\varphi_n(z)\}$ ортонормальны относительно некоторого обложения на единичной окружности или на конечном отрезке вещественной оси; ищутся условия, достаточные для существования предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \left| \varphi_k(z) \right|^2 \right\}, \quad (I)$$

где z — на множестве, на котором многочлены ортонормальны.

Для ортогональности на конечном отрезке вещественной оси задача была впервые рассмотрена Г. Сегё [21], затем Н. И. Ахиезером [1], П. Эр-дешем и П. Тураном [16], а в более общем случае — автором ([4, 6, 7]; [13], стр. 445—450, 485—486). В случае ортогональности на единичной окружности задача была рассмотрена У. Гренандером и М. Розенблат-том [18] и в более общем случае автором ([8, § 5.6]).

В настоящей работе мы получили условия, достаточные для существования (I) и более общие, чем те, которые были получены во всех указанных работах.

§ 1

Рассмотрим сперва некоторые известные результаты, относящиеся к тригонометрической проблеме моментов и к многочленам, ортогональным на единичной окружности $z = e^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

1. Если задана последовательность комплексных чисел $\{c_k\}_0^n$, для которой определители Тёплица $\{D_k\}_0^n$ удовлетворяют условиям

$$D_k = |c_{i-j}|_0^k > 0, \quad c_{-k} = \bar{c}_k, \quad (k = 0, 1, \dots, n), \quad (1.1)$$

то по этим числам можно построить систему многочленов

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= \frac{1}{\sqrt{D_0}}, \quad \varphi_k(z) = \frac{1}{\sqrt{D_k D_{k-1}}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_k \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-k+1} & c_{-k+2} & \dots & c_{-1} \\ 1 & z & \dots & z^k \end{vmatrix} = \\ &= \alpha_k z^k + \dots, \quad \alpha_k > 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (1.2)$$

ортонормальных на единичной окружности

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(e^{i\theta}) \overline{\varphi_s(e^{i\theta})} d\sigma_n(\theta) = \delta_{ks}, \quad (k, s = 0, 1, \dots, n); \quad (1.3)$$

неубывающая на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция $\sigma_n(\theta)$ является одним из решений так называемой укороченной проблемы моментов

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} d\sigma_n(\theta) = c_k, \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (1.4)$$

Имеет место формула Кристоффеля—Дарбу

$$K_m(z, z_0) = \sum_{k=0}^m \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(z_0)} = \frac{\varphi_m^*(z) \overline{\varphi_m^*(z_0)} - z \overline{z_0} \varphi_m(z) \overline{\varphi_m(z_0)}}{1 - z \overline{z_0}},$$

$$\varphi_m^*(z) = z^m \overline{\varphi_m\left(\frac{1}{z}\right)}, \quad (m = 0, 1, \dots, n) \quad (1.5)$$

([13], гл. XI; [5], §§ 2, 8, 10).

II. Вместо моментов $\{c_k\}_0^n$, удовлетворяющих условию (1.1), можно задать параметры $\{a_k\}_0^{n-1}$, подчиненные условиям

$$|a_k| < 1, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1); \quad (1.6)$$

параметры связаны с моментами и с определителями Тёплица соотношениями

$$(-1)^k a_k = \frac{|c_{i-j+1}|_0^k}{|c_{i-j}|_0^k}, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{\alpha_{k+1}^2} = \frac{D_{k+1}}{D_k} = c_0 \prod_{v=0}^k (1 - |a_v|^2). \quad (1.8)$$

(из 1.8) вытекает эквивалентность условий (1.1) и (1.6).

По параметрам $\{a_k\}_0^{n-1}$ можно построить систему многочленов

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{k+1}(z) &= z\Phi_k(z) - \bar{a}_k \Phi_k^*(z) \\ \Phi_{k+1}^*(z) &= \Phi_k^*(z) - a_k z\Phi_k(z) \end{aligned} \right\} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1); \quad (1.9)$$

$$\left\{ \Phi_k(z) = \frac{\varphi_k(z)}{\alpha_k} \right\}_0^n. \quad (1.9')$$

Зная c_0 , можно найти и старшие коэффициенты $\{\alpha_k\}_0^n$. Все корни многочленов (1.9) лежат при условиях (1.6) в области $|z| < 1$ ([5], §§ 3, 4, 9).

III. Укороченная тригонометрическая проблема моментов (1.4) имеет бесчисленное множество решений — в частности, решений в виде ступенчатых функций с $n+1$ точками роста. Каждое из таких решений полностью определяется заданием одной точки роста (например, $\theta_0^{(n)}$) — все остальные точки роста $\{\theta_k^{(n)}\}_1^n$ и соответствующие массы $\{\mu_k^{(n)}\}_0^n > 0$ найдутся из $2n+1$ уравнений (1.4)

$$\sum_{s=0}^n \mu_s^{(n)} e^{-ik\theta_s^{(n)}} = c_k, \quad \mu_s^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \sigma_n(\theta_s^{(n)} + 0) - \sigma_n(\theta_s^{(n)} - 0) \right\}, \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (1.10)$$

([2], гл. I, § 2; [5], §§ 10—12).

IV. Если по заданным параметрам $\{a_k\}_0^{n-1}$, удовлетворяющим условиям (1.6), построить многочлены $\{\Phi_k(z)\}_0^n$, а затем положить $|a_n|=1$ и построить по (1.9) многочлен

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \bar{a}_n \Phi_n^*(z) \quad (1.11)$$

степени $n+1$, то все его корни простые и лежат на окружности $|z|=1$; все массы соответствующего обложения $d\tau_n(\theta)$ можно найти по формуле

$$\mu_s^{(n)} = \frac{c_0}{2} e^{-i\theta_s^{(n)}} \frac{\Psi_{n+1}(e^{i\theta_s^{(n)}})}{\Phi_{n+1}'(e^{i\theta_s^{(n)}})}, \quad (s=0, 1, \dots, n), \quad (1.12)$$

где многочлены второго рода $\{\Psi_k(z)\}_0^{n+1}$ построены по формуле, аналогичной (1.9), но с параметрами $\{-a_k\}_0^n$ ([5], §§ 9—10); [19]).

V. Если задать точку $z_0 = e^{i\theta_0}$ и положить в (1.5) $m=n$, то многочлен

$$\frac{K_n(z, z_0)(z - z_0)}{\alpha_n^2 \Phi_n(z_0)} = z\Phi_n(z) - \frac{z_0 \overline{\Phi_n^*(z_0)}}{\Phi_n(z_0)} \Phi_n^*(z) = \Phi_{n+1}(z, z_0) \quad (1.13)$$

можно рассматривать по (1.11) как многочлен $\Phi_{n+1}(z)$ с заданным корнем z_0 на окружности $|z|=1$, причем параметр a_n таков:

$$a_n = \frac{\Phi_n^*(z_0)}{\Phi_n(z_0)}, \quad |a_n|=1. \quad (1.14)$$

Мы получаем, таким образом, решение $\sigma_n(\theta, \theta_0)$ укороченной проблемы моментов в виде ступенчатой функции с заданной точкой роста $\theta_0 = \theta_0^{(n)}$; соответствующая этой точке масса такова:

$$\mu_0^{(n)} = \frac{1}{K_n(z_0, z_0)}, \quad (1.15)$$

ибо из очевидного равенства

$$\frac{1}{K_n(z_0, z_0)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{K_n(z, z_0)}{K_n(z_0, z_0)} \right|^2 d\tau_n(\theta)$$

получим, полагая $\sigma_n(\theta) = \sigma_n(\theta, \theta_0)$,

$$\frac{1}{K_n(z_0, z_0)} = \frac{1}{2\pi} \{\sigma_n(\theta_0 + 0, \theta_0) - \sigma_n(\theta_0 - 0, \theta_0) = \mu_0^{(n)}\}. \quad (1.16)$$

([5], §§ 10, 20]; [2, § 3]; [3]).

§ 2

После этих алгебраических свойств рассмотрим некоторые предельные соотношения.

VI. Каждое из условий

$$\{D_k\}_0^\infty > 0, \quad \{|a_k|\}_0^\infty < 1, \quad (2.1)$$

наложенных на моменты или на параметры, достаточно для того, чтобы

функция $\sigma(\theta)$, являющаяся решением тригонометрической проблемы моментов

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} d\sigma(\theta) = c_k, \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (2.2)$$

имела бесчисленное множество точек роста и не убывала на отрезке $[-\pi, \pi]$; она в существенном однозначно определяется своими моментами или параметрами. Если рассмотреть бесконечную последовательность ступенчатых функций $\{\sigma_n(\theta, \theta_0)\}_1^\infty$, имеющих точку θ_0 одной из своих точек роста, то, применяя теоремы Хелли, находим, что эта последовательность сходится в основном к функции $\sigma(\theta)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(\theta, \theta_0) = \sigma(\theta). \quad (2.3)$$

([2, гл. 2, § 1]; [5, §§ 12, 13]:

VII. Пусть E бесконечное замкнутое множество точек единичной окружности, причем дополнительное к нему множество F связно и регулярно, т. е. для него существует функция Грина $g(z, \infty)$, для которой в окрестности точки $z = \infty$ имеем

$$g(z, \infty) = \ln |z| + \gamma + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad (2.4)$$

где γ — константа Робена, а $d(E) = e^{-\gamma}$ трансфинитный диаметр (емкость) множества E . Функция $w = \varphi(z) = \exp\{g(z, \infty) + ih(z, \infty)\}$, где функция $h(z, \infty)$ сопряжена с функцией $g(z, \infty)$, отображает область F на область $|\varphi| > 1^*$.

Если $T_n(z) = z^n + \dots$ многочлен Чебышева, наименее уклоняющийся от нуля на E , и если

$$\mu_n = \text{Max} |T_n(z)|, \quad z \in E, \quad (n=1, 2, \dots), \quad (2.5)$$

то существует предел ([17]; [9], гл. VII)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^{\frac{1}{n}} = d(E). \quad (2.6)$$

VIII. Пусть $e \subset [-\pi, \pi]$ — замкнутое множество точек роста функции $\sigma(\theta)$; пусть на множестве $e_1 \subset e$ существует производная $\sigma'(\theta) > 0$ и пусть $e_2 \subset e_1$ — множество точек Лебега характеристической функции множества e_1 ; при помощи соотношения $z = e^{i\theta}$ получим соответствующие множества $E_2 \subset E_1 \subset E$ на единичной окружности.

Если $d(E_2) = d(E) > 0$, то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n^{\frac{1}{n}} = d(E), \quad M_n = \text{Max} |\Phi_n(z)|, \quad z \in E, \quad (n=1, 2, \dots); \quad (2.7)$$

([10], § 2). Эта теорема П. П. Коровкина является обобщением результата А. Эдrei [15] и теоремы 5.1 нашей работы [6], где $E = E^{(1)} + E^{(2)}$, причем $E^{(1)}$ — сумма конечного числа дуг единичной окружности, а $E^{(2)}$ — изолированное счетное множество; при этом $\sigma'(\theta) > 0$ почти всюду на множестве $e^{(1)} \subset e$, соответствующем множеству $E^{(1)}$.

Теорема 2.1. Пусть $\{P_n(z) = z^n + \dots\}_n^\infty$ произвольные многочлены степени n , не имеющие корней в области $|z| > 1$, и пусть суще-

* Функция $h(z, \infty)$ определена с точностью до добавочной константы.

стывает предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n^{\frac{1}{n}} = d(E), \quad m_n = \text{Max} |P_n(z)|, \quad z \in E, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.8)$$

где E — множество, рассмотренное в VII; тогда в области $|z| > R > 1$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n(z)|^{\frac{1}{n}} = d(E) |\varphi(z)|. \quad (2.9)$$

Действительно, функция

$$\lambda_n(z) = \frac{F_n(z)}{m_n \{\varphi(z)\}^n}$$

регулярна в области F , и на границе области имеем $|\lambda_n(z)| \leq 1$; поэтому это же неравенство справедливо во всей области F .

Рассмотрим теперь семейство функций

$$\delta_n(z) = \frac{1}{n} \ln |\lambda_n(z)|, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad |z| > R > 1. \quad (2.10)$$

Благодаря условию, наложенному на корни многочленов $\{P_n(z)\}_1^\infty$, все эти функции гармоничны в области $|z| > R$, удовлетворяют на ее границе $|z| = R$ условию $\{\delta_n(z)\}_1^\infty \leq 0$, причем, как легко видеть,

$$\delta_n(\infty) = \ln \frac{a(E)}{m_n^{\frac{1}{n}}}.$$

Так как семейство (2.10) нормально в области $|z| > R$, то мы можем выделить сходящуюся подпоследовательность $\{\delta_{n_i}(z)\}$, для которой имеем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_{n_i}(z) = \delta(z), \quad |z| > R; \quad (2.11)$$

на границе области мы имеем $\delta(z) \leq 0$. Кроме того, $\delta(\infty) = 0$ по условию (2.8); поэтому любая предельная функция $\delta(z)$ тождественно равна нулю в области $|z| > R$, т. е. мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left\{ \frac{|P_n(z)|}{|\varphi(z)|^n m_n} \right\}^{\frac{1}{n}} = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |P_n(z)|^{\frac{1}{n}} &= |\varphi(z)| \lim_{n \rightarrow \infty} m_n^{\frac{1}{n}}, \end{aligned} \right\} |z| > R \quad (2.12)$$

откуда вытекает (2.9)*.

Теорема 2.2. Из предыдущей теоремы при условии VIII вытекает существование пределов

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |\Phi_n(z)|^{\frac{1}{n}} &= d(E) |\varphi(z)|, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |\Phi_{n+1}(z, z_0)|^{\frac{1}{n+1}} &= d(E) |\varphi(z)|. \end{aligned} \right\} |z| > R \quad (2.13)$$

* Наше доказательство является небольшим видоизменением доказательства более общей теоремы Дж. Уолша ([14, §§ 7.3, 7.4]), от которой наша теорема отличается дополнительным ограничением, наложенным на расположение корней многочленов $\{P_n(z)\}_1^\infty$.

Существование первого из них вытекает из VIII; для доказательства существования второго напомним по (1.13), (1.14)

$$|\Phi_{n+1}(z, z_0)| = |z\Phi_n(z) - \bar{a}_n \Phi_n^*(z)| \leq 2|\Phi_n(z)|, \quad |z|=1;$$

поэтому, полагая $P_{n+1}(z) = \Phi_{n+1}(z, z_0)$, получим по (2.7)

$$p_{n+1} \leq m_{n+1} \leq 2M_n, \quad m_{n+1} = \text{Max} |\Phi_{n+1}(z, z_0)|, \quad z \in E,$$

откуда по (2.6), (2.7) вытекает (2.8), а, следовательно, и справедливость второго из соотношений (2.13).

§ 3

IX. При условиях VII распределением Робена $\mu(\theta)$ называется такое неотрицательное распределение единичной массы на замкнутом множестве E , при котором логарифмический потенциал обложения $d\mu(\theta)$ сохраняет на E постоянное значение, равное константе Робена γ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{1}{|z - e^{i\theta}|} d\mu(\theta) = \gamma, \quad z \in E; \quad (3.1)$$

значение того же потенциала в области F таково:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{1}{|z - e^{i\theta}|} d\mu(\theta) = \gamma - g(z; \infty), \quad z \in F. \quad (3.2)$$

Распределение Робена можно найти по формуле

$$\mu(\theta) = \frac{1}{2\pi} h(e^{i\theta}; \infty) = \frac{1}{2\pi} h_0(\theta), \quad (3.3)$$

где $h(z; \infty)$ гармоническая функция, сопряженная с функцией Грина $g(z; \infty)$ области F ([11], гл. V, § 3; [12], гл. V, § 5).

X. Пусть $\psi_n(\theta, \theta_0)$ ступенчатая неубывающая функция, имеющая положительный скачок $\frac{1}{n+1}$ в каждой точке $\{\theta_k^{(n)}\}_0^n$, где $\{z_k^{(n)} = e^{i\theta_k^{(n)}}\}_0^n$ — корни многочлена $\Phi_{n+1}(z, z_0)$ (1.13). Рассмотрим бесконечную последовательность этих функций распределения $\{\psi_n(\theta, \theta_0)\}_1^\infty$, причем пусть $\{\theta_0^{(n)}\}_{n=1}^\infty = \theta_0$, т. е. θ_0 является точкой роста всех этих функций. По первой теореме Хелли существует подпоследовательность $\{\psi_{n_i}(\theta, \theta_0)\}$, сходящаяся в основном к некоторой предельной функции распределения

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \psi_{n_i}(\theta, \theta_0) = \psi(\theta, \theta_0). \quad (3.4)$$

При $|z| > 1$ мы имеем

$$\ln |\Phi_{n+1}(z, z_0)|^{\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \ln |z - e^{i\theta_k^{(n)}}| = \int_{-\pi}^{\pi} \ln |z - e^{i\theta}| d\psi_n(\theta, \theta_0);$$

так как функция $\ln |z - e^{i\theta}|$ при этом условии непрерывна, то по второй теореме Хелли имеем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |z - e^{i\theta}| d\psi_{n_i}(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln |z - e^{i\theta}| d\psi(\theta, \theta_0), \quad (3.5)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |\Phi_{n_i+1}(z)|^{\frac{1}{n_i+1}} = \exp \left\{ - \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{1}{|z - e^{i\theta}|} d\psi(\theta, \theta_0) \right\}.$$

Теорема 3.1. При условиях VIII сходится вся последовательность функций распределения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(\theta, \theta_0) = \psi(\theta, \theta_0) = \mu(\theta) \quad (3.6)$$

к предельной функции, совпадающей с функцией распределения Робена для множества E .

Действительно, по (2.13) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} |\Phi_{n_i+1}(z)|^{\frac{1}{n_i+1}} &= d(E) |\varphi(z)| = d(E) |\exp\{g(z; \infty) + ih(z; \infty)\}| = \\ &= d(E) \exp\{g(z; \infty)\} = \exp\{-\gamma + g(z; \infty)\}, \quad |z| > 1; \end{aligned}$$

сопоставляя с (3.5), получим равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{1}{|z - e^{i\theta}|} d\psi(\theta, \theta_0) = \gamma - g(z; \infty), \quad |z| > 1,$$

которое по (3.2) характеризует функцию распределения Робена $\mu(\theta)$.

Теорема 3.2. При условиях VIII справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_n(z_0, z_0)}{n+1} = \frac{h'_0(\theta_0)}{\sigma'(\theta_0)}, \quad z_0 = e^{i\theta_0}, \quad (3.7)$$

в каждой точке θ_0 , в которой существуют $\sigma'(\theta_0) > 0$, $h'_0(\theta_0) > 0$.

Действительно, выберем достаточно малую величину $\varepsilon_n > 0$ таким образом, чтобы обе функции ограниченной вариации $\sigma(\theta)$ и $h_0(\theta)$ были непрерывны в точках $\theta_0 \pm \varepsilon_n$ и чтобы между точками $e^{i(\theta_0 + \varepsilon_n)}$ и $e^{i(\theta_0 - \varepsilon_n)}$ лежал лишь один корень многочлена $\Phi_{n+1}(z, z_0)$.

По (1.16) и (3.6) имеем

$$\sigma_n(\theta_0 + \varepsilon_n, \theta_0) - \sigma_n(\theta_0 - \varepsilon_n, \theta_0) = \frac{2\pi}{K_n(z_0, z_0)},$$

$$\psi_n(\theta_0 + \varepsilon_n, \theta_0) - \psi_n(\theta_0 - \varepsilon_n, \theta_0) = \frac{1}{n+1}, \quad z_0 = e^{i\theta_0},$$

откуда находим

$$\frac{K_{n+1}(z_0, z_0)}{n+1} = 2\pi \frac{\psi_n(\theta_0 + \varepsilon_n, \theta_0) - \psi_n(\theta_0 - \varepsilon_n, \theta_0)}{\sigma_n(\theta_0 + \varepsilon_n, \theta_0) - \sigma_n(\theta_0 - \varepsilon_n, \theta_0)}.$$

Если n достаточно велико, то по (2.3), (3.6) числитель и знаменатель правой части сколь угодно мало отличаются от соответствующих значений для предельных функций и мы имеем

$$\frac{K_{n+1}(z_0, z_0)}{n+1} = 2\pi \cdot \frac{\mu(\theta_0 + \varepsilon_n) - \mu(\theta_0 - \varepsilon_n)}{\sigma(\theta_0 + \varepsilon_n) - \sigma(\theta_0 - \varepsilon_n)} + o(1);$$

деля числитель и знаменатель правой части на $2\varepsilon_n$ и пользуясь существованием производных, находим

$$\frac{K_n(z_0, z_0)}{n+1} = 2\pi \cdot \frac{\mu'(\theta_0)}{\sigma'(\theta_0)} + o(1),$$

откуда по (3.3) следует (3.7).

Примечание 3.1. Теорема, аналогичная теореме 3.2, справедлива и для многочленов, ортонормальных на конечном отрезке вещественной оси—в этом случае роль многочленов (1.13) играют квази-ортонормальные многочлены порядка $n + 1$ с одним фиксированным корнем ([20, гл. II]).

§ 4

Рассмотрим несколько примеров.

1) Пусть $\ln \sigma'(\theta) \in L_1[-\pi, \pi]$; в таком случае $\sigma'(\theta) > 0$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$ и мы имеем

$$\begin{aligned} d(E) = 1, \quad \varphi(z) = z, \quad G(z; \infty) = g(z; \infty) + ih(z; \infty) = \ln z, \\ h(z; \infty) = \arg z, \quad h(e^{i\theta}; \infty) = h_0(\theta) = \theta; \end{aligned} \quad (4.1)$$

следовательно, во всех точках множества $e_1 \subset [-\pi, \pi]$ имеем предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_n(z_0, z_0)}{n+1} = \frac{1}{\sigma'(\theta_0)}, \quad z_0 = e^{i\theta_0}. \quad (4.2)$$

Тот же результат получим, если (при обозначениях VIII) $d(e_2) = 1$.

2) Рассмотрим многочлены Полачека, для которых

$$d\sigma(\theta) = p(\theta) d\theta, \quad p(\theta) = \left| \sin \theta \right| \frac{\exp \{(2\theta - \pi) \nu(\theta)\}}{\operatorname{ch} \{\pi \nu(\theta)\}}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad (4.3)$$

$$\nu(\theta) = \frac{a \cos \theta + b}{2 \sin \theta},$$

где a, b вещественны и $a > |b|$. Хотя в этом случае $\ln \sigma'(\theta) \notin L_1$, тем не менее снова $\sigma'(\theta) > 0$ почти всюду на отрезке $[-\pi, \pi]$ и справедливо (4.1), (4.2)*.

3) Пусть теперь E —дуга единичной окружности $[e^{i\alpha}, e^{i(2\pi-\alpha)}]$. Пользуясь преобразованием Жуковского-Чаплыгина**, имеем

$$z = w \cdot \frac{d\omega - 1}{\omega - d}, \quad \omega = \varphi(z) = \frac{z + 1 + \Phi(z)}{2d}, \quad d = d(E) = \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (4.4)$$

причем выбрана та ветвь функции $\Phi(z) = \sqrt{(z - e^{i\alpha})(z - e^{-i\alpha})}$, для которой $\lim_{z \rightarrow \infty} \{\Phi(z):z\} = 1$. Мы имеем в этом случае

$$G(z; \infty) = g(z; \infty) + ih(z; \infty) = \ln \frac{z + 1 + \Phi(z)}{2d}; \quad (4.5)$$

* Пользуясь явным выражением многочленов Полачека [13, стр. 396, формула (5.1)], можно проверить в этом случае справедливость (4.2) непосредственным вычислением.

** См., например, [8, гл. VIII].

полагая $z = e^{i\theta}$, $w = e^{i\psi}$, имеем на дуге E

$$e^{i\psi} = e^{\frac{i\theta}{2} - \frac{\cos \frac{\theta}{2} \pm i \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}}{\cos \frac{\alpha}{2}}} = e^{i \left(\frac{\theta}{2} \pm \lambda \right)}, \quad (4.6)$$

$$\cos \lambda = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \leq \theta \leq 2\pi - \alpha, \quad 0 \leq \lambda \leq \pi.$$

([8, гл. VIII).

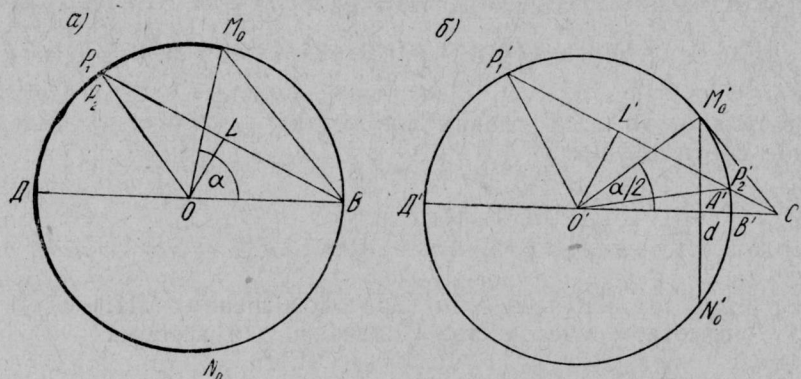


Рис. 1

На рис. 1 а изображена плоскость z , разрезанная вдоль дуги $E = \cup M_0 D N_0$, причем $\alpha = \angle B O M_0$; двигаясь в направлении $M_0 D N_0$, обозначим через P_1, P_2 две совпадающие точки, лежащие соответственно на правом и на левом берегах разреза. На рис. 1 б изображена плоскость w , причем $O A' = d$, $O' C' = \frac{1}{d}$, $M'_0 C' \perp M'_0 O'$; все точки в этой плоскости обозначены теми же буквами, что и соответствующие им точки в плоскости z , но со штрихами. Точкам P_1, P_2 плоскости z соответствуют две различные точки P'_1, P'_2 плоскости w , которые можно получить, проводя $C' P'_2 P'_1 \parallel B P_1$. Величина λ такова:

$$\lambda = \angle L' O' P'_1 = \angle L' O' P'_2, \quad O' L' \perp P'_1 P'_2.$$

Если точка P_1 движется по правому берегу разреза, пробегая дугу $M_0 D N_0$, то соответствующая ей точка P'_1 пробегает дугу $M'_0 D' N'_0$; если же после этого точка P_2 будет пробегать дугу $N_0 D M_0$, двигаясь по левому берегу разреза, то при этом точка P'_2 будет пробегать дугу $N'_0 B' M'_0$. Таким образом, когда точка P' опишет, двигаясь в положительном направлении, всю окружность $|w| = 1$, то соответствующая точка P дважды опишет разрез E , двигаясь сперва в положительном направлении по правому берегу, а затем в отрицательном — по левому. Так как на окружности $|w| = 1$ имеем

$$w = e^{i\psi} = \exp \{ \varphi(e^{i\theta}) \} = \exp \{ i h_0(\theta) \} = \exp \left\{ i \left(\frac{\theta}{2} \pm \lambda \right) \right\}, \quad (4.7)$$

то легко найдем:

на правом берегу разреза:

$$\psi_1 = h_0^{(1)} = \frac{\theta_1}{2} + \lambda_1, \quad dh_0^{(1)} = \frac{1}{2} d\theta_1 + d\lambda_1; \quad (4.8)$$

на левом берегу разреза:

$$\psi_2 = h_0^{(2)} = \frac{\theta_2}{2} - \lambda_2, \quad dh_0^{(2)} = \frac{1}{2} d\theta_2 - d\lambda_2,$$

причем $\theta_1 = \theta_2$ и благодаря (4.6) $\lambda_1 = \lambda_2$.

Рассмотрим дугу

$$\left\{ \exp \left[\theta_1 - \frac{d\theta_1}{2} \right], \exp \left[\theta_1 + \frac{d\theta_1}{2} \right] \right\}, \quad d\theta_1 > 0 \quad (4.9)$$

на правом берегу разреза — на ней сосредоточена масса $dh_0^{(1)} = \frac{1}{2} d\theta_1 + d\lambda_1$; для этой же дуги на левом берегу имеем $d\theta_2 = -d\theta_1$, $d\lambda_2 = -d\lambda_1$, ибо теперь эта дуга должна пробегаться в отрицательном направлении. Рассматривая вместо двух дуг на обоих берегах одну дугу

$$\left\{ \exp \left[\theta - \frac{d\theta}{2} \right], \exp \left[\theta + \frac{d\theta}{2} \right] \right\}, \quad d\theta = d\theta_1 = -d\theta_2 > 0, \quad (4.10)$$

пробегаемую лишь один раз и притом в положительном направлении, мы видим, что на ней надо сосредоточить массу

$$dh_0(\theta) = dh_0^{(1)}(\theta) + dh_0^{(2)}(\theta) = \frac{d\theta_1 + d\theta_2}{2} + d\lambda_1 - d\lambda_2 = 2d\lambda,$$

$$d\lambda = d\lambda_1 = d \arccos \left(\frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{2 \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta. \quad (4.11)$$

Таким образом, в этом случае функция распределения Робена $\mu(\theta)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ и плотность распределения такова:

$$\mu'(\theta) = \frac{1}{2\pi} h_0'(\theta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}}; \quad (4.12)$$

(она переходит в (4.1) при $\alpha = 0$). Следовательно, по (3.7) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_n(z_0, z_0)}{n+1} = \frac{\sin \frac{\theta_0}{2}}{\sigma'(\theta_0) \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta_0}{2}}}, \quad \alpha < \theta_0 < 2\pi - \alpha, \quad (4.13)$$

при условии, что $\sigma'(\theta) > 0$ почти всюду на отрезке $[\alpha, 2\pi - \alpha]$, или при условии $d(e_2) = \cos \frac{\alpha}{2}$.

В том частном случае, когда $\sigma'(9) = \sqrt{\frac{\sin \frac{\theta + \alpha}{2}}{\sin \frac{\theta - \alpha}{2}}}$, нам известны

явное выражение ортогональных многочленов ([8], формула (4.14')) и в справедливости формулы (4.13) можно убедиться непосредственным вычислением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер. Про теорему акад. С. Н. Бернштейна відносно квадратурної формули П. Чебишова. Журнал Ін-ту математики АН УРСР, № 3, 1937, 75—82.
2. Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн. О некоторых вопросах теории моментов. Статья 1. ГОНТИ УССР, Харьков, 1938.
3. Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн. Деякі зауваження про коефіцієнти квадратурних формул Gauss'овського типу. Труды Одесского державного університету. Математика. 11, 1938, 29—38.
4. Я. Л. Геронимус. О некоторых функциях распределения, связанных с системой полиномов. ДАН СССР, 44, № 9, 1944, 383—387.
5. Я. Л. Геронимус. Полиномы, ортогональные на круге, и их приложения. «Записки научно-исслед. Ин-та матем. и мех. и Харьк. матем. о-ва», (4), 19, 1948, 35—120.
6. Я. Л. Геронимус. О некоторых асимптотических свойствах полиномов. «Матем. сб.», 23 (65), № 1, 1948, 77—88.
7. Я. Л. Геронимус. О некоторых квадратурных формулах. ДАН СССР, 45, 1949, 437—440.
8. Я. Л. Геронимус. Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. Физматгиз, М., 1958.
9. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. ГТТИ, М.—Л., 1952.
10. П. П. Коровкин. Емкость множества и полиномы, минимизирующие интеграл. «Уч. зап. Калининград. пед. ин-та», 5, 1958, 34—52.
11. Р. Невандинна. Однозначные аналитические функции. ГТТИ, М.—Л., 1941.
12. С. Стоилов. Теория функций комплексного переменного, т. 2, ИЛ, М., 1962.
13. Г. Сегё. Ортогональные многочлены. Физматгиз, М., 1962.
14. Дж. Уолш. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. ИЛ, М., 1961.
15. A. Edrei. Sur les determinants recurrents et les singularités d'une fonction, donnée par son développement de Taylor. Compos. Math. 7, 1939, 20—80.
16. P. Erdős and P. Turán. On interpolation. III. Annals of Math., 4, 1940, 510—553.
17. G. Faber. Über Tchebyscheffsche Polynome. Journ. reine und angew. Math., 150, 1919, 79—106.
18. U. Grenander and M. Rosenblatt. An extension of a theorem of G. Szegő and its application to the study of stochastic processes. Trans. Amer. Math. Soc., 76, № 1, 1954, 112—126.
19. J. Schur. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. Journ. reine und angew. Math., 147, 1917, 205—232; 148, 1918, 122—145.
20. J. Shohat and J. Tamarkin. The problem of moments. N. Y., 1943.
21. G. Szegő. Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems. Math. Zeitschr., 12, 1922, 61—94.