ISSN 0453—8048
ISSN 0135—1850

ВЕСТНИК

ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 174
1978

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Выпуск 43

1 р. 20 к.

Вестн. Харьк. ун-та, 1978, № 174, 1—103+1.

СОДЕРЖАНИЕ

**ВЕСТНИК
ХАРЬКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

174

**Прикладная
математика
и механика**

Выпуск 43

Редактор *З. Н. Щегельская*
Художественный редактор *Т. П. Воробиенко*
Технический редактор *Л. Т. Момот*
Корректор *Н. С. Калинина*

Информ. бланк 2963

Сдано в набор 30.09.77. Подписано в печать 20.07.78. БЦ 09230. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага типографская № 3. Лит. гарн. Выс. печать. 6,5 усл. печ. л. 8,9 уч.-изд. л. Тираж 1000 экз. Изд. № 570. Зак. 2150. Цена 1 р. 20 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа». 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16

Харьковская городская типография № 16 Областного управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 174

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ВЫПУСК 43

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1978

51+531

УДК 517.928

Прикладная математика и механика, вып 43. Вестн. Харьк. ун-та. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, 103+1 с.

В вестнике опубликованы статьи по математической теории оптимальных процессов, дифференциальным уравнениям, а также по некоторым вопросам дискретных структур и механики.

Предназначен для научных работников и специалистов.

Списки лит. в конце статей.

Печатается по решению Ученого совета механико-математического факультета от 3 марта 1977 г.

Адрес редакционной коллегии:
310077, Харьков, 77, пл. Дзержинского, 4, госуниверситет, механико-математический факультет, тел. 40-14-40.

Редакция естественнонаучной литературы.

$\text{В}\frac{20204-570}{\text{М}226(04)-78}$ без объявл.

УДК 62—501.72:57

В. В. БАРАНОВ

ОБ АДАПТИВНОМ УПРАВЛЕНИИ МАРКОВСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P_x^π) задан управляемый марковский процесс $\{\xi_t^\pi, t=0,1,\dots\}$ со значениями в измеримом множестве $(E, \boldsymbol{E})$. Пусть процесс управляется стационарной нерандомизированной стратегией $\pi=(\pi, \pi, \dots)$, которая определяет измеримое однозначное отображение множества состояний E в измеримое множество управлений (Y, Y). Если в состоянии $x \in E$ стратегия π выбирает управление $y \in Y$, то система переходит в новое состояние $z \in \Gamma \subseteq E$ с вероятностью $Q^\pi(x,\Gamma|y)$. При этом начисляется непосредственный выигрыш $w=w(x, y): 0 \leqslant w < \infty$.

Пусть $x \in E$ — фиксированное начальное состояние, из которого начинается эволюция процесса. Каждой стратегии π можно сопоставить, например, функцию выигрышей $\varphi=\varphi(\pi)$ вида

$$\varphi(\pi)(x) = \lim_n \frac{1}{n+1} M_x^\pi \sum_{t=0}^{n} w(x_t, y_t). \tag{1}$$

Задача тогда состоит в том, чтобы найти стратегию, которая максимизирует функционал φ.

В (1) математическое ожидание берется по мере P_x^π, которая всегда может быть построена при заданной переходной функции Q^π. Если переходная функция априори не задана, возникает задача адаптивного управления, рассматриваемая в данной работе.

Если переходная функция Q априори не известна, то для выбора оптимальных управлений необходимо идентифицировать ее по результатам последовательных наблюдений, предшествующих каждому выбору управления. В этом случае имеют место три связанные задачи: 1) идентификации переходной функции; 2) адаптивного синтеза оптимальной стратегии; 3) оптимальной остановки процесса идентификации.

Задача идентификации нами не рассматривается. Потребуем только, чтобы были выполнены условия:

а) переходная функция Q задана в виде некоторой функции параметра θ (вообще говоря, векторного). При этом истинное значение параметра не известно;

б) процедура идентификации обеспечивает состоятельность последовательности оценок $\{\theta_k, k=1, 2, \ldots\}$.

В качестве критерия для выбора оптимального управления в каждый момент времени $t=1, 2, \ldots$ будем использовать апостериорное математическое ожидание суммарного выигрыша при условии наблюденных значений процесса до момента t. Это апостериорное матожидание определим следующим образом.

Предположим, что в каждый момент t процесс ξ_t наблюдается, по результатам наблюдений оценивается неизвестное значение параметра θ и затем выбирается некоторая стратегия. Условимся при этом, что получение оценки сопровождается начислением штрафа $c>0$. Пусть $w_t=w_t(\pi_t)(\xi_t)=w(\xi_t, y_t)$ — непосредственный выигрыш за применение управления y_t в состоянии ξ_t, где $y_t=\pi_t(\xi_t) \in Y$ — управление, выбираемое стратегией π_t в момент t и $w_t^c=w_t-c$. Обозначим $\pi_0^n=(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)$. Положим, что стратегия π_0^n выбирается по результатам оценок $\{\theta_t, t=0, 1, \ldots, n\}$. Пусть $\xi_0^t=\{\xi_s, s=0, 1, \ldots, t\}$, $\xi_s \in E$ — траектория управляемого процесса до момента t; $\theta_0^t=\{\theta_s, s=0, 1, \ldots, t\}$ — последовательность оценок до момента t и $y_0^t=\{y_s, s=0, 1, \ldots, t\}$, $y_s \in Y$ — траектория, образованная управлениями, выбираемыми стратегией π_0^t. Обозначим тогда

$$\omega_0^t=\{\xi_0^t, \theta_0^t, y_0^t\}, \quad t=0,1,\ldots$$

Каждой стратегии π_0^n сопоставим апостериорное математическое ожидание суммарного выигрыша $r_n=r_n(\pi_0^n)$, которое определим так:

$$r_n(\pi_0^n)=M\left\{\sum_{t=0}^{n} w_{n-t}^c(\pi_{n-t})/\omega_0^n\right\}=M\left\{\sum_{t=0}^{n} w_{n-t}(\pi_{n-t})/\omega_0^n\right\}-nc, \qquad (2)$$

для краткости r_n будем называть апостериорным выигрышем.

Пусть F_n, $n=0, 1, \ldots$ — неубывающая последовательность σ-алгебр, порожденных величинами ω_0^n, $n=0, 1, \ldots$

Предположим теперь, что в некоторый момент n процесс идентификации остановлен и выбрана некоторая стационарная стратегия $f_n^\infty=(f_n, f_n, \ldots)$. Этой стратегии f_n^∞ сопоставим условное математическое ожидание среднего выигрыша $\varphi_n=\varphi(f_n^\infty)$ вида

$$\varphi(f_n^\infty)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m-n}M\left\{\sum_{t=n+1}^{m} w_t(f_n^\infty)/F_n\right\}. \qquad (3)$$

Выигрыш φ_n используем в качестве заключительного или финального выигрыша, начисляемого в момент n, если в этот момент остановить процесс извлечения информации.

Рассмотрим тогда стратегию σ_n, „склеянную" в точке n из двух стратегий π_0^n и f_n^∞, т. е. $\sigma_n = (\pi_0^n f_n^\infty) = (\pi_0 \quad, \pi_1, \ldots, \pi_n, f_n, f_n \ldots)$.

Такую стратегию будем называть «адаптивной». Каждой адаптивной стратегии σ_n сопоставим суммарный выигрыш $g_n = g_n(\sigma_n)$ вида

$$g_n(\sigma_n) = r_n(\pi_0^n) + \varphi(f_n^\infty). \tag{4}$$

Если число шагов наблюдения заранее фиксировано, то задача, вообще говоря, состоит в выборе стратегии $\bar{\sigma}_n$, которая максимизирует условный выигрыш g_n, т. е. $g_n(\bar{\sigma}_n) = \sup\limits_{\sigma_n} g_n(\sigma_n)$.

Заметим, однако, что $g_n(\sigma_n) = r_n(\pi_0^n) + \varphi(f_n^\infty)$. Тогда

$$\sup_{\sigma_n} g_n(\sigma_n) \leqslant \sup_{\pi_0^n} r_n(\pi_0^n) + \sup_{f_n^\infty} \varphi(f_n^\infty).$$

Поэтому мы будем отыскивать не стратегию $\bar{\sigma}_n$, а стратегию σ_n^* такую, что

$$g_n(\sigma_n^*) = \sup_{\pi_0^n} r_n(\pi_0^n) + \sup_{f_n^\infty} \varphi(f_n^\infty). \tag{5}$$

Стратегию σ_n^* называем n-оптимальной адаптивной.

Введем обозначения $r_n^* = \sup\limits_{\pi_0^n}(\pi_0^n)$, $\varphi_n^* \sup\limits_{f_n^\infty} \varphi(f_n^\infty)$ и $g_n^* = g_n(\sigma_n^*)$

Теперь заметим, что каждое новое наблюдение несет дополнительную информацию о процессе, а следовательно, и возможность улучшения стратегии. Тогда напрашивается вывод о целесообразности неограниченного наблюдения. Однако учтем, что в определение (2) апостериорного выигрыша r_n линейно и с отрицательным знаком входит штраф за извлечение информации. Поэтому нетрудно видеть, что если наблюдения продолжались неограниченно, то при определенных условиях окажется $\lim\limits_n g_n^* = -\infty$.

Отсюда естественным образом возникает задача об оптимальной остановке процесса идентификации, а тем самым, и адаптивного управления.

Таким образом, задача адаптивного синтеза оптимальной стратегии управления тесно связана с задачей оптимальной остановки процесса идентификации.

Для формальной постановки этой задачи будем предполагать, что относительно последовательности σ-алгебр F_t, $t=0, 1, \ldots$ определен марковский момент (м. м.) τ. Пусть $\bar{M}$ — класс м. м. и M — класс конечных м. м., которые называются моментами остановки (м. о.). Пусть на σ-алгебре $F = \sigma(\cup F_t)$ определена некоторая вероятностная мера P_x, $(x \in E)$. Тогда математическое ожидание

$$M_x \{g^*_\tau\} = \int\limits_{\{\tau < \infty\}} g^*_\tau \, dP_x.$$

Поскольку предел $\lim\limits_n g^*_n$ существует, интеграл здесь имеет смысл. Функцию $s(x) = \sup\limits_{\tau \in \overline{M}} M_x \{g^*_\tau\}$ назовем «ценой». Момент τ^*, при котором достигается цена, назовем оптимальным.

Таким образом, задача окончательно состоит в выборе стратегии σ^* такой, что $s(x) = s(\sigma^*)(x) = \sup\limits_{\tau \in \overline{M}} M_x \{g^*_\tau\}$, где $\sigma^* = (\pi_0^{\tau^*} f^\infty_{\tau^*})$.

Стратегию σ^* будем называть оптимальной адаптивной.

Для решения сформулированной задачи необходимо вначале рассмотреть задачу выбора стратегии σ^*_n при фиксированном $n < \infty$. Так как $g_n(\sigma^*_n) = r^*_n + \varphi^*_u = \sup\limits_{\pi_0^n} r_n(\pi_0^n) + \sup\limits_{f_n^\infty} \varphi(f_n^\infty)$, здесь мы на самом деле имеем две задачи: выбора стратегии $(\pi_0^n)^*$ такой, что

$$r_n(\pi_0^n)^* = \sup\limits_{\pi_0^n} r_n(\pi_0^n) = r^*_n, \tag{6}$$

и стратегии $(f_n^\infty)^*$ такой, что

$$\varphi(f_n^\infty)^* = \sup\limits_{f_n^\infty} \varphi(f_n^\infty) = \varphi^*_n. \tag{7}$$

Заметим, что $\varphi(f)^n_\infty$ есть условный средний выигрыш, который вычисляется относительно F_n лишь после остановки процесса идентификации в момент n. Поэтому выбираемое в момент n значение параметра θ_n фиксировано для всех $t \geqslant n$, следовательно, и переходная функция $Q(\theta_n)$ фиксирована. Тогда стратегия $(f_n^\infty)^*$, максимизирующая выигрыш $\varphi(f_n^\infty)$, может быть построена с помощью методов, развитых, например, в [1] для управляемых марковских процессов с заданной переходной функцией. Поэтому задачу (7) выбора стратегии (f_n^∞) будем полагать решенной.

Рассмотрим теперь задачу (6). Поскольку стратегия (π_0^n) строится последовательно по результатам наблюдений, желательно ввести рекуррентные соотношения для ее вычисления. С этой целью сначала покажем, что для функции $r_n = r_n(\pi_0^n)$ справедливо следующее разложение:

$$r_n = w^c_n + M\{r_{n-1}/\omega_0^n\}. \tag{8}$$

Действительно, используя (2) и учитывая $\omega_0^n \supseteq \omega_0^{n-1}$, получаем

$$r_n = \sum_{t=0}^{n} \mathrm{M}\,\{w_{n-t}^c/\omega_0^n\} = w_n^c + \sum_{t=1}^{n} \mathrm{M}\,\{w_{n-t}^c/\omega_0^n\} =$$

$$= w_n^c + \mathrm{M}\left\{\sum_{t=0}^{n-1} \mathrm{M}\,\{w_{n-t}^c/\omega_0^n\}/\omega_0^{n-1}\right\} = w_n^c + \mathrm{M}\,\{r_{n-1}/\omega_0^n\}.$$

Теперь заметим, что $w_n = w_n(\xi_n, y_n) = w_n(\pi_n)(\xi_n)$, где $y_n = \pi_n(\xi_n) \in Y$. Тогда с учетом этих обозначений из (8) получаем рекуррентное соотношение

$$r_n(\pi_n)(\xi_n) = w_n^c(\pi_n)(\xi_n) + \mathrm{M}\,\{r_{n-1}(\pi_{n-1})(\xi_{n-1})/\omega_0^n\}. \qquad (9)$$

Рассматривая теперь апостериорное математическое ожидание $\mathrm{M}\,\{r_{n-1}|\omega_0^n\}$, заметим, что дополнительные условия, которые задает ω_0^n, связаны со значениями (ξ_n, θ_n, y_n). Но $\theta_n = \theta_n(\xi_n)$, а y_n выбирается стратегией π_n, т. е. $y_n = \pi_n(\xi_n)$. Поэтому можно записать

$$\mathrm{M}\,\{r_{n-1}(\pi_{n-1})(\xi_{n-1})/\omega_0^n\} = \mathrm{M}\,\{r_{n-1}(\pi_{n-1})(\xi_{n-1})/\pi_n(\xi_n)\} =$$
$$= \mathrm{M}_{\xi_n}^{\pi_n}\{r_{n-1}(\pi_{n-1})(\xi_{n-1})\}.$$

Тогда рекуррентное соотношение (9) перепишется в виде

$$r_n(\pi_n)(\xi_n) = w_n^c(\pi_n)(\xi_n) + \mathrm{M}_{\xi_n}^{\pi_n}\{r_{n-1}(\pi_{n-1})(\xi_{n-1})\}. \qquad (10)$$

Пусть теперь L — множество всех функций $\{r_n, n=0, 1, \dots\}$ Введем ряд операторов, отображающих это множество в себе.

Пусть $u \in L$, π — некоторая стратегия и Q^π — соответствующая стратегии π переходная функция. Тогда положим

$$Q(\pi)\,u(x) = \mathrm{M}_x u(x_1) = \int_{\mathrm{E}} u(z)\, Q^\pi(dz/x, \pi(x)); \quad \pi(x) = y \in Y.$$

Теперь определим оператор $\mathrm{F} = \mathrm{F}(\pi)$: $\mathrm{F}(\pi)\,u(x) = w^c(x, \pi(x)) + Q(\pi)\,u(x)$. Тогда рекуррентное соотношение (10) можно записать в виде

$$r_n(\pi_n)(\xi_n) = w^c(\pi_n)(\xi_n) + Q(\pi_n)\,r_{n-1}(\pi_{n-1})(\xi_n) = \mathrm{F}(\pi_n)\,r_{n-1}(\pi_{n-1})(\xi_n). \qquad (11)$$

Учтем, что наша задача состоит в выборе стратегии $(\pi_0^n)^*$, максимизирующей апостериорный выигрыш $r_n(\pi_0^n)$. С этой целью введем оператор $U = U(f^*)$, который определим следующим образом: $U(f^*)\,r_{n-1}(\pi_{n-1}) = \sup_f \mathrm{F}(f)\,r_{n-1}(\pi_{n-1})$.

Заметим, что оператор F, а тем самым и U определены для каждого $n=1, 2, \ldots$ при фиксированной оценке θ_n. Это мы отразим обозначением U_n и F_n.

Нетрудно проверить, что операторы F_n и U_n монотонны.

Пусть теперь стратегия $(\pi_0^{n-1})^* = (\pi_0^*, \ldots, \pi_{n-1}^*)$ максимизирует выигрыш r_{n-1}, т. е. $r_{n-1}(\pi_0^{n-1})^* = r_{n-1}^*$. Тогда из определения оператора U_n вытекает рекуррентное соотношение

$$r_n(\pi_n^*) = U_n r_{n-1}(\pi_{n-1}^*), \tag{12}$$

где $r_n(\pi_n^*) = r_n(\pi_0^n)^*$. Отсюда, в частности,

$$r_n^* = U_n r_{n-1}^* = U_n \ldots U_1 r_0^*. \tag{13}$$

Таким образом, стратегия $(\pi_0^n)^*$, максимизирующая апостериорный выигрыш $r_n(\pi_0^n)$, может быть построена рекуррентным способом с помощью оператора U_n. Тем самым задачу (6) мы также можем полагать решенной.

Рассмотрим задачу об отыскании оптимального момента остановки. Будем называть экспериментом e_n применение некоторого управления $y_n \in Y$ в наблюдаемом состоянии $\xi_n \in E$. Положим, что исходом этого эксперимента является случайная величина ξ_{n+1} и оценка $\theta_{n+1}=\theta_{n+1}(\xi_{n+1})$. Предположим тогда, что выполнен некоторый эксперимент e_{n-1}, исходом которого являются ξ_n и θ_n. Пусть по оценке θ_n выбрана стратегия π_n^*. Очередной эксперимент e_n должен тогда состоять в том, чтобы в наблюдаемом состоянии ξ_n применять управление $y_n^*=\pi_n^*(\xi_n)$. Поскольку θ_n и y_n^* фиксированы, то, не выполняя эксперимента, мы знаем вероятность любого его исхода, т. е. вероятность значений случайной величины ξ_{n+1} и оценки $\theta_{n+1}=\theta_{n+1}(\xi_{n+1})$, которая определяется переходной функцией $Q(\xi_n, \Gamma|\theta_n, \pi_n^*(\xi_n))$, $\Gamma \subset E$. Но тогда может быть вычислено условное математическое ожидание $\overline{\theta}_{n+1}$ оценки:

$$\overline{\theta}_{n+1} = \int_E \theta_{n+1}(z)\, Q(\xi_n, dz/\theta_n, \pi_n^*(\xi_n)).$$

Заметим теперь, что σ-алгебра F_n порождается, в частности, значениями ξ_n, θ_n и y_n^*. Поэтому $\overline{\theta}_{n+1}$ есть не что иное, как условное математическое ожидание вида

$$\overline{\theta}_{n+1} = M\{\theta_{n+1}(\xi_{n+1})/F_n\}. \tag{14}$$

Очевидно, что эта оценка $\overline{\theta}_{n+1}$ содержит в себе в усредненном виде всю ту информацию, которую можно получить, выполнив эксперимент e_n.

Оператор U_n, определенный при условии использования оценки θ_n, обозначим $\overline{U}_n$. Заметим, что

$$U_n r^*_{n-1} = r^*_n = M\left\{\sum_{t=0}^{n} w^c_{n-t}(\pi^*_{n-t})/\omega^n_0\right\}.$$

Если теперь вместо оператора U_n использовать оператор $\overline{U}_n$, то, учитывая, согласно (14), что оценка θ_n, с помощью которой задан оператор $\overline{U}_n$, определяется условиями, задаваемыми в момент $(n-1)$, запишем

$$\overline{U}_n r^*_{n-1} = M\left\{\sum_{t=0}^{n} w^c_{n-t}(\pi^*_{n-t})/\omega^{n-1}_0\right\} = M\{r^*_n/\omega^{n-1}_0\} = \overline{r}^*_n. \qquad (15)$$

Рассуждая далее аналогичным способом, получаем: если в момент $(n-1)$ процесс идентификации остановлен и мы рассматриваем оператор $\overline{U}_{n+k}$, $k \geqslant 0$, то для его определения используется оценка θ_n. Значит, $\overline{U}_{n+k} = \overline{U}_n$. Тогда, также как в (15), имеем

$$\overline{U}_{n+k}\, r^*_{n-1} = M\{r^*_n/\omega^{n-1}_0\}.$$

Теперь становится ясным, что для отыскания оптимального момента остановки τ^* следует сравнивать значения случайных величин g^*_n и $\overline{g}^*_{n+1}$, где $\overline{g}^*_{n+1}$ получено при условии использования оценки θ_{n+1}. Это сравнение будем выполнять, рассматривая $\max\,\{g^*_n, \overline{g}^*_{n+1}\}$.

Поскольку $\overline{g}^*_{n+1}$ вычисляется в предположении, что процесс идентификации в момент n остановлен, очевидно, что $\varphi^*_{n+1} = \varphi^*_n$. Поэтому $\overline{g}^*_{n+1} = \overline{r}^*_{n+1} + \varphi^*_{n+1} = \overline{r}^*_{n+1} + \varphi^*_n$, где $\overline{r}^*_{n+1} = \overline{U}_{n+1} r^*_n$. Тогда

$$\max\{g^*_n, \overline{g}^*_{n+1}\} = \max\{r^*_n + \varphi^*_n, \overline{r}^*_{n+1} + \varphi^*_n\} = \max\{r^*_n, \overline{r}^*_{n+1}\}. \qquad (16)$$

Отсюда теперь следует, что задачу об оптимальной остановке можно рассматривать, используя вместо функции g^*_n функцию r^*_n. В частности, отсюда вытекает, что цену $s(x)$ можно определить в виде

$$s(x) = \sup_{\tau\in\overline{M}} M_x\{r^*_\tau\}. \qquad (17)$$

Для построения оптимального марковского момента τ^* введем оператор G, который действует на r^*_n по правилу

$$Gr^*_0 = \max\{r^*_0, \overline{U}_1 r^*_0\}.$$

Его степени определим так:

$$G^{n+1}r_0^* = \max\{G^n r_0^*, \overline{U}_{r+1}\, r_0^*\},$$

что эквивалентно следующему:

$$Gr_n^* = \max\{r_n^*, \overline{U}_{n+1} r_n^*\}.$$

Определение 1. *Функцию $v \in L$ будем называть эксцессивной относительно оператора U (U — э. ф.), если $v \geqslant Uv$.*

Э. ф. *v будем называть э. мажорантой* (*э. м.*) *функции $r_n \in L$, если $v \geqslant r_n$, $n=0, 1, \ldots$*

Э. м. *v будем называть наименьшей э. м. (н. э. м.) функции r_n, если она не превосходит любой другой э. м. функции r_n.*

U — э. ф. v будем называть регулярной, если для всех $k = 1, 2, \ldots$ $v \geqslant U_k \ldots U_1 v$.

Аналогичные определения остаются в силе, если вместо оператора U использовать оператор $\overline{U}$.

Лемма 1. *Пусть процесс идентификации оставлен в некоторый момент $n < \infty$ и функция r_n^* эксцессивна относительно оператора $\overline{U}_{n+1}$. Тогда она и регулярна.*

Доказательство. Действительно, пусть выполнено неравенство

$$r_n^* \geqslant \overline{U}_{n+1} r_n^*. \tag{18}$$

Поскольку процесс извлечения информации оставлен в момент n, для любого $k \geqslant 1$ операторы $\overline{U}_{n+k}$ определены при одной и той же оценке $\overline{\theta}_{n+1}$. Значит,

$$\overline{U}_{n+k} = \overline{U}_{n+1},\ k = 1, 2, \ldots \tag{19}$$

Тогда, применяя монотонный оператор $\overline{U}_{n+2}$ к обеим частям неравенства (18), имеем $\overline{U}_{n+2}\, r_n^* \geqslant \overline{U}_{n+2}\overline{U}_{n+1} r_n^*$, или в силу (19) $\overline{U}_{n+1} r_n^* \geqslant \overline{U}_{n+2}\overline{U}_{n+1} r_n^*$. Отсюда с учетом (18) получаем $r_n^* \geqslant \overline{U}_{n+2}\overline{U}_{n+1} r_n^*$. Аналогичным способом устанавливаем, что имеют место неравенства $r_n^* \geqslant \overline{U}_{n+k} \ldots \overline{U}_{n+1} r_n^*$ для всех $k = 1, 2, \ldots$.

Из этой леммы очевидным образом вытекает

Следствие 1. *Пусть выполнены условия леммы 1 и пусть $\tau \in \overline{M}$ — марковский момент такой, что $P\{n \leqslant \tau\} = 1$. Обозначим $\tau_n = \tau - n$. Тогда с вероятностью 1*

$$r_n^* \geqslant \overline{U}_{n+\tau} \ldots \overline{U}_{n+1} r_n^* = \overline{U}_{n+1}^{\tau_n} r_n^*.$$

Из этого следствия, в свою очередь, вытекает

Следствие 2. *Пусть выполнены условия следствия 1. Тогда*

$$r_n^* \geqslant M\overline{U}_{n+\tau} \ldots \overline{U}_{n+1} r_n^* = M\, \overline{U}_{n+\tau}^{\tau_n} r_n^* \qquad P\text{— п. н.} \tag{20}$$

Рассмотрим теперь последовательность операторов $\{\bar{U}_k, k=1, 2 \ldots\}$, определенных с помощью оценок θ_k. Обозначим $\bar{U}_* = \lim_k \bar{U}_k$. Такой предел существует. Действительно, если в некоторый момент n процесс идентификации остановлен, то в силу (19) $\lim_k \bar{U}_k = \bar{U}_{n+1}$. Если же идентификация продолжается неограниченно, то в силу состоятельности последовательности оценок $\{\theta_k\}$ существует предел по вероятности этой последовательности, который обозначим θ^*. Но тогда этому же равен предел последовательности оценок $\{\theta_k\}$. Отсюда следует существование предела по вероятности $\bar{U}_*$. При этом очевидно $\bar{U}_* = U_*$.

Приведем без доказательства следующее утверждение.

Лемма 2 [2]. *Пусть* $u(x) = \lim_n G^n r_0(x)$. *Тогда* $u(x)$ *является наименьшей регулярной* U_**-эксцессивной мажорантой* r_n^*, $n=0, 1, \ldots$.

Теперь можно доказать следующее важное утверждение.

Теорема 1. *Цена* $s(x)$ *является наименьшей регулярной* U_**-эксцессивной мажорантой функции* r_n^*, $n=1, 2, \ldots$

Доказательство. Прежде всего заметим, что по лемме 2 функция $u(x)$ является наименьшей регулярной U_*-эксцессивной мажорантой r_n, $n=0, 1, \ldots$ Тогда для доказательства теоремы достаточно показать, что $s(x) = u(x)$.

Действительно, пусть τ — некоторый марковский момент из $\bar{M}$. Обозначим $u_\tau(x) = U_*^\tau u(x)$. Поскольку в силу леммы 2 функция $u(x)$ эксцессивна относительно оператора $U_* = \bar{U}_*$, то, применяя следствие 2, получаем

$$u(x) \geqslant M_x\{U_*^\tau u\} = M_x\{u_\tau\} \quad P - п.\ н.$$

Поскольку согласно лемме 2 $u(x)$ является регулярной мажорантой r_n^*, $n=0, 1, \ldots$, то $u(x) \geqslant M_x\{u_\tau\} \geqslant M_x\{r_\tau^*\}$ $P - п.\ н.$ Тогда

$$u(x) \geqslant \sup_{\tau \in \bar{M}} M_x\{r_\tau^*\} = s(x) \qquad P - п.\ н. \tag{21}$$

Покажем, что $P - п.\ н.$ $u(x) \leqslant s(x)$. Действительно, определим моменты

$$\tau_\varepsilon : M_x\{r_{\tau_\varepsilon}^*\} \geqslant s(x) - \varepsilon,\ \varepsilon > 0 \text{ и } \sigma_\varepsilon = \tau_\varepsilon + 1.$$

Воспользуемся следующими свойствами оператора U: а) U — монотонен; б) $Ur_n = r_{n+1}$; в) $U(r+a) = Ur + a$, где a — постоянная. Тогда имеем $M_x\{r_{\sigma_\varepsilon}^*\} = M_x\{r_{\tau_\varepsilon+1}^*\} = U_* M_x\{r_{\tau_\varepsilon}^*\} \geqslant$ $\geqslant U_*\{s(x) - \varepsilon\} = U_* s(x) - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Отсюда и поскольку $s(x) \geqslant M_x\{r_{\sigma_\varepsilon}^*\}$, получаем $s(x) \geqslant M_x\{r_{\sigma_\varepsilon}^*\} \geqslant U_* s(x) - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

В силу производительности $\varepsilon > 0$ $s(x) \geqslant U_* s(x)$, что и означает U_*-эксцессивность цены $s(x)$. Из леммы 1 теперь следует ее регулярность.

Далее, из определения цены и (17) следует, что она представляет собой мажоранту r_n^*, $n=0, 1, \ldots$ Таким образом, цена $s(x)$ является U_*-эксцессивной мажорантой r_n^*. Но из леммы 2 вытекает, что функция $u(x)$ — наименьшая U_*-эксцессивная мажоранта r_n^*. Тогда $s(x) \geqslant u(x)$. Отсюда и из (21) получаем равенство $s(x) = u(x)$, что и доказывает теорему. Далее нам потребуется следующее

Определение 2. *Пусть* $r_n^* = r_n(\sigma_n^*) \in L$. *Обозначим* $r_n^+ = \max\{0, r_n^*\}$ и $r_n^- = -\min\{0, r_n^*\}$. *Функция* $r_n^* \in L$ *при* $n \to \infty$ *суммируема сверху, если она удовлетворяет условию*

$$A^+ : M\{\sup_n r_n^+\} < \infty.$$

Класс функций $r_n \in L$, удовлетворяющих условию A^+, обозначим $L(A^+)$. *Функция* $r_n^* \in L$ *при* $n \to \infty$ *суммируема снизу, если она удовлетворяет условию*

$$A^- : M\{\sup_n r_n^-\} < \infty.$$

Класс функций $r_n \in L$, удовлетворяющих условию A^-, обозначим $L(A^-)$.

Теорема 2. *Пусть определен м. м.* $\tau \in \overline{M}$: $\tau = \inf\{n: G^{n+1}r_0 = G^n r_0\}$. *Тогда, если* $r_n \in L(A^+)$, *то* τ — *оптимальный момент остановки процесса идентификации.*

Если $r_n \in L(A^-)$, *то* $\tau = \infty$ *является оптимальным марковским моментом.*

Доказательство. Пусть $r_n \in L(A^+)$. Так как $G^{n+1}r_0 \geqslant G^n r_0$, то из определения момента τ следует, что до момента τ имеют место строгие неравенства

$$G^{n+1}r_0 > G^n r_0, \quad n=0, 1, \ldots, \tau-1 \tag{22}$$

и в момент $n=\tau$ $G^{n+1}r_0 = G^n r_0$. Но тогда из определения оператора G и его степеней следует, что до момента τ справедливы неравенства $\overline{U}_{n+1} G^n r_0 > G^n r_0$, $n=0, 1, \ldots, \tau-1$ и в момент $n=\tau$

$$\overline{U}_{\tau+1} G^\tau r_0 \leqslant G^\tau r_0. \tag{23}$$

Тогда для всех $n < \tau$

$$G^{n+1} r_0 = \max\{G^n r_0, \overline{U}_{n+1} G^n r_0\} = \overline{U}_{n+1} G^n r_0.$$

Отсюда рекуррентным способом получаем

$$G^n r_0 = r_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tau; \tag{24}$$

$$\overline{U}_{n+1} r_n > r_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tau - 1$$

и

$$\overline{U}_{n+1} r_n \leqslant r_n, \quad n = \tau.$$

Таким образом, при $n=\tau$ функция r_n эксцессивна отнсительно оператора $\overline{U}_n$.

Теперь, учитывая (23), запишем

$$G^{\tau+1}r_0 = \max\{G^{\tau}r_0, \overline{U}_{\tau+1} G^{\tau}r_0\} = G^{\tau}r_0 = r_{\tau}. \tag{25}$$

По индукции нетрудно определить, что

$$G^{\tau+k} r_0 = r_{\tau}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{26}$$

Действительно, для $k=1$ это равенство установлено в (25). Предположим теперь, что (26) справедливо для некоторого $k>1$. Далее учтем, что в силу леммы 1, если τ — момент остановки процесса идентификации и r_{τ} эксцессивна относительно оператора $U_{\tau+1}$, то она и регулярна. При этом $\overline{U}_{\tau+k}=U_{\tau+1}$. Тогда $\overline{U}_{\tau+k}r_{\tau} \leqslant r_{\tau}$ для всех $k=1, 2, \ldots$ Используя это неравенство и предположение индукции, получаем

$$G^{\tau+k+1} r_0 = \max\{G^{\tau+k} r_0, U_{\tau+k+1} G^{\tau+k} r_0\} = \max\{r_{\tau}, \overline{U}_{\tau+k+1} r_{\tau}\} =$$
$$= \max\{r_{\tau}, \overline{U}_{\tau+1} r_{\tau}\} = r_{\tau}.$$

Тем самым (26) справедливо для всех $k=1, 2, \ldots$ Переходя теперь в (26) к пределу при $k \to \infty$ и используя теорему 1, получаем

$$\lim_{k\to\infty} G^{\tau+k} r_0 = u(x) = s(x) = r_{\tau}(x). \tag{27}$$

Таким образом, в момент τ достигается цена, откуда следует оптимальность момента τ.

Покажем теперь, что если $r_n \in L(A^+)$, то $\tau \in M$, т. е. является моментом остановки. Действительно, условие $L(A^+)$ означает, что r_n, $n=0, 1, \ldots$ ограничена сверху и не ограничена снизу. Учитывая, что в определение r_n линейным образом и с отрицательным знаком входит штраф за извлечение информации, получаем $r_n \to -\infty$ при $n \to \infty$. С другой стороны, в силу (22) и (24) имеем $r_{n+1}>r_n$, $n=0, 1, \ldots, \tau-1$.

Это возможно, если с вероятностью 1 разности $r_{n+1}-r_n$ меняют знак при некотором $n<\infty$. Нетрудно видеть, что такая первая перемена знака происходит при $n=\tau$. Поскольку при этом достигается цена, тем самым с вероятностью 1 $\tau<\infty$. Следовательно, $\tau \in M$.

Пусть $r \in L(A^-)$. Это условие имеет место в том случае, если существует подпоследовательность индексов n_k, $k=1, 2, \ldots$ такая, что $rn_{k+1} > rn_k$, $k=0, 1, \ldots$

Нетрудно видеть, что тогда имеют место строгие неравенства

$$G^{n_{k+1}} r_0 > G^{n_k} r_0, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{28}$$

Предположив, что $\tau< \infty$, в силу (25) и (26) запишем равенства

$$G^{\tau+k} r_0 = G^{\tau} r_0, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Но это противоречит неравенствам (28). Значит, $\tau=\infty$, что и завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранов В. В. Об одном классе алгоритмов динамического программирования в стохастических системах. — «Вестн. Харьк. ун-та. Прикл. математика и механика», 1977, вып. 42, с. 11—19.
2. Баранов В. В. Оптимальные правила остановки в управляемых процессах. — «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1977, вып. 42, с. 19—27.

Поступила 24.II.1977 г.

УДК 62—503.4

В. В. БАРАНОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ В СТАТИСТИКЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Пусть имеется измеримое пространство (Ω, F) и вероятностная мера $P(\theta)$ на F, зависящая от параметра θ, принимающего значения в n-мерном пространстве Θ. Будем полагать, что истинное значение θ° параметра не известно. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, F, P, (\theta))$ задан случайный процесс $\{\xi_t\}$. Для простоты будем предполагать, что этот процесс является однородной марковской цепью, такой, что $M\xi_t^2 < \infty$, $t=0$, 1, ... Требуется, основываясь на наблюдениях $\xi_0^t = \{\xi_s, s = 0, 1, ..., t\}$, получать оценки истинного значения θ^0 параметра в каждый момент времени $t=1, 2, ...$ Эту задачу будем решать, представляя процесс получения оценок марковским процессом решений.

Марковский процесс решений определяется набором следующих объектов: множество состояний E; множество решений Θ; переходная функция (переходная вероятность) Q на $E\times E$ при условии решений $\theta \in \Theta$; функция w на $E\times\Theta$, имеющая смысл потерь либо выигрышей; стратегия π, которая определяет правило принятия решений в каждый момент $t=0, 1, ...$ наблюдения процесса ξ_t.

Пусть на множестве всех стратегий $\{\pi\}=\Pi$ определен некоторый функционал $g_n(\pi)$, $n=0, 1, ...$, смысл которого будем связывать с выигрышами либо потерями от процесса решений. Тогда задача состоит в выборе стратегии, которая максимизирует либо минимизирует данный функционал. При этом задача на максимум либо на минимум решается в зависимости от смысла функции w. В свою очередь смысл этой функции определяется в зависимости от поведения переходной функции по θ. Если $Q=Q(\theta)$ выпукла по θ, то w выберем так, чтобы математическое ожидание $M\,w(\xi, \theta)$, $\xi \in E$, $\theta \in \Theta$ по мере на E, задаваемой переходной функцией, также было выпукло по θ. В этом случае будем решать задачу на минимум и в качестве функции потерь w будем использовать условную дисперсию случайной величины ξ_t, $t=0, 1, ...$

Если $Q=Q(\theta)$ вогнуто по θ, то аналогичным образом потребуем, чтобы $Mw(\xi, \theta)$ было вогнуто по θ. Тогда задача решается на максимум и в качестве функции выигрышей w будем использовать переходную вероятность Q.

Для определенности будем рассматривать первый случай, когда задача решается на минимум.

Если траектория ξ_0^t процесса фиксирована, то условимся обозначать ее $x_0^t = (x_0, x_1, ..., x_t)$.

Будем тогда предполагать, что имеют смысл и конечны условные математические ожидания $M\{\xi_t | x_{t-1}, \theta_{t-1}\}$ и $M\{\xi_t^2 / x_{t-1}, \theta_{t-1}\}$, $t=1, 2, ...$. Тогда для каждого $t=1, 2, ...$ определим условную дисперсию: $D(\xi_t | x_t, \theta_t) = M\{[\xi_t - M(\xi_t | x_{t-1}, \theta_{t-1})]^2 | x_t, \theta_t\}$. Отсюда видно, что на самом деле

$$D(\xi_t / x_t, \theta_t) = [x_t - M(\xi_t / x_{t-1}, \theta_{t-1})]^2. \qquad (1)$$

Полученную условную дисперсию используем теперь в качестве функции w, т. е. положим

$$w(x_t, \theta_t) = D(\xi_t | x_t, \theta_t). \qquad (2)$$

В дальнейшем процесс решений, связанный с выбором оценок, нам удобно интерпретировать как некоторую последовательность экспериментов по извлечению значений случайной величины ξ_t и параметра θ.

Пусть тогда фиксировано некоторое $t < \infty$ и выполнена серия $n \geqslant t$ экспериментов. Пусть при этом наблюдались значения $x_0^n = (x_0, x_1, ..., x_n)$ и были выбраны значения параметра $\theta^n{}_0 = \{\theta_0, \theta_1, ..., \theta_n\}$.

Определение. *Пусть имеется случайная величина* ξ_t *и пусть* $P_t(\theta)$ *— ее распределение.*

Если в момент n *параметр* θ *выбирается в зависимости от случайной величины* ξ_n *при* $n \geqslant t$ *и фиксированных значениях* $(\xi_t^{n-1}, \theta_t^{n-1})$, *то распределение* $P_t(\theta_n)$ *будем называть апостериорными порядка* $(n-t) \geqslant 0$.

Математическое ожидание величины ξ_t по мере, индуцируемой распределением $P_t(\theta_n)$, будем также называть апостериорным порядка $(n-t) \geqslant 0$ и обозначать $M\{\xi_t / \xi_t^n, \theta_t^n\}$. Будем понимать его как условное математическое ожидание относительно случайных величин $(\xi_t^n \theta_t^n)$.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} M\{\xi_t / \xi_t^n, \theta_t^n\}$, то такое апостериорное математическое ожидание назовем финальным.

Пусть теперь $u_t = u_t(\xi_t)$ — некоторая функция случайной величины ξ_t. Положим, что ее апостериорное математическое ожидание порядка $(n-t)$ вычисляется рекуррентным способом по мере, индуцируемой переходной функцией с параметром θ_n. Точнее, пусть фиксированы значения величин $(\xi_{n-1}^{n-1}, \theta_t^{n-1})$. Тогда положим

$$M\{u_t(\xi_t) / \xi_t^n, \theta_t^n\} = M\{M[u_t(\xi_t) / (\xi_t^{n-1}, \theta_t^{n-1})] / \xi_n, \theta_n\} =$$

$$= \int_E M[u_t(\xi_t) / dz, \theta_{n-1}]\, Q(\xi_{n-1}, dz / \theta_n). \qquad (3)$$

Введем теперь функционал $g_n(\pi) = g_n^\pi(\xi_0^n, \theta_0^n)$ следующим образом. Положим $g_0^\pi \equiv 0$;

$$g_n^\pi(\xi_0^n, \theta_0^n) = \sum_{t=0}^{n} M^\pi \{D(\xi_{n-t}/x_{n-t}, \theta_{n-t})\, \xi_{n-t}^n, \theta_{n-t}^n\} =$$

$$= \sum_{t=0}^{n} M^\pi \{w(\xi_{n-t}, \theta_{n-t})/\xi_{n-t}^n, \theta_{n-t}^n\}, \qquad (4)$$

где $M^\pi \{w(\xi_{n-t}, \theta_{n-t})/\xi_{n-t}^n, \theta_{n-t}^n\}$ — апостериорное математическое ожидание порядка $t \geqslant 0$, вычисляемое согласно (3).

Учтем при этом, что g_n^π, будучи суммой условных дисперсий, является случайной величиной.

Нетрудно проследить, что для g_n^π имеет место следующее разложение: $g_n^\pi(\xi_0^n, \theta_0^n) = w(\xi_n, \theta_n) + M^\pi \{g_{n-1}(\xi_0^{n-1}, \theta_0^{n-1})/\xi_n, \theta_n\}$. Действительно, используя апостериорное математическое ожидание, определенное в (3), имеем

$$g_n^\pi(\xi_0^n, \theta_0^n) = \sum_{t=0}^{n} M^\pi \{w(\xi_{n-t}, \theta_{n-t})/\xi_{n-t}^n, \theta_{n-t}^n\} =$$

$$= w(\xi_n, \theta_n) + \sum_{t=1}^{n} M^\pi \{w(\xi_{n-t}, \theta_{n-t})/\xi_{n-t}^n, \theta_{n-t}^n\} =$$

$$= w(\xi_n, \theta_n) + M^\pi \{g_{n-1}^\pi(\xi_0^{n-1}, \theta_0^{n-1})/\xi_n, \theta_n\}.$$

Отсюда, в частности, видно, что величину g_n^π можно записывать в виде $g_n^\pi = g_n^\pi(\xi_n, \theta_n)$, опуская зависимость **от** $(\xi_0^{n-1}, \theta_0^{n-1})$.

Тогда получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$g_n^\pi(\xi_n, \theta_n) = w(\xi_n, \theta_n) + M^\pi \{g_{n-1}(\xi_{n-1}, \theta_{n-1})/\xi_n, \theta_n\}. \qquad (5)$$

Учтем теперь, что здесь значения параметра $(\theta_0, \ldots, \theta_n)$ выбираются с помощью стратегии π. Будем использовать тогда стратегию π^*, такую, которая для каждого $n = 1, 2, \ldots$ выбирает значение параметра θ_n^*, при котором сумма апостериорных дисперсий достигает своего минимального значения, т. е. положим

$$g_n(\pi^*) = g_n(\xi_n \theta_n^*) = \inf_{\theta_n} g_n(\xi_n, \theta_n). \qquad (6)$$

Заметим, что поскольку g_n является случайной величиной, то и θ_n^* также является некоторой случайной величиной. Исследуем тогда ее свойства. Для этого нам потребуется выполнить некоторые вспомогательные построения.

Лемма 1. *Пусть переходная функция $Q=Q(\theta)$ выпукла по θ и пусть θ — случайная величина. Тогда* $M\{g_n(\xi_n, \theta_n)\} \geqslant Mg_n(\xi_n, M\theta_n)$.

Доказательство. Заметим, что если переходная функция выпукла по θ, то математическое ожидание $M(\xi_n/\theta)$ случайной величины ξ_n также является некоторой выпуклой по θ функцией [1].

Рассмотрим теперь функцию $u(\xi_n, \theta_n) = [-\xi_n + M(\xi_n/\theta_n)]$. Поскольку $M(\xi_n|\theta_n)$ выпукла по θ_n, то, очевидно, и $u(\xi_n, \theta_n)$ также выпукла по θ_n. Но тогда и квадратичная функция $w(\xi_n, \theta_n) = [-u(\xi_n, \theta_n)]^2$ выпукла по θ_n.

Рассматривая теперь случайную величину
$$g_n(\xi_n, \theta_n) = w(\xi_n, \theta_n) + M\{g_{n-1}(\xi_{n-1}, \theta^*_{n-1})/\xi_n, \theta_n\},$$

видим, что она также является нокоторой выпуклой по θ_n функцией при фиксированном θ^*_{n-1}. Тогда, используя неравенство Йенсена при любом фиксированном ξ_n, получаем
$$Mg_n(\xi_n, \theta_n) \geqslant g_n(\xi_n, M\theta_n).$$
Учитывая теперь, что ξ_n есть случайная величина, окончательно имеем

$$M\{Mg_n(\xi_n, \theta)\} \geqslant Mg_n(\xi_n, M\theta_n), \text{ или } M\{g_n(\xi_n, \theta_n)\} \geqslant Mg_n(\xi_n, M\theta_n).$$

Из этой леммы очевидным образом вытекает

Следствие 1. *Пусть переходная функция $Q(\theta)$ выпукла по θ и пусть θ^*_n: $g_n(\xi_n, \theta^*_n) = \inf\limits_{\theta_n} g_n(\xi_n, \theta_n)$. Тогда* $M\{g_n(\xi_n, \theta^*_n)\} \geqslant$
$$\geqslant Mg_n(\xi_n, M\theta^*_n). \qquad (7)$$

Оказывается, что случайные величины θ^*_n, $n=1, 2, \ldots$ обладают следующим важным свойством.

Теорема 1. *Пусть переходная функция $Q=Q(\theta)$ выпукла по θ. Тогда $M\theta^*_n = \theta^0$, $n=1, 2, \ldots$, где θ — истинное значение параметра.*

Доказательство. Заметим, что если дисперсия любой случайной величины ξ определена при истинном значении θ° параметра, то она достигает своего минимального значения.

Теперь учтем, что величина g_n является суммой условных апостериорных дисперсий. При этом $g_n(\cdot, \theta)$ выпукла по θ. Тогда, используя равенство (7), получаем

$$M\{g_n(\xi_n, \theta^0)\} = \inf_{\theta_n} M\{g_n, (\xi_n, \theta_n)\} \geqslant M\{\inf_{\theta_n} g_n(\xi_n, \theta_n)\} =$$
$$= M\{g_n(\xi_n, \theta^*_n)\} \geqslant Mg_n(\xi_n, M\theta^*_n).$$

Из этих неравенств вытекает, что существует некоторое значение параметра θ, а именно $\theta = M\theta^*_n$, такое, что безусловная дисперсия может быть меньше, чем при истинном значении θ^0. Но это невозможно. Следовательно, здесь может быть только равенство, т. е.

$$Mg_n(\xi_n, \theta^0) = Mg_n(\xi_n, M\theta_n^*).$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает равенство $\theta^0 = M\theta_n$, что устанавливает требуемое. При этом, так как n выбрано произвольно, то это справедливо для всех $n=1, 2, \dots$. Теорема доказана.

Исследуем теперь вопрос о сходимости случайных величин $\{\theta_n^*, n=1,2,\dots\}$. С этой целью рассмотрим последовательность $\{g_n(\xi_n, \theta_n^*), n=1,2,\dots\}$. Заметим, что из определения g_n следует, что $g_n \geqslant 0$, $n=1,2,\dots$ и $M\{g_n\} < \infty$, $n=1,2,\dots$. Кроме того, $w(\xi_n, \theta_n) \geqslant 0$, $n=0, 1, \dots$. Тогда, используя разложение (5), имеем

$$M\{g_{n+1}(\xi_{n+1}, \theta_{n+1}^*)/\xi_n, \theta_n^*\} = M\{[w(\xi_{n+1}, \theta_{n+1}^*) +$$
$$+ M\{g_n(\xi_n, \theta_n^*)/\xi_{n+1}, \theta_{n+1}^*\}]/\xi_n, \theta_n^*\} \geqslant M\{M\{g_n(\xi_n, \theta_n^*)/\xi_{n+1}, \theta_{n+1}^*\}/\xi_n, \theta_n^*\} =$$
$$= M\{g_n(\xi_n, \theta_n^*)/\xi_n, \theta_n^*\} = g_n(\xi_n, \theta_n^*).$$

Отсюда следует, что последовательность $\{g_n, n=0, 1, \dots\}$ является неотрицательным субмартингалом.

Пусть теперь заданы два различных начальных состояния $\xi_0 = x \in E$ и $\xi_0 = z \in E$, $x \neq z$ и две последовательности значений случайных величин $\{\xi_0, \xi_1, \dots\}$, которые различаются лишь в начальной точке ξ_0. Тогда величины g_n при различных $\xi_0 = x$ и $\xi_0 = z$ будем различать обозначением $g(x)$ и $g(z)$. Положим теперь, что $z \in E$ фиксировано и рассмотрим разность $g_n(x) - g_n(z) = m_n(x)$, $x \in E$.

Используя разложение (5), нетрудно проверить, что имеет место равенство $m_n(x) = M\{g_1(x) - g_1(z)/\xi_2^n, \theta_2^{*n}\}$. Обозначим $\zeta(x) = g_1(x) - g_1(z)$. Тогда имеем

$$m_n(x) = M\{\zeta(x)/(\xi_2^n, \theta_2^{*n})\}. \qquad (8)$$

Очевидно, если $n=1$, то $m_1(x) = \zeta(x)$. Пусть F_n — σ-алгебра, порожденная величинами $\{\xi_2^n, \theta_2^n\}$. Заметим теперь, что рассматриваемое апостериорное математическое ожидание m_n есть условное математическое ожидание относительно случайных величин $\{\xi_2^n, \theta_2^n\}$. Его можно рассматривать также как условное математическое ожидание случайной величины $\zeta(x)$ относительно σ-алгебры F_n [2]. Поэтому можно положить

$$m_n(x) = M\{\zeta(x) | F_n\} \qquad \text{п. н.} \quad (9)$$

Лемма 2. *Последовательность* $\{m_n(x), F_n\}$, $n=1, 2, \dots$ *является регулярным мартингалом.*

Доказательство. Так как $F_n \subset F_{n+1}$, то из свойств условных математических ожиданий следует

$$M\{m_{n+1}(x)|F_n\}=M\{M(\zeta(x)|F_{n+1})|F_n\}=$$
$$=M\{\zeta(x)|F_n\}=m_n(x),\ n=1,\ 2,\ \ldots \text{ п. н.}$$

Это и означает, что последовательность $\{m_n(x),\ F_n\}$ является мартингалом. Регулярность теперь следует из представления (9) и определения регулярного мартингала [3].

Из доказанной леммы вытекает ряд важных следствий.

Следствие 2. *Существует предел*

$$m_\infty(x)=\lim_n M\{\zeta(x)/F_n\}=M\{\zeta(x)/F_\infty\} \text{ п. н., где } F_\infty=\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right).$$

Это вытекает непосредственно из теоремы Леви [3].

Следствие 3. *Существует (п. н.) предел* $\lim_n \theta_n^* = \theta^*$.

Доказательство. Заметим, что величины m_n, $n=1, 2, \ldots$ являются апостериорными математическими ожиданиями, которые берутся относительно мер, определенных с помощью соответствующих значений параметра $\{\theta_n^*,\ n=1, 2, \ldots\}$. Далее, так как п. н. существует предел $m_\infty(x)=M\{\zeta(x)|F_\infty\}$, то это означает, что существует некоторая финальная апостериорная вероятностная мера, определенная с помощью некоторого параметра θ^*, относительно которой берется данное финальное математическое ожидание. Тогда значение параметра θ^* очевидным образом и является пределом последовательности $\{\theta_n^*,\ n=1, 2, \ldots\}$. (При этом θ^*, вообще говоря, является случайной величиной).

Таким образом, мы получили, что последовательность случайных величин $\{\theta_n^*,\ n=1, 2, \ldots\}$ сходится почти наверное к случайной величине θ^*. Причем согласно теореме 1 случайные величины θ_n^* обладают следующим важным свойством: $M\theta_n^*=\theta^0$, $n=1, 2, \ldots$. Так как это свойство справедливо для всех $n=1, 2, \ldots$, оно справедливо и для случайной величины $\theta^*=\lim_n \theta_n^*$, т. е. $M\theta^*=\theta^0$.

Полученное свойство случайных величин θ_n^*, $n=1, 2, \ldots$ позволяет легко строить «хорошие» оценки параметра θ^0. В качестве таких оценок будем использовать случайные величины θ_n, $n=1, 2, \ldots$ вида

$$\theta_n=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\theta_t^*. \tag{10}$$

Заметим, что так как случайные величины $\{\theta_t^*\}$ вычисляются последовательно по результатам наблюдений, то для вычисления оценок θ_n удобно воспользоваться следующим рекуррентным соотношением:

$$\theta_n = \frac{n-1}{n}\theta_{n-1} + \frac{1}{n}\theta_n^*. \qquad (11)$$

Это очевидным образом эквивалентно (10).

Теперь учтем, что случайные величины θ_t^*, $t=1, 2, \ldots$ являются некоторыми функциями на траекториях наблюдаемого процесса $\{\theta_t\}$, который по предположению марковский. Поэтому случайные величины $\{\theta_t^*\}$ также связаны марковской зависимостью. При этом они обладают свойством $M\theta_t^* = \theta^0$, $t=1, 2, \ldots$. Это означает, что последовательность случайных величин $\{\theta_t^*\}$ образует стационарную марковскую последовательность. Это позволяет доказать следующее важное утверждение.

Теорема 2. *Последовательность оценок* $\{\theta_n\}$, *определенных в* (10), *сильно состоятельна.*

Доказательство. Так как последовательность $\{\theta_t^*\}$ стационарна, то, применяя к ней эргодическую теорему Биркгофа [4], получаем, что почти наверное существует предел

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\theta_t^* = \lim_n \theta_n = M\theta_1^*.$$

Но так как $M\theta_1^* = \theta^0$, то отсюда следует требуемое утверждение.

Нетрудно видеть, что оценки θ_n являются несмещенными.

Покажем теперь, что оценки θ_n являются также и эффективными. Действительно, так как случайные величины $\{\theta_t^*, t = 1, 2, \ldots\}$ имеют одно и то же математическое ожидание $M\theta_t^* = \theta^0$ и сильно сходятся к случайной величине θ^* с тем же математическим ожиданием $M\theta^* = \theta^0$, то величины θ_t^* можно рассматривать как выборочные значения некоторой случайной величины θ^* с неизвестным математическим ожиданием $M\theta^*$. С другой стороны, известно, что эффективной оценкой математического ожидания $M\theta^*$ является выборочное среднее $\theta_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\theta_t^*$. С учетом того, что $M\theta^* = \theta^0$, отсюда теперь вытекает, что величины θ_n, $n=1, 2, \ldots$ являются эффективными оценками параметра θ^0.

Из полученных результатов вытекает, что с помощью случайных величин θ_n^*, $n=1, 2, \ldots$ легко могут быть построены оценки θ_n, $n=1, 2, \ldots$, которые являются несмещенными, состоятельными и эффективными, т. е. можно говорить, что оценки θ_n являются «хорошими». Тем самым полученные результаты вооружают нас достаточно простым и эффективным методом идентификации стохастических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М., «Мир», 1973, с. 53.
2. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965. 184 с.
3. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М., «Наука», 1974. 255 с.
4. Хеннекен П., Тортра А. Теория вероятностей и некоторые ее применения. М., «Наука», 1974. 291 с.

УДК 517.934.1

НГУЕН ХОА ШОН

УПРАВЛЯЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАТУХАЮЩИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Рассмотрим нелинейную управляемую систему

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+\varphi(t,u)+g(t,x,u),\ x\in R_n,\ u\in\Omega(t),$$

где $A(t)$ — вещественная $n\times n$-матрица, определенная и непрерывная при $t\geqslant 0$; $\varphi(t, u)$ и $g(t, x, u)$ — вещественные, непрерывные по всем аргументам n-мерные вектор-функции.

Допустимым управлением будем называть любую локально-суммируемую функцию $u(t)$ со значениями в $\Omega(t)\subset R_m$.

Управляемость таких систем (в частности систем с независящей от t тройкой $\{A, \varphi, \Omega\}$) изучается в ряде работ при различных требованиях на ограничивающее множество $\Omega(t)$. Например, в работах [2—5] при предположении $\Omega(t)=R_m$, в [6] — для случая ограничений на управление, т. е. когда $\Omega(t)\neq R_m$. Отметим, что в указанных работах время управления предполагается зафиксированным, причем основное внимание уделяется вопросу глобальной управляемости. Случай, когда время управления заранее не фиксировано, исследован в работе [7], в которой получены теоремы о необходимом и достаточном условии глобальной управляемости. Существенным в этих теоремах является предположение об интегральной ограниченности функции возмущения $g(t, x, u)$, т. е. о существовании интегрируемой функции $m(t)\in L_1[0, \infty)$ такой, что

$$\|X^{-1}(t)\,g(t,x,u)\|\leqslant m(t),\ t\geqslant 0,\ x\in R_n,\ u\in\Omega(t),$$

где $X(t)$ — фундаментальная матрица решения системы $dx/dt=A(t)x$. Отметим, что этому условию не удовлетворяют даже простейшие глобально-управляемые системы, например, система $dx/dt=-x+u+e^{-t/2}u$, $|u|\leqslant 1$.

В данной работе рассматриваем вопрос о глобальной и локальной нуль-управляемости за свободное время для системы с независящей от t тройкой $\{A, \varphi, \Omega\}$ Вместо выше отмеченного условия здесь получены другие достаточные условия управляемости, которые легко проверяются и применимы к широкому классу автономных нелинейных систем.

Итак, рассматривается нелинейная управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varphi(u) + g(t, x, u); x \in R_n,\ u \in \Omega \subset R_m,\ t \geqslant 0, \tag{1}$$

где A — постоянная вещественная матрица размерности $n \times n$; φ и g — вещественные, непрерывные по всем аргументам n-мерные вектор-функции; множество Ω является компактным и удовлетворяет условию: существует такой вектор $u_0 \in \Omega$, что

$$\varphi(u_0) = 0,\ g(t, x, u_0) \equiv 0,\ t \geqslant 0,\ x \in R_n. \tag{2}$$

Как известно, множеством S нуль-управляемости системы (1) называется множество всех точек $x_0 \in R_n$, из которых можно попасть в нуль за конечное время по траектории системы (1) при допустимом управлении $u(t) \in \Omega$.

Система (1) называется локально нуль-управляемой, если S содержит нуль в качестве внутренней точки и глобально нуль-управляемой, если $S \equiv R_n$.

Предполагая, что автономная система

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varphi(u),\ u \in \Omega \tag{3}$$

является локально нуль-управляемой, в теоремах 1 и 2 получены достаточные условия локальной нуль-управляемости системы (1). В случае, если множество Ω не обязательно ограничено, из теоремы 3 вытекает другое, более сильное, в некоторой степени достаточное условие локальной нуль-управляемости. Теоремы 4 и 5 дают достаточные условия глобальной нуль-управляемости системы (1) при предположении, что система (3) глобально нуль-управляема.

Отметим, что необходимые и достаточные условия локальной и глобальной нуль-управляемости системы (3) приведены в работе [1].

1. Локальная нуль-управляемость

Лемма 1. *Пусть $Q: [0, T_0] \to R_n$ — непрерывная многозначная функция такая, что при каждом $t \in [0, T_0]$ множество $Q(t)$ является непустым, выпуклым компактом в R_n. Тогда множество F всех измеримых функций $v(t)$, удовлетворяющих условию $v(t) \in Q(t)$ п. в. на $[0, T_0]$, является L_2 — слабо компактным в себе, т. е. из любой последовательности функций $\{v_i(t)\}_{i=1}^{\infty} \subset$ $\subset F$ можно выбрать такую ее подпоследовательность $\{v_{i_k}(t)\}_{k=1}^{\infty}$, что для любой функции $h(t) \in L_2[0, T_0]$ имеем*

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^{T_0} h(t)\, v_{i_k}(t) dt = \int_0^{T_0} h(t)\, \tilde{v}(t)\, dt,$$

где $\tilde{v}(t) \in F$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1А в [10].

Лемма 2. *Пусть для системы* (1) *выполняются следующие условия: 1) Существует непрерывная функция* $\beta(t, u)$ *такая, что*

$$\|g(t, x, u)\| \leqslant \beta(t, u), \; t \geqslant 0, u \in \Omega, \; x \in R_n, \tag{4}$$

причем, для каждого фиксированного $u \in \Omega$

$$\lim_{t \to \infty} \beta(t, u) = 0. \tag{5}$$

2) *Система* (3) *локально нуль-управляема.*

Тогда для каждой непрерывной функции $w(t) \in C[0, \infty)$ *система*

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varphi(u) + g(t, w(t), u), \; u \in \Omega. \tag{6}$$

является локально нуль-управляемой. Более того существуют числа $T_0 > 0$ и $r_0 > 0$, *что для любой непрерывной функции* $w(t) \in C[0, T_0]$ *множество* $S_w(T_0)$ *нуль-управляемости системы* (6) *за время* T_0 *содержит шар* $B(0, r_0) = \{x : \|x\| < r_0\}$.

Доказательство. По предположению леммы система (3) локально нуль-управляема, это равносильно тому [1], что для любого вектора η единичной сферы $S_1 \subset R_n$ существуют вектор $u_\eta \in \Omega$ и момент времени $T_\eta > 0$ такие, что

$$\delta_\eta = (\eta, e^{-AT_\eta} \varphi(u_\eta)) > 0.$$

В силу непрерывности скалярного произведения существует ε_η, $0 < \varepsilon_\eta < 1$ такое, что $(\eta', e^{-At}\varphi(u_\eta)) \geqslant \delta_\eta/2$ для всех $\eta' \in R_n$ и $t \geqslant 0$, удовлетворяющих условиям $T_\eta \leqslant t \leqslant T_\eta + \varepsilon_\eta$, $\eta' \in B(\eta, \varepsilon_\eta)$, где через $B(\eta, \varepsilon_\eta)$ обозначаем шар в R_n с центром в точке η и радиусом ε_η. Поскольку сфера $S_1 \subset R_n$ является компактом, то можно из открытого покрытия $\{B(\eta, \varepsilon_\eta) : \eta \in S_1\}$ выбрать конечное покрытие $\{B(\eta_i, \varepsilon_{\eta_i}) : i = 1, \ldots, p\}$.

Положим $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_{\eta_i} : i = 1, \ldots, p\}$, $\delta_0 = \min\{1/2\delta_{\eta_i} : i = 1, \ldots, p\}$.

$$T_0' = \max\{T_{\eta_i} + 1 : i = 1, \ldots, p\}.$$

Тогда нетрудно видеть, что для любого единичного вектора $\eta \in S_1$ существуют вектор $u_\eta \in \Omega$ и промежуток времени $J_\eta \subset [0, T_0']$ длиной $\mu J_\eta \geqslant \varepsilon_0$, такие что

$$(\eta, e^{-At}\varphi(u_\eta)) \geqslant \delta_0, \; t \in J_\eta. \tag{7}$$

Пусть $w(t) \in C[0, T_0]$ и $h > 0$ — любые непрерывная функция и положительное число. Введем в рассмотрение множество

$$R_w(h + T_0') = \left\{ x_0 \in R_n : x_0 = -\int_h^{h+T_0'} e^{-A\tau}[\varphi(u(\tau)) + \right.$$

$$\left. + g(\tau, w(\tau), u(\tau))] \, d\tau, \, u \in \Omega \right\}. \tag{8}$$

Очевидно, $R_w(h+T_0') \subset S_w(h+T_0')$. Следовательно, для доказательства леммы достаточно показать, что существует число h_0, не зависящее от функции $w(t)$, что множество $R_w(h_0+T_0')$ содержит некоторый шар $B(0, r_0)$, $r_0>0$.

Сделав замену $\tau = t+h$ в интегральном выражении (8) для множества $R_w(h+T_0')$, получим $R_w(h+T_0') = e^{-Ah} S'_{w,h}$, где через $S'_{w,h}$ обозначается множество

$$\left\{ y_0 \in R_n : y_0 = -\int_0^{T_0'} e^{-At} [\varphi(u(t)) + g(t+h, w(t+h), u(t))] dt, : u \in \Omega \right\}.$$

Покажем, что при достаточно большом h множество $S'_{w,h}$ содержит некоторый шар с центром в нуле.

В действительности, пусть $\eta \in S_1$ — произвольный вектор и $u_\eta \in \Omega$ удовлетворяет (7). Тогда, поскольку

$$|(\eta', e^{-At} g(t+h, w(t+h), u_\eta))| \leqslant e^{-\|A\| T_0'} \beta(t+h, u_\eta),$$
$$0 \leqslant t \leqslant T_0', \; \eta \in S_1$$

и на основании (5) $\lim\limits_{h\to\infty} \beta(t+h, u_\eta) = 0$, существует $h_\eta > 0$ такое, что

$$|(\eta', e^{-At} g(t+h_\eta, w(t+h_\eta), u_\eta))| < \frac{\delta_0}{3}; \; 0 \leqslant t \leqslant T_0', \; \eta \in S_1,$$
$$w(t) \in C[0, \infty). \tag{9}$$

С другой стороны, так как функция $(\eta', e^{-At}\varphi(u_\eta))$ при каждом фиксированном $\eta \in S_1$ является непрерывной по η' равномерно относительно $t \in [0, T_0']$, существует такое $\gamma_\eta > 0$, что

$$|(\eta' - \eta, e^{-At}\varphi(u_\eta))| < \frac{\delta_0}{3}; \; 0 \leqslant t \leqslant T_0', \; \eta' \in B(\eta, \gamma_\eta),$$

Отсюда в силу (7) получаем

$$(\eta', e^{-At}\varphi(u_\eta)) \geqslant \frac{2\delta_0}{3}, \tag{10}$$
$$t \in J_\eta \subset [0, T_0'], \; \eta' \in B(\eta, \gamma_\eta).$$

Пусть η' — произвольный вектор из $B(\eta, \gamma_\eta)$. Возьмем управление

$$u_\eta(t) = \begin{cases} u_0, & t \in [0, T_0'] / J_\eta, \\ u_\eta, & t \in J_\eta. \end{cases}$$

Тогда для соответствующей точки $y_0^\eta \in S'_{w,h_\eta}$ в силу (9) (10) имеем $(\eta', y_0^\eta) = -\int\limits_{J_\eta} [(\eta', e^{-At}\varphi(u_\eta)) + (\eta', e^{-At} g(t+h_\eta, w(t+h_\eta),$

$$u_\eta))]dt < -\frac{\varepsilon_0\delta_0}{3}, \quad \eta' \in B(\eta, \gamma_\eta).$$

Как и выше, из компактности единичной сферы S_1 имеем $S_1 \subset \bigcup\limits_{i=1}^{q} B(\eta_i, \gamma_{\eta_i})$. Положим $h_0 = \max\{h_{\eta_i} : i = 1, \ldots, q\}$. Тогда для любого единичного вектора $\eta \in S_1$ и любой непрерывной функции $w(t) \in C[0, T_0' + h_0]$ существует точка $y_0^\eta \in S'_{w,h_0}$ такая, что $(\eta, y_\eta^0) < -\frac{\varepsilon_0\delta_0}{3}$. Поскольку множество S'_{w,h_0}, как это непосредственно вытекает из теоремы Ляпунова А. А. [10], является выпуклым, следовательно, оно содержит шар $B\left(0, \frac{\varepsilon_0\delta_0}{3}\right)$, т. е. $B\left(0, \frac{\varepsilon_0\delta_0}{3}\right) \subset \operatorname{int} S'_{w,h_0}$. Положим $T_0 = h_0 + T_0'$. Тогда, учитывая невырожденность преобразования e^{-Ah_0}, заключаем, что множество $R_w(T_0) = R_w(h_0 + T_0') = e^{-Ah_0} S'_{w,h_0}$ также содержит некоторый шар $B(0, r_0)$. Следовательно, $B(0, r_0) \subset \operatorname{int} S_w(T_0)$, лемма доказана.

Заметим, что в доказательстве леммы 2 нигде не использована компактность множества Ω.

Из леммы 2 непосредственно вытекает следующее

Следствие 1. *Пусть нелинейная система имеет вид* $\frac{dx}{dt} = Ax + \varphi(u) + g(t, u)$, $u \in \Omega \subset R_m$, *где* A — *вещественная* $n \times n$-*матрица,* φ *и* g — *непрерывные* n-*мерные вектор-функции, а на множество* Ω *накладывается единственное ограничение: существует вектор* $u_0 \in \Omega$ *такой, что*

$$\varphi(u_0) = 0, \; g(t, u_0) \equiv 0, \; t \geqslant 0.$$

Пусть, кроме того, функция $g(t, u)$ *удовлетворяет условию* $\lim\limits_{t \to \infty} g(t, u) = 0$ *для каждого фиксированного вектора* $u \in \Omega$.

Тогда из локальной нуль-управляемости системы (3) следует локальная нуль-управляемость рассматриваемой нелинейной системы.

Приступим теперь к выводу достаточных условий локальной нуль-управляемости исходной системы (1).

Теорема 1. *Предположим, что для системы* (1) *выполняются условия:*

1) *функция* $g(t, x, u)$ *удовлетворяет локальному условию Липшица по* x, *т. е. для любого компактного множества* V, $V \subset [0, \infty) \times R_n \times \Omega$ *существует такая константа* $\alpha = \alpha(V)$, *что*

$$\|g(t, x, u) - g(t, y, u)\| \leqslant \alpha \|x - y\| \qquad (11)$$

для любых (t, x, u), $(t, y, u) \in V$;

2) *существует непрерывная функция* $\beta(t, u)$, такая, что

$$\|g(t, x, u)\| \leqslant \beta(t, u) \qquad (12)$$

при всех $x \in R_n$ и $u \in \Omega$, *кроме того,*

$$\lim_{t \to \infty} \beta(t, u) = 0 \qquad (13)$$

для каждого фиксированного вектора $u \in \Omega$;

3) *множество* $R(t, x) = \{\varphi(u) + g(t, x, u) : u \in \Omega\}$ *является выпуклым.*

Тогда, если система (3) локально нуль-управляема, то система с возмущением (1) также локально нуль-управляема.

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1 работы [7]. Так как выполнены условия леммы 2, существуют числа $r_0 > 0$, $T_0 > 0$, такие, что для любой непрерывной функции $w(t) \in C[0, T_0]$ множество $S_w(T_0)$ нуль-управляемости системы (6) за время T_0 содержит шар $B(0, r_0) = \{x \in R_n : \|x\| < r_0\}$.

Покажем, что множество $S(T_0)$ нуль-управляемости системы (1) за время T_0 также содержит шар $B(0, r_0)$.

Обозначим $M_1 = e^{\|A\| T_0}$; $M_2 = \max\{\|\varphi(u)\| + \beta(t, u) : 0 \leqslant t \leqslant T_0, u \in \Omega\}$; $M = M_1(r_0 + M_2 T_0)$.

Пусть $w(t)$ — произвольная непрерывная функция на отрезке $[0, T_0]$. Тогда траектория системы (6), порожденная условием $x(0) = x_0$, $x_0 \in B(0, r_0)$ и произвольным допустимым управлением $u = u(t)$, имеет вид

$$x(t) = e^{At}\left[x_0 + \int_0^t e^{-A\tau}(\varphi(u(\tau)) + g(\tau, w(\tau), u(\tau)))\, d\tau\right].$$

Поэтому для нее справедлива оценка

$$\|x(t)\| \leqslant M, \ 0 \leqslant t \leqslant T_0. \qquad (14)$$

Пусть x_0 — произвольная точка из шара $B(0, r_0)$. Возьмем функцию $w_1(t) \in C[0, T_0]$, такую, что $\|w_1(\cdot)\|_C = \max\{\|w_1(t)\| : t \in [0, T_0]\} \leqslant M$, и подставим $w = w_1(t)$ в правую часть уравнения (6). Согласно лемме 2 найдется такое управление $u_1(t) \in \Omega$, что соответствующее решение $x_1(t)$ уравнения (6) с начальным условием $x_1(0) = x_0$ удовлетворяет условию $x_1(T_0) = 0$. При этом в силу оценки (14) имеем $\|x_1(t)\|_c \leqslant M$. Полагая $w_2(t) \equiv x_1(t)$ и подставляя $w = w_2(t)$ в уравнение (6), снова находим управление $u_2(t) \in \Omega$ и соответствующее ему решение $x_2(t)$, удовлетворяющее условиям $x_2(0)=x_0$, $x_2(T_0)=0$, $\|x_2(t)\|_c \leqslant M$ и т. д.

Таким образом, получим последовательность равномерно ограниченных функций $\{w_i(t)\}_{i=2}^{\infty} \subset C[0, T_0]$ и последовательность допустимых управлений $\{u_i(t)\}_{i=2}^{\infty}$, таких, что

$$w_{i+1}(t) = e^{At}\left[x_0 + \int_0^t e^{-A\tau}(\varphi(u_i(\tau)) + g(\tau, w_i(\tau), u_i(\tau)))\,d\tau\right],$$

$$w_i(0) = x_0, \ w_i(T_0) = 0, \ \|w_i(t)\|_C \leqslant M \ (i = 2, 3, \ldots).$$

Покажем, что из последовательности $\{w_i(t)\}_{i=2}^{\infty}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся равномерно к некоторой траектории $\tilde{w}(t)$ системы (1).

Для этого рассмотрим последовательность функций

$$z_i(t) = e^{-At}[\varphi(u_i(t)) + g(t, w_i(t), u_i(t))], \ i = 2, 3, \ldots$$

Она, очевидно, равномерно ограничена на $[0, T_0]$ и поэтому из нее можно выбрать подпоследовательность $\{z_{i_k}(t)\}_{k=1}^{\infty}$, слабо сходящуюся к некоторой функции $\tilde{z}(t) \in L_2[0, T_0]$.

В частности, имеем

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^t z_{i_k}(\tau)\,d\tau = \int_0^t \tilde{z}(\tau)\,d\tau, \ 0 \leqslant t \leqslant T_0. \quad (15)$$

С другой стороны, на основании критерия компактности в $C[0, T_0]$ нетрудно видеть, что последовательность $\left\{\int_0^t z_{i_k}(\tau)\cdot d\tau\right\}_{k=1}^{\infty}$ является компактной в данном пространстве, поэтому она содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторой функции $\tilde{z}'(t) \in \tilde{C}[0, T_0]$. Обозначив эту подпоследовательность теми же индексами i_k, получим

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\tilde{z}'(t) - \int_0^t z_{i_k}(\tau)\,d\tau\right\|_C = 0. \quad (16)$$

Из (15) и (16) вытекает

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\int_0^t [z_{i_k}(\tau) - \tilde{z}(\tau)]\,d\tau\right\|_C = 0. \quad (17)$$

Обозначим $\tilde{w}(t) = e^{At}\left\{x_0 + \int\limits_0^t \tilde{z}(\tau)\,d\tau\right\}$. Тогда в силу (17)

$$\lim_{k\to\infty} \|w_{i_k}(t) - \tilde{w}(t)\|_C = 0, \tag{18}$$

откуда, в частности, следует $\tilde{w}(0) = x_0$, $\tilde{w}(T_0) = 0$.

Чтобы доказать, что функция $\tilde{w}(t)$ является траекторией системы (1), покажем сначала справедливость соотношения $\tilde{z}(\tau) \in R(\tau) = \left\{e^{-A\tau}(\varphi(u) + g(\tau, \tilde{w}(\tau), u)) : u \in \Omega\right\}$ для почти всех $\tau \in [0, T_0]$. Для этого рассмотрим последовательность функций $y_{i_k}(\tau) = e^{-A\tau}(\varphi(u_{i_k}(\tau)) + g(\tau, \tilde{w}(\tau), u_{i_k}(\tau)))$, $i = 1, 2, \ldots$ По определению, $y_{i_k}(\tau) \in R(\tau)$ для всех $\tau \in [0, T_0]$. С другой стороны, в силу условий теоремы множество $R(\tau)$ является выпуклым компактным и непрерывно зависит от τ. Следовательно, по лемме I из последовательности $\{y_{i_k}(\tau)\}_{k=1}^{\infty}$ можно выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой функции $s(\tau) \in L_2[0, T_0]$, причем $s(\tau) \in R(\tau)$ почти всюду на $[0, T_0]$. Обозначим эту подпоследовательность снова через $\{y_{i_k}(t)\}_{k=1}^{\infty}$, тогда, в частности, получим

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_0^t [y_{i_k}(\tau) - s(\tau)]\,d\tau = 0. \tag{19}$$

Проведем оценку

$$\left\|\int\limits_0^t [s(\tau) - \tilde{z}(\tau)]\,d\tau\right\| \leqslant \left\|\int\limits_0^t [s(\tau) - y_{i_k}(\tau)]\,d\tau\right\| + \left\|\int\limits_0^t [y_{i_k}(\tau) - \right.$$

$$\left. - z_{i_k}(\tau)]\,d\tau\right\| + \left\|\int\limits_0^t [z_{i_k}(\tau) - \tilde{z}(\tau)]\,d\tau\right\| \leqslant \left\|\int\limits_0^t [s(\tau) - y_{i_k}(\tau)]\,d\tau\right\| +$$

$$+ M_1 \int\limits_0^{T_0} \|g(\tau, \tilde{w}(\tau), u_{i_k}(\tau)) - g(\tau, w_{i_k}(\tau), u_{i_k}(\tau))\|\,d\tau +$$

$$+ \left\|\int\limits_0^t [z_{i_k}(\tau) - \tilde{z}(\tau)]\,d\tau\right\|. \tag{20}$$

С другой стороны, из условия (11) имеем

$$M_1 \int_0^{T_0} \|g(\tau, \tilde{w}(\tau), u_{i_k}(\tau)) - g(\tau, w_{i_k}(\tau), u_{i_k}(\tau))\| d\tau \leqslant \alpha M_1 T_0 \|\tilde{w} - w_{i_k}\|_C.$$

Тогда из оценки (20), учитывая предельные соотношения (17), (18), (19), получим

$$\left\| \int_0^t [s(\tau) - \tilde{z}(\tau)]\, d\tau \right\| = 0, \ 0 \leqslant t \leqslant T_0,$$ откуда следует $s(\tau) = \tilde{z}(\tau)$

п. в. на $[0, T_0]$. Тем самым доказано, что $s(\tau) \in R(\tau)$ п. в. на $[0, T_0]$. По лемме Филлипова А. Ф. [8] существует измеримая на $[0, T_0]$ функция $\tilde{u}(\tau) \in \Omega$ такая, что

$$\tilde{z}(\tau) = e^{-A\tau}[\varphi(\tilde{u}(\tau)) + g(\tau, \tilde{w}(\tau), \tilde{u}(\tau))] \text{ п. в. на } [0, T_0].$$

Таким образом, имеем

$$\tilde{w}(t) = e^{At}\left\{ x_0 + \int_0^t e^{-A\tau}[\varphi(\tilde{u}(\tau)) + g(\tau, \tilde{w}(\tau), \tilde{u}(\tau))]\, d\tau \right\}, \quad \tilde{w}(0) = x_0, \ \tilde{w}(T_0) = 0.$$

Иначе говоря, $\tilde{w}(t)$ является траекторией системы (1) при допустимом управлении $u = \tilde{u}(t) \in \Omega$, соединяющей точку x_0 с 0 за время T_0. Значит, $x_0 \in S(T_0)$, а поскольку x_0 — произвольная точка из $B(0, r_0)$, отсюда следует $B(0, r_0) \subset S(T_0)$. Теорема доказана. В случае, когда функции $\varphi(u)$ и $g(t, x, u)$ являются линейными по u, имеет место следующее утверждение, которое отличается от теоремы 1 отсутствием условия Липшица.

Теорема 2. *Пусть линейная система с возмущением имеет вид*

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + G(t, x)u, \ u \in \Omega, \tag{21}$$

где A и B — вещественные постоянные матрицы размерностей $n \times n$ и $n \times m$ *соответственно, $G(t, x)$ — непрерывная $n \times m$ — матричная функция, множество $\Omega \subset R_m$ выпукло, ограничено и $0 \in \Omega$.*

Предположим, существует непрерывная функция $\beta(t)$, $\lim \beta(t) = 0$ *при $t \to \infty$, такая что*

$$\|G(t, x)\| \leqslant \beta(t), \ x \in R_n, \ t \geqslant 0. \tag{22}$$

Тогда из локальной управляемости системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \ u \in \Omega \tag{23}$$

следует локальная управляемость системы (21).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $g(t, x, u) = G(t, x)u$. Поскольку все условия теоремы 1 выполняются, за исключением условия Липшица (11), все доказательство теоремы 1 вплоть до неравенства (20) остается справедливым и здесь. Далее, в силу ограниченности множества Ω и линейности $g(t, x, u)$ по u имеем

$$\left\|\int_0^{T_0} e^{-At}\left[G(t, \tilde{w}(t))\, u_{i_k}(t) - G(t, w_{i_k}(t))\, u_{i_k}(t)\right] dt\right\| \leqslant$$

$$\leqslant M_3 \int_0^{T_0} \left\|G(t, \tilde{w}(t)) - G(t, w_{i_k}(t))\right\| dt,$$

где $M_3 > 0$ — некоторое положительное число.

В силу непрерывности функции $G(t, x)$ и соотношения (18), левая часть этого неравенства стремится к нулю при $k \to \infty$. Поэтому из оценки (20), принимая во внимание предельные соотношения (17), (19), мы снова получим равенство $s(\tau) \equiv \tilde{z}(\tau)$ для почти всех $\tau \in [0, T_0]$; далее доказательство повторяется дословно. Теорема доказана.

Замечание. Условия (12), (13) в теореме 1 и условие (22) в теореме 2 означают, что возмущения во всех правых частях систем «затухают» равномерно во всех точках пространства. В следующей теореме 3 при помощи леммы 2 и результата Иорке Ж. [9] получено другое достаточное условие локальной нуль-управляемости для системы с произвольным множеством Ω, при этом в отличие от теоремы 2 предполагается, что возмущения $g(t, x, u)$ лишь в начале координат затухают, а условие выпуклости отсутствует.

Теорема 3. *Пусть для системы (1) с произвольным множеством Ω, удовлетворяющим условию (2), функция-возмущения обладает свойствами:*

1) $g(t, x, u)$ и $\frac{\partial g}{\partial x}(t, x, u)$ *непрерывны*, $\frac{\partial g}{\partial x}(t, 0, u_0) \equiv 0,\ t \geqslant 0$;

2) $\lim\limits_{t \to \infty} g(t, 0, u) = 0$ *для каждого фиксированного вектора* $u \in \Omega$. *тогда из локальной нуль-управляемости системы (3) следует локальная нуль-управляемость системы (1).*

Доказательство. Обозначим $f(t, x, u) = Ax + \varphi(u) + g(t, x, u)$.

Тогда в силу условия (1) имеем $f(t, 0, u) = \varphi(u) + g(t, 0, u)$; $\frac{\partial f}{\partial x}(t, 0, u_0) = A$.

Рассмотрим систему «первого приближения»

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0, u_0)\, x + f(t, 0, u) = Ax + \varphi(u) + g(t, 0, u),\ u \in \Omega.$$

Так как все условия следствия 1 выполняются, система первого приближения управляема. Более того, существуют числа $r_0 > 0$, $T_0 > 0$ такие, что множество $S(T_0)$ нуль-управляемости данной системы за время T_0 содержит шар $B(0, r_0)$. Отсюда на основании результата Иорке Ж. [9] заключаем, что множество нуль-управляемости системы (1) за время T_0 также содержит нуль в качестве внутренней точки.

Следствие 2. *Пусть для системы (21) с произвольным ограничивающим множеством* Ω, *содержащим нуль, функции* $G(t, x)$ *и* $\frac{\partial G}{\partial x}(t, x)$ *непрерывны. Тогда, если* $\lim\limits_{t\to\infty} G(t, 0)u=0$ *при каждом фиксированном* $u \in \Omega$, *то из локальной нуль-управляемости системы (23) следует локальная нуль-управляемость системы (21).*

Отметим, что это следствие остается справедливым, если в уравнениях (21), (23) вместо функции Bu рассматривать любую непрерывную функцию $\varphi(u)$, удовлетворяющую условию $\varphi(0)=0$.

2. Глобальная нуль-управляемость

Лемма 3. *Пусть для системы (1) выполняются следующие условия:*

1) *существует непрерывная функция* $\beta(t, u)$, *удовлетворяющая соотношениям (4), (5);*

2) *система (3) является глобально нуль-управляемой. Тогда для каждой непрерывной функции* $w(t) \in C[0, \infty)$ *система (6) является глобально нуль-управляемой. Более того, для любого числа* $r_0>0$ *существует такое число* $T_0=T_0(r_0)>0$, *что для каждой непрерывной функции* $w(t)$, $w(t) \in C[0, T_0]$ *множество* $S_w(T_0)$ *нуль-управляемости системы (6) за время* T_0 *содержит шар* $B(0, r_0)=\{x:\|x\|<r_0\}$.

Доказательство. Поскольку система (3) глобально нуль-управляема и множество Ω ограничено, в силу теоремы 2 [1] матрица A не имеет собственных значений с положительной вещественной частью, причем не существует вещественного собственного вектора матрицы A^*, опорного к множеству $\varphi(\Omega)$, а также не существует комплексного собственного вектора матрицы A^*, ортогонального к тому же множеству. Из доказательства достаточности теоремы 2 [1] следует, что для каждого единичного вектора $\eta \in S_1$ существует число $\delta_\eta>0$, вектор $u_\eta \in \Omega$ и множество $J_\eta \subset [0, \infty)$ с мерой $\mu J_\eta=\infty$, такие что

$$(\eta, e^{-At}\varphi(u_\eta)) \geqslant \delta_\eta e^{-Rt}t^k,\ t\in J_\eta, \tag{24}$$

где $R=\min_j \mathrm{Re}\lambda_j$, k — максимальная высота корневых векторов матрицы A^*, отвечающих собственным значениям λ_j с $\mathrm{Re}\lambda_j=R$. Более того, поскольку

$$(\eta, e^{-At}g(t, x, u_\eta))=e^{-Rt}t^k\sum_j (y_j, g(t, x, u_\eta))\,e^{-i\mathrm{Im}\lambda_j t}+\mu_1 \tag{25}$$

$(\mu_1=\mu_1(t,x)=0(e^{-Rt}t^k)$; y_j — собственный вектор матрицы A^*, отвечающий λ_j с $\mathrm{Re}\lambda_j=R)$, а суммирование берется по всем индексам j, для которых $\mathrm{Re}\lambda_j=R$ и соответствующий корневой вектор η_j имеет высоту k, то в силу условия 1) теоремы существуют такие числа $t_1>0$, $t_2>0$, что

$$\sum_j |(y_j, g(t,x,u_\eta))| < \frac{\delta_\eta}{3},\ t\geqslant t_1,\ x\in R_n,\ \|\mu_1(t,x)\|<\frac{\delta_\eta}{3}e^{-rt}t^k,$$
$$t\geqslant t_2,\ x\in R_n.$$

Следовательно, из (24), (25) получим

$$(\eta, e^{-At}(\varphi(u_\eta)+g(t,x,u_\eta)))\geqslant\frac{\delta_\eta}{3}e^{-Rt}t^k\geqslant\frac{\delta_\eta}{3},\ t\in J_\eta\cap[t_3,\infty),\ x\in R_n,$$

где $t_3=\max\{t_1,t_2\}$. Отметим, что t_3, вообще говоря, зависит от η.

Поскольку $\mu J_\eta=\infty$, для любого $r_0>0$ существует $T_\eta=T(\eta,r_0)>t_3$ такое, что $\mu(J_\eta\cap[t_3,T_\eta])\geqslant\frac{6r_0}{\delta_\eta}$. Возьмем управление $u_\eta(t)=\begin{cases}u_0,\ t\in[0,T_\eta]\setminus(J_\eta\cap[t_3,T_\eta]);\\ u_\eta,\ t\in J_\eta\cap[t_3,T_\eta],\end{cases}$ тогда для соответствующей точки $x_\eta\in S_w(T_\eta)$ имеем $(\eta,x_\eta)=-\int_0^{T_\eta}(\eta,e^{-At}(\varphi(u_\eta(t))+$

$$+g(t,w(t),u_\eta(t)))\,dt\leqslant-\frac{\delta_\eta}{3}\mu(J_\eta\cap[t_3,T_\eta])\leqslant-2r_0.$$

Итак, для любого $r_0>0$ и любого вектора $\eta\in S_1$ существует число $T_\eta=T(r_0,\eta)>0$ такое, что для любой непрерывной функции $w(t)\in C[0,T_\eta]$ найдется точка x_η из множества $S_w(T_\eta)$ такая, что

$$(\eta,x_\eta)\leqslant-2r_0. \tag{26}$$

Рассмотрим функцию (η',x) на множестве $S_1\times S_\infty(T_\eta)$, где $S_\infty(T_\eta)=\cup\{S_w(T_\eta):w(\cdot)\in C[0,T_\eta]\}$.

В силу ограниченности множества Ω множество $S_\infty(T_\eta)$ также ограничено. Поэтому функция (η',x) непрерывна по η' равномерно относительно $x\in S_\infty(T_\eta)$, т. е. существует число $\varepsilon=\varepsilon_\eta>0$, что $|(\eta',x)-(\eta'',x)|\leqslant r_0$ для всех $x_0\in S_\infty(T_\eta)$ и всех $\eta',\eta''\in S_1$, удовлетворяющих условию $\|\eta'-\eta''\|<\varepsilon_\eta$. В частности, при $x=x_\eta$, $\eta''=\eta$ из (26) получаем

$$(\eta',x_\eta)\leqslant-r_0 \tag{27}$$

для всякой функции $w(t)\in C[0,T_\eta]$ и любого вектора $\eta'\in S_1$, удовлетворяющего неравенству $\|\eta'-\eta\|<\varepsilon_\eta$.

Пусть $\{B(\eta_i,\varepsilon_{\eta_i}):i=1,\ldots,p\}$ — конечное покрытие единичной сферы S_1. Положим $T_0=\max\{T_{\eta_i}:i=1,\ldots,p\}$.

Тогда для любого вектора $\eta \in S_1$ и любой функции $w(t) \in C[0, T_0]$ существует вектор $\eta_{i_0} \in S_1$, $i_0 \in \overline{1,p}$, такой, что $\|\eta_{i_0} - \eta\| < \varepsilon_{\eta_{i_0}}$. В силу (27), $(\eta, x_{\eta_{i_0}}) < -r_0$, причем $x_{\eta_{i_0}} \in S_w(T_{\eta_{i_0}}) \subset S_w(T_0)$. Отсюда следует, что $\inf\{(\eta, x): x \in S_w(T_0)\} < -r_0$ для любого вектора $\eta \in S_1$ и любой непрерывной функции $w(t) \in C[0, T_0]$.

Так как множество $S_w(T_0)$ является выпуклым, это неравенство означает, что множество $S_w(T_0)$ содержит шар $B(0, r_0)$. Лемма доказана.

Непосредственно из леммы 3 вытекает

С л е д с т в и е 3. *Пусть нелинейная система имеет вид*

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varphi(u) + g(t, u), \ u \in \Omega \subset R_m,$$

где A — вещественная $n \times n$-матрица, φ и g — непрерывные n-мерные вектор-функции, а множество Ω является ограниченным и удовлетворяет условию: существует такой вектор $u_0 \in \Omega$, что $\varphi(u_0) = 0$, $g(t, u_0) \equiv 0$, $t \geqslant 0$. Тогда, если $\lim\limits_{t \to \infty} g(t, u) = 0$ для каждого фиксированного вектора $u \in \Omega$, то из глобальной управляемости системы (3) следует глобальная управляемость рассматриваемой системы.

Теорема 4. *Предположим, что для системы (1) выполняются все условия теоремы 1.*

Тогда, если система (3) глобально нуль-управляема, то система с возмущением (1) также является глобально нуль-управляемой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть система (3) глобально нуль-управляема. Поскольку все условия леммы 3 выполнены, для любой точки $x_0 \in R_n$ существует такое $T = T(\|x_0\|) > 0$, что $x_0 \in B(0, \|x_0\| + 1) \subset S_w(T)$, для всех функций $w(t) \in C[0, T]$. Далее, повторяя рассуждения доказательства теоремы 1, получим, что существует допустимое управление $\tilde{u}(t) \in \Omega$, $0 \leqslant t \leqslant T$, которое переводит систему (1) из точки x_0 в нуль за время T, т. е. $x_0 \in S(T)$.

Поскольку x_0 — произвольная точка из R_n, то отсюда следует $S = \cup \{S(T): T > 0\} = R_n$, что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Пусть управляемая система имеет вид*

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + G(t, x)\, u, \ u \in \Omega. \qquad (28)$$

Пусть также для данной системы выполнены все условия теоремы 2. Тогда из глобальной нуль-управляемости системы $dx/dt = Ax + Bu$, $u \in \Omega$ следует глобальная нуль-управляемость системы (28).

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Коробову В. И. за руководство работой и Мариничу А. П. за ценные замечания и помощь, оказанную при написании данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробов В. И., Маринич А. П., Подольский Е. Н. Управляемость линейных автономных систем при наличии ограничений на управление. — «Дифференциальные уравнения», 1975, т. II, № 11, с. 1967—1979.
2. Lukes D. L. Global controllability of nonlinear systems. — «SIAM Journal on Control», 1972, vol. 10, № 1, p. 112—126.
3. Aronsson G. Global controllability and bang—bang steering of certain nonlinear systems.— «SIAM Journal on Control», 1973, vol. 11, № 4, p. 607—619.
4. Dauer J. P. Bounded perturbation of control systems, II. — «Journal of Mathematical Analysis and Applications», 1974, vol. 48, № 1, p. 61—69.
5. Mirza K. B., Womack B. F. On the controllability for nonlinear systems. — «IEEE Transactions on Automatic Control», 1972, vol. 17, № 4, p. 531—535.
6. Тонков Е. П. Управляемость нелинейной системы по линейному приближению. — «Прикл. математика и механика», 1974, т. 38, вып. 4, с. 599—606.
7. Dauer J. P. Controllability of nonlinear systems with restrained control.— «Journal of Optimization Theory and Applications», 1974, vol. 14, № 3, p. 251—262.
8. Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. — «Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., мех., астр., физ., химии», 1959, № 2, с. 25—32.
9. Yorke J. A. The maximum principle and controllability of nonlinear equations. — «SIAM Journal on Control», 1972, vol. 10, № 2, p. 334—338.
10. Ли Э., Маркус П. Основы теории оптимального управления, М., «Наука», 1972. 574 с.

Поступила 19.I.1977 г.

УДК 517.934

В. И. КОРОБОВ, А. П. МАРИНИЧ, Е. Н. ПОДОЛЬСКИЙ

УПРАВЛЯЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ НА УПРАВЛЕНИЕ

1. Введение. Рассмотрим нелинейную управляемую систему

$$\frac{dx}{dt}=f(x,u),\ x\in R_n,\ u\in\Omega\subset R_r. \tag{1}$$

Управляемость нелинейных систем изучалась в ряде работ, например [1—4] при различных требованиях на ограничивающее множество Ω и на вектор-функцию $f(x, u)$, причем большинство результатов связано с первым приближением системы (1). Так, в работе [1] множество Ω содержит нуль в качестве внутренней точки, вектор-функция $f(x,u)\in C^1$ $(f(0,0)=0)$ и первое приближение системы (1) удовлетворяет условию rank $(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)=n$, где $A=f_x(0, 0)$, $B=f_u(0, 0)$.

В данной работе на ограничивающее множество Ω накладывается единственное требование

$$\exists u_0 \in \Omega: f(0, u_0) = 0, \tag{2}$$

а $f(x, u)$ и $f_x(x, u)$ являются непрерывными. Допустимыми управлениями $u=u(t)$ считаются ограниченные, измеримые вектор-функции со значениями в множестве Ω.

Всюду в дальнейшем предполагается, что выполняется требование А: для любого допустимого управления существует решение системы (1) на любом конечном отрезке $[0, T]$. Заметим, что если вектор-функция $f(x, u)$ удовлетворяет условию $(x, f) \leqslant C(\|x\|^2+1)$, то данное предположение выполняется.

Как известно, множеством $S_{NL}(T)$ нуль-управляемости системы (1) за время T называется множество тех точек $x_0 \in R_n$, из которых можно попасть в нуль за время T по траектории системы при ограниченном измеримом управлении $u(t)$ $(u \in \Omega)$. Система (1) называется локально нуль-управляемой, если $S_{NL} = \bigcup_{T>0} S_{NL}(T)$ содержит нуль в качестве внутренней точки, т. е. $0 \in \operatorname{int} S_{NL}$.

В работе приводятся достаточные условия локальной нуль-управляемости системы (1), которые обобщают ранее полученные авторами результаты [5] для линейных систем вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu,\ x \in R_n,\ u \in \Omega \subset R_r\ \ (\exists u_0 \in \Omega: Bu_0 = 0) \tag{3}$$

и существенно используют основной результат работы [4]. Ввиду важности данных результатов приведем их формулировки.

II. Вспомогательные утверждения. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\frac{dx}{dt} = Lx + f(0, u),\ u \in \Omega \subset R_r, \tag{4}$$

где $L=f_x(0, u_0)$ — постоянная $n \times n$-матрица.

Обозначим через $S_L(T)$ — множество нуль-управляемости системы (4) за время T; через L^* — сопряженную матрицу; через $f(0, \Omega)=\{f(0, u), u \in \Omega\}$. Система (4) называется локально нуль-управляемой, если $S_L = \bigcup_{T>0} S_L(T)$ содержит нуль в качестве внутренней точки, т. е. $0 \in \operatorname{int} S_L$. В работе [5] приводится критерий локальной нуль-управляемости для линейных систем вида (3), который применительно к системе (4) может быть сформулирован следующим образом.

Теорема [5]. Для того чтобы линейная управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = Lx + f(0, u), x \in R_n, u \in \Omega \subset R_r \quad (\exists u_0 \in \Omega : f(0, u_0) = 0)$$

была локально нуль-управляемой, необходимо и достаточно, чтобы не существовало вещественного собственного вектора матрицы L^*, опорного к множеству $f(0, \Omega)$, и не существовало комплексного собственного вектора матрицы L^*, ортогонального к тому же множеству.

В дальнейшем при доказательстве основной теоремы мы воспользуемся достаточным условием данного утверждения.

Основной результат работы [4] указывает связь между множествами $S_L(T)$ и $S_{NL}(T)$, который в наших обозначениях может быть записан следующим образом.

Теорема [4]. Пусть система (1) удовлетворяет требованию А, множество Ω удовлетворяет условию (2), а $f(x, u)$ и $f_x(x, u)$ являются непрерывными. Тогда, если $0 \in \operatorname{int} S_L(T)$, то $0 \in \operatorname{int} S_{NL}(T)$.

Теперь сформулируем и докажем основной результат данной работы.

III. Достаточные условия управляемости системы (1).

Теорема 1. *Пусть система (1) удовлетворяет требованию А, множество Ω удовлетворяет условию (2), $f(x, u)$ и $f_x(x, u)$ являются непрерывными. Тогда, если не существует вещественного собственного вектора матрицы L^* ($L = f_x(0, u_0)$), опорного к множеству $f(0, \Omega)$, и не существует комплексного вектора матрицы L^*, ортогонального к тому же множеству, то система (1) локально нуль-управляема.*

Доказательство. Для доказательства данной теоремы в силу теоремы [4] и теоремы [5] достаточно установить следующий факт: если $0 \in \operatorname{int} S_L$, то существует $T > 0$ такое, что $0 \in \operatorname{int} S_L(T)$. Для любого $u \in \Omega$ введем в рассмотрение функцию

$$A_\eta(t, u) = (\eta, e^{Lt} f(0, u)) \quad (\|\eta\| = 1).$$

При доказательстве достаточности теоремы [5] показано, что для любого η ($\|\eta\| = 1$) существуют t_η и u_η, такие, что

$$(\eta, e^{Lt_\eta} f(0, u_\eta)) > 0. \tag{5}$$

Обозначим через $t(\eta, u) = \inf \tilde{t}$, где $\tilde{t}$ удовлетворяет условию $(\eta, e^{L\tilde{t}} f(0, u)) > 0$. Если для данных η и u не существует такого $\tilde{t}$, то полагаем $t(\eta, u) = \infty$.

Рассмотрим функцию $t(\eta) = \inf\limits_{u \in \Omega} t(\eta, u)$. В силу (5) для любого η функция $t(\eta) < \infty$. Покажем, что $t(\eta)$ является полунепрерывной сверху, т. е.

$$\forall \eta_0 (\|\eta_0\| = 1), \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) : \|\eta - \eta_0\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow t(\eta) - t(\eta_0) < \varepsilon.$$

Поскольку для любого η функция $t(\eta)$ конечна, $\forall\eta_0, \forall\varepsilon > 0, \exists\bar{u}\in\Omega: t(\eta_0) \leqslant t(\eta_0, \bar{u}) \leqslant t(\eta_0) + \frac{\varepsilon}{2}$. Из определения функции $t(\eta, u)$ следует существование такого $\hat{t} \geqslant 0$, что $t(\eta_0, \bar{u}) \leqslant \leqslant \hat{t} \leqslant t(\eta_0, \bar{u}) + \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $(\eta_0, e^{L\hat{t}} f(0, \bar{u})) > 0$, существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что $\|\eta - \eta_0\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow (\eta, e^{L\hat{t}} f(0, \bar{u})) > 0$. Откуда $t(\eta) \leqslant t(\eta, \bar{u}) \leqslant \hat{t} \leqslant t(\eta, \bar{u}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant t(\eta_0) + \varepsilon$.

Таким образом, функция $t(\eta)$ является конечной полунепрерывной сверху в компакте $\{\eta \in R_n: \|\eta\| = 1\}$. Поэтому $t(\eta)$ ограничена сверху и в качестве $T > 0$ можно выбрать величину $\sup\limits_{\|\eta\|=1} t(\eta) + \alpha$, где α — некоторое положительное число.

Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 1 остается справедливой, если вместо множества $f(0, \Omega)$ рассматривать наименьший замкнутый выпуклый конус $K(f(0, \Omega))$, содержащий $f(0, \Omega)$.

Замечание 2. Если множество Ω, удовлетворяющее условию (2), содержит точку u_0 в качестве внутренней точки, то легко показать, используя следствия 3 работы [5], что в данном случае из теоремы 1 вытекает основной результат по управляемости нелинейных систем работы [1, с. 399].

Близкий результат к теореме 1 содержится в работе [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М., «Наука», 1972. 574 с.
2. Brammer R. F. Controllability in linear autonomous systems with positive controllers.— «SIAM J. Control», vol. 10, № 2, 1972, p. 339—353.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1971. 507 с.
4. Yorke J. The maximum principle and controllability of nonlinear equations.— «SIAM J. Control», vol. 10, № 2, 1972, p. 334—338.
5. Коробов В. И., Маринич А. П., Подольский Е. Н. Управляемость линейных автономных систем при наличии ограничений на управление. — «Диф. уравнения», т. 11, 1975, с. 1967—1979.

Поступила 4. II. 1977 г.

УДК 519.3:62—50

А. П. ПРИХОДЬКО, Р. РАБАХ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ УРАВНЕНИЙ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \tag{1}$$

где $x \in X$, $u \in U$; X и U — банаховы пространства, A — инфинитезимальный производящий оператор C_0-полугруппы $S(t)$ $(t \geqslant 0)$; $B \in L(U, X)$, т. е. является линейным ограниченным оператором, отображающим U в X.

Под обобщенным решением системы (1) будем понимать

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-\tau) Bu(\tau)\, d\tau, \tag{2}$$

где $u(\tau)$ — суммируемая функция со значениями в U. Интеграл здесь и в дальнейшем понимается в смысле Бохнера.

Уравнение (1) назовем точно управляемым за время T, если для всех $x \in X$ существует управление $u(\cdot) \in L_2([0, T], U)$ такое, что

$$x = \int_0^T S(T-\tau) Bu(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Точная управляемость не означает, что объект, описываемый уравнением (1), может быть управляем в любую точку пространства, так как, вообще говоря, (2) не является решением задачи Коши [1].

Теорема 1. *Пусть пространство U рефлексивно, тогда для точной управляемости уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы существовало $\delta > 0$ такое, что для всех $f \in X^*$ имеет место соотношение*

$$\int_0^T \|B^* S^*(T-\tau) f\|^2\, d\tau \geqslant \delta \|f\|^2.$$

Доказательство. Рассмотрим оператор C, отображающий $L_2([0, T], U)$ в X, вида $Cu(\cdot) = \int_0^T S(T-\tau) Bu(\tau)\, d\tau$. Очевидно, C линейный и ограниченный. Точная управляемость уравнения (1) эквивалентна тому, что C отображает $L_2([0, T], U)$ на все X. Это имеет место [2] в том и только в том случае, когда существует $\delta > 0$, что для всех $f \in X^*$ выполнено условие

$$\|C^* f\|^2 \geqslant \delta \|f\|^2. \tag{4}$$

Так как пространство U рефлексивно, $L_2^*([0, T], U) = L_2([0, T], U^*)$, $C^* f = B^* S^*(T-\tau) f$. Тогда условие (4) примет вид

$$\int_0^T \|B^* S^*(T-\tau) f\|^2 dt \geqslant \delta \|f\|^2.$$

В частности, если уравнение (1) задано в гильбертовом пространстве, можно получить критерий, данный в работе [6]. Справедливо

С л е д с т в и е 1.1. *Пусть пространства U и X — гильбертовы. Тогда для того, чтобы уравнение (1) было точно управляемо, необходимо и достаточно, чтобы оператор* $K=\int\limits_0^T S(T-\tau)\,BB^*\,S^*(T-\tau)\,d\tau$ *был равномерно положительно определен* $(K\gg 0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равномерная положительность оператора K эквивалентна существованию $\delta>0$ такое, что $(Kx, x)\geqslant \delta\|x\|^2$ для всех $x\in X$. С другой стороны, нетрудно видеть, что

$$(Kx, x)=\int\limits_0^T \|B^*S^*(T-\tau)\,x\|^2 d\tau.$$

Следовательно, равномерная положительность оператора K имеет место в том и только в том случае, когда

$$\int\limits_0^T \|B^*S^*(T-\tau)x\|^2\,d\tau \geqslant \delta\|x\|^2$$

при некотором $\delta>0$ и для всех $x\in X$. Это означает, что уравнение (1) точно управляемо за время T.

Следствие 1. 2. В гильбертовом пространстве точная управляемость имеет место в классе непрерывных управлений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть уравнение (1) точно управляемо за время T, тогда оператор K в силу равномерной положительности имеет ограниченный обратный K^{-1}. В качестве управления, обеспечивающего попадание в точку $x\in X$, можно выбрать $\bar{u}(t)=B^*S^*(T-t)\,K^{-1}x$. Действительно, в этом случае имеем

$$\int\limits_0^T S(T-\tau)B\bar{u}(\tau)\,d\tau=\int\limits_0^T S(T-\tau)\,BB^*S^*(T-\tau)\,d\tau=KK^{-1}x=x.$$

Причем $\bar{u}(t)$ непрерывна (в сильном смысле), поскольку полугруппа $S^*(T-t)$ сильно непрерывна [3]. Обратно, так как пространство $C([0, T], U)$ всех непрерывных на $[0, T]$ вектор-функций входит в $L_2([0, T], U)$, если система точно управляема за время T в классе непрерывных управлений, то она точно управляема и в классе управлений из $L_2([0, T], U)$.

Теорему 1 можно обобщить на случай неавтономного эволюционного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \tag{5}$$

где $A(t)$ такое семейство операторов, что разрешающий оператор уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{6}$$

удовлетворяет условию $\Phi(T, \tau) \in \tilde{M}([0, T], L(X, X))$ (это имеет место, если, например, задача Коши для уравнения (6) равномерно корректна [5]); $B(t)$ — интегрируемая с квадратом оператор-функция со значениями в $L(V, X)$. Понятие точной управляемости для этого уравнения вводится аналогично случаю автономного уравнения (1) с той лишь разницей, что соотношение (3) будет иметь вид $x = \int\limits_0^T \Phi(T, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau$. Имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть пространство U рефлексивно, $B(t)$ интегрируема с квадратом и $\Phi(T, \tau) \in \tilde{M}([0, T], L(X, X))$, тогда для точной управляемости (5) за время T необходимо и достаточно, чтобы существовало $\delta > 0$ такое, что для всех $f \in X^*$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^T \|B^*(\tau)\Phi^*(T, \tau) f\|^2 d\tau \geqslant \delta \|f\|^2.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Имеют место также следствие 1.1 и следствие 1.2 и оператор

$$K = \int\limits_0^T \Phi(T, \tau) B(\tau) B^*(\tau) \Phi^*(T, \tau) d\tau.$$

Теорема 3. *Предположим, что X и U — гильбертовы. Пусть разрешающий оператор $\Phi(T, \tau)$ для однородного уравнения $dx/dt = A(t)x$ удовлетворяет условию $\Phi(T, \tau) \in \tilde{M}([0, T], L(X, X))$; $A(t)$ — неограниченные линейные операторы из X в X, $B(t)$ — интегрируемое с квадратом семейство линейных ограниченных операторов из $L(U, X)$.*

Если $B(t)$ вполне непрерывны почти всюду на $[0, T]$, то уравнение (5) не является точно управляемым на $[0, T]$.

Доказательство. В силу теоремы 2 критерием точной управляемости уравнения (5) является условие $K \gg 0$. Мы покажем, что $0 \in \sigma(K)$, тогда K не является равномерно положительным [5].

По предположению $K = \int\limits_0^T \Phi(T,\tau) B(\tau) B^*(\tau) \Phi^*(T,\tau)\, d\tau$ существует последовательность простых функций

$$y_n(\tau) = \Phi(T, \tau_i) B(\tau_i) B^*(\tau_i) \Phi^*(T, \tau_i);\ \tau_i \in I_i;\ i=0, 1, \ldots, m_n,$$

сходящаяся почти всюду к $\Phi(T, \tau) B(\tau) B^*(\tau) \Phi^*(T, \tau) = y(\tau)$, где τ_i — некоторая точка из I_i, такая, что $B(\tau_i)$ — компактный оператор [4].

Тогда K является пределом: $K = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^T y_n(\tau) d\tau$ в равномерной топологии. С другой стороны, $\int\limits_0^T y_n(\tau)\, d\tau = \sum\limits_{i=0}^{m_n} y(\tau_i)\, mI_i =$

$$= \sum_{i=0}^{m_n} \Phi(T, \tau_j) B(\tau_j) B^*(\tau_j) \Phi^*(T, \tau_i)\, mI_i, \tag{7}$$

где $[0, T] = \bigcup\limits_{i=1}^{m_n} I_i;\ I_i \cap I_k = \Phi,\ i \neq k.$ Но $\Phi(T, \tau_i) B(\tau_i) B^*(\tau_i)$ $\Phi^*(T, \tau_i)$ — вполне непрерывен, поэтому (7) является вполне непрерывным оператором.

Следовательно, K — вполне непрерывный оператор, как предел вполне непрерывных, т. е. не существует ограниченного обратного K^{-1}, значит, $0 \in \sigma(K)$ и уравнение (5) не является точно управляемым.

Обозначим $\tilde{\Omega} \subset L_1([0, T], U)$ множество допустимых управлений.

Уравнение (5) называют локально достижимым при ограничениях на управление $\tilde{\Omega}$, если множество достижимости $K_T = \left\{ x(T) = \int\limits_0^T \Phi(T, \tau) B(\tau) u(\tau)\, d\tau,\ u \in \tilde{\Omega} \right\}$ содержит 0 в качестве внутренней точки [1].

Следующая теорема дает достаточные условия локальной достижимости.

Теорема 4. *Пусть разрешающий оператор однородного уравнения $dx/dt = A(t)x$ удовлетворяет условию $\Phi(T, \tau) \in \tilde{M}([0, T], L(X, X))$,*

$\tilde{\Omega} \subset L_p([0, T], U)$, $(p \geqslant 1)$, $B(t) \in L_{p'}([0, T], L(U, X))$, $1/p + 1/p' = 1$. *Тогда, если уравнение (5) точно управляемо на* $[0, T]$ *без ограничений на управление и* $0 \in \operatorname{Int}\tilde{\Omega}$, *то уравнение (5) локально достижимо.*

Доказательство. Если $u(\cdot) \in L_p([0, T], U)$, то общее решение уравнения (5), исходящее из $x_0 = 0$, имеет вид $x(t,u) = \int_0^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau)\, d\tau$. Рассмотрим оператор $C: L_p([0, T], U) \to X$, $Cu(\cdot) = \int_0^T \Phi(T, \tau) B(\tau) u(\tau)\, d\tau$, который линеен и, как следует из неравенства Гельдера, ограничен. Далее условие точной управляемости означает, что C отображает $L_p([0, T], U)$ на банахово пространство X. Тогда по теореме об открытом операторе [3] оператор C открыт, так как $C\tilde{\Omega} = K_T$, то в силу $0 \in \operatorname{Int}\tilde{\Omega}$ будет $0 \in \operatorname{Int} K_T$, т. е. уравнение (5) локально достижимо.

Следствие 4.1. Предположим, что $A(t)$ — линейные ограниченные операторы и

$$A(t) \in L_1^{\mathrm{loc}}([0, \infty), L(X, X)),$$

тогда $\Phi(t, \tau)$ непрерывны по (t, τ) в равномерной операторной топологии. Следовательно, $\|\Phi(T, \tau)\| \leqslant M$ при $\tau \in [0, T]$ по условиям теоремы 4 из точной управляемости следует локальная достижимость.

Покажем, что в условиях теоремы 4 уравнение (5) является также локально управляемым. Действительно, множество управляемости имеет вид

$N_T = \{x_0 : x(T, u) = 0;\ u(\cdot) \in \tilde{\Omega}\}$, где $x(T, u) = \Phi(T, 0) x_0 + \int_0^T \Phi(T,0) \Phi^{-1}(\tau,0) B \cdot (\tau) u(\tau)\, d\tau$, тогда, полагая $Cu(\cdot) = -\int_0^T \Phi^{-1}(\tau, 0) B(\tau) u(\tau)\, d\tau$, получаем, что уравнение (5) локально управляемо на $[0, T]$, т. е. $0 \in \operatorname{Int} N_T$.

Следствие 4.2. *Если уравнение (5) точно управляемо управлениями $u(t) \in \tilde{M}([0, T], U)$, то при ограничениях на управление $u(t) \in \Omega$ почти всюду, где $\Omega \subset U$, $0 \in \operatorname{Int}\Omega$, уравнение (4) локально достижимо.*

Для доказательства достаточно заметить, что $\tilde{\Omega}=\{u(t)\in\Omega, u(\cdot)\in\tilde{M}([0,T],U)\}$ содержит 0 в качестве внутренней точки в пространстве $\tilde{M}([0, T], U)$. Действительно, если $0\in \mathrm{Int}\Omega$ в U, то существует $\varepsilon>0$ такое, что $S(0, \varepsilon)=\{u:\|u\|<\varepsilon\}\subset\Omega$, но условие $u(t)\in S(0, \varepsilon)$ почти всюду эквивалентно $\|u(\cdot)\|_{\tilde{M}}<\varepsilon$, т. е. $0\in \mathrm{Int}\tilde{\Omega}$.

Замечание. Из доказательства теоремы 4 следует, что множество K_T имеет непустую внутренность, если уравнение (5) точно управляемо и $\mathrm{Int}\tilde{\Omega}\neq\varnothing$.

Таким образом, если ограничения на управления неавтономные $u(t)\in\Omega_t$ почти всюду и существует $\bar{u}(t)\in\tilde{M}([0,T], U)$ такая, что $S(u(t), \varepsilon)=\{u:\|\bar{u}(t)-u\|<\varepsilon\}\subset\Omega_t$ при $t\in[0, T]$ и некотором $\varepsilon>0$, то множество достижимости K_T имеет непустую внутренность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Triggiani R. Extensions of rank conditions for controllability and observability to Banach spaces and unbounded operators. — «SIAM I. Control and Optimization», 1976, vol. 14, № 2, February, p. 313—338.
2. Рудин У. Функциональный анализ. М., «Мир». 1975. 443 с.
3. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппа. М., ИЛ, 1962. 829 с.
4. Иосида К. Функциональный анализ. М., «Мир», 1967. 623 с.
5. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965. 520 с.
6. Megan M., Hiris V. On the space of linear controllable systems in Hilbert spaces. — «Glasnik Matematicki», 1975, т. 10, p. 161—167.

Поступила 15.II 1977 г.

УДК 519.3:62—50

Р. РАБАХ

О ТОЧНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx}{dt}=Ax+Bu, \tag{1}$$

где $x\in X$, $u\in U$; X, U — банаховы пространства; A, B — линейные ограниченные операторы, отображающие соответственно X в себя и U в X, т. е. $A\in L(X)$ и $B\in L(U, X)$. Всюду в дальнейшем будем считать, что пространство U рефлексивно. Систему назовем точно управляемой, если для некоторого $T>0$

и для всех $x \in X$ существует управление $u(\cdot) \in L_p([0, T], U)$, где $1<p<\infty$, что

$$x=-\int_0^T e^{-A\tau} Bu(\tau)\, d\tau. \tag{2}$$

Необходимое и достаточное условие точной управляемости для случая гильбертова пространства (X, U — пространства Гильберта) дано в работе [1]. В статье [2] получено обобщение этого критерия на случай, когда X и U — пространства Банаха, U рефлексивно, в настоящей работе этот результат будет использован для получения более удобного с практической точки зрения критерия. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть пространство U рефлексивно. Для того чтобы система (1) была точно управляема, необходимо и достаточно, чтобы не существовала последовательность $\{f_n\} \subset X^*$ такая, что $\|f_n\|=1$ при всех $n=1,2,\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} B^*A^{*k} f_n = 0$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$).*

Для доказательства теоремы 1 воспользуемся результатом работы [2], в которой показано, что система (1) точно управляема тогда и только тогда, когда существует $\delta>0$, что для всех $f\in X^*$ имеет место

$$\int_0^T \|B^* e^{-A^*\tau} f\|^q\, d\tau \geqslant \delta \|f\|^q, \tag{3}$$

где q: $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ (в работе [2] доказательство проводится для случая $p=q=2$, но оно остается верным и при любом p: $1<p<\infty$). Легко проверить, что это утверждение эквивалентно следующему: не существует последовательность $\{f_n\} \in X^*$ такая, что $\|f_n\|=1$ для всех n,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \|B^* e^{-A^*\tau} f_n\|^q d\tau = 0.$$

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы 1.

Необходимость. Достаточно показать следующее: если существует последовательность $\{f_n\} \subset X^*$ такая, что $\|f_n\|=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} B^*A^{*k} f_n = 0$ для всех $k=0,1,2,\ldots$, то система (1) не является точно управляемой. Известно [3], что $e^{-A^*\tau} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!}\tau^k A^{*k}$. Тогда $B^*e^{-A^*\tau} f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!}\tau^k B^* A^{*k} f$ и ряд сходится равномерно относительно $f: \|f\| = 1$. Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} B^* e^{-A^*\tau} f_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \tau^k \lim_{n\to\infty} B^* A^{*k} f_n. \tag{4}$$

Далее, так как $\|B^* e^{-A^*\tau} f_n\| \leqslant \|B^* e^{-A^*\tau}\|$, из (4) вытекает $\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|B^* e^{-A^*\tau} f_n\|^q d\tau = 0$. Но, с другой стороны, $\|f_n\| = 1$. Тогда система (1) не является точно управляемой, что и требовалось доказать.

Достаточность. От противного. Пусть выполнено условие теоремы. Допустим, что система (1) не является точно управляемой, тогда существует последовательность $\{f_n\} \subset X^*$ такая, что

$$\|f_n\| = 1 \text{ и } \lim_{n\to\infty} \int_0^T \|B^* e^{-A^*\tau} f_n\|^q d\tau = 0.$$

Отсюда следует [4], что из последовательности $\{f_n\}$ можно выбрать последовательность $\{f_{n_i}\}$ такую, что $\lim_{i\to\infty} B^* e^{-A^*\tau} f_{n_i} = 0$ для почти всех $\tau \in [0, T]$. Обозначим $F_i(\tau) = B^* e^{-A^*\tau} f_{n_i}$ и покажем, что $F_i(\tau)$ сходится к нулю при всех $\tau \in [0, T]$. В самом деле, для любого $\tau \in [0, T]$ имеем

$$\|F_i(\tau)\| \leqslant \|B^* (e^{-A^*\tau} - e^{-A^*\tau_0}) f_{n_i}\| + \|B^* e^{-A^*\tau_0} f_{n_i}\| \leqslant$$
$$\leqslant \|B^*\| \, \|e^{-A^*\tau} - e^{-A^*\tau_0}\| + \|B^* e^{-A^*\tau_0} f_{n_i}\|, \tag{5}$$

где τ_0 выбирается так, чтобы $\lim_{i\to\infty} F_i(\tau_0) = 0$. Кроме того, потребуем, чтобы $\tau_0 \in [\tau - \alpha, \tau + \alpha]$, где α такое, что $\|e^{-A^*\tau} - e^{-A^*\tau'}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\|B^*\|}$ для всех $\tau' \in [\tau - \alpha, \tau + \alpha]$.

Это возможно, так как $e^{-A^*\tau}$ равномерно непрерывна на $[0, T]$ и $F_i(\tau)$ сходится к нулю почти всюду на $[0, T]$. Следовательно, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $i_0 > 0$, что для всех $i > i_0$ имеет место неравенство $\|B^* e^{-A^*\tau_0} f_{n_i}\| < \varepsilon/2$, то из (5) вытекает: для любого $\tau \in [0, T]$ существует $i_0 > 0$, такое, что при всех $i > i_0$ справедливо неравенство $\|F_i(\tau)\| < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim_{i\to\infty} F_i(\tau) = 0$ для всех $\tau \in [0, T]$.

Так как $F_i(0) = B^* f_{n_i}$, то $\lim_{i\to\infty} B^* f_{n_i} = 0$. Тогда $\lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \times$

$$\times \frac{\tau^k}{k!} B^* A^{*k} f_{n_i} = \lim_{i\to\infty} (F_i(\tau) - B^* f_{n_i}) = 0 \quad \text{для всех } \tau \in [0, T].$$

Разделив выражение, стоящее под знаком предела на $\tau \neq 0$, получим

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\tau^{k-1}}{k!} B^*A^{*k} f_{n_i} = 0; \quad \tau \in (0, T].$$

Проводя рассуждения, аналогичные сделанным

для $F_i(\tau)$, получим, что $\lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\tau^{k-1}}{k!} B^*A^{*k} f_{n_i} = 0$

для всех $\tau \in [0, T]$. Положив $\tau = 0$, получим $\lim\limits_{i\to\infty} B^*A^*f_{n_i} = 0$. Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{i\to\infty} B^*A^{*k}f_{n_i} = 0$ при всех k. Тогда, с одной стороны, $\|f_{n_i}\| = 1$ при $i = 1, 2, \ldots$, а с другой стороны, $\lim\limits_{i\to\infty} B^*A^{*k}f_{n_i} = 0$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$. Это противоречит сделанному предположению. Теорема доказана.

Аналогичный результат можно получить и для неавтономной системы

$$dx/dt = A(t)x + B(t)u, \tag{6}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — аналитические оператор-функции со значениями в $L(X)$ и $L(U, X)$ соответственно.

Введем оператор-функции $L_k(t)$ следующим образом [5]: $L_0(t) = B(t)$; $L_k(t) = -A(t)L_{k-1}(t) + d/dtL_{k-1}(t)$. Пусть $\Phi(t)$ — решение однородного уравнения $d/dt\Phi(t) = -\Phi(t)A(t)$ с начальным условием $\Phi_0 = I$, где I — тождественный оператор в пространстве X. Тогда легко видеть, что $\Phi(t)L_k(t) = d^k/dt^k\Phi(t)B(t)$ и выражение $\Phi(t)B(t)$ может быть записано в виде

$$\Phi(t)B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi(0)L_k(0)\frac{\tau^k}{k!}. \tag{7}$$

Это имеет место, так как из аналитичности $A(t)$ и $B(t)$ следует аналитичность $\Phi(t)B(t)$ [5]. Из (7) получим выражение для сопряженного оператора

$$B^*(t)\Phi^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k^*(0)\Phi^*(0)\frac{t^k}{k!}. \tag{8}$$

Учитывая, что система (6) точно управляема тогда и только тогда, когда существует $\delta > 0$ такое, что для всех $f \in X^*$ имеет место неравенство $\int\limits_0^T \|B^*(\tau)\Phi^*(\tau)f\|^q d\tau \geqslant \delta\|f\|^q$, легко получить следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть пространство U рефлексивно, $A(t)$ и $B(t)$ аналитические оператор-функции на $[0, T]$. Для того чтобы* *система (6) была точно управляема, необходимо и достаточно, чтобы не существовала последовательность* $\{f_n\} \subset X^*$ *такая, что* $\|f_n\|=1$ *для всех* n *и* $\lim\limits_{n\to\infty} L_k^*(0) f_n=0$ *при всех* $k=0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 1. В доказательстве теоремы 1 было попутно показано, что условие $\lim\limits_{n\to\infty} B^*A^{*k}f_n=0$ при $k=0,1,2,\ldots$ и при ограниченной последовательности $\{f_n\}\subset X^*$ эквивалентно условию $\lim\limits_{n\to\infty} B^*e^{-A^*\tau} f_n=0$ для почти всех $\tau \in [0, T]$. Замечание верно и для аналитических $A(t)$ и $B(t)$.

Замечание 2. Из теоремы 1 и 2 видно, что значение T не существенно. Действительно, если система точно управляема при некотором T_0, то $\lim\limits_{n\to\infty} L_k^*(0) f_n=0$ для всех $k=0, 1, 2, \ldots$ только в том случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=0$ и, следовательно, $\int\limits_0^T \|B^*(\tau)\Phi^*(\tau)f\|^q d\tau \geqslant \delta \|f\|^q$ (при $\delta>0$ и для всех $f\in X^*$) для любого $T>0$, надо лишь предполагать, что $A(t)$ и $B(t)$ аналитичны на $[0, T]$.

Замечание 3. В формулировке теоремы 2 операторы $L_k^*(0)$ можно заменить на $L_k^*(t_0)$, где t_0 — произвольная точка из $[0, T]$. Действительно, достаточно заметить, что выражение (7) можно записать в виде

$$\Phi(t)B(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\Phi(t_0)L_k(t_0)\frac{(t-t_0)^k}{k!}$$

и провести те же рассуждения, что и для случая, когда $t_0=0$.

Далее будем рассматривать вопрос о стабилизации системы (1), когда X и U — пространства Гильберта. Результаты настоящей работы основаны, в отличие от [6], на естественном разложении пространства X на два подпространства M и $M^{\perp}$, где M есть замыкание линейной оболочки $\{BU, ABU, A^2BU, \ldots\}$, $M^{\perp}$ — ортогональное дополнение к M.

Система (1) называется стабилизируемой, если существует линейный ограниченный оператор $D\in L(X, U)$ такой, что для всех $x_0 \in X$ $\lim\limits_{t\to\infty} e^{(A+BD)t}x_0=0$; если же оператор D такой, что для некоторых N, $\varepsilon>0$ и для всех $x_0\in X$ выполнено

$$\|e^{(A+BD)t}x_0\| \leqslant Ne^{-\varepsilon t}\|x_0\|, \tag{9}$$

то система называется экспоненциально стабилизируема [6]. Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть X и U — пространства Гильберта. Система (1) экспоненциально стабилизируема тогда и только тогда, когда* а) *она стабилизируема экспоненциально в M;*

б) *существуют* β, $\alpha>0$ *такие, что* $\|e^{A^*t}y\| \leqslant \beta e^{-\alpha t}\|y\|$ *для всех* $y\in M^{\perp}$.

Необходимость. Пусть система (1) экспоненциально стабилизируема, тогда она очевидно экспоненциально стабилизируема в M. Рассмотрим условие б). Из нашего предположения следует, что существуют N, $\varepsilon>0$ такие, что $\|e^{(A+BD)t}x_0\|\leqslant Ne^{-\varepsilon t}\|x_0\|$ для всех $x_0\in X$. Тогда $\|e^{(A+BD)t}\|\leqslant N e^{-\varepsilon t}$, поэтому $\|e^{(A^*+D^*B^*)t}\|\leqslant Ne^{-\varepsilon t}$.

Пусть $y\in M^{\perp}$. Ясно, что $B^*A^{*k}y=0$ при $k=0, 1, 2, \ldots$ Отсюда нетрудно получить $e^{(A^*+D^*B^*)t}y=e^{A^*t}y$. Итак, для всех $y\in M^{\perp}$ имеем $\|e^{A^*t}y\|\leqslant Ne^{-\varepsilon t}\|y\|$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть P — проектор, соответствующий инвариантному относительно A подпространству M, т. е. $PX=M$. Тогда $(I-P)X=M$ и систему (1) можно представить в виде [5]

$$dx_1/dt=PAx_1+PAx_2+PBu; \tag{10}$$

$$dx_2/dt=(I-P)Ax_2, \tag{11}$$

где $x_1=Px$, $x_2=(I-P)x$. Рассмотрим сначала уравнение (11). Пусть $x_0\in X$, $x_0=x_0^1+x_0^2$, где $x_0^1\in M$, $x_0^2\in M^{\perp}$. Через A_2 обозначим сужение оператора $(I-P)A$ на $M^{\perp}$. Тогда в силу условия б) имеем

$$\|x_2(t)\|=\|e^{(I-P)At}x_0^2\|=\|e^{A_2t}x_0^2\|\leqslant\beta e^{-\alpha t}\|x_0^2\|\leqslant\beta e^{-\alpha t}\|x_0\|. \tag{12}$$

В силу условия а) система $dx_1/dt=PAx_1+PBu$ экспоненциально стабилизируема, следовательно, существует $D_1\in L(M, U)$ такой, что для всех $x_0^1\in M$ имеем

$$\|e^{Ft}x_0^1\|\leqslant N_1e^{-\varepsilon_1 t}\|x_0^1\|;\ N_1,\ \varepsilon_1>0, \tag{13}$$

где $Fx_1=(PA+PBD_1)x_1$. Тогда, если в уравнении (10) взять $u=D_1x_1$, имеем

$$x_1(t)=e^{Ft}\left(x_0^1+\int_0^t e^{-F\tau}PAx_2(\tau)\,d\tau\right), \tag{14}$$

где $x_2(t)$ — решение уравнения (11).

Учитывая (12), (13) и (14), получим

$$\|x_1(t)\|\leqslant N_1e^{-\varepsilon_1 t}\left(\|x_0^1\|+\|PA\|\,N_1\beta\int_0^t e^{(\varepsilon_1-\alpha)\tau}\,d\tau\|x_0^2\|\right)\leqslant N_1e^{-\varepsilon_1 t}\times$$

$$\times\left(1+\|PA\|\,N_1\beta\int_0^t e^{(\varepsilon_1-\alpha)\tau}\,d\tau\right)\|x_0^1\|.$$

Откуда и получим (для некоторых N_2, $\varepsilon_2>0$ и для всех $x_0\in X$)

$$\|x_1(t)\|\leqslant N_2e^{-\varepsilon_2 t}\|x_0\|. \tag{15}$$

Взяв $u=Dx$, где $Dx=D_1x_1$, получим $x(t)=e^{(A+BD)t}x_0=x_1(t)+ +x_2(t)$.

Из (12) и (15) ясно, что существуют $N, \varepsilon>0$, при котором $\|x(t)\| \leqslant Ne^{-\varepsilon t}\|x_0\|$.

Теорема доказана.

Если оператор A самосопряженный, можно получить подобное условие стабилизируемости (не экспоненциальной) для системы (1) в гильбертовом пространстве.

Предварительно отметим одно свойство однородного уравнения

$$\frac{dx}{dt}=Ax, \tag{16}$$

где A — самосопряженный оператор (линейный ограниченный). Уравнение (16) асимптотически устойчиво, если для всех $x \in X$ $\lim\limits_{t\to\infty} e^{At}x=0$, и слабо асимптотически устойчиво, если для всех x, $y \in X$ $\lim\limits_{t\to\infty}(e^{At}x, y)=0$. Оказывается, если оператор A самосопряженный, эти два понятия совпадают. Действительно, из слабой асимптотической устойчивости следует, что спектр оператора лежит в левой полуплоскости и 0 принадлежит непрерывному спектру (если A не самосопряженный, то на мнимой оси могут быть только точки непрерывного спектра), а этого достаточно для асимптотической устойчивости уравнения (16) с самосопряженным оператором [3]. Имеет место следующая

Теорема 4. *Пусть X, U — пространства Гильберта, оператор A самосопряженный. Тогда система (1) стабилизируема тогда и только тогда, когда*

а) *она стабилизируема в M;*

б) $\lim\limits_{t\to\infty} e^{At}y=0$ *для всех* $y \in M^{\perp}$.

Необходимость. Условие а) очевидно, если система (1) стабилизируема. Рассмотрим условие б). Имеем $\lim\limits_{t\to\infty} e^{(A+BD)t}x_0= =0$ для всех $x_0 \in X$. Пусть $y \in M^{\perp}$, тогда $\lim\limits_{t\to\infty}(x_0, e^{At}y)=$
$$=\lim_{t\to\infty}(x_0, e^{(A^*+D^*B^*)t}y)=\lim_{t\to\infty}(e^{(A+BD)t}x_0, y)=0.$$

Следовательно, сужение оператора A на подпространство $M^{\perp}$ (оно инвариантно относительно $A^*=A$) удовлетворяет условию слабой асимптотической устойчивости. В силу сделанного выше замечания имеем $\lim\limits_{t\to\infty} e^{At}y=0$. Что и требовалось доказать.

Достаточность. Как и в доказательстве достаточности предыдущей теоремы, представим систему так:

$$\frac{dx_1}{dt}=PAx_1+PAx_2+PBu; \quad \frac{dx_2}{dt}=(I-P)Ax_2.$$

Но в данном случае $M^{\perp}$ инвариантно относительно A и тогда $PAx_2=0$ для всех $x_2 \in M^{\perp}$, и система будет иметь вид

$$\frac{dx_1}{dt} = PAx_2 + PBu; \tag{17}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (I - P) Ax_2. \tag{18}$$

Пусть D_1 — стабилизирующий оператор для уравнения (17); D — оператор, определенный, как и в доказательстве теоремы 3. Тогда

$$x(t) = e^{(A+BD)t}x_0 = e^{(PA+PBD_1)t}x_0^1 + e^{(I-P)At}x_0^2$$

и легко видеть, что $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Megan M., Hiris. On The Space of linear Controllable systems in Hilbert spaces. — «Glasnik Matematicki», 1975, T. 10(30), № 1, p. 161—167.
2. Приходько А. П., Рабах Р. Некоторые свойства линейных управляемых уравнений в бесконечномерных пространствах (см. статью в настоящем сб.).
3. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., «Наука», 1970. 534 с.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функции и функционального анализа. М., «Наука», 1968. 496 с.
5. Triggiani R. Controllability and Observability in Banach space with bounded operators.— «SIAM I. Control», Vol 13, № 2, 1975, p. 462—491.
6. Triggiani R. On the stabilizability in Banach space. — «J. Mat. Anal. and Appl.», 1975, vol 52, p. 383—403.

Поступила 20.II 1977 г.

УДК 51:65.012.122

А. А. БОСОВ

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

В теории надежности при построении моделей восстановления (ремонта) часто прибегают к модели В. Феллера [1], при этом после восстановления объекта (системы) вероятностные характеристики такие же, как у нового, что является скорее исключением, чем правилом. Ближе к реальным процессам модели, основанные на процессах гибели и размножения [2, 3], а также модели, использующие аппарат полумарковских процессов [4—6]. В этих работах модели неполного восстановления (ремонта) используются неявно, поэтому создание математических моделей ремонта в настоящее время — одна из важных задач в области профилактики сложных систем. Рассмотрим создание математической модели восстановления (ремонта) при помощи аксиоматического подхода.

I. Основные понятия

Первичным понятием в предполагаемом подходе является элементарная технологическая операция ремонта (восстановления) v. Например, замена конденсатора, сопротивления или сваривание двух каких-либо деталей и т. д. Применительно к вполне определенному устройству можно указать некоторый набор элементарных операций Ω.

Определение 1. *Подмножество V множества Ω назовем ремонтом (восстановлением) объема V.*

Определение 2. *Некоторый набор A подмножеств множества Ω назовем системой ремонта.*

Считаем, что по отношению к ремонтам объема V применимы все операции над множествами, определяемыми обычным образом [7]. Важным понятием является $\lambda(t)$ — интенсивность отказов рассматриваемого технического устройства [2], которые как функции времени определены и непрерывны справа при $t \geqslant 0$ и являются элементами некоторого пространства

$$\Lambda^{+}=\{\lambda(t):\lambda(t) \geqslant 0;\ \lim_{h \downarrow 0}\lambda(t+h)=\lambda(t);\ \ t \geqslant 0\}.$$

Определение 3. *Под математической моделью восстановления (ремонта) будем понимать отображение* $R_x^V:\Lambda^{+}\to\Lambda^{+}$, *где* $V \in A,\ x \geqslant 0$. Другими словами, в момент времени x мгновенно восстанавливается объем V, вызывая изменение интенсивности отказов $\lambda(t)$, что можно записать так: $R(V_x)\lambda(t)=\lambda(t;\ V_x)$ при $t \geqslant x$.

II. Аксиомы, определяющие модель восстановления

Аксиома 1. *Система ремонта A является алгеброй* [7].

Аксиома 2. $R(\Omega_x)\lambda(t)=\lambda(t-x)$, $t \geqslant x$, *т. е. если производится ремонт в объеме Ω, то это эквивалентно замене технического устройства на новое.*

Аксиома 3. $R(V'_x)\,R(V''_x)\lambda(t)=R(V'_x\ Uv''_x)\lambda(t);\ V'_x,\ V''_x \in A.$

Аксиома 4. *Пусть* $h,\ x>0$ *и* $V_x=V_{x+h} \in A$, *тогда* $\lim_{h \downarrow 0}R\ (V_{x+h})R(V_x)\lambda(t)=R(V_x)\lambda(t)$.

Инженерный смысл аксиом 3, 4 заключается в том, что если в один и тот же момент времени выполняется ремонт в объеме V'_x, а затем V''_x, то эффективность такого восстановления эквивалентна объему ремонта $V_x=V'_x \cup V''_x$. Если в некоторый момент x проводится ремонт в объеме V_x, а затем спустя незначительное время h проводится ремонт в том же объеме, то эффективность таких мероприятий незначительна по сравнению с ремонтом V_x в момент x.

Как следствие определений и предположений (аксиомы 1—4) имеем

Лемма 1. $R(V_x)\lambda(t)=\lambda(t)$, *если* $V_x=\varnothing$, *т. е.* $R(\varnothing)=E$ — *тождественный оператор* ($\varnothing$ — *пустое множество*).

Лемма 2. $R(V''_x)R(V'_x)=R(V''_x)R(V'_x)$.

Лемма 3. $R(V'_x)\lambda(t)=\lambda(t;\ V_x)$ *при* $t>x$ *непрерывна справа по переменной* t.

Заметим, что аксиома 3 постулирует полугрупповое свойство оператора восстановления $R(V_x)$ при $V_x\in A$, а аксиома 2 совместно с леммой 1 — его сильную непрерывность в окрестности пустого множества $\varnothing$.

Пример. Пусть техническое устройство состоит из M подсистем, причем отказ хотя бы одной из них приводит к отказу всей системы. Под элементарной операцией ν будем понимать замену ν-й подсистемы на новую, тогда $\Omega=\{\nu: 1\leqslant\nu\leqslant M\}$, а система A — набор всевозможных подмножеств множества Ω. Оператор ремонта в данном случае определим следующим образом:

$$R(V_x)\lambda(t)^{\Delta}=\sum_{\nu\in\Omega/V_x}\lambda_\nu(t)+\sum_{\nu\in V_x}\lambda_\nu(t-x),\ t>x,$$

где $\lambda_\nu(t)$ — интенсивность отказов ν-й подсистемы; $\lambda(t)=$

$=\sum\limits_{\nu\in\Omega}\lambda_\nu(t)$.

На данном примере легко убедиться в непротиворечивости аксиом.

Пусть техническое устройство таково, что для интенсивности отказов возможно представление

$$\lambda(t)=\int\limits_{\Omega}\lambda(t,\nu)\,d\mu(\nu), \tag{1}$$

где $\mu(\nu)$ — некоторая мера на Ω, тогда имеет место

Теорема 1. *Если система такова, что имеет место (1), то оператор ремонта*

$$R_x^V:\Lambda^+\to\Lambda^+$$

представим в виде

$$R_x^V=(1-\chi_V(\nu))\,E+\chi_V(\nu)\,T_x^*, \tag{2}$$

где $\chi_V(\nu)$ — *индикатор множества* V; T_x^* — *линейный оператор, определенный на* $\lambda(t)\in\Lambda^+$ *следующим образом:*

$$\text{а)}\quad T_x^*\lambda(t)=\begin{cases}\lambda(t) & \text{при } t<x;\\ \lambda(t-x) & \text{при } t\geqslant x,\end{cases}$$

если $x_1<x_2$, *то*

$$\text{б)}\quad T_{x_2}^*T_{x_1}^*\lambda(t)=\begin{cases}\lambda(t) & \text{при } t<x_1;\\ \lambda(t-x_1) & \text{при } x_1\leqslant t<x_2;\\ \lambda(t-x_2) & \text{при } t>x_2.\end{cases}$$

Очевидно, что оператор T^*_x является математической моделью процессов восстановления, рассмотренных В. Феллером, поэтому этот оператор будем называть оператором восстановления Феллера, для которого в силу а) и б) при $0=x_0<x_1<...<x_k$ можно записать

$$\left(\prod_{i=0}^{k} T^*_{x_i}\right)\lambda(t) = \sum_{i=0}^{k} \lambda(t-x_i)\,[\sigma(t-x_i)-\sigma(t-x_{i+1})],$$

где
$$\sigma(t)=\begin{cases}0 \text{ при } t<0;\\ 1 \text{ при } t\geqslant 0,\end{cases}$$

а под произведением операторов понимаем последовательное их применение.

Отметим справедливость следующей очевидной

Леммы 4. *Если* $x_1, x_2>0$ *и* $t\geqslant \max(x_1, x_2)$, то

$$T^*_{x_1} T^*_{x_2}\lambda(t) = T^*_{x_2} T^*_{x_1}\lambda(t) = T^*_{\max(x_1, x_2)}\lambda(t), \tag{3}$$

что подчеркивает связь между параметром t и x в свойстве а).

Доказательство теоремы. В силу (1) и (2) имеем

$$R(V_x)\lambda(t) = \int\limits_{\Omega}\left[(1-\chi_{V_x}(\nu))E + \chi_{V_x}(\nu)T^*_x\right]\lambda(t,\nu)\,d\mu(\nu), \tag{4}$$

поэтому, чтобы убедиться в справедливости теоремы, выполним непосредственную проверку аксиом 2—4.

Пусть $V_x=\Omega$, тогда $R(V_x)\lambda(t)\Big|_{V_x=\Omega} = \int\limits_{\Omega} T^*_x\lambda(t,\nu)\,d\mu(\nu) =$

$= T^*_x\int\limits_{\Omega}\lambda(t,\nu)\,d\mu(\nu) = \lambda(t-x)$, что согласуется с аксиомой 2.

Из уравнения (4) следует

$$R(V_{x_2})R(V_{x_1})\lambda(t) = \int\limits_{\Omega}[(1-\chi_{V_{x_2}})E + \chi_{V_{x_2}}T^*_{x_2}][(1-\chi_{V_{x_1}})E +$$
$$+\chi_{V_{x_1}}T^*_{x_1}]\lambda(t,\nu)\,d\mu(\nu) = \int\limits_{\Omega}[(1-\chi_{V_{x_1}\cup V_{x_2}})E + \chi_{V_{x_2}\setminus V_{x_1}}T^*_{x_2} +$$
$$+\chi_{V_{x_1}\setminus V_{x_2}}T^*_{x_1} + \chi_{V_{x_1}\cap V_{x_2}}T^*_{x_2}T^*_{x_1}]\lambda(t,\nu)\,d\mu(\nu). \tag{5}$$

Если обозначить через V'_{x_1} значение V_{x_2} при $x_2=x_1$, то с учетом (3) получим $R(V_{x_1})R(V'_{x_1})\lambda(t) = \int\limits_{\Omega}[(1-\chi_{V_{x_1}\cup V'_{x_1}})E +$
$+(\chi_{V'_{x_1}\setminus V_{x_1}} + \chi_{V_{x_1}\setminus V'_{x_1}} + \chi_{V_{x_1}\cap V'_{x_1}})T^*_{x_1}]\lambda(t,\nu)\,d\mu(\nu) = \int\limits_{\Omega}[(1-$
$-\chi_{V_{x_1}\cup V'_{x_1}})E + \chi_{V_{x_1}\cup V'_{x_1}}T^*_{x_1}]\lambda(t,\nu)\,d\mu(\nu) = R(V_{x_1}\cup V'_{x_1})\lambda(t)$, что подтверждает выполнение аксиомы 3.

В соотношении (5), положив $V_{x_1} = V_{x_2} = V$, имеем $R(V_{x_2}) R(V_{x_1}) \lambda(t) = \int\limits_{\Omega} [(1 - \chi_V) E + \chi_V T^*_{x_2}] \lambda(t, \nu) d\mu(\nu)$.

Непрерывность справа функций $\lambda(t, \nu)$ при $x_2 \downarrow x_1$ убеждает в выполнении аксиомы 4, что и доказывает теорему.

III. Системы с линейными интенсивностями отказов

Во многих прикладных задачах теории надежности интенсивность отказов является линейной функцией наработки t, которую возьмем в форме

$$\lambda(t) = 2at + b,$$

где

$$a = \int\limits_{\Omega} a(\nu) d\mu(\nu), \quad b = \int\limits_{\Omega} b(\nu) d\mu(\nu). \tag{6}$$

Обозначим через U_t последовательность ремонтов $V_{x_1}, V_{x_2} \ldots$; $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots$, т. е.

$$U_t = \begin{cases} V_{x_i}, & \text{если } t = x_i \\ \varnothing, & \text{если } t \neq x_i, \ i = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{7}$$

Определение 4. *Последовательность U_t, определяемую соотношением (7), назовем управлением процесса восстановления.*

Как следствие теоремы 1 имеет место

Теорема 2. *Если интенсивность отказов представима в виде (6), а оператор восстановления в форме (4), то интенсивность отказов, соответствующая управлению U_t, будет равна*

$$\lambda(t, U_t) = 2at + b - 2a \sum_{i=1}^{n^*(t)} x_i \gamma\left(V_{x_i} / \bigcup_{k=i+1}^{n^*(t)} V_{x_k}\right), \tag{8}$$

где

$$n^*(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(t - x_i); \tag{9}$$

$$\gamma(V) = \frac{1}{a} \int\limits_{V} a(\nu) d\mu(\nu). \tag{10}$$

Определение 5. *Функцию $\gamma(V)$ назовем степенью восстановления ремонта в объеме V.*

При помощи соотношений (8)—(10), выбрав соответствующее управление U_t, можно получать с заданной степенью точности довольно произвольную зависимость интенсивности отказов от времени.

Определение 6. *Систему (техническое устройство) назовем ε-системой по отношению к заданной, если на отрезке времени* (t', t'') *их интенсивности удовлетворяют соотношению* $|\lambda_\varepsilon(t)-\lambda(t)| \leqslant \varepsilon$, $t \in (t', t'')$.

Пусть $x_k=k\tau$, а $V_{x_k}=V$, тогда управление U_t запишется в виде

$$U_t=\begin{cases} V, \text{ если } t=k\tau; \\ \varnothing, \text{ если } t\neq k\tau,\ k=1,2,\dots, \end{cases}$$

а соответствующая интенсивность в силу (8) равна

$$\lambda(t, U_t)=2at+b-2a\gamma(V)\tau\left[\frac{t}{\tau}\right], \tag{11}$$

где $[x]$ — целая часть числа x.

Если $a\tau\,\gamma(V)\leqslant\varepsilon$, то интенсивность ε-системы по отношению к рассматриваемой запишется в виде $\lambda_\varepsilon(t, U_t)=2a(1-\gamma(V))t+$ $+b+a\tau\gamma(V)$.

В связи с этим необходимо вводить непрерывное управление, так как U_t отлично от пустого множества почти всюду. Если при $t_1<t_2$ $U_{t_1}\subseteq U_{t_2}$, то такие управления естественно называть марковскими, поскольку интенсивность отказов для такого управления в силу (8) не зависит от U_s, $s<t$ и будет следующей:

$$\lambda(t, U_t)=2a(1-\gamma(U_t))\,t+b, \tag{12}$$

где

$$\gamma(U_t)=\frac{1}{a}\int\limits_{U_t} a(\nu)\,d\mu(\nu).$$

В заключение выражаю благодарность А. И. Егорову и В. И. Денисову, обсуждение рассмотренных вопросов с которыми было весьма полезным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М., ИЛ, 1952. 752 с.
2. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. М., «Наука», 1965. 524 с.
3. Козлов Б. А., Ушаков И. А. Справочник по расчету надежности. М., «Советское радио», 1975. 471 с.
4. Королюк В. С. Время пребывания полумарковского процесса в фиксированном множестве состояний. — «Укр. мат. журн.», 1975, IX, № 3, с. 364—368.
5. Герцбах И. Б. Модели профилактики. М., «Советское радио», 1969. 214 с.
6. Демьянчук В. С., Броди С. М. Надежность обслуживаемых радиоэлектронных систем. Киев, «Вища школа», 1976. 160 с.
7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1972. 496 с.

Поступила 25.VII 1976 г.