

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

Факультет математики і інформатики

Кафедра фундаментальної математики

Кваліфікаційна робота

Освітньо-кваліфікаційний рівень: *магістр*

на тему «*Дискретні групи ізометрій гіперболічної площини*»

Виконала: студентка групи М-161 VI курсу
(другий магістерський рівень),
спеціальності 111 “Математика”
освітньо-наукової програми
“Математика” Марченко М.В.

Керівник: кандидат фізико-
математичних наук
Петров Є.В.

Рецензент: кандидат фізико-
математичних наук
Власенко Д.І.

Харків — 2024 рік

Зміст

Вступ	3
1. Загальні відомості	4
1.1. Модель гіперболічної площини Пуанкаре у напівплощині.....	4
та комплексні числа.....	4
1.2. Ізометрії гіперболічної площини та їх групи.....	5
1.3. Теорема Пуанкаре	8
2. Опис дискретних груп ізометрій	11
2.1. Модулярна група	11
2.2. Узагальнення модулярної групи	15
2.3. Деякі підгрупи модулярної групи.....	19
Висновки	22
Список використаних джерел.....	23

Вступ

Геометрія гіперболічної площини, незважаючи на свою вже давню історію, продовжує займати одне з центральних місць у сучасній математиці. Крім власне геометричних задач, вона також важлива для задач комплексного аналізу, алгебраїчної геометрії, топології та алгебри. Зокрема, у даній роботі ми розглядаємо алгебраїчну задачу опису деяких дискретних груп рухів гіперболічної площини з використанням класичної теореми Пуанкаре про такі рухи.

Робота має наступну структуру. У першому розділі ми наводимо основні відомості з моделі гіперболічної площини Пуанкаре, застосування комплексних чисел до її дослідження, ізометрій цієї площини та їх груп, описуємо ці ізометрії за допомогою дробово-лінійних перетворень та даємо формулювання та доведення теореми Пуанкаре. У другому розділі ми самостійно доводимо відому теорему про опис модулярної групи, яку ми визначаємо за допомогою її фундаментальної області та теореми Пуанкаре. Далі, діючи аналогічним способом, ми визначаємо серію груп, що аналогічні до модулярної, та наводимо опис однієї з них за допомогою матриць певного вигляду. Після цього ми таким же способом описуємо кілька підгруп модулярної групи.

1. Загальні відомості

1.1. Модель гіперболічної площини Пуанкаре у напівплощині

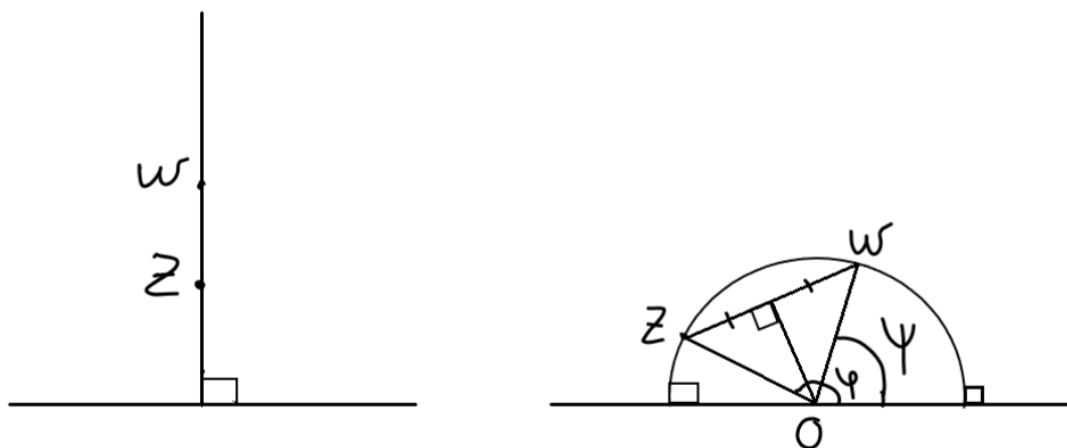
та комплексні числа

Модель Пуанкаре – один з можливих описів гіперболічної геометрії (Лобачевського). Це верхня напівплощина $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$, точки якої ми будемо ототожнювати з комплексними числами $z = x + iy$. Горизонтальна пряма $y = 0$ (дійсна вісь) не входить у цю площину, її називають абсолютом. Часто до абсолюта ще умовно додають «нескінченно віддалену точку».

Означення. Гіперболічною прямою зветься будь-яка напівпряма у H , що ортогональна до абсолюта $y = 0$ і будь-яке напівколо у H , що ортогональне до абсолюта.

Твердження 1.1. Через будь-які дві точки H проходить єдина гіперболічна пряма.

Доведення. Дійсно, якщо уявні частини точок $z, w \in H$ збігаються, то вони лежать на одній вертикальній напівпрямій. Якщо ні, проведемо серединний перпендикуляр до відрізка zw .



Тоді його перетин O з абсолютом — центр напівкола радіуса Oz , що ортогональне до абсолюта та містить z, w . Доведено.

Зауважимо, що через довільну точку, що не лежить на гіперболічній прямій l , можна провести безліч гіперболічних прямих, що не перетинаються з l , тому в цій геометрії не виконується аксіома про паралельність.

Означення. Кутом між гіперболічними прямими зветься евклідовий кут між ними.

Означення. Гіперболічною відстанню між точками $z, w \in H$ зветься:

- Якщо z, w лежать на одній вертикальній гіперболічній прямій, то $d(z, w) := \left| \ln \frac{\Re z}{\Re w} \right|$;
- Якщо z, w лежать на одній гіперболічній прямій - напівколі з центром O на абсолюті (осі Ox), а кути від Ox до векторів Oz, Ow дорівнюють φ, ψ відповідно, то $d(z, w) = \left| \ln \frac{tg \frac{\varphi}{2}}{tg \frac{\psi}{2}} \right|$.

1.2.Ізометрії гіперболічної площини та їх групи

Означення. Бієктивне відображення $f: H \rightarrow H$ гіперболічної площини на себе зветься її ізометрією, якщо зберігає гіперболічні відстані: $d(f(z), f(w)) = d(z, w) \forall z, w \in H$.

Твердження 1.2. Композиція ізометрій та відображень, що обернене до ізометрій – теж ізометрії.

Доведення безпосередньо випливає з означення.

Приклад 1. Паралельне перенесення вздовж абсолюта $f: z = x + iy \mapsto z + a = (x + a) + iy$ для будь-якого $a \in R$ - ізометрія (зокрема, тотожне відображення при $a = 0$).

Приклад 2. Симетрія відносно вертикальної гіперболічної прямої $x = 0$ задається $f: z = x + iy \mapsto (2a - x) + iy = 2a - \bar{z}$ для будь-якого $a \in R$.

Приклад 3. Симетрією відносно гіперболічної прямої – напівкола з центром у точці $a \in R$ на абсолюті радіуса R зветься інверсія відносно нього, тобто відображення f таке, що для будь-якої точки $z \in H$ точка $f(z)$ належить до променя az і $az \cdot af(z) = R^2$ (тут $az, af(z)$ – евклідові відстані). Вона задається $f: z = x + iy \mapsto \frac{R^2}{(x-a)^2+y^2}((x-a) + iy) + a = \frac{R^2}{\bar{z}-a} + a = \frac{a\bar{z}-a^2+R^2}{\bar{z}-a}$.

Приклад 4. Композиції симетрій відносно гіперболічних прямих, що не перетинаються, є гіперболічним аналогом паралельних перенесень.

Приклад 5. Композиції симетрій відносно гіперболічних прямих, що перетинаються, є гіперболічним аналогом обертань.

Зауважимо, що усі ізометрії з цих прикладів мають один з двох виглядів:

- $z \mapsto z + a = \frac{1 \cdot z + a}{0 \cdot z + 1}$ – дробово-лінійне перетворення від z ;
- $z \mapsto 2a - \bar{z} = \frac{-\bar{z} + 2a}{0 \cdot \bar{z} + 1}$ – дробово-лінійне перетворення від $\bar{z}$;
- $z \mapsto \frac{a\bar{z}-a^2+R^2}{\bar{z}-a}$ – теж дробово-лінійне перетворення від $\bar{z}$.

Перетворення з прикладів 4 і 5 є дробово-лінійними від z як композиція дробово-лінійних від $\bar{z}$.

Теорема 1.1. Для будь-якої ізометрії $f: H \rightarrow H$ справедливе рівно одне з наступних двох тверджень:

- Або f є композицією однієї або трьох симетрій відносно гіперболічних прямих і тому задається дробово-лінійним перетворенням від $\bar{z}$: $f(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, де $a, b, c, d \in R, ad - bc < 0$;
- Або f є композицією двох симетрій відносно іперболічних прямих і тому задається дробово-лінійним претворенням від z : $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, де $a, b, c, d \in R, ad - bc > 0$.

Доведення див., наприклад, у [1].

Означення. Ізометрії з першого твердження попередньої теореми зуться невласними, а з другого – власними, або рухами.

Поділивши a, b, c, d на $\sqrt{|ad - bc|} \neq 0$, отримаємо що будь-яка власна ізометрія задається перетворенням $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, де $ad - bc = 1$, а невласна - $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, де $ad - bc = -1$. Наприклад, для інверсії з прикладу 3 $\frac{a\bar{z}-a^2+R^2}{\bar{z}-a} = \frac{\frac{d}{R}\bar{z}-\frac{a^2}{R}+R}{\frac{1}{R}\bar{z}-\frac{a}{R}}$, де $\frac{a}{R}\left(\frac{-a}{R}\right) - \frac{1}{R}\left(\frac{-a^2}{R} + R\right) = -1$.

Далі будемо ставити ізометріям у відповідність матриці $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, які таким чином мають визначник 1 для власних ізометрій і -1 - для невласних. Зауважимо, що $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ має той же визначник і задає ту ж ізометрію, композиції ізометрій відповідає добуток матриць, а оберненій – обернена матриця.

Із загального означення групи отримаємо:

Означення. Деяка множина G ізометрій H є їх групою, якщо:

- Для будь-яких $f, g \in G$ композиція $f \circ g \in G$.
- Тотожне відображення $id: z \mapsto z$ належить до G .
- Для будь-якого f із G обернене відображення f^{-1} належить до G .

Умова асоціативності $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ тут виконана автоматично, бо є властивістю композиції відображень.

Означення. Нехай G – група ізометрій H .

- Орбітою точки $z \in H$ під дією G зветься множина $\{f(z) | f \in G\}$.
- G зветься дискретною, якщо для будь-якого $z \in H$ існує евклідовий відкритий круг U з центром z , що не містить інших точок орбіти $z: f(z) \notin U \forall f \in G, f \neq id$.

- Фундаментальною областю G зветься така підмножина A площини, що будь-яка точка площини належить орбіті деякої точки A , тобто для будь-якого $z \in H$ існує $w \in A, f \in G: z = f(w)$, і жодні дві точки внутрішності A не можуть бути переведені одна в одну елементом G : для будь-якого $z \in \text{int}A$ для будь-якого $f \in G$ $f(z) \notin \text{int}A$.

1.3. Теорема Пуанкаре

Далі ми розглядатимемо дискретні групи власних ізометрій (рухів), що мають обмежену фундаментальну область. Вони зветься фуксовими. Для них справедлива наступна теорема.

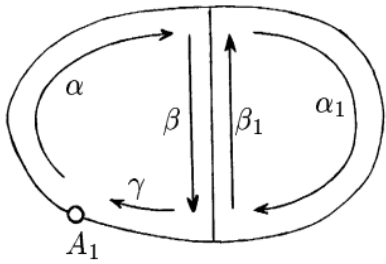
Теорема 1.2 (Пуанкаре). Нехай опуклий гіперболічний многокутник M має наступні властивості:

1. Сторони многокутника розбиті на пари $\{a, b\}$, при чому для кожної такої пари сторін існує спарюючий їх власний рух g , тобто $b = g(a) = M \cap g(M)$;
2. Сума кутів при еквівалентних вершинах дорівнює $\frac{2\pi}{k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Тоді M – фундаментальна область групи G , що породжена рухами, які спарюють сторони.

Доведення. Перш за все доведемо, що якщо многокутники $h_1 M i h_2 M$ ($h_1, h_2 \in G$) мають спільну внутрішню точку, то $h_1 = h_2$. Застосуємо до обох многокутників перетворення h_1^{-1} . Після цього можна буде вважати, що $h_1 = id$. Перетворення $g = h_2$ представимо у вигляді композиції перетворень, що спарюють сторони: $g = g_k g_{k-1} \cdots g_1$. Припустимо, що $g \neq id$. При цьому можна обрати перетворення g з найменшою довжиною розкладення k . Нехай A – спільна внутрішня точка многокутників M і $g(M)$. Розкладенню $g = g_k \cdots g_1$ поставимо у відповідність замкнуту ламану $A_1 \dots A_k$, де $A_1 = A, A_{s+1} = g_s(A_s)$ при $s \geq 1$. Точки A_s і A_{s+1} не можуть співпадати, тому що вони є внутрішніми точками двох опуклих многокутників, які мають спільну сторону.

Із мінімальної довжини розкладення слідує, що ламана $A_1 \dots A_n$ несамоперетинаюча.



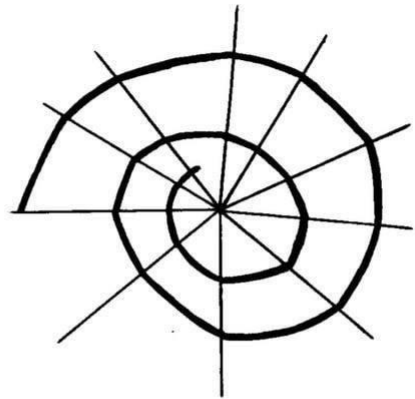
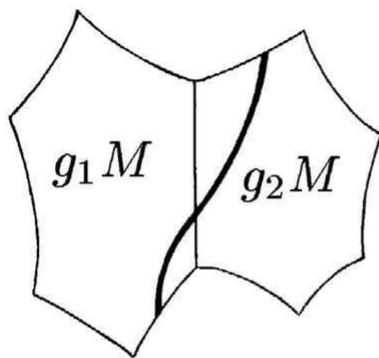
Якщо ламана $A_1 \dots A_k$ представляє собою обхід навколо однієї із вершин многокутника M , то перетворення g за умовою є поворотом на кут 2π навколо цієї вершини, тому $g = id$. Представимо, що ламана утворюється в результаті об'єднання двох ламаних, при чому їх спільні сторони проходять в різних напрямках. Із рівностей $\alpha\beta\gamma = 1, \beta_1\alpha_1 = 1$ і $\beta_1 = \beta^{-1}$ слідує, що $\alpha\alpha_1\gamma = 1$. Тому для замкненої ламаної, що отримана в результаті об'єднання декількох обходів навколо вершин многокутників, теж виконується рівність $g = id$. Зрозуміло теж, що будь-яку замкнену несамоперетинаючу ламану, яка відповідає розкладення перетворення g , можна представити даним образом, тому $g = id$.

Залишається довести, що образи многокутника M заповнюють всю площину Лобачевського. Вершини многокутника $gM (g \in G)$ утворюють зліченну множину, тому всередині многокутника M можна обрати точку A так, що відрізок XA не має жодної із вершин многокутника gM . Достатньо показати, що відрізок XA перетинає лише скінченне число многокутників gM .

Відстань між двома сторонами опуклого многокутника дорівнює нулю лише в тому випадку, коли ці сторони сусідні. Тому відстань між двома довільними точками несусідніх сторін многокутника M більше деякого фіксованого додатного числа. Отже, на відрізку XA розташовано лише скінченна кількість відрізків, які з'єднують несусідні сторони многокутників gM . Будемо вважати, що відрізок *стягує* вершину многокутника, якщо його кінці розташовані на сторонах, які виходять із цієї вершини. Припустимо, що пара сусідніх відрізків стягує нееквівалентні вершини многокутників g_1M і g_2M (рис. 23). Тоді у многокутнику $g_1M \cup g_2M$ відрізок, який складається з даних двох відрізків, не може стягувати вершину (в одну і ту ж саму точку

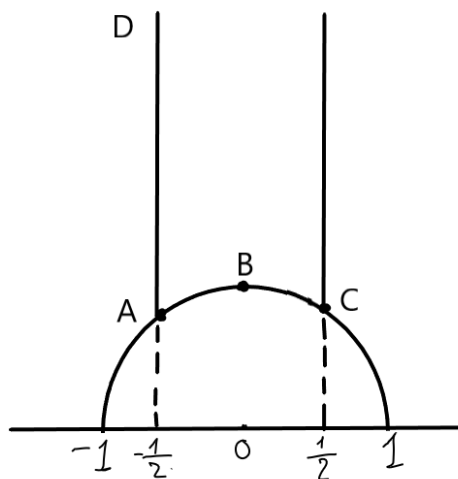
потрапляють лише еквівалентні вершини), тому він з'єднує точки двох несусідніх сторін. Отже, довжина отриманого відрізка більше деякого фіксованого додатнього числа. Таким чином, виключивши з розгляду скінчене число відрізків, можна вважати, що всі відрізки стягують вершини одного і того ж класа еквівалентності.

Припустимо, що на відрізку XA розташовано нескінченно багато таких відрізків. У тому випадку, коли вершина, яка ними стягується, не лежить на абсолюті, пряма XA повинна спіралевидно обвиватись навколо цієї вершини, чого бути не може. (Див. нижче рисунок справа).



2. Опис дискретних груп ізометрій

2.1. Модулярна група



Розглянемо у гіперболічній площині «чотирикутник» ABCD як на рисунку, де $B = (0,1) = i$, AB і BC – дуги гіперболічної прямої – напівкола радіуса 1 з центром O, точка D – на нескінченності, AD, CD – промені на прямих $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$. Помітимо, що цей 4-кутник має кути 0, π , та $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, а його сторони спарюються

ізометріями:

- $AD \mapsto CD$ – паралельне перенесення вздовж дійсної осі $z \mapsto z + 1 = \frac{1 \cdot z + 1}{0 \cdot z + 1}$ з матрицею $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $AB \mapsto CB$ – є композицією симетрії (тобто інверсії) відносно гіперболічної прямої AC та симетрії відносно прямої OB, тобто уявної осі. Дійсно, перша з них зберігає AB, а друга – відображає на CB (й обидві зберігають B). Це власна ізометрія (рух) як композиція двох симетрій.

Вони задаються перетвореннями $w \mapsto \frac{1}{\bar{w}}$ та $w \mapsto -\bar{w}$, тому маємо $z \mapsto$

$$-\overline{\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \frac{-1}{z} = \frac{0 \cdot z - 1}{1 \cdot z + 0}, \text{ й цій ізометрії відповідає матриця } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже за теоремою Пуанкаре, існує та єдина група рухів гіперболічної площини з фундаментальною областю ABCD, що породжується $z \mapsto z + 1$ і $z \mapsto -\frac{1}{z}$. Позначимо її G. Доведемо наступний (відомий) факт.

Теорема 2.1. Група G складається в точності з рухів вигляду $z \mapsto \frac{a \cdot z + b}{cz + d}$, де $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ і $ad - bc = 1$.

Означення. Група G зветься модулярною групою і позначається також $PSL(2, Z)$.

Доведення. Будемо описувати рухи матрицями, пам'ятаючи, що кожному руху відповідають дві матриці: A і $-A$ з $\det A = 1$. Втім, далі будемо, якщо відповідний рух належить до G , писати просто $A \in G$ (або $-A \in G$). При цьому композиції рухів відповідає добуток матриць, оберненому – обернена (точніше, пара A^{-1} та $-A^{-1}$).

Всі матриці з G мають потрібний вигляд, бо його мають матриці породжуючих

рухів $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а також $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, і добуток A і B з цілими коефіцієнтами $\det AB = \det A \cdot \det B = 1$.

Тому треба довести, що будь-які $a, b, c, d \in Z$ таких, що $ad - bc = 1$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in$

G . Попередньо зауважимо, що, оскільки $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, будь-яке $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^a =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{a-1} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ і } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-a} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, тому $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ для будь-якого $a \in Z$ (зокрема, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ при $a =$

0). Тому довільне $a \in Z$ $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in$

G (і аналогічно $\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in G$), $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in$

G (і аналогічно $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \in G$), $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in$

G (і аналогічно $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} \in G$).

Якщо $a = 0$, то $-bc = 1$ означає, що $b = 1$, $c = -1$ або $b = -1$, $c = 1$, тобто це

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & d \end{pmatrix} \in G \text{ і } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & d \end{pmatrix} \in G$$

Якщо $b = 0$, то $ad = 1$ означає, що $a = 1 = d$ або $a = d = -1$, тобто це $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \in G$ або $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix} \in G$.

Тому далі вважаємо, що $a \neq 0, b \neq 0$. $ad - bc = 1$ означає, що a і b взаємно прості, тобто не мають спільних дільників крім ± 1 . Дійсно, якщо б такі існували, вони були б і дільниками $ad - bc = 1$, протиріччя.

Далі без обмеження загальності вважаємо, що $|a| \geq |b|$. Дійсно, якщо це не так, деведемо, що $\begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} \in G$ з $|-b| > |a|$, тоді й $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in G$.

Застосуємо до a і b алгоритм Евкліда. Оскільки вони взаємно прості, то він повинен завершитися остачею 1. Послідовно ділимо з остачею

$$a = q_1 b + r_1, \text{де } r_1 \in N, r_1 < |b|;$$

$$b = q_2 r_1 + r_2, \text{де } r_2 \in N, r_2 < r_1;$$

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3, \text{де } r_3 \in N, r_3 < r_2;$$

.....

$$r_{n-3} = q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1}, \text{де } r_{n-1} \in N, r_{n-1} < r_{n-2};$$

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + 1.$$

У такому випадку говоримо, що алгоритм завершився на n -тому кроці. Зауважимо, що алгоритм дозволяє знайти усі можливі пари c, d , для яких $ad - bc = 1$: дійсно, починаючи з кінця, розписуємо:

$$1 = r_{n-2} - q_n r_{n-1} = r_{n-2} - q_n (r_{n-3} - q_{n-1} r_{n-2}) = (1 + q_{n-1}) r_{n-2} - q_n r_{n-3} = (1 + q_{n-1}) (r_{n-4} - q_{n-2} r_{n-3}) - q_n r_{n-3} = \dots = d \cdot a - c \cdot b, \text{де } d \text{ і } c \text{ виражаються}$$

через $q_1, \dots, q_n$. Інші пари c, d утворюються з цієї додаванням чисел ka, kb відповідно для довільного $k \in \mathbb{Z}$. (див. [2])

$1 = ad - bc = a(d + kb) - b(c + ka)$. Доведемо, що $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, провівши індукцію за номером останнього кроку алгоритма Евкліда n .

$n=1$ означає, що $a = q_1 b + 1$. Зокрема, саме тут ми зупиняємося, якщо $|a| = |b|$: взаємна простота означає тоді, що $|a| = |b| = 1$. Тоді при $a = 1$ покладемо $q_1 = 0$, а при $a = -1$ перейдемо до матриці $-A$ з $a = 1$ і зробимо так само.

Отже, $1 = a - q_1 b$, тому загальний вигляд c і d : $c = q_1 + ka, d = 1 + kb$, де $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 b + 1 & b \\ q_1 + k(q_1 b + 1) & 1 + kb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 b + 1 & b \\ q_1 & 1 \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in G.$$

Зробимо тепер індуктивний перехід від $n-1$ до n . Тобто нехай для a і b алгоритм Евкліда завершується за n кроків. Тоді $a = q_1 b + r_1$, де для b і r_1 алгоритм завершується за $n-1$ кроків. Тоді це ж вірно і для пари b і $-r_1$, тому за припущенням індукції $\begin{pmatrix} b & -r_1 \\ e & f \end{pmatrix} \in G$, де e, f такі, що $bf + r_1 e = 1$, знаходимо тепер з алгоритму Евкліда. Більш точно, наступні рядки алгоритму перетворюються на

$$b = (-q_2)(-r_1) + r_2$$

$$-r_1 = (-q_3)r_2 - r_3$$

$$r_2 = (-q_4)(-r_3) + r_4$$

$$-r_3 = (-q_5)r_4 - r_5$$

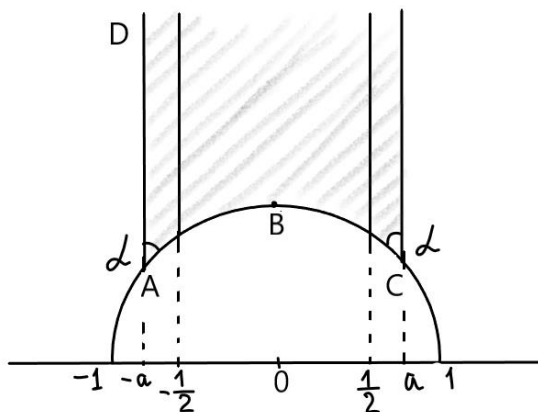
.....

де тепер допускаємо від'ємні остачі. Останнім рядком буде $r_{n-2} = (-q_n)(-r_{n-1}) + 1$ для парного n і $-r_{n-2} = (-q_n)r_{n-1} - 1$ – для непарного, але у цьому випадку відповідна матриця $\begin{pmatrix} -r_{n-2} & r_{n-1} \\ q_n & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_n r_{n-1} - 1 & r_{n-1} \\ q_n & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{n-1} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -q_n & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ тепер належить до G тому індукція теж працює.

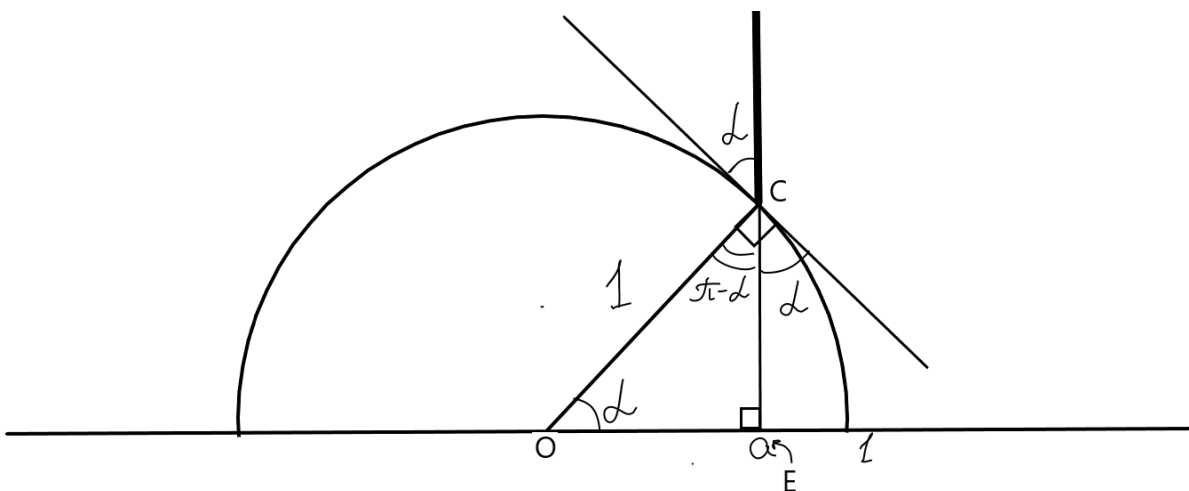
Таким чином, $1 = bf + (a - q_1 b)e = a(e + kb) - b(-f + q_1 e + ka) \forall k \in \mathbb{Z}$, тобто

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 b + r_1 & b \\ -f + q_1 e + k(q_1 b + r_1) & e + kb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 b + r_1 & b \\ -f + q_1 e & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & -r_1 \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in G, \text{ що й завершує доведення.}$$

2.2. Узагальнення модулярної групи



Розглянемо у гіперболічній площині «чотирикутник» ABCD як на рисунку, де $B = (0,1) = i$, AB і BC – дуги гіперболічної прямої – напівкола радіуса 1 з центром O, точка D – на нескінченності, AD, CD – промені на прямих $x = -a$, $x = a$, $\alpha = \frac{\pi}{n}$ – це кут між прямою і дотичною до півкола.



З прямокутного трикутника ОСЕ з гіпотенузою ОС = 1 і катетом ОЕ = а:
 $\cos \alpha = \cos \angle O = a$. Отже, $a = \cos \frac{\pi}{n}$. Зокрема, при n=2 це вироджена область

 при n = 3 фундаментальна область модулярної групи, при n = ∞, тобто
 $a = \cos 0 = 1$ – область 

Згідно з теоремою Пуанкаре (де умова на кути виконується за виглядом області), група G_n з такою фундаментальною областю породжується ізометріями, що спарюють сторони:

- $AD \mapsto CD$ (де D – «нескінченно віддалена вершина») – паралельне перенесення $z \mapsto z + 2a = \frac{1 \cdot z + a}{0 \cdot z + 2}$, матриця $\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- $AB \mapsto CB$ – композиція інверсії відносно AC (напівкола, тобто гіперболічної прямої) та симетрії відносно уявної осі OB. Це $w \mapsto \frac{1}{w}$ та $w \rightarrow -\bar{w}$ відповідно, отже композиція $z \rightarrow -\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = -\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{0 \cdot z - 1}{1 \cdot z + 0}$, матриця $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

До цієї групи належать рухи, матриці яких утворені множенням матриць $\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ разом з множенням на ± 1 . При n = 3 це модулярна група $\left\{ \frac{az+b}{cz+d} \mid ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$

Розглянемо випадок n = 4: $a = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, матриці $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Перемножаючи їх та оберені можна побачити, що усі матриці елементів даної групи мають вигляд (1) $\begin{pmatrix} a\sqrt{2} & b \\ c & d\sqrt{2} \end{pmatrix}$, де a, b, c, d $\in \mathbb{Z}$, $2ad - bc = 1$ або

(2) $\begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ c\sqrt{2} & d \end{pmatrix}$, де a, b, c, d $\in \mathbb{Z}$, $ad - 2bc = 1$. Дійсно, матриця $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ має

вигляд (2), а $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ має вигляд (1), як і обернені до них, а множення матриць такого вигляду дає матриці того ж вигляду:

$$(2) \cdot (2) \rightarrow (2): \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ c\sqrt{2} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f\sqrt{2} \\ g\sqrt{2} & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + 2bg & (af + bh)\sqrt{2} \\ (ce + dg)\sqrt{2} & 2cf + dh \end{pmatrix}$$

$$(1) \cdot (1) \rightarrow (2): \begin{pmatrix} a\sqrt{2} & b \\ c & d\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e\sqrt{2} & f \\ g & h\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ae + bg & (af + bh)\sqrt{2} \\ (ce + dg)\sqrt{2} & cf + 2dh \end{pmatrix}$$

$$(1) \cdot (2) \rightarrow (1): \begin{pmatrix} a\sqrt{2} & b \\ c & d\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f\sqrt{2} \\ g\sqrt{2} & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ae + bg)\sqrt{2} & 2af + bh \\ ce + 2dg & (cf + dh)\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$(2) \cdot (1) \rightarrow (1): \begin{pmatrix} e & f\sqrt{2} \\ g\sqrt{2} & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\sqrt{2} & b \\ c & d\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ae + bg)\sqrt{2} & af + 2bh \\ 2ce + dg & (cf + dh)\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Таким чином, ми довели наступне твердження:

Твердження 2.1. Група G_4 складається з рухів, матриці яких мають вигляд (1) та (2).

Але чи будь-яка матриця вигляду (1) чи (2) належать цій групі? Достатньо

перевірити це для (1), бо для (2) тоді отримуємо: $\begin{pmatrix} a\sqrt{2} & b \\ c & d\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a\sqrt{2} \\ d\sqrt{2} & -c \end{pmatrix}$. І навпаки, якщо перевіримо для (2), то оскільки будь-яка

матриця вигляду (1) представляється як $\begin{pmatrix} a\sqrt{2} & b \\ c & d\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a\sqrt{2} \\ -d\sqrt{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тому достатньо перевірити для матриць (2), що утворюють підгрупу.

Як і у доведеній теоремі 2.1 зауважимо, що для будь-якого $a \in \mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}a \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^a = G_4,$$

$$\text{тому } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2}a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2}a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in G_4.$$

Так само умова $ad - 2bc = 1$ означає, що a і $2b$ взаємно прості (зокрема, a непарне, тому $a \neq 0$, а при $b = 0$ отримуємо $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ \sqrt{2}c & \pm 1 \end{pmatrix} \in G_4$). Тому коефіцієнти c і d можна отримати з алгоритма Евкліда для чисел a і $2b$. Розглянемо варіант, коли він закінчується за один крок, тобто одне з цих двох чисел ділиться на інше з остачею 1.

Якщо $a = 2bq + 1$, то $1 = a - 2bq = (1 + 2bk)a - (q + ak)2b$ для $k \in \mathbb{Z}$, тобто $c = q + ak$, $d = 1 + 2bk$ і

$$\begin{pmatrix} a & \sqrt{2}b \\ \sqrt{2}c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2bq + 1 & \sqrt{2}b \\ (q + (2bq + 1)k) & 1 + 2bk \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2}k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2bq + 1 & \sqrt{2}b \\ \sqrt{2}q & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2}k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2}q & 1 \end{pmatrix} \in G_4.$$

Якщо ж $2b = aq + 1$, то $1 = -aq + 2b = (-q + 2bk)a - (-1 + ak)2b$, для $k \in \mathbb{Z}$, тобто $d = -q + 2bk$, $c = -1 + ak$. Оскільки $2b$ парне, $aq = 2b - 1$ непарне, тобто a і q непарні: $a = 2m + 1$, $q = 2l - 1$ для деяких $m, l \in \mathbb{Z}$. Тому

$$\begin{pmatrix} a & \sqrt{2}b \\ \sqrt{2}c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \sqrt{2}b \\ (-1 + ak) & -q + 2bk \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2}k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \sqrt{2}b \\ -\sqrt{2} & -q \end{pmatrix} =$$

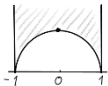
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2}k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}a & \frac{\sqrt{2}}{a}(aq + 1) \\ -\sqrt{2} & -q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2}k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2m + 1 & \sqrt{2}(ml - m + l) \\ -\sqrt{2} & -2l + 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2m + 1 & -m\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2}k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -m\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_4.$$

Тому можна сподіватися, що аналогічно до доведення теореми 2.1 вдасться показати, що будь-яка матриця вигляду (2) (а отже й (1)) належать до G_4 , за індукцією.

2.3. Деякі підгрупи модулярної групи

Як вже було зауважено, при $n \rightarrow \infty$ серія прикладів з попереднього розділу дає групу G_∞ , що має фундаментальну область  і породжується перетворенням $z \mapsto z + 2$ і $z \mapsto -\frac{1}{z}$. Оскільки їх матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ мають цілі компоненти, це підгрупа модулярної групи G . Ми можемо описати її елементи аналогічно до твердження 2.1:

Твердження 2.2. Група G_∞ складається з рухів, що відповідають матрицям вигляду

$$\begin{pmatrix} 4a + 1 & 2b \\ 2c & 4d + 1 \end{pmatrix}, \text{ де } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ такі, що } (4a + 1)(4d + 1) - 4bc = 1, \text{ або}$$

$$\begin{pmatrix} 2a & 4b + 1 \\ 4c + 3 & 2d \end{pmatrix}, \text{ де } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ такі, що } 4ad - (4b + 1)(4c + 3) = 1.$$

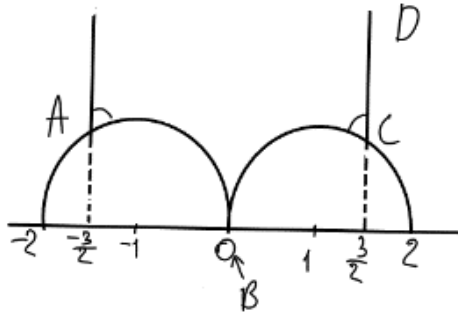
Доведення. Дійсно, матриця $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ має перший з цих двох виглядів, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (що задає теж перетворення, що й $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$) – другий, і при множенні таких матриць отримуємо матриці того ж вигляду:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 4a + 1 & 2b \\ 2c & 4d + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4e + 1 & 2f \\ 2g & 4h + 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 4(4ae + a + e + bg) & 2((4a + 1)f + b(4h + 1)) \\ 2(c(4e + 1) + (4d + 1)g) & 4(cf + d + h + 4dh) + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

і аналогічно для трьох інших можливостей. Доведено.

Зауважимо, що ізометрія, яка відповідає матриці вигляду $\begin{pmatrix} 2a & 4b + 3 \\ 4c + 1 & 2d \end{pmatrix}$, відповідає й протилежній, що має вигляд $\begin{pmatrix} -2a & -4(b + 1) + 1 \\ -4(c + 1) + 3 & -2d \end{pmatrix}$.

Також можна розглянути 4-кутник ABCD вигляду з кутами $0, \frac{\pi}{3}$, сторони якого спаровуються відображеннями:



- $AD \mapsto CD: z \mapsto z + 3$ з матрицею $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- $AB \mapsto CB$ – композиція симетрій відносно гіперболічної прямої AB (кола радіуса 1 з центром у -1) та уявної вісі $z \mapsto \overline{\left(\frac{1}{\bar{z}+1} - 1\right)} = \frac{z}{z+1}$ з матрицею $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

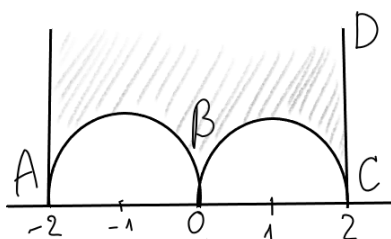
Тому за теоремою Пуанкаре ABCD є фундаментальною областю групи H, що породжена цими перетвореннями.

Твердження 2.3. Група H складається з рухів, що відповідають матрицям вигляду $\begin{pmatrix} 3a+1 & 3b \\ c & 3d+1 \end{pmatrix}$, де $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ такі, що $(3a+1)(3d+1) - 3bc = 1$.

Доведення. Знову ж це випливає з того, що $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ мають такий вигляд, і добуток двох матриць такого вигляду має такий же вигляд:

$$\begin{pmatrix} 3a+1 & 3b \\ c & 3d+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e+1 & 3f \\ g & 3h+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(3ae+a+e+bg)+1 & 3((3a+1)f+b(3h+1)) \\ c(3e+1)+(3d+1)g & 3(cf+d+h+3dh)+1 \end{pmatrix}. \text{ Доведено.}$$

Нарешті, ще роздвинувши вертикальні сторони, отримаємо «чотирикутник» ABCD, усі кути якого нульові. Як у попередньому прикладі, це фундаментальна область групи K, що породжена рухами $z \mapsto z + 4$ з матрицею $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $z \mapsto \frac{z}{z+1}$ з



матрицею $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Твердження 2.4. Група K складається з рухів, що відповідають матрицям вигляду $\begin{pmatrix} 4a+1 & 4b \\ c & 4d+1 \end{pmatrix}$, де $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ такі, що $(4a+1)(4d+1) - 4bc = 1$.

Доводиться аналогічно до попереднього твердження з заміною 3 на 4.

Можна припустити, що матриці з тверджень 2.2-2.4 дають точні описи цих підгруп модулярної групи.

Висновки

У роботі були отримані наступні результати:

- Доведено відому теорему про те, що рух гіперболічної площини належить до модулярної групи тоді й тільки тоді, коли заддається матрицею з цілими компонентами.
- Побудовано серію дискретних груп рухів гіперболічної площини за аналогією з модулярною групою та даний опис матриць, що задають рухи в одній з них.
- Побудовано серію прикладів підгруп модулярної групи та даний опис матриць, що задають рухи з них.

Також зроблене припущення, що усі описані матриці задають рухи з відповідних груп, як це відбувається у випадку модулярної групи.

Список використаних джерел

1. Thurston, W.P. Three-Dimensional Geometry and Topology. Vol. 1. Edited by S. Levy. Princeton University Press, 1997 – 328 p.
2. Н.П. Гиря, О.О. Заварзіна, Є.О. Каролінський, Л.Ю. Полякова. Методичний посібник до вивчення тем “Метод математичної індукції”, “Основи комбінаторики”, “Основи теорії чисел”. Харків: ХНУ ім. В.Н. Каразіна, 2023. – 50 с.
3. Milnor, J.W. Hyperbolic geometry: The first 150 years. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), Vol. 6 (1982), No. 1, pp. 9–24.