

✓ 02-11-50  
305528

K-14038

П305528

1/241

# ВЕСТНИК

ХАРЬКОВСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

№ 241

МЕХАНИКА И УПРАВЛЕНИЕ  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1983

80 к.



Вестн. Харьк. ун-та, 1983, № 241, 1—88.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

**ВЕСТНИК**  
**ХАРЬКОВСКОГО**  
**УНИВЕРСИТЕТА**

№ 241

---

**МЕХАНИКА И УПРАВЛЕНИЕ**  
**ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

---

Основан в 1965 г.

ХАРЬКОВ  
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ  
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ  
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ  
«ВИЩА ШКОЛА»

1983

Механика и управление динамических систем. — Вестн. Харьк. ун-та, № 241.— Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1983.— 88 с.

В вестнике опубликованы статьи по математической теории оптимальных процессов, теории жидкостей, дифференциальным уравнениям, а также по некоторым вопросам прикладной математики и алгебры.

Нормативные материалы приведены по состоянию на 1 января 1983 г.

Для научных работников и специалистов.

*Редакционная коллегия:* И. Е. Тарапов (отв. ред.), В. И. Коробов (зам. отв. ред.), А. П. Маринич (отв. секр.), В. В. Баранов, Ю. И. Любич, В. А. Марченко.

Печатается по решению Ученого совета механико-математического факультета Харьковского университета (протокол № 5 от 10 октября 1982 года)

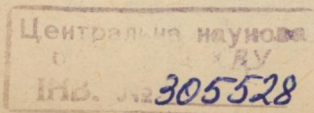
Ответственный за выпуск *А. П. Маринич*

*Адрес редакционной коллегии:* 310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, госуниверситет, механико-математический факультет, тел. 40-14-40

Редакция естественнонаучной литературы

В 1704020000—069  
М226(04)—83

© Харьковский  
государственный  
университет, 1983



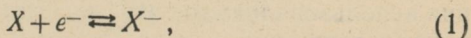
А. И. ЖАКИН

### ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКА МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

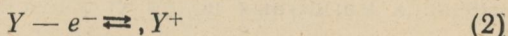
Экспериментальные исследования показывают, что растворение галогенов в неполярном жидком диэлектрике (например, молекулярного иода  $I_2$ ) либо добавление в него полярных веществ (хлорбензола, бромбензола и т. д.) приводит к ряду эффектов, которые не наблюдаются в однокомпонентной жидкости. Именно увеличивается проводимость, интенсифицируются электроконвективные (ЭК) течения, появляется резко выраженная зависимость ЭК-течений от полярности электродов [1, 2]. Объяснение этих эффектов можно получить на основе окислительно-восстановительной модели проводимости [2].

В данной работе рассматривается вывод системы уравнений электрогидродинамики (ЭГД) многокомпонентной поляризующейся жидкости, компоненты которой могут реагировать друг с другом в объеме жидкости и на поверхностях электродов с участием электронных переходов. Формулируются граничные условия для полученной системы уравнений. Обсуждается зависимость констант скоростей рекомбинации и диссоциации ионных пар от напряженности электрического поля.

1. Основные предположения. Будем считать, что нейтральная однокомпонентная диэлектрическая жидкость содержит две примесные компоненты, которые могут на электродах вступать в реакции вида



на аноде



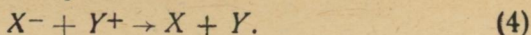
где  $X$ ,  $Y$  — соответственно молекулы примесных компонент;  $e^-$  — электрон.

В качестве примера реакций (1), (2) укажем на реакции восстановления бензохирина и окисления гидрохинона в аprotонной среде [3, с. 53].

Образовавшиеся на электродах ионы  $X^-$ ,  $Y^+$  в объеме жидкости могут нейтрализоваться либо за счет образования ионных пар

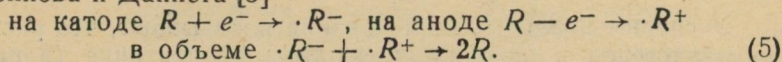


либо за счет электронного перехода



Последний случай особенно важен, так как в процессе реакции (4) происходит регенерация примесных компонент  $X$ ,  $Y$ . Благодаря такой регенерации удается добиться, например, долговечности жидкокристаллических индикаторов [3].

Отметим, что когда  $X$ ,  $Y$  являются радикалами  $R$  какой-либо молекулы, то реакции вида (1), (2), (4) образуют редокс-систему Воинова и Даннета [3]



Далее сделаем следующие предположения.

1. Существуют только электрические поля (магнитное поле индуцируется только токами, текущими в среде).

2. Выполнены условия электрогидродинамического (ЭГД) приближения, которые можно записать как

$$\begin{aligned} &\text{при } R_E \equiv v_0/bE_0 \ll 1: \delta_1 = 4\pi\omega q_0 bL^2/c^2 \ll 1, \quad (6) \\ &\delta_2 = \mu\epsilon\omega^2 L^2/c^2 \ll 1, \quad \delta_3 = 4\pi\mu q_0^2 b^2 L^2/\epsilon c^2 \ll 1, \quad \delta_4 = 4\pi\mu q_0 v_0 bL/c^2 \ll 1; \\ &\text{при } R_E \gg 1: \delta_1 R_E \ll 1, \quad \delta_2 \ll 1, \quad \delta_3 R_E \ll 1, \quad \delta_4 R_E \ll 1. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие характерные величины:  $q_0$ ,  $b$  — объемная плотность и подвижность ионов;  $v_0$ ,  $L$  — скорость и длина;  $\epsilon$ ,  $\mu$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости;  $\omega$ ,  $E_0$  — частота и напряженность электрического поля;  $c$  — скорость света.

Малость параметров  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  обеспечивает квазистационарность электрического поля  $\text{rot } \vec{E} = 0$  (7).

Из условия  $\delta_3 \ll 1$  вытекает, что согласно выражению для пондеромоторной силы основной вклад будет осуществлять кулоновские и поляризационные силы. При получении этого условия использовалось то, что магнитное поле индуцируется только токами, текущими в среде. Отметим, что при наложении сильных внешних магнитных полей кулоновская и поляризационная силы могут иметь один и тот же порядок  $|(\vec{M}\nabla) \vec{H}|/|q\vec{E}| \sim \frac{\mu - 1}{4\pi} \frac{H^2}{E^2} > 1$ , если  $\mu > 1,1$ ;  $H > 10 E$ .

Из  $\delta_4 \ll 1$  следует равенство напряженностей электрического поля в системе наблюдателя  $\vec{E}$  и в локальной системе координат  $\vec{E}^*$ . Это условие для обычных значений характерных величин  $\sigma \sim q_0 b \leq 10^{-10}$  См/см,  $L \sim 1$  см следует из дорелятивистского приближения  $v^2/c^2 \ll 1$ .

В заключение обсуждения этого пункта сделаем замечание общего характера. Нетрудно видеть, что основные постулаты

ЭГД приближения (т. е. система неравенств (5)), является следствием чрезвычайно низкой проводимости среды  $\sigma \sim q_0 b$  ( $\delta_2 \ll 1$  при обычных значениях  $\epsilon, \mu, L$  вплоть до  $\omega \approx 1$  МГц).

3. С учетом (6) тензор напряжения электрического поля  $T_{ik}$  и пондеромоторную силу  $f_E$  выбираем в виде

$$T_{ik} = -p' \delta_{ik} + \epsilon E_i E_k / 4\pi, \quad f_{Ei} = \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ik}, \quad (8)$$

где  $p'$  — изотропная часть тензора напряжений, подлежащая определению. В дальнейшем удобно отнести к  $p'$  также и механическое давление, т. е. считать  $p' = p + p_E$ , где  $p_E$  зависит только от электрического поля.

Определения (8) следуют из соображений, приведенных ниже. В локальной системе координат  $K^*$ , в которой рассматриваемая частица среды покоится, вид  $T_{ik}^*, \vec{f}_E$  известен [4]. Тогда, учитывая (6), приходим к (8). Таким образом, то, что соотношения (8) не зависят от скорости движения среды, является следствием ЭГД приближения.

4. Аналогичные рассуждения приводят к следующему определению вектора потока электромагнитной энергии:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}^*], \quad \vec{H}^* = \vec{H} - \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{D}], \quad (9)$$

который в ЭГД приближении зависит от скорости движения среды.

2. Система ЭГД уравнений. Итак, рассматриваем шестикомпонентную жидкость с плотностями компонент  $\rho_i$  ( $i=1, 2, \dots, 6$ ), где  $\rho_1$  — плотность растворителя;  $\rho_2, \rho_3$  — соответственно плотности примесных компонент  $X, Y$ ;  $\rho_4, \rho_5$  — ионов  $X^-, Y^+$ ;  $\rho_6$  — ионных пар  $X^-Y^+$ . Суммарная плотность жидкости  $\rho = \sum_{i=1}^6 \rho_i$ , концентрации компонент  $c_i = \rho_i / \rho$  ( $i=1, 2, \dots, 6$ ).

В диффузионном приближении уравнения движения жидкости с учетом (7) — (9) можно записать в виде [5]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \rho \frac{dc_i}{dt} = -\operatorname{div} \vec{j}_i + \Sigma_i; \quad (10)$$

$$\Sigma_i = \nu_{i1} \xi_1 + \nu_{i2} \xi_2 \quad (i=2, 3, \dots, 6);$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}, \quad \hat{P} \equiv p_{ik} = \tau_{ik} + T_{ik}; \quad (11)$$

$$\rho \frac{d}{dt} (u + v^2/2) = -\operatorname{div} (\vec{q} + \vec{S} - \hat{P} \cdot \vec{v}); \quad (12)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi (q_5 - q_4). \quad (13)$$

Здесь  $v_{ik}\xi_k$  — масса  $i$ -й компоненты, образовавшейся в единице объема в единицу времени в  $k$ -й реакции;  $k=1$  — прямая реакция (3);  $k=2$  — обратная реакция (3);  $v_{ik}=0$  ( $i=2, 3; k=1, 2$ );  $v_{i2}=-v_{i1}=m_i$  ( $i=4, 5$ );  $v_{61}=-v_{62}=m_6$ ;  $m_4(m_5)$  — масса молекулы  $X(Y)$ ;  $m_6=m_4+m_5$ ;  $\vec{v} = \sum_{i=1}^6 \rho_i \vec{v}_i / \rho$  — скорость центра масс жидкой частицы. В том случае, когда имеет место реакция (4),  $v_{i2}=0$  ( $i=2, \dots, 6$ );  $v_{61}=0$ ;  $v_{i1}=m_i$  ( $i=2, 3$ );  $v_{i1}=-m_i$  ( $i=4, 5$ );  $q_5(q_4)$  — объемная плотность зарядов  $Y^+(X^-)$ ;  $\vec{j}_i = \rho_i (\vec{v}_i - \vec{v})$  — «диффузионный» поток  $i$ -й компоненты;  $\tau_{ik}$  — тензор механических напряжений;  $u$  — внутренняя энергия на единицу массы среды, включающая энергию электромагнитного поля.

Уравнения (10), (11) выражают соответственно законы сохранения массы и изменения импульса. Для простоты выкладки считаем, что внешние массовые силы отсутствуют.

Уравнение (12) определяет закон изменения полной энергии, которая определяется как сумма внутренней и кинематической энергий  $e = u + v^2/2$ . Здесь  $\vec{q}, \vec{S}$  — векторы потоков тепловой и электромагнитной энергий;  $\hat{P} \cdot \vec{v} = \rho_{ik} v_k$  — вектор, определяющий приток энергии к частице жидкости за счет работы поверхностных сил.

Для получения уравнения баланса энтропии необходимо привлечь соотношение Гиббса, которое для данного случая можно записать в виде [5, 7]:

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{du}{dt} + p' \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} - \frac{\vec{E}}{4\pi\rho} \frac{d}{dt} \frac{\vec{D}}{\rho} - \sum_{i=2}^6 \zeta_i \frac{dc_i}{dt}. \quad (14)$$

Здесь  $s$  — энтропия на единицу массы;  $\zeta_i = \mu_i - \mu_1$ ;  $\mu_i$  ( $i=1, 2, \dots, 6$ ) — химический потенциал  $i$ -й компоненты.

Выражения для термодинамических потоков  $\vec{j}_i, \tau_{ik}, \vec{q}, \xi_i$  можно получить исходя из физических соображений и известных опытных данных. Однако представляет интерес получить эти выражения из формализма термодинамики необратимых процессов. В этом направлении имеются различные подходы [5, 6]. Например, в ранних работах [5] не учтено, что определение векторов потоков энергии и импульса электромагнитного поля необходимо определять в локальной системе координат  $K^*$ , где их вид известен [7, 8] (об этом см. подробнее в [7, 8]). Впервые такой подход получил развитие в работах И. Е. Тарапова [7] при исследовании изотропно поляризующихся и намагничивающихся сплошных сред.

Определив выражение для кинетической энергии из (11) и исключив ее из (12), получим уравнение баланса внутренней энергии.

С учетом этого уравнения и тождества [8]

$$\frac{1}{4\pi} \vec{D}(\vec{E}\nabla) \vec{v} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{div}[\vec{E}, \vec{H}^*] + \vec{j}^* \vec{E} + \frac{\rho}{4\pi} \vec{E} \frac{d}{dt} \frac{\vec{D}}{\rho}$$

из (14) получаем уравнение баланса энтропии

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\operatorname{div} \vec{q} + \tau_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \vec{j}^* \vec{E} - \rho \sum_{i=2}^6 \zeta_i \frac{dc_i}{dt}, \quad (15)$$

где  $\vec{j} = z_4 j_4 + z_5 j_5$  — полный дрейфовый ток;  $z_4(z_5)$  — заряд на единицу массы ионов  $X^-, Y^+$ , причем  $z_4 = q_4/\rho_4$ ,  $z_5 = q_5/\rho_5$ . Из (15) обычным приемом [5] получаем выражение для производства энтропии

$$R = -\frac{1}{T^2} \left( \vec{q} - \sum_{i=2}^6 \zeta_i \vec{j}_i \right) \nabla T - \frac{1}{T} \sum_{i=2}^6 \vec{j}_i (\nabla \zeta_i - z_i \vec{E}) + \frac{1}{T} v_{ik} \tau_{ik} + \frac{1}{T} \sum_{i=2}^6 \zeta_i A_i. \quad (16)$$

Здесь  $z_2 = z_3 = z_6 = 0$ ,  $A_i = \sum_{k=2}^6 v_{ki} \zeta_k$ .

Отметим, что (16) по виду совпадает с известными выражениями [5]. Отличие заключается в том, что в рассматриваемом случае химические потенциалы являются функциями поля. Действительно, переходя в (14) к свободной энергии  $F = u - Ts - \frac{1}{4\pi\rho} \vec{E}\vec{D}$ , получим

$$dF = -s dT - p' d \frac{1}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} \vec{D} d\vec{E} + \sum_{i=2}^6 \zeta_i dc_i, \quad (17)$$

откуда

$$F = F_0(\rho, T, c_2, \dots, c_6) - \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^E \epsilon E dE. \quad (18)$$

Из (17) с учетом (18) получаем уравнения состояний [7]:

$$s = s_0 + s_E, \quad s_E = \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^E \frac{\partial \epsilon}{\partial T} E dE; \quad (19)$$

$$p' = p + p_E, \quad p_E = -\frac{\rho^2}{4\pi} \int_0^E \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\epsilon E}{\rho} \right) dE; \quad (20)$$

$$\zeta_i = \zeta_{0i} + \zeta_{Ei}, \quad \zeta_{Ei} = -\frac{1}{4\pi\rho} \int_0^E \frac{\partial \epsilon}{\partial c_i} E dE. \quad (21)$$

В этих выражениях  $s_0$ ,  $p$ ,  $\zeta_{0i}$  ( $i=2, 3, \dots, 6$ ) являются функциями от  $\rho$ ,  $T$ ,  $c_2, c_3, \dots, c_6$  и не зависят от электрического поля. Разрешая зависимость  $p = p(\rho, T, c_2, \dots, c_6)$  относительно  $\rho$ , получим  $\rho = \rho(p, T, c_2, \dots, c_6)$ . Поэтому можно считать, что  $s_0$ ,  $\zeta_{0i}$  зависят от  $p$ ,  $T$ ,  $c_2, \dots, c_6$ . Учитывая это замечание и используя то, что линейная форма (17) является полным дифференциалом  $F$ , из (19), (21) находим

$$\frac{ds}{dt} = \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial s}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{ds_E}{dt} - \sum_{i=2}^6 \frac{\partial \zeta_i}{\partial T} \frac{dc_i}{dt}; \quad (22)$$

$$\frac{\partial s}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_E}{\partial T} \right) - \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_E}{\partial p} \right);$$

$$\nabla \zeta_i = \frac{\partial \zeta_{0i}}{\partial T} \nabla T + \sum_{k=2}^6 \frac{\partial \zeta_{0i}}{\partial c_k} \nabla c_k + \frac{\partial \zeta_{0i}}{\partial p} \nabla p + \nabla \zeta_{Ei}, \quad (23)$$

где  $c_p$  — теплоемкость при постоянном давлении, электрическом поле и концентрации компонент  $c_i$  ( $i=2, 3, \dots, 6$ ).

Если предположить линейную связь между термодинамическими силами и потоками, то на основании теоремы Кюри из (16) получим соотношения, замыкающие систему уравнений (10)–(13):

$$\vec{q} - \sum \zeta_{ij} \vec{j}_i = -l_{11} \frac{\nabla T}{T} + \sum_{i=2}^6 \frac{l_{1i}}{T} (\nabla \zeta_i - z_i \vec{E}); \quad (24)$$

$$\vec{j}_i = l_{i1} \frac{\nabla T}{T} - \frac{l_{i2}}{T} (\nabla \zeta_i - z_i \vec{E}); \quad (25)$$

$$\tau_{ij} = 2\eta \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right] + \left( \zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}; \quad (26)$$

$$\xi_i = \sum_{j=1}^2 l_{3ij} A_j. \quad (27)$$

По принципу симметрии Онзагера [5] имеем  $l_{ij} = l_{ji}$  ( $i, j = 1, 2, 3, \dots, 6$ ),  $l_{3ji} = l_{3ji}$  ( $i, j = 1, 2$ ). В работе [5] подчеркивается, что линейные соотношения (24) — (26) хорошо выполняются в широких пределах изменения термодинамических сил, тогда как (27) — лишь на заключительных стадиях химических реакций, когда скорости реакций  $\xi_i$  малы. Отметим, что в общем случае коэффициенты  $l_{11}$ ,  $l_{12}$ ,  $l_{13}$ ,  $l_{3ij}$  являются функциями от плотности жидкости, температуры, концентраций компонент и напряженности поля.

Остановимся подробнее на выражении для «диффузионного» потока, так как оно представляет собой обобщенный закон ионной проводимости. Подставляя (23) в (25) и используя стандартные определения [5], получим

$$\vec{j}_i = -\rho D_i \left( \sum_{j=2}^6 \delta_{ij} \nabla c_j + \frac{k_{Ti}}{T} \nabla T \right) + \vec{i}_i; \quad (28)$$

$$\vec{i}_i = l_{i2} \left( z_i \vec{E} - \frac{\partial \zeta_{0i}}{\partial p} \nabla p - \nabla \zeta_{Ei} \right); \quad (29)$$

$$\frac{\partial \zeta_{0i}}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial c_i} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_E}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial p_E}{\partial c_i} + \zeta_{Ei} \right), \quad (30)$$

где  $D_i$  — коэффициент диффузии  $i$ -й компоненты;  $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$ ,

$$\delta_{ij} = \frac{\partial \zeta_{0i}}{\partial c_j} / \frac{\partial \zeta_{0i}}{\partial c_i} \text{ при } i \neq j; k_{Ti} = \left( -\frac{l_{11}}{T} + \frac{l_{12}}{T} \frac{\partial \zeta_{0i}}{\partial T} \right) / l_{i2} \frac{\partial \zeta_{0i}}{\partial c_i} - \text{тер-}$$

модиффузионное отношение. Если считать справедливыми линейные соотношения (28), (29), то в предельном случае, когда отсутствует градиент давления и  $\varepsilon = \text{const}$ , из (29) имеем  $\vec{i}_i = l_{i2} z_i \vec{E}$ , т. е.  $\vec{i}_i$  представляет собой миграционный поток массы  $i$ -й ионной компоненты под действием кулоновской силы, действующей на заряженный ион. Учитывая соотношение  $z_i = e_i / m_i$  ( $e_i$  — заряд иона), получаем  $l_{i2} = \rho_i m_i b_i$  (31), где  $b_i$  — подвижность иона.

Таким образом, соотношения (28) — (31) представляют собой обобщение ионного закона проводимости в предположении справедливости линейных законов (24), (25). Отсюда возникает вопрос об определении условий, при которых имеют место (28) — (31). Для этого вычислим поток  $\vec{i}_i$ , рассмотрев микроскопическое движение иона. Имеем  $\vec{i}_i = \rho_i \vec{w}_i$ ,  $\vec{w}_i = b_i \vec{F}_i$ , где  $\vec{F}_i$  — главный вектор всех сил, действующих на ион. Для вычисления  $\vec{F}_i$  будем исходить из наиболее упрощенной модели молекулы,

предложенной в ранних работах Дэбая и Онзагера [9]. Как известно, эта модель с качественной точки зрения хорошо согласуется с опытными данными. Итак, считаем ион сферической частицей радиуса  $r_0$ , в центре которой расположены точечный диполь со средним дипольным моментом  $\vec{p}$  и точечный заряд  $e$ . Тогда  $\vec{F} = \vec{f}_a + (\vec{p} \nabla) (\vec{E} + \vec{E}_R) + e(\vec{E} + \vec{E}_R)$ , где  $\vec{f}_a = v^0 (\rho^0 - \rho_1^0) \vec{g}$  — сила Архимеда;  $v^0 = \frac{4}{3} \pi r_0^3$  — объем частицы;  $\rho^0, \rho_1^0$  — плотности вещества частицы и жидкости;  $\vec{E}$  — «внешнее» поле;  $\vec{E}_R$  — «реактивное» поле. Внешнее поле  $\vec{E}$  совпадает с осредненным полем, фигурирующим в (29). Реактивное поле  $\vec{E}_R$  — это поле, создаваемое в центре иона за счет поляризации молекул, окружающих ион.

Для вычисления  $\vec{E}_R$  воспользуемся следующим приемом. Будем считать размер иона  $r_0$  столь малым, что на некотором расстоянии от него  $r_a \gg r_0$  напряженность поля определяется средним полем  $\vec{E}$  (т. е. реактивное поле  $\vec{E}_R$  достаточно быстро затухает). Далее, на расстояниях порядка  $r_a$  среднее поле почти постоянно  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$ ,  $|\vec{E}_0| \gg |\vec{E}_1|$ ,  $\vec{E}_0 = \text{const}$ . Это предположение будет выполняться, если среднее расстояние между ионами  $r_c$  значительно больше масштаба  $r_a : r_c \gg r_a$ , а масштаб  $r_a$  столь мал, что  $|\vec{E}| \gg \left| \frac{\partial \vec{E}}{\partial r} r_a \right|$ . Очевидно,  $\vec{E}_0$  можно отождествить с напряженностью среднего поля в центре иона.

Краевая задача, определяющая распределение поля вблизи иона, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_1 &= 0 \quad (r \geq r_0), \quad -\Delta \varphi_1 \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \vec{E}_0 + \vec{E}_1; \\ \Delta \varphi_2 &= 0 \quad (r \leq r_0), \quad \varphi_2 \Big|_{r \rightarrow 0} \rightarrow \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{e}{r}; \\ r = r_0; \quad \varphi_1 &= \varphi_2, \quad \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь  $\epsilon_1$  — диэлектрическая проницаемость жидкости;  $r$  — радиальная координата сферической системы координат, начало которой выбрано в центре иона.

Решение задачи (32) представим в виде  $\varphi_i = \varphi_{0i} + \varphi_{1i}$  ( $i = 1, 2$ ), где  $\varphi_{0i}$  есть решение (32) при  $\vec{E}_1 = 0$ , а  $\varphi_{1i}$  при  $\vec{E}_0 =$

$$= 0, \vec{p} = 0, e = 0. \text{ Для } \varphi_{01} \text{ получаем } \varphi_{01} = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} \left(1 + \frac{a_1}{r}\right) + \frac{e}{\varepsilon_1 r} + \frac{e}{r_0} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1}\right); \varphi_{02} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{e}{r} - \vec{E}_0 \cdot \vec{r} a_2; a_1 = \frac{r_0^3}{2\varepsilon_1 + 1} \times \left(1 + \varepsilon_1 - \frac{3p}{E_0 r_0^3}\right); a_2 = 1 + \frac{\varepsilon_1 + 1}{2\varepsilon_1 + 1} \left(1 + \frac{2p}{E_0 r_0^3}\right).$$

Здесь было учтено, что средний дипольный момент иона  $\vec{p}$  направлен вдоль поля, поэтому  $\vec{p} = \frac{p}{E_0} \vec{E}_0$ ,  $p = |\vec{p}|$ ,  $E_0 = |\vec{E}_0|$ . Для напряженности поля получим следующее выражение:

$$\vec{E}_{02} = -\nabla\varphi_{02} = -\nabla \left( \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{e}{r^3} \vec{r} + \vec{E}_0 + \vec{E}_{R_0} \right), \vec{E}_{R_0} = \frac{\varepsilon_1 - 1}{2\varepsilon_1 + 1} \times \left( \vec{E}_0 + \frac{2p}{r_0^3} \right),$$

где  $\vec{E}_{R_0}$  — реактивное поле, отвечающее внешнему полю  $\vec{E}_0$ . После замены переменных  $\varphi_{1i} = \psi_1 + (\varepsilon_1 - 1)\psi_{1i}$ , где  $\psi_1$  — потенциал поля  $\vec{E}_1$ , для  $\psi_{11}$ ,  $\psi_{12}$  получим

$$\Delta\psi_{11} = 0 \quad (r \geq r_0), \quad \Delta\psi_{11} \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0; \quad \Delta\psi_{12} = 0 \quad (r \leq r_0), \quad |\nabla\psi_{12}| < \infty;$$

$$r = r_0; \quad \psi_{11} = \psi_{12}, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial\psi_{11}}{\partial r} - \frac{\partial\psi_{12}}{\partial r} = -\frac{\partial\psi_1}{\partial r}.$$

Отметим, что эту задачу можно интерпретировать как задачу о нахождении поля, вызываемого поверхностным зарядом, распределенным на сфере радиуса  $r_0$  с плотностью  $q_s = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial\psi_1}{\partial r}$

Таким образом, реактивное поле равно

$$\vec{E}_R = (\varepsilon_1 - 1) \left( \frac{\vec{E}_0 + 2\vec{p}/r_0^3}{2\varepsilon_1 + 1} - \nabla\psi_{1s} \right). \quad (33)$$

Окончательно, учитывая  $|\vec{E}_1| \ll E_0$ , миграционный поток записывается как

$$\vec{i}_i = \rho_i m_i b_i \left[ \left(1 - \frac{\rho_i^0}{\rho_i^0}\right) \vec{g} + z_i \left(1 + \frac{\varepsilon_1 - 1}{2\varepsilon_1 + 1} \left(1 + \frac{2\rho_i}{E_0 r_{0i}^3}\right)\right) \vec{E} + \frac{1}{m_i} \times \right. \\ \left. \times (\vec{p}_i \nabla) (\vec{E} + \vec{E}_R) \right], \quad (34)$$

где  $\vec{E}_R$  определяется по (33).

Для неподвижной жидкости соотношения (29) с учетом (30), (31) и уравнения гидростатики  $\nabla p = (\vec{P}\nabla)\vec{E} + q\vec{E} + \rho\vec{g}$  можно записать в виде

$$\vec{i}_i = \rho_i m_i b_i \left[ \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial c_i} (\rho\vec{g} + (\vec{P}\nabla)\vec{E} + q\vec{E}) + z_i \vec{E} - \nabla_{E_i}^c \right]. \quad (35)$$

Таким образом, при сделанных выше предположениях рамки справедливости линейной теории необратимых процессов при выводе обобщенного закона ионной проводимости определяются условиями, при которых совпадают (34), (35). Покажем, что эти выражения совпадут при следующих условиях:

1) раствор достаточно разбавлен  $\rho = \rho_0 (1 + \sum_{i=2}^6 \gamma_i c_i)$ ,  $c_i \ll 1$ ;  $\vec{P} = \sum_{i=1}^6 n_i \vec{p}_i$ ; 2)  $T = \text{const}$ ; 3)  $\epsilon - 1 \ll 1$ ,  $q = 0$ . Здесь  $p_1$  — дипольный момент молекулы жидкости,  $\vec{p}_i$  — средний дипольный момент молекул  $i$ -й компоненты ( $i = 2, 3, \dots, 6$ ), связанной с напряженностью поля  $\vec{E}_s = \vec{E} + \vec{E}_R$  соотношением  $\vec{p}_i = \alpha_i \vec{E}_s$ , где  $\alpha_i$  — поляризуемость молекулы. Например, в случае ориентационной поляризуемости жестких диполей, обладающих в отсутствие поля  $\vec{E}$  моментом  $\vec{p}_{0i}$  при  $p_{0i} E / kT \ll 1$ , имеем [9]  $\alpha_i = p_{0i}^2 / 3kT$ ,  $k$  — постоянная Больцмана. Учитывая  $\vec{P} = (\epsilon - 1)\vec{E} / 4\pi$ , получаем  $\epsilon = \epsilon_1 (1 + \sum_{i=2}^6 \beta_i c_i)$ , где  $\beta_i = 12\pi \alpha_i \rho_0 / m_i (2\epsilon_1 + 1)$ . Таким образом, в случае разбавленных растворов диэлектрическая проницаемость является линейной функцией от концентраций компонент.

Отсюда следует  $\vec{p}_i = \frac{m_i}{\rho_0} \frac{\partial \vec{P}}{\partial c_i} = \frac{m_i}{4\pi \rho_0} \frac{\partial \epsilon}{\partial c_i} \vec{E}$ , с учетом которого и на основании предположений 1—4 вытекает, что (34), (35) совпадут, если положить  $\gamma_i = 1 - \rho_i^0 / \rho_0^0$ .

В общем случае (34), (35) не совпадают, поэтому линейные соотношения (24), (25) для поляризующейся многокомпонентной жидкости, находящейся в электрическом поле, не выполняются.

В общем случае обобщенный закон ионной проводимости имеет вид

$$\vec{j}_i = -\rho D_i \left( \sum_{j=2}^6 \delta_{ij} \nabla c_j + \frac{k_{Tj}}{T} \nabla T + \frac{k_{pj}}{\rho} \nabla p \right) + \vec{i}_i, \quad (36)$$

где  $D_i k_{pj}$  — коэффициент барродиффузии, а  $\vec{i}_i$  — определяется

по (34). В рамках сделанных выше предположений 1—4 вектора потока тепла и массы записываются как

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T + \sum_{i=2}^6 \left( \zeta_i + k_{Ti} \frac{\partial \zeta_i}{\partial c_i} - T \frac{\partial \zeta_i}{\partial T} \right) \vec{j}_i, \quad (37)$$

$$\vec{j}_i = -\rho D_i \left( \sum_{j=2}^6 \delta_{ij} \nabla c_j + \frac{k_{Ti}}{T} \nabla T \right) + \rho_i (b_{ei} \vec{E} + b_{pi} \nabla E^2 + \gamma_i m_i b_i \vec{y}),$$

где  $b_{pi} = \alpha_i b_i / 2$ ;  $b_{ei} = e_i b_i$  — коэффициенты подвижностей полярных примесных молекул;  $e_i$  — заряд иона. Отметим, что при таком определении подвижностей коэффициент  $b_{pi}$  положителен, а знак коэффициента  $b_{ei}$  определяется знаком заряда иона  $e_i$ . Подчеркнем, что в выражении (37) член, пропорциональный градиенту от квадрата напряженности поля, вычислен в предположении  $\rho_{0i} E / kT \ll 1$ . При  $\rho_{0i} E / kT \gg 1$  вместо этого члена будет стоять выражение  $b_{pi} \nabla E$ , где  $b_{pi} = \rho_{0i} b_i$ .

Обсудим теперь вопрос об источниках производства вещества  $\Sigma_i$ . Рассмотрим вначале случай, когда имеют место реакции (3). Скорость реакций, как известно [10], пропорциональна произведению объемных концентраций реагирующих компонент в первой степени, если реакции одностадийные. Отсюда  $\xi_1 = k_1 n_4 n_5$ ,  $\xi_2 = k_2 n_6$  (38), где  $k_1$  ( $k_2$ ) — константы скоростей прямой (обратной) реакции (3).

Для реакции (4) имеем  $\xi_1 = k_1 n_4 n_5$ ,  $\xi_2 = 0$  (39). В соотношениях (38), (39)  $n_i = \rho_i / m_i$  ( $i=4, 5, 6$ ) — частичные концентрации.

Таким образом, уравнения (10), (11), (13), (15) совместно с соотношениями (8), (19), (20), (22), (26), (36)—(39) составляют систему уравнений электрогидродинамики многокомпонентной диэлектрической жидкости.

**3. О зависимости коэффициентов переноса от напряженности электрического поля.** В работе [11] было высказано предположение, что константа скорости реакций (3), (4) (коэффициент рекомбинации) не зависит от напряженности поля и определяется формулой Ланжевена:  $k_1 = 4\pi e (b_1 + b_2)$  (40), где  $e$  — заряд протона;  $b_1$  ( $b_2$ ) — подвижность положительного (отрицательного) иона. В [12] на основании того, что относительная скорость движения ионов линейно зависит от напряженности поля  $E$ , принималась линейная зависимость  $k_1$  от  $E$ .

Эти два предположения противоречат друг другу, поэтому представляет интерес вычислить зависимость  $k_1 = k_1(E)$ .

Для вычисления  $k_1(E)$  будем предполагать, что основное время рекомбинации ионов идет на их сближение (вероятность рекомбинации при их столкновении равна единице). Коэффициент рекомбинации определяется как  $k_1 = \sigma_f u$ , где  $\sigma_f$  — эффективное сечение столкновения ионов,  $u$  — их относительная

скорость на бесконечности [13, с. 35]. Вычислим эффективное сечение столкновения ионов. Для этого рассмотрим задачу о движении отрицательного иона во внешнем поле и поле положительного иона. При этом предполагаем малой плотность заря-

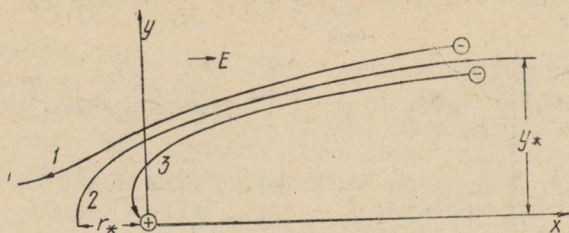


Рис. 1. Схема столкновения ионов.

1(3) — инфинитные (финитные) траектории, 2 — граница между финитными и инфинитными траекториями

дов, так что влиянием поля других ионов на процесс парного столкновения можно пренебречь. Это условие выражается как  $e/r_c \ll E$ , где  $r_c = n^{-1/3}$  — среднее расстояние между ними,  $n$  — их плотность. Оценивая  $n$  через проводимость  $n \sim \sigma/2eb$ , получаем  $e(\sigma/2eb)^{1/3} \ll E$ . Для типичных значений  $\sigma \leq 10^{-12}$  См/см,  $b = 10^{-4}$  см<sup>2</sup> в секунду,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, получаем  $e/r_c \ll 10^{-3}$  В/см, тогда как обычные значения напряженности полей в электрогидродинамике имеют порядки кВ/см.

В системе координат,двигающейся поступательно вместе с положительным ионом, уравнение движения отрицательного иона имеет вид (рис. 1)

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = -\gamma \vec{E} - a \vec{r}/r^3, \quad a = \frac{e}{\epsilon_1} z_1 z_2 (b_1 + b_2), \quad \gamma = \frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + 1} \times (z_1 b_1 + z_2 b_2), \quad (41)$$

где  $v$  — относительная скорость;  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ,  $r_1$  ( $r_2$ ) — радиус-вектор положительного (отрицательного) иона;  $z_1, z_2$  — их зарядовые числа. В (41) не учтено тепловое движение ионов, т. е. считается, что электростатического взаимодействия значительно больше теплового.

Из (41) имеем

$$r \dot{r} = -ux - a/r \quad (42); \quad \dot{r} = \mp \sqrt{u^2 + a^2/r^4 - h/r^2} \quad (43)$$

где  $u = \gamma E$ ,  $E = |\vec{E}|$ ,  $h = u^2 y_\infty - 2au$ ;  $x$  — координата оси абсцисс, направленной из начала вектора  $\vec{r}$  вдоль  $\vec{E}$ ;  $y_\infty$  — «прицельный параметр», определяемый как расстояние от оси  $x$  до положения отрицательного иона на бесконечности.

Из (42) следует, что при  $x > 0$  будет  $\dot{r} < 0$ , т. е. движение происходит к началу системы координат. При  $x < 0$  возможно

$r > 0$ , что означает движение от начала. Найдем значение  $y_\infty = y_*$  такое, что при  $y_\infty < y_*$  все траектории будут заканчиваться в начале координат, а при  $y_\infty > y_*$  — уходить на бесконечность (рис. 1).

Тогда эффективное сечение будет выражаться, как  $\sigma_f = \pi y_*^2$ . Для вычисления  $y_*$  заметим, что если  $r$  меняет знак, то траектории заканчиваются на бесконечности (инфинитные траектории), при  $r < 0$  — траектории заканчиваются в начале координат. Граница семейства инфинитных траекторий по координате  $y_\infty$  находится из условия  $r = 0$ , что с учетом (43) позволяет найти значение  $r = r_*$ , где  $r$  меняет знак:  $r_*^2 = (h + \sqrt{h^2 - 4a^2u^2})/2u^2$ . Отсюда видно, что при  $h < 2au$   $r_*$  не существует, т. е. все траектории заканчиваются вначале, при  $h \geq 2au$  уходят на бесконечность. Минимальное  $y_\infty = y_*$ , при котором траектории еще инфинитные, определяются из условия  $h = 2au$ , что дает  $y_* = 2\sqrt{a/u} = 2\sqrt{a/\gamma E}$  (44)

Используя (44), находим коэффициент рекомбинации:  $k_1 = \sigma_f u = \pi y_*^2 u = 4\pi e z_1 z_2 (b_1 + b_2) / \epsilon_1$  (45).

Отсюда видно, что коэффициент рекомбинации не зависит от напряженности поля. Формула (45) совпадает с формулой Ланжевена (40), если среда не поляризуется  $\epsilon_1 = 1$ , а зарядовые числа ионов  $z_1 = z_2 = 1$  (ионы одновалентны).

Обсудим рамки применимости (45). Во-первых, рассматривая столкновение ионов из бесконечного расстояния, тем самым предполагаем, что размер ионов  $r_0$  значительно меньше среднего расстояния между ними  $r_0 \ll n^{-1/3}$ . Далее, рассмотрение ионов как точечных объектов предполагает, что  $r_0$  значительно меньше характерных размеров задачи столкновения:  $r_0 \ll y_*$ . Проверим выполнение этих условий для жидких диэлектриков, считая  $r_0 \leq 10 \text{ \AA}$ . Обычно проводимость  $\sigma \leq 10^{-12} \text{ См/см}$ , подвижность  $b \approx 10^{-4} \text{ см}^2/\text{с}$ , поэтому  $n \approx \sigma/2eb \leq 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $n^{-1/3} \geq 10^{-4} \text{ см} = 10^4 \text{ \AA}$ . Предполагая ионы одновалентными  $z_1 = z_2 = 1$ , жидкость неполярной  $\epsilon = 2$ ;  $E \leq 100 \text{ кВ/см}$ , из (44) получим  $y_* \approx 2(e/\epsilon_1 E)^{1/2} \geq 200 \text{ \AA}$ . Отсюда  $r_0 \leq 10 \text{ \AA} \ll (200 \text{ \AA} \leq y_*, 10^4 \text{ \AA} \leq n^{-1/3})$ , т. е. для типичных значений параметров условия применимости (45) выполняются. В области весьма сильных полей  $E \geq 1 \text{ МВ/см}$  размер ионов  $r_0$  может иметь порядок  $y_*$ . В этом случае  $\sigma_f$  не зависит от напряженности поля, поэтому коэффициент рекомбинации  $k_1$  может быть линеен по напряженности поля  $k_1 = \sqrt{\gamma E} (\sigma_f = \text{const})$  (46).

Однако нужно иметь в виду, что для жидких диэлектриков технической степени очистки ( $\sigma \leq 10^{-14} \text{ См/см}$ ) эта область напряженностей является запробойной. Таким образом, вопросом, когда можно применять формулы (45), (46), необходимо

решать в конкретном случае, учитывая размеры ионов, напряженность поля и полярность жидкости.

В заключение сделаем следующие замечания. При получении (45), (46) не учитывалось тепловое движение ионов. Учет его приводит к отличной от нуля вероятности распада ионной пары. Действительно, если не учитывать тепловое перемещение ионов, то из соотношения  $r^2 = (h + \sqrt{h^2 - 4a^2u^2})/2u^2$  следует, что при попадании иона в окрестность сферы радиуса  $y_*/2$  он обязательно будет двигаться к центру. Однако благодаря тепловому движению появляется вероятность того, что ион, находящийся внутри сферы  $r < y_*/2$ , окажется вне ее, т. е. появляется возможность диссоциации ионной пары. Зависимость константы равновесия  $K = k_2/k_1$  от напряженности поля для случая слабого электролита рассчитывалась Онзагером [14]:

$$K = \frac{k_2}{k_1} = K_0 F(E), \quad F(E) = \frac{I_1(2b)}{b}, \quad b = \frac{e^2 z_1 z_2 (z_1 b_1 + z_2 b_2) E}{2\epsilon (b_1 + b_2) k^2 T^2}, \quad (47)$$

где  $K_0$  — константа равновесия в отсутствие поля ( $E=0$ );  $I_1$  — модифицированная функция Бесселя, ограниченная в нуле. Из (47) видно, что константа скорости диссоциации ионных пар  $k_2$  является монотонно возрастающей функцией от напряженности электрического поля.

Константу скорости диссоциации  $k_2$  можно вычислить, используя кинетическую теорию Я. И. Френкеля [15]. Для этого необходимо вычислить среднее время жизни ионной пары  $\tau$ , тогда  $k_2 = \tau^{-1}$ .

Рассмотрим ионную пару  $X-Y^+$ , дипольный момент которой ориентирован вдоль  $\vec{E}$ . В начальный момент времени расстояние между ионами равно  $r_0$ . Согласно [15] ион находится в клетке (потенциальной яме) и колеблется около положения равновесия с частотой  $\nu$ . Поэтому  $r_0$  совпадает с размером клетки  $\delta$ . Вероятность перескока положительного иона  $Y^+$  из  $i$ -й клетки в соседнюю  $i+1$  клетку по полю в единицу времени равна

$$w_1^{i \rightarrow i+1} = \frac{\nu}{6} e^{-U_0 \beta} \exp \left[ e E_s \frac{\delta}{2} + \frac{e^2}{\epsilon_1} \left( \frac{1}{r_i + \delta/2} - \frac{1}{r_i} \right) \right] \beta, \\ E_s = \frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + 1} E,$$

где  $U_0$  — энергия активации;  $r_i = \delta_i$ ,  $\beta = 1/kT$ . Номер ячейки  $i$  отсчитывается от отрицательного иона.

Пусть  $\tau_i$  — время, в течение которого  $Y^+$  совершает этот прыжок. Тогда по истечении времени  $\tau_i$  вероятность перескока становится равной единице  $\tau_i w_1^{i \rightarrow i+1} = 1$ , откуда

$$\tau_i = \frac{6}{\nu} e^{(U_0 - e E_s \frac{\delta}{2}) \beta} \exp \frac{\alpha}{(2i+1)i},$$

где  $\alpha = e^2/\epsilon_1 \delta kT$ .

Отсюда с учетом движения отрицательного иона получаем время жизни пары

$$\tau = \frac{3}{v} e \left( U_0 - eE_s \frac{\delta}{2} \right)^\beta \sum_{i=1}^m \exp \frac{\alpha}{(2i+1)t}, \quad (47a)$$

где  $m$  — число перескоков, необходимых совершить ионам, чтобы достичь расстояния  $r_*$ , при котором ионная пара распадается. Замечая, что ионы расходятся тогда, когда электрическая энергия становится меньше тепловой, и энергии, приобретенной во внешнем электрическом поле, получаем

$$e^2/\varepsilon_1 r_* = eE_s r_* + kT, \text{ откуда } r_* = (-kT + \sqrt{k^2 T^2 + 4e^3 E_s / \varepsilon_1}) / 2eE_s.$$

Число прыжков  $m$  определяется как целая часть отношения  $r_*/\delta$ :  $m = [r_*/\delta]$ .

Если  $\delta \ll r_*$ , суммирование можно заменить интегрированием:

$$\tau = \frac{3}{v} e \left( U_0 - eE_s \frac{\delta}{2} \right)^\beta \int_1^m \exp \frac{\alpha}{(2t+1)t} dt. \quad (47b)$$

Так как с ростом поля  $m$  уменьшается, то время жизни пары с ростом  $E$  убывает. Если  $m < 1$ , то  $\tau = 0$ , откуда следует, что в полях с напряженностью поля

$$E > \frac{2\varepsilon_1 + 1}{3\varepsilon_1 \delta} \left( \frac{e}{\varepsilon_1 \delta} - \frac{kT}{e} \right) \equiv E_*$$

ионные пары не существуют. В слабых полях ( $E \rightarrow 0$ ) имеем  $r_* = e^2/\varepsilon_1 kT$ , поэтому в отсутствие поля время жизни пары вычисляется по (47a), (47b), в которых  $m = [e^2/\varepsilon_1 \delta kT] = \alpha$ ,  $E_s = 0$ . Отметим, что при достаточно высоких температурах, когда  $kT > e^2/\varepsilon_1 \delta - e\delta E_s$ , ионные пары также не существуют.

Проведем оценки. При комнатных температурах  $T = 300$  К имеем  $kT = 4,14 \cdot 10^{-14}$  эрг. Для неполярных жидких диэлектриков  $\varepsilon_1 = 2$  и, считая  $\delta \leq 10$  Å, получаем  $e^2/\varepsilon_1 \delta \geq 10^{-12}$  эрг, поэтому  $\alpha = e^2/\varepsilon_1 \delta kT \geq 25$ ,  $E_* \approx 5$  МВ/см.

Так как пробойные напряжения  $E \ll E_*$ , то электрическим полем добиться полного распада ионных пар невозможно. В сильных полях  $100$  кВ/см  $\leq E \ll E_*$  имеем  $4e^3 E_s / \varepsilon_1 \gg k^2 T^2$ , поэтому  $r_* = \sqrt{e/\varepsilon E_s}$ . Таким образом, в сильных полях константу скорости распада можно записать в виде

$$k_2 = \frac{v}{3} e \frac{\left( U_0 - eE_s \frac{\delta}{2} \right)^\beta}{\int_1^{\sqrt{e/\varepsilon_1 \delta E_s}} \exp \frac{\alpha}{(2t+1)t} dt}.$$

В слабых полях  $4e^3 E_s / \varepsilon_1 \ll k^2 T^2$ ,  $e E_s \frac{\delta}{2} \ll U_0$  имеем

$$k_2 = k_{20} (1 + \xi_0 E), \quad k_{20} = \frac{\nu}{3} e^{-U_0 \beta} / G_\alpha, \quad G_\alpha = \int_1^\alpha \exp \frac{\alpha}{(2t+1)t} dt,$$

$$\xi_0 = \frac{3\varepsilon_1 e \delta}{(2\varepsilon_1 + 1) k T} + \frac{\eta}{G_\alpha}, \quad \eta = \frac{3e^6}{(2\varepsilon_1 + 1) \varepsilon_1 \delta k^3 T^3}.$$

Значения функции  $G_\alpha$  приведены в таблице.

$\alpha$	$G_\alpha$	$\alpha$	$G_\alpha$	$\alpha$	$G_\alpha$	$\alpha$	$G_\alpha$
25	411	45	$147 \cdot 10^3$	80	$912 \cdot 10^7$	130	$94 \cdot 10^{15}$
30	1639	50	$691 \cdot 10^3$	90	$225 \cdot 10^9$		
35	7074	60	$158 \cdot 10^5$	100	$566 \cdot 10^{10}$		
40	31850	70	$375 \cdot 10^6$	120	$367 \cdot 10^{13}$		

**4. Граничные условия.** При ионном законе проводимости (37) возникает необходимость в постановке граничных условий для плотностей ионных компонент [2]. Для получения этих условий будем исходить из закона сохранения зарядов какой-либо ионной компоненты в интегральной форме:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V n_k dv + \int_S n_{sk} ds \right) = - \frac{1}{m_k} \int_S \vec{j}_k \vec{n} ds - \int_\Gamma \vec{j}_{sk} \vec{v} d\gamma + \frac{1}{m_k} \int_V \Sigma_k dv, \quad (48)$$

где  $V$  — геометрическая область;  $S$  — ее поверхность;  $\Gamma$  — линейный контур на  $S$ ;  $n_{sk}$  — поверхностная плотность зарядов;  $\vec{j}_{sk}$  — поверхностный поток;  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к  $S$ ;  $\vec{v}$  — внешняя нормаль к  $\Gamma$ , касательная к  $S$ .

В качестве  $V$  выберем область, ограниченную поверхностями  $S_1, S_2, S_3$  (рис 2), где  $S_1$  граничит с поверхностью электрода;  $S_2$  параллельна  $S_1$  и отстоит от нее на расстоянии  $h$ , отсчитываемом по нормали к  $S_1$ ;  $S_3$  образована движением нормали к  $S_1$  по  $\Gamma$ , являющейся границей к  $S_1$ .

Вывод граничных условий осуществляем обычным приемом, стягивая  $S_1$  к  $S_2$  [16]. Однако формально устремлять  $h \rightarrow 0$  нельзя по следующей причине. Разрывы представляют собой область резкого изменения физических величин. В данном случае эта область есть приэлектродный слой, толщина которого  $\delta$  по порядку совпадает с глубиной реакционной области  $\delta_r$ , определяемой как среднее расстояние от нейтральной молекулы до поверхности электрода, при котором происходят электронные переходы (1), (2). Величина  $\delta_r$  ограничена снизу, по крайней мере, диаметром  $d_0$  реагирующей молекулы. Однако могут быть случаи, когда  $\delta_r \gg d_0$ , т. е.  $\delta_r$  имеет макроскопический размер. Например, благодаря действию короткодействующих сил, приводящим к адсорбции реагирующих молекул, скажем  $X$ , вблизи

поверхности их концентрация возрастает. Действительно, если  $n_0$  — концентрация  $X$  на поверхности электрода, а  $\Phi$  — потенциал короткодействующих сил, то в равновесии концентрация  $n$  молекул  $X$  вблизи электрода дается соотношением  $n = n_0 \exp(\Phi/kT)$ . Концентрация  $n_0$  связана с равновесной поверх-

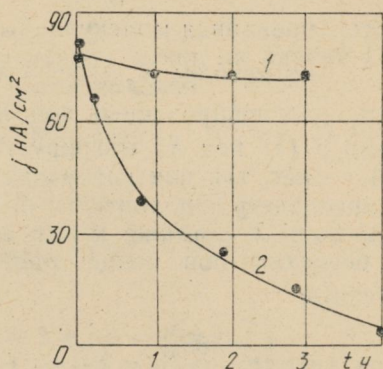
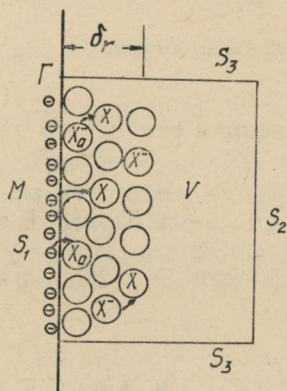


Рис. 2. Выбор геометрического объема  $V$ .  $M$  — электрод,  $\ominus$  — электрон,  $X$  — молекула примеси  $X$ ,  $X_a$  — адсорбированная молекула  $X$ ,  $X_a^-$  — адсорбированный ион  $X^-$ ,  $\circ$  — молекула жидкости. Стрелкой обозначены электронные переходы

Рис. 3. Ампер-временные характеристики плоской ячейки с раствором ТМ и йода. Проводимость чистого ТМ  $10^{-14}$  См/см, раствора  $10^{-13}$  См/см. Напряженность поля 7,3 кВ/см. Кривая 1 — титановые электроды, 2 — медные

ностной концентрацией адсорбированных молекул  $n_{s0}$  через константу равновесия  $K_s$ :  $n_{s0} = K_s n_0$ . Отсюда видно, что чем интенсивнее идет адсорбция (чем больше  $n_{s0}$ ), тем больше эффективная толщина  $\delta_a$  области повышенной концентрации  $X$ . Благодаря близости расположения молекул  $X$  в реакционной области ионизация может идти не только за счет реакции (1), но и за счет перезарядки, например [17], в реакционной зоне катода:  $X_1^- + X_2 \rightarrow X_1 + X_2^-$ . В этом случае  $\delta_r \sim \delta_a$ . Отметим, что адсорбция примесных молекул часто наблюдается в эксперименте. Например, в растворе трансформаторного масла с йодом адсорбция йода наиболее выражена при медных электродах, менее всего — при титановых (рис. 3).

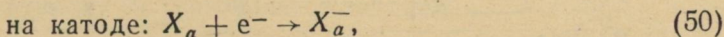
Линейные размеры области осреднения  $\delta_c$  в конденсированных средах имеют, как правило, размеры нескольких диаметров атомов или молекул [18, с. 74]. С учетом сказанного  $\delta \sim \delta_r \gg \delta_c$ , поэтому в реакционной зоне возможен подход с точки зрения сплошной среды. При таком выборе размера области осреднения заряды на поверхности электрода входят в объемную плотность (рис. 2), поэтому в данном случае в (48)  $q_{sh} = 0$ .

Возможность адсорбции молекул и ионов на поверхности электрода несколько усложняет динамику ионов. Рассмотрим,

например, поверхность катода. Пусть  $X_a$  — адсорбированная молекула  $X$ , а процесс адсорбции (десорбции) характеризуется константой скорости  $k_a(k_d)$ . Тогда поверхностная плотность  $n_{s2}$  молекул  $X$  определяется уравнением

$$\text{на катоде: } \frac{\partial n_{s2}}{\partial t} = k_{a2} n_2 - k_{d2} n_{s2}. \quad (49)$$

Адсорбированная молекула  $X_a$  может ионизоваться



где  $X_a^-$  — адсорбированный ион. Эта реакция отличается от (1) тем, что в (1) ион  $X^-$  мигрирует под действием поля, а  $X_a^-$  в (50) — нет, так как для ухода вглубь жидкости ему необходимо преодолеть дополнительный потенциальный барьер. В свою очередь ионы  $X^-$  также могут адсорбироваться. Поэтому баланс поверхностной концентрации  $n_{s4}$  ионов  $X_a^-$  описывается уравнением

$$\text{на катоде: } \frac{\partial n_{s4}}{\partial t} = k_{s4} n_{s2} + i_{d4}, \quad i_{d4} = k_{a4} n_4 - k_{d4} n_{s4}. \quad (51)$$

Здесь  $k_{s4}$  — константа скорости реакции (50),  $k_{a4}$  — скорости абсорбции  $X^-$ ,  $k_{d4}$  — скорости десорбции  $X_a^-$ . Отметим, что  $-i_{d4}$  — это число адсорбированных ионов  $X_a^-$ , покидающих единичную площадку в единицу времени.

Аналогичные уравнения имеют место

$$\text{на аноде: } \frac{\partial n_{s3}}{\partial t} = k_{a3} n_3 - k_{d3} n_{s3}, \quad \frac{\partial n_{s5}}{\partial t} = k_{s3} n_{s3} + i_{d5}, \quad (52)$$

Перейдем к выводу граничных условий для  $n_k$  ( $k=4, 5$ ). Устремляя  $h \rightarrow \delta_k$ , из (48) находим

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta_k n_k + \frac{1}{m_k} j_{kn} - i_{xk} + i_{dk} = -\text{div}_s \vec{j}_{sk}, \quad j_{kn} = \vec{j}_k \cdot \vec{n}; \quad (53)$$

$$\text{на катоде: } i_{x4} = k_{i2} n_2 - k_{f4} n_4, \quad i_{d4} = k_{a4} n_4 - k_{d4} n_{s4};$$

$$\text{на аноде } i_{x5} = k_{i3} n_3 - k_{f5} n_5, \quad i_{d5} = k_{a5} n_5 - k_{d5} n_{s5},$$

где  $\vec{j}_k$  определяется по (36);  $\vec{n}$  — нормаль к поверхности электрода, направленная вглубь жидкости. Напомним, что в объемной концентрации  $n_k$  учтены как ионы, находящиеся в реакционной области, так и ионы на поверхности электрода. Далее  $j_{kn} > 0$ , так как вектора  $\vec{j}_k$ ,  $\vec{n}$  направлены в одну сторону.

Граничных условий (49)–(53) недостаточно для определения всех  $n_k$  ( $k=2, 3, \dots, 6$ ), поэтому необходимо привлечь допол-

нительно балансовые соотношения, вытекающие из закона сохранения вещества. Именно, приток нейтралов  $j_{kn}/m_k$  в единицу времени на единичную площадку расходуется на адсорбцию  $k_{ak}n_k - k_{dk}n_{sk}$  и ионизацию за счет реакций (1), (2), т. е.

$$\text{на катоде: } j_{2n}/m_2 = k_{a2}n_2 - k_{d2}n_{s2} + k_{i2}n_2 - k_{f4}n_4, \quad (54)$$

$$\text{на аноде: } j_{3n}/m_3 = k_{a3}n_3 - k_{d3}n_{s3} + k_{i3}n_3 - k_{f5}n_5.$$

Аналогичным образом можно поставить граничные условия для положительных (отрицательных) ионов на катоде (аноде). Например, если ионы разряжаются по схеме

на аноде:  $X^- - e^- \xrightarrow{k_1} X$ , на катоде:  $Y^+ + e^- \xrightarrow{k_2} Y$ ,  
то граничные условия будут иметь вид

$$\text{на катоде: } \frac{\partial}{\partial t} \delta_4^+ n_5 + j_{5n} + k_2 n_5 = -\operatorname{div}_s \vec{j}_{s5}, \quad j_{5n} + j_{3n} = 0, \quad (55)$$

$$\text{на аноде: } \frac{\partial}{\partial t} \delta_5^- n_5 + j_{4n} + k_1 n_4 = -\operatorname{div}_s \vec{j}_{s4}, \quad j_{4n} + j_{2n} = 0.$$

Здесь для простоты не учтена адсорбция. Отметим, что в (55)  $j_{kn} < 0$  ( $k=4, 5$ ), так как векторы  $\vec{j}_k, \vec{n}$  противоположно направлены.

Условие (49) — (55) суть полная система граничных условий для определения  $n_k$  ( $k=2, 3, \dots, 6$ ). Без учета адсорбции ( $k_{ak} = k_{dk} = k_{sik} = 0$ ) она впервые была предложена в работе [2].

В том случае, когда реакции, описываемые уравнениями (49), (51), (52), обратимы и происходят достаточно быстро ( $t_0 \ll \ll 1/k_{dj}$ ,  $j=2, 3, \dots, 5$ ;  $t_0$  — характерное время задачи), то  $n_{sj} = K_{sj}n_j$  ( $j=2, 3$ ),  $i_{d4} = -k_{si2}n_{s2} = -K_{s2}k_{si2}n_2$ ,  $i_{d5} = -k_{si3}n_{s3} = -K_{s3}k_{si3}n_3$ . В этом случае (53) можно упростить

$$\begin{aligned} \text{на аноде: } \frac{\partial}{\partial t} \delta_4 n_4 + \frac{1}{m_4} j_{4n} - (k_{i2} + k_{s2} k_{si2}) n_2 + k_{f4} n_4 = \\ = -\operatorname{div}_s \vec{j}_{s4}, \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \text{на катоде: } \frac{\partial}{\partial t} \delta_5 n_5 + \frac{1}{m_5} j_{5n} - (k_{i3} + K_{s3} k_{si3}) n_3 + k_{f5} n_5 = \\ = -\operatorname{div}_s \vec{j}_{s5}. \end{aligned}$$

Отметим, что электрическое поле способствует скорости прохождения реакций (1), (2) и отрыву адсорбированных ионов с электродов, поэтому коэффициенты  $k_{ej} = k_{2j} + K_{sj}k_{sij}$  ( $j=2, 3$ ) должны быть монотонно возрастающими функциями от

напряженности поля. Здесь можно проследить аналогию с действием поля на диссоциацию ионных пар (константа диссоциации  $K$  увеличивается с ростом  $E$ —см. (47)). При небольших полях  $k_{ej} = k_j^0 E$ , предполагая  $k_{f4} = k_{f5} = 0$  и пренебрегая диффузионным током, отсюда и из (56) получаем, что в этом случае плотность зарядов на электродах постоянна, а вольт-амперные (ВА) характеристики линейны. Этот факт, по-видимому, объясняет то, что для большинства диэлектрических жидкостей начальные участки ВА характеристик в диапазоне  $E \leq 10$  кВ/см всегда линейные [17]. Для этого случая нетрудно получить условия на частоту  $\omega$  внешнего переменного поля, при которой не будет образовываться объемный заряд на электродах, а следовательно, и не будет формироваться электроконвекция. Действительно, из (56) следует

$$\delta_j \frac{\partial n_j}{\partial t} = (k_j^0 n_{j-2} - b_j n_j) E \quad (j=4, 5). \quad (57)$$

Будем считать, что выполняется условие безындукционного ЭГД приближения, т. е. в (57)  $E$  — внешнее поле;  $E = E_0 \sin \omega t$ , а концентрации  $n_{j-2} = \text{const}$  (это условие будет выполняться, когда доля прореагировавших нейтральных молекул по сравнению с непрореагировавшими мала). Решение (57) на полупериоде  $0 \leq t \leq \pi$  при начальном условии имеет вид

$$n_j = \frac{k_j^0 n_{j-2} \delta_j \omega}{b_j} \left[ 1 - \exp \left( \frac{b_j E_0}{\delta_j \omega} (1 - \cos \omega t) \right) \right] \quad (j=4, 5).$$

Отсюда видно, что  $n_j \approx 0$ , если  $\tau_{xj} \omega \gg 1$ , где  $\tau_{xj} = \delta_j / b_j E_0$  — характерное время накопления объемного заряда. Таким образом, в электрических полях достаточно высокой частоты электроконвекции наблюдаться не будет. Действительно, экспериментальные исследования показывают, что в полях  $E \leq 10$  кВ/см при  $\omega \approx 10^3$  Гц в жидких диэлектриках технической степени частоты электроконвекция исчезает.

**Список литературы:** 1. Стишков Ю. К., Остапенко А. А. Зависимость интенсивности и КПД электрогидродинамических течений от низковольтной проводимости жидкости. — Магнитная гидродинамика, 1979, № 1, с. 74—79. 2. Жакин А. И. Редокс-системы в электрогидродинамике и расчет электроконвективных течений. — Магнитная гидродинамика, 1982, № 2, с. 70—78. 3. Жидкие кристаллы/Под ред. С. И. Жданова. — М.: Химия, 1979. — 378 с. 4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: ГИТТЛ, 1957. — 537 с. 5. Гроот С. де, Мазур П. Неравновесная термодинамика. — М.: Мир, 1964. — 456 с. 6. Гогосов В. В., Васильева Н. В., Тактаров Н. Г., Шапошникова Г. А. Уравнения гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся многокомпонентных и многофазных сред. Разрывные решения. Исследование разрывных решений со скачком магнитной проницаемости. Отчет № 1705. М.: Ин-т механики Моск. ун-та, 1975. 7. Тарапов И. Е. Основные задачи гидромеханики намагничивающихся и поляризующихся сред: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Х., 1973. — 270 с. 8. Боа Те Чу. Термо-

динамика электропроводных движущихся сред. — В кн.: Плазма в магнитном поле. М.: Госатомиздат, 1962, с. 62—83. 9. Сканави Г. И. Физика диэлектриков (область слабых полей). — М.; Л.: Гостехиздат, 1949. — 218 с. 10. Герасимов Я. И. Курс физической химии.—М.: Химия, 1973.—Т. 2. 240 с. 11. Lacroix I. C., Atten P. Double injection with recombination: EHD linear and non linear stability study.—J. Electrostat., 1978, 5, p. 453. 12. Болога М. К., Гросу Ф. П., Кожухарь И. А. Электроконвекция и теплообмен. — Кишинев: Штиинца, 1977. — 320 с. 13. Смирнов Б. М. Введение в физику плазмы. — М.: Наука, 1975. — 176 с. 14. Семенченко Н. Н. Физическая теория растворов. — М.; Л.: Гостехиздат, 1941. — 344 с. 15. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. — Л.: Наука, 1975. — 592 с. 16. Седов Л. И. Механика сплошных сред.—М.: Физматгиз, 1973.—Т. 1. 536 с. 17. Догондзе Р. Р., Кузнецов А. М., Черненко А. А. Теория гомогенных и гетерогенных электронных процессов в жидкостях. — Усп. химии, 1965, 34, вып. 10, с. 1779—1812. 18. Поплавко Ю. М. Физика диэлектриков.—К.: Техника, 1980.—400 с.

Поступила в редколлегию 11.10.82.

УДК 517.934.1

Е. Н. ПОДОЛЬСКИЙ, канд. физ.-мат. наук, С. И. ВОВНА

### АВТОКОЛЕБАНИЯ ПРИ ОТСЛЕЖИВАНИИ ПОЛОСЫ

Рассматривается система автовождения самоходной машины, отслеживающая полосу —  $-h < y < h$  на плоскости  $хоу$  (рис. 1).

Задача об отслеживании прямой (оси  $ох$ ) подробно рассмотрена в работах [1, 2]. Мы будем пользоваться введенными в них обозначениями, предложениями и уравнениями.

Отслеживание полосы заключается в том, что точка  $P$  копира движется не по оси  $ох$ , а по полосе и, таким образом, возможны три типа движения: движения точки  $P$  по верхней и нижней границе полосы ( $y_P(t) \equiv h$  или  $y_P(t) \equiv -h$ ) и так называемое «свободное» движение ( $-h < y_P(t) < h$ ).

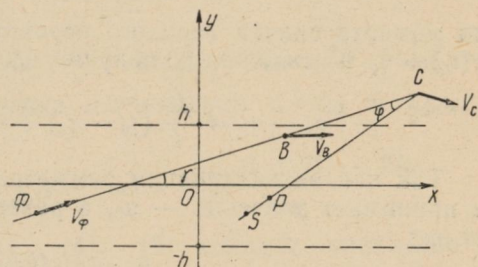


Рис. 1

Алгоритм автоматического вождения состоит в следующем. Угол  $\alpha$  между осью машины и скоростью середины оси передних колес (точки  $B$ ) остается постоянным до тех пор, пока модуль рассогласования  $\xi = \varphi + \frac{\alpha}{k}$

не достигнет в некоторый момент времени  $t_{сн}$  значения  $\delta_1 = \delta_3 + \delta_{ш}$ .

В момент  $t_{сн} + \Delta$  ( $\Delta$  — время запаздывания) угол  $\alpha$  меняется скачком, значение его определяется выражением

$$k [\delta_2 \operatorname{sign} \xi(t_{сн}) - \xi(t_{сн} + \Delta - 0)], \text{ где } \delta_2 = \delta_3 - \delta_{ш} - \frac{1}{k} c \Delta_2$$

(такая замена непрерывного поворота с большой угловой скоростью  $c$  скачкообразным обоснована в [2]).

Проведенное моделирование на ЭВМ показало, что в широких пределах значений параметров в рассматриваемой системе устанавливаются различные автоколебательные режимы. Численный счет был проведен студенткой механико-математического факультета ХГУ Рыбочкиной Л. Н., которой авторы выражают благодарность.

При достаточно малом  $h$  (что соответствует реальной ширине полосы на практике) автоколебательный режим имеет особенно простую форму: поочередные повороты направо и налево, причем правые повороты происходят при движении точки  $P$  по верхней границе полосы, а левые, соответственно, по нижней.

Найдем аналитически некоторые величины, характеризующие эти автоколебания.

За начальный момент примем момент перехода от свободного движения к движению по верхней границе. Обозначим начальные значения углов через  $\gamma_n$ ,  $\varphi_n$ ,  $\alpha_0$ . Интегрируя систему уравнений (см. [1, 2])

$$\dot{\gamma} = \frac{v}{L_B} \alpha_0; \quad \dot{\varphi} = \frac{v}{l} \gamma + \frac{vL}{lL_B} \alpha_0$$

до момента скачка (правого поворота)  $t_0$ , обозначая  $\varphi(t_0) = \varphi_0$ ,  $\gamma(t_0) = \gamma_0$  и исключая  $t_0$ , получим после упрощений

$$\varphi_0 - \varphi_n = \frac{L}{l} (\gamma_0 - \gamma_n) + \frac{L_B}{2l} \frac{\gamma_0^2 - \gamma_n^2}{\alpha_0}. \quad (1)$$

Так как автоколебания симметричны, то после скачка угол  $\alpha$  принимает значение  $-\alpha_0$ , а равенство  $\xi(t_0 + 0) = \delta_2$  принимает вид

$$\varphi_0 - \alpha_0/k = \delta_2. \quad (2)$$

Сигнал правого поворота наступил в момент  $t = t_0 - \Delta$ , следовательно,  $\xi(t_0 - \Delta) = \delta_1$  и  $\varphi(t_0 - \Delta) = \delta_1 - \frac{\alpha_0}{k}$ .

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \varphi(t_0 - \Delta) = \varphi_n + \left( \frac{v}{l} \gamma_n + \frac{vL}{lL_B} \alpha_0 \right) \left( \frac{\gamma_0 - \gamma_n}{\frac{v}{L_B} \alpha_0} - \Delta \right) + \frac{v^2}{2lL_B} \alpha_0 \times \\ \times \left( \frac{\gamma_0 - \gamma_n}{\frac{v}{L_B} \alpha_0} - \Delta \right)^2; \end{aligned}$$

Используя соотношение (1), получим линейное уравнение:

$$\varphi_0 + \left( \frac{1}{k} - \frac{v\Delta L}{lL_B} + \frac{v^2\Delta^2}{2lL_B} \right) \alpha_0 - \frac{v\Delta}{l} \gamma_0 = \delta_1. \quad (3)$$

После скачка угла  $\alpha(t)$  справедливы уравнения

$$\dot{\gamma} = -\frac{v}{L_B} \alpha_0; \quad \dot{\varphi} = \frac{v}{l} \gamma - \frac{vL}{lL_B} \alpha_0.$$

Интегрируя от момента скачка  $t_0$  до момента перехода на свободное движение  $t_{cx}$  и исключая  $(t_{cx} - t_0)$ , получим уравнение

$$\varphi_{cx} - \varphi_0 = \frac{L}{l} (\gamma_{cx} - \gamma_0) - \frac{L_B}{2l} \frac{\gamma_{cx}^2 - \gamma_0^2}{\alpha_0}. \quad (4)$$

Интегрируя систему (см. [1])  $\dot{\gamma} = -\frac{v}{L_B} \alpha_0$ ;  $\dot{y}_\Phi = v\gamma$  от момента  $t_{cx}$  до момента  $t_n$  перехода со свободного движения на движение точки  $P$  по нижней границе полосы, запишем соотношения:

$$\begin{aligned} y_{\Phi n} - y_{\Phi cx} &= v\gamma_{cx}(t_n - t_{cx}) - \frac{v^2}{2L_B} \alpha_0 (t_n - t_{cx})^2 - \gamma_n - \gamma_{cx} = \\ &= -\frac{v}{L_B} \alpha_0 (t_n - t_{cx}) \end{aligned}$$

(в силу симметрии искомого автоколебательного режима  $\varphi(t_n) = -\varphi(0) = -\varphi_n$ ,  $\gamma(t_n) = -\gamma(0) = -\gamma_n$ ).

Из рис. 1 видно, что

$$y_P(t_{cx}) = y_{\Phi cx} + L\gamma_{cx} - l\varphi_{cx} = h; \quad y_P(t_n) = y_{\Phi n} - L\gamma_n + l\varphi_n = -h.$$

Исключая из полученных соотношений  $t_n - t_{cx}$  и  $y_{\Phi cx}$ ,  $y_{\Phi n}$ , имеем

$$\varphi_n + \varphi_{cx} = \frac{L}{l} (\gamma_n + \gamma_{cx}) + \frac{L_B}{2l} \frac{\gamma_n^2 - \gamma_{cx}^2}{\alpha_0} - \frac{2h}{l}. \quad (5)$$

Из соотношений (1), (4), (5) следует уравнение  $\varphi_0 = \frac{L}{l} \gamma_0 - \frac{h}{l}$  (6), которое вместе с уравнениями (2) и (3) образует систему трех уравнений с тремя неизвестными  $\varphi_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $\alpha_0$ . Решая эту систему, получим

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{L(\delta_1 - \delta_2) + \left( \delta_2 + \frac{h}{l} \right) v\Delta}{\left( \frac{2}{k} - \frac{Lv\Delta}{lL_B} \right) \left( L - \frac{v\Delta}{2} \right)}; \\ \gamma_0 &= \frac{l\delta_2 + h}{L} + \frac{l\alpha_0}{kL}; \quad \varphi_0 = \delta_2 + \frac{\alpha_0}{k}. \end{aligned} \quad (7)$$



Нетрудно показать, что в каждый данный момент времени  $t$  на прямой  $CP$  найдется точка  $S$ , скорость которой направлена вдоль оси  $PC$ . Обозначим координату  $\eta$  этой точки через  $l_s$ , а расстояние от мгновенного центра скоростей копира до точки  $S$  через  $r$ . Тогда, очевидно,

$$\beta(\eta) \approx \operatorname{tg} \beta(\eta) = \frac{l_s - \eta}{r}. \quad (10)$$

Из (8), (9) и (10) вытекает следующее уравнение относительно координаты  $l_s$ :  $\int_{l_K}^{l_K} (l_s - \eta) \eta d\eta = 0$ , откуда  $l_s = \frac{2(l_K^3 - l^3)}{3(l_K^2 - l^2)}$ .

Отметим, что предположение о пренебрежимой малости сил инерции привело к тому, что  $l_s = \text{const}$ , т. е. в каждый момент времени точка  $S$  — одна и та же точка копира. Это позволяет вывести еще одно дифференциальное уравнение для величины  $\varphi$ , которая в свободном движении уже не является функцией  $y_\varphi$  и  $\gamma$ . Запишем соотношение, характеризующее угол наклона скорости  $\vec{v}_S$  к оси  $ox$ :  $\dot{y}_s/x_s = \operatorname{tg}(\varphi + \gamma) = \varphi + \gamma$ . С другой стороны,

$$x_s \approx x_\varphi + L_C - l_s = vt + L_C - l_s;$$

$$y_s \approx y_\varphi + L_C \gamma - l_s(\varphi + \gamma) = y_\varphi + (L_C - l_s)\gamma - l_s \varphi,$$

откуда, используя дифференциальные уравнения для  $y_\varphi$  и  $\gamma$ , получим

$$\dot{\varphi} = -\frac{v}{l_s} \varphi + \frac{v}{L_B} \left( \frac{L_C}{l_s} - 1 \right) \alpha. \quad (11)$$

Остается оправдать замену реального движения копира в полосе  $[-(a+h), a+h]$  эквивалентной схемой отслеживания полосы  $[-h, h]$  точкой  $P$ . Действительно, при скольжении копира по верхней границе полосы ( $y=a+h$ ) касание с границей возможно точками  $N$  и  $M$ . Численные эксперименты показали, что фактически по верхней границе скользит точка  $N$ , а скольжение точки  $M$  (непосредственно перед сходом) продолжается сотые доли секунды, чем можно пренебречь. Поэтому копир можно заменить фигурой, состоящей из отрезков  $SC$  и  $RN$  (рис. 2). При этом движение точки  $N$  по прямой  $y=a+h$  эквивалентно (с принятой точностью) движению точки  $P$  по прямой  $y=h$ . Аналогично движение точки  $R$  по нижней границе полосы  $y=-(a+h)$  заменяется движением точки  $P$  по прямой  $y=-h$ .

Дополним теперь систему уравнений (1)–(5) с неизвестными  $\gamma_n, \varphi_n, \dot{\gamma}_0, \dot{\varphi}_0, \alpha_0, \dot{\gamma}_{сх}, \dot{\varphi}_{сх}$  двумя уравнениями, характеризующими свободное движение.

Условие перехода с отслеживания верхней границы полосы на свободное движение состоит в том, что  $t_{cx}$  определяется как первый момент времени, в который скорость точки  $S$  направлена вдоль  $PC$ , т. е.

$$\dot{y}_S / x_S = \operatorname{tg}(\varphi + \gamma) \approx \varphi + \gamma.$$

Подставляя вместо  $\dot{\varphi}$  (при скольжении точки  $P$  по верхней прямой) его выражение

$$\frac{v}{l} \gamma - \frac{vL}{lL_B} \alpha_0,$$

получим следующее уравнение:

$$\varphi_{cx} = -\frac{l_S}{l} \gamma_{cx} + \frac{L_C}{lL_B} (l_S - l) \alpha_0. \quad (12)$$

Интегрируя уравнение (11) и исключая  $(t_n - t_{cx})$ , получим,

$$-\varphi_n = \left( \varphi_{cx} + \frac{L_C - l_S}{L_B} \alpha_0 \right) e^{-\frac{L_B}{l} \frac{\gamma_n + \gamma_{cx}}{\alpha_0}} - \frac{L_C - l_S}{L_B} \alpha_0. \quad (13)$$

Из уравнений (4) и (12) следует квадратное уравнение относительно  $\gamma_{cx}$  (и из уравнения (12) находится  $\varphi_{cx}$ ). Из уравнений (1) и (13) получается уравнение относительно  $\gamma_n$ , которое решается численно. После нахождения этих величин легко находится полупериод автоколебаний.

Список литературы: 1. *Вовна С. И., Кашурко А. С., Подольский Е. Н., Сняжков В. А.* Влияние зон нечувствительности, люфтов и запаздывания на работу автомата вождения самоходной машины. — Вестн. Харьк. ун-та, 1977, № 148. Прикл. математика и механика, вып. 42, с. 27—36. 2. *Вовна С. И., Подольский Е. Н.* Автоколебания системы самоходная машина — автомат вождения. — Вестн. Харьк. ун-та, 1979, № 177. Прикл. математика и механика, вып. 44, с. 11—22.

Поступила в редколлегию 12.03.82.

УДК 517.935.1

А. П. МАРИНИЧ, канд. физ.-мат. наук, КОИНА РОДУМТА  
**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ЛОКАЛЬНОЙ  $\varepsilon$ -УПРАВЛЯЕМОСТИ  
 ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ**

Введение. Рассмотрим автономную управляемую систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varphi(u), \quad x \in |R_n, \quad u \in \Omega \subset |R_m, \quad (1)$$

где  $\varphi(u)$  — вещественная непрерывная  $n$ -мерная вектор-функция;  $A$  — вещественная  $(n \times n)$  матрица. На ограничивающее

множество  $\Omega$  накладываемое единственное ограничение  $\exists u_0 \in \Omega : \varphi(u_0) = 0$  (2).

Допустимым управлением будем называть любую локально суммируемую функцию  $u(t)$  со значениями в  $\Omega$ .

Множеством  $S$ -нуль-управляемости системы (1) называется множество всех точек  $x_0 \in R_n$ , из которых можно попасть в нуль за конечное время  $T$  по траектории системы (1) при допустимом управлении  $u(t)$ . Как известно, множество  $S$  представимо в виде

$$S = \left\{ x_0 : x_0 = - \int_0^T e^{-A\tau} \varphi(u(\tau)) d\tau, 0 < T < \infty, u \in \Omega \right\}.$$

Система (1) называется локально нуль-управляемой, если  $S$  содержит нуль в качестве внутренней точки, т. е.  $0 \in \text{int } S$ , и глобально нуль-управляемой, если  $S = R_n$ . Точку  $x_0 \in R_n$ , следуя работе [1], будем называть нуль- $\varepsilon$ -управляемой, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует число  $T = T(x_0, \varepsilon) > 0$  и допустимое управление  $u(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  такие, что траектория  $x(t)$  системы (1), порожденная управлением  $u(t)$  и начальным условием  $x(0) = x_0$ , удовлетворяет соотношению  $\|x(T)\| \leq \varepsilon$ . Множество  $E$  всех нуль- $\varepsilon$ -управляемых точек назовем множеством нуль- $\varepsilon$ -управляемости системы (1).

Система (1) называется локально нуль- $\varepsilon$ -управляемой, если  $0 \in \text{int } E$ , и глобально нуль- $\varepsilon$ -управляемой, если  $E = R_n$ .

В дальнейшем для простоты будем говорить об  $\varepsilon$ -управляемости, имея в виду нуль- $\varepsilon$ -управляемость.

В работе [2] получен критерий локальной нуль-управляемости системы (1) — (2) в терминах сопряженной матрицы  $A^*$ , а в [3] получен новый критерий локальной нуль-управляемости этой системы, названный В. И. Коробовым геометрическим.

В работе [1] результаты работы [2] были применены для получения критерия  $\varepsilon$ -управляемости этой же системы в терминах сопряженной матрицы  $A^*$ . Ввиду важности этого результата в данной работе приведем его полную формулировку.

**Теорема [1].** *Для того чтобы автономная система*

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varphi(u), \quad x \in R_n, \quad u \in \Omega \subset R_m$$

$$\exists u_0 \in \Omega : \varphi(u_0) = 0$$

*была локально  $\varepsilon$ -управляемой, необходимо и достаточно, чтобы не существовало вещественного собственного вектора  $y$  матрицы  $A^*$ , отвечающего собственному значению  $\lambda \geq 0$ , такого что  $(y, \varphi(u)) \geq 0$  при всех  $u \in \Omega$ , и не существовало комплексного собственного вектора  $y$  матрицы  $A^*$ , отвечающего собственному значению  $\lambda$  с  $\text{Re } \lambda \geq 0$ ,  $\text{Im } \lambda \neq 0$ , такого что  $(\text{Re } y, \varphi(u)) = (\text{Im } y, \varphi(u)) = 0$  при всех  $u \in \Omega$ .*

В статье предлагается геометрический критерий локальной  $\varepsilon$ -управляемости системы (1) — (2), являющийся непосредственным аналогом геометрического критерия [3].

Основной результат. Пусть  $m(\lambda)$  — минимальный полином некоторой матрицы  $A$ . Представим его в виде произведения двух взаимно простых полиномов:

$$m(\lambda) = \psi_+(\lambda) \cdot \psi_-(\lambda); \quad 1 = \psi_+(\lambda) \cdot \chi_1(\lambda) + \psi_-(\lambda) \cdot \chi_2(\lambda),$$

где  $\psi_+(\lambda)$  соответствует собственным значениям  $\lambda$  матрицы  $A$  с  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ ,  $\psi_-(\lambda)$  соответствует  $\lambda$  с  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ , а  $\chi_i(\lambda)$ ,  $i = 1, 2$  — некоторые полиномы.

Обозначим  $K_+(A) = \{x \in R_n : \psi_+(A)x = 0\}$ ,  $K_-(A) = \{x \in R_n : \psi_-(A)x = 0\}$ . Известно [4], что  $K_+(A)$  и  $K_-(A)$ , ( $K_+(A^*)$  и  $K_-(A^*)$ ) являются инвариантными подпространствами матрицы  $A$  (матрицы  $A^*$ ) и все пространство  $R_n$  можно представить в виде прямой суммы  $K_+(A)$  и  $K_-(A)$ , ( $K_+(A^*)$  и  $K_-(A^*)$ ).

Представим полином  $\psi_+(\lambda)$  в виде  $\psi_+(\lambda) = \psi_+^R(\lambda) \cdot \psi_+^C(\lambda)$ , где  $\psi_+^R(\lambda)$  соответствует вещественным, а  $\psi_+^C(\lambda)$  комплексным собственным значениям матрицы  $A$ .

Обозначим  $K_+^R(A^*) = \{x \in R_n : \psi_+^R(A^*)x = 0\}$ ,  $K_+^C(A^*) = \{x \in R_n : \psi_+^C(A^*)x = 0\}$ . Как нетрудно видеть,  $K_+(A^*)$  можно представить в виде прямой суммы  $K_+^R(A^*)$  и  $K_+^C(A^*)$ . Далее пусть  $L = \operatorname{Co} \{\varphi(\Omega), A\varphi(\Omega), \dots, A^m \varphi(\Omega), \dots\}$ , обозначим через  $K$  выпуклый конус, порожденный множеством  $L$ ,  $K^*$  — сопряженный к нему конус,  $K^\perp$  — ортогональное дополнение к множеству  $K$  и  $\bar{K}$  — замыкание множества  $K$ .

**Теорема 1.**  $K_+(A) \subset \bar{K}$  тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

1) Не существует вещественного собственного вектора  $u$  матрицы  $A^*$ , отвечающего собственному значению  $\lambda \geq 0$ , для которого  $(y, \varphi(u)) \geq 0$  при всех  $u \in \Omega$ .

2) Не существует комплексного собственного вектора  $u$  матрицы  $A^*$ , отвечающего собственному значению  $\lambda$  с  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ ,  $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ , для которого  $(\operatorname{Re} u, \varphi(u)) = (\operatorname{Im} u, \varphi(u)) = 0$  при всех  $u \in \Omega$ .

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1, сформулируем ряд вспомогательных утверждений.

**Лемма 1.**  $K_-(A^*) = K_+^\perp(A)$ .

*Замечание 1.* Так как конус  $K_+(A)$  — подпространство в  $R_n$ , то сопряженный конус  $K_+^*(A) = K_+^\perp(A)$ , следовательно,

$$K_+^*(A) = K_-(A^*). \quad (3)$$

**Лемма 2.** Условия 1) и 2) теоремы 1 выполняются тогда и только тогда, когда  $K^* \cap K_+(A^*) = \{0\}$ .

Доказательство. *Необходимость.* Пусть  $\{e_i, i=1, \dots, p\}$  и  $\{e_i, i=p+1, \dots, n\}$  — базисы в подпространствах  $K_+(A^*)$  и  $K_-(A^*)$  соответственно. Сделаем преобразование координат  $z = Px$ , где  $P = [e_1, e_2, \dots, e_n]^*$ .

В новых координатах, как известно из работы [1], система (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= A_1 z_1 + \varphi_1(u), \quad z_1 \in R_p, \quad u \in \Omega \subset R_m; \\ \frac{dz_2}{dt} &= A_2 z_2 + \varphi_2(u), \quad z_2 \in R_{n-p}, \quad u \in \Omega \subset R_m, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $A_1$  — матрица размерности  $p \times p$ ;  $A_2$  — матрица размерности  $(n-p) \times (n-p)$ , которые связаны с матрицей выражением

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad \text{а } P\varphi(u) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u) \\ \varphi_2(u) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Более того, следуя работе [1], известно, что если выполнены условия 1) и 2) теоремы 1, то подсистема (4) локально нуль-управляема.

Дальнейшее доказательство леммы 2 проводится от противного. Пусть существует ненулевой элемент  $z_0 \in K^* \cap K_+(A^*)$ . Тогда  $e^{A^*t} z_0 \in K^* \cap K_+(A^*)$  для любого  $t \geq 0$ , следовательно,

$$\int_0^T (e^{A^*t} z_0, \varphi(u(t))) dt = (z_0, \int_0^T e^{A^*t} \varphi(u(t)) dt) \geq 0$$

для любых  $u(t) \in \Omega$  и  $0 \leq t \leq T < \infty$ .

Так как  $z_0 \in K_+(A^*)$ , то в новом базисе  $z_0 = \begin{pmatrix} z_0^1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , где  $z_0^1 \neq 0$ .

Поэтому в новом базисе, согласно (5), последнее неравенство имеет следующий вид:

$$\left( \begin{pmatrix} z_0^1 \\ 0 \end{pmatrix}, \int_0^T \begin{pmatrix} e^{A_1 t} & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(u(t)) \\ \varphi_2(u(t)) \end{pmatrix} dt \right) = \left( z_0^1, \int_0^T e^{A_1 t} \varphi_1(u(t)) dt \right) \geq 0.$$

Следовательно,  $\left( z_0^1, - \int_0^T e^{A_1 t} \varphi_1(u(t)) dt \right) \leq 0$ , для всех  $u(t) \in \Omega$  и  $0 \leq t \leq T < \infty$ . То есть  $z_0^1 \in R_p$  является опорным вектором к множеству нуль-управляемости

$$S_1^- = \left\{ z_1 \in R_p : z_1 = - \int_0^T e^{A_1 t} \varphi_1(u(t)) dt, \quad u \in \Omega, \quad 0 < T < \infty \right\}$$

подсистемы

$$\frac{dz_1}{dt} = -A_1 z_1 + \varphi_1(u), \quad z_1 \in R_p, \quad u \in \Omega \subset R_m. \quad (6)$$

Последнее означает, что подсистема (6) не является локально нуль-управляемой. Следовательно, используя результат работы [3], подсистема (4) не является локально нуль-управляемой. Полученное противоречие доказывает необходимость.

*Достаточность.* Пусть  $K^* \cap K_+(A^*) = \{0\}$  (7), тогда

$$K^* \cap K_+^R(A^*) = \{0\} \quad (8) \quad \text{и} \quad K^* \cap K_+^C(A^*) = \{0\} \quad (9).$$

Как нетрудно видеть, из (8) следует первое условие теоремы 1. Далее покажем, что из (9) вытекает второе условие теоремы 1.

От противного. Предположим, что имеет место соотношение (9), но тем не менее существует комплексный собственный вектор  $y$  матрицы  $A^*$ , отвечающий собственному значению  $\lambda$  с  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ ,  $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ , для которого  $(\operatorname{Re} y, \varphi(u)) = (\operatorname{Im} y, \varphi(u)) = 0$  при всех  $u \in \Omega$ . Тогда, с одной стороны, как легко показать,  $\operatorname{Re} y, \operatorname{Im} y \in K^\perp$ , а с другой стороны,  $\operatorname{Re} y, \operatorname{Im} y \in K_+^C(A^*)$ . Следовательно,  $K^* \cap K_+^C(A^*) \neq \{0\}$ , чего не может быть.

Лемма доказана.

*Доказательство теоремы 1. Необходимость.* Пусть  $K_+(A) \subset \bar{K}$ , тогда  $K^* \subset K_+(A)$  и в силу (3) имеем  $K^* \subset K_-(A^*)$ . Отсюда вытекает соотношение (7). Следовательно, в силу леммы 2 условия 1) и 2) теоремы 1 выполняются.

*Достаточность.* Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы 1. Тогда в силу леммы 2 имеет место соотношение (7).

Докажем, что из (7) следует  $K^+ \subset K_-(A^*)$ . От противного. Предположим, что имеет место соотношение (7), но  $K^* \not\subset K_-(A^*)$ . Тогда существует ненулевой элемент  $y_0 \in K^*$ , такой что  $y_0 \in K_-(A^*)$ . Так как  $K^*$  инвариантен относительно  $A^*$  и многочлен  $\psi_-(\lambda)$  — устойчив, то, с одной стороны, имеем  $\psi_-(A^*)y_0 \in K^*$ . С другой стороны, как нетрудно видеть,  $\psi_-(A^*)y_0 \in K_+(A^*)$ , чего быть не может.

Таким образом,  $K^* \subset K_-(A^*)$ , то в силу (3)  $K^* \subset K_+(A)$ . Следовательно,  $K_+(A) \subset \bar{K}$ .

Теорема доказана.

На основании теоремы [1] и теоремы 1 немедленно вытекает следующее утверждение.

**Теорема 2.** Для того чтобы автономная система

$$\frac{dx}{dt} = Ax = \varphi(u), \quad x \in R_n, \quad u \in \Omega \subset R_m,$$

$$\exists u_0 \in \Omega : \varphi(u_0) = 0$$

была локально  $\varepsilon$ -управляемой, необходимо и достаточно, чтобы корневое подпространство  $K_+(A)$  матрицы  $A$ , соответствующее собственным значениям  $\lambda$  с  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ , содержалось в конусе  $\bar{K}$ , порожденном множеством  $\operatorname{Co}\{\varphi(\Omega), A\varphi(\Omega), \dots, A^m\varphi(\Omega), \dots\}$ .

*Замечание 2.* Прямое доказательство этого критерия можно провести иным путем по схеме, предложенной в работе [3].

Следующая теорема показывает, что на самом деле конус  $K$  порождается конечным числом множеств.

**Теорема 3.** Для того чтобы автономная система (1)—(2) была локально  $\varepsilon$ -управляемой, необходимо и достаточно, чтобы при некотором  $m \geq 0$  конус  $\bar{K}_m$ , порожденный множеством  $\text{Co}\{\varphi(\Omega), A\varphi(\Omega), \dots, A^m\varphi(\Omega)\}$ , содержал подпространство  $K_+(A)$ .

*Доказательство. Необходимость.* Пусть система (1)—(2) является локально  $\varepsilon$ -управляемой, но тем не менее  $K_+(A) \not\subset \bar{K}_m$  для всех  $m \geq 0$ . Следовательно, для всех  $m \geq 0$  имеем  $K_m^* \subset K_-(A^*)$ . Тогда для каждого  $m \geq 0$  существует  $y_m \in K_m^*$  и  $y_m \notin K_-(A^*)$ .

Рассмотрим элемент  $z_m = \psi_-(A^*)y_m$ . Как нетрудно видеть  $z_m \neq 0$ ,  $z_m \in K_{m+q}^*$ , где  $q = \deg \psi_-(\lambda)$ , и, очевидно,  $z_m \in K_+(A^*)$ . Следовательно,  $K_m^* \cap K_+(A^*) \neq \{0\}$  для всех  $m \geq q$ .

Обозначим  $I_m = K_m^* \cap K_+(A^*)$ ,  $I_m$  является выпуклым конусом и при всех  $m \geq q$  имеем  $I_m \neq \{0\}$ . Поэтому его пересечение с единичной сферой  $V_1$  непусто:  $N_m = I_m \cap V_1 \neq \emptyset$  при всех  $m \geq q$ . Так как  $K_{m_1} \subset K_{m_2}$  при  $m_1 \leq m_2$ , то  $K_{m_2}^* \subset K_{m_1}^*$  и  $I_{m_2} \subset I_{m_1}$ . Откуда  $N_{m_2} \subset N_{m_1}$  при  $m_1 \leq m_2$ . В силу замкнутости множества  $I_m$  и компактности единичной сферы  $V_1$  множества  $N_m$  замкнуты и ограничены для всех  $m \geq q$ . Тогда

$N = \bigcap_{m=q}^{\infty} N_m$  непусто как пересечение непустых компактных, вложенных друг в друга множеств. Пусть  $z_0 \in N$ , тогда  $z_0 \neq 0$  и  $z_0 \in I = \bigcap_{m=q}^{\infty} I_m$ . Следовательно,  $z_0 \in K^*$  и  $z_0 \in K_+(A^*)$ . Отсюда вытекает, что  $K^* \cap K_+(A^*) \neq \{0\}$ , чего не может быть.

*Достаточность.* Если существует некоторое  $m \geq 0$  такое, что  $K_+(A) \subset \bar{K}_m$ , то  $K_+(A) \subset \bar{K}$ . Следовательно, в силу теоремы 2 система (1)—(2) локально  $\varepsilon$ -управляема. Теорема доказана.

В частности, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.** Пусть матрица  $A$  не имеет собственных значений  $\lambda$  с  $\text{Re } \lambda \geq 0$ . Для того чтобы система (1)—(2) была локально  $\varepsilon$ -управляемой, необходимо и достаточно, чтобы при некотором  $m \geq 0$  конус  $\bar{K}_m$  совпадал со всем пространством  $R_n$ .

**Список литературы:** 1. Коробов В. И., Шон Н. Х.  $\varepsilon$ -управляемость линейных автономных систем при наличии ограничений на управление. — Диф. уравнения, 1980, 16, № 3, с. 395—404. 2. Коробов В. И., Маринич А. П., Подольский Е. Н. Управляемость линейных автономных систем при наличии ограничений на управление. — Диф. уравнения, 1975, 11, № 11, с. 1967—1979. 3. Коробов В. И. Геометрический критерий локальной управляемости дина-

УДК 517.977.5

В. Е. КАПУСТЯН

### СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМ ПРОЦЕССОМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Задача построения оптимальных по какому-либо критерию качества регуляторов для распределенных колебательных систем имеет большое прикладное значение (например, демпфирование колебаний конструкций, подверженных внешним воздействиям) и рассматривалась в работах [5, 6]. Основной результат здесь состоит в том, что для параметров регулятора получены интегродифференциальные уравнения типа Риккати, решение которых весьма затруднительно.

Нами ставится и решается задача оптимального управления (программного и синтезированного) колебательным процессом с запаздыванием в координатах (например, колебательный процесс с упругой наследственностью [7]). Автору неизвестны работы, освещающие этот вопрос.

Рассмотрим колебательный процесс с запаздыванием вида

$$U_{tt}(x, t) = U_{xx}(x, t) + b^2 U(x, t - \tau) + g(x)p(t) + f(x, t); \quad (1)$$

$$U(0, t) = U(1, t) = 0 \quad (2); \quad U(x, t') = \varphi_0(x, t'), \quad t' \in [t_\alpha - \tau, t_\alpha];$$

$$U_t(x, t_\alpha) = \varphi_1(x), \quad (3)$$

определенный в области  $Q = \{0 \leq x \leq 1, t_\alpha \leq t \leq T\}$ .

Здесь  $\tau$  — постоянное время запаздывания;  $g(x), \varphi_1(x) \in L_2(0, 1)$ ;

$f(x, t) \in L_2(Q)$  — известное внешнее возмущение:  $\varphi_0(x, t') \in \overline{W}_2^{1,0}$ ;

$$\|\varphi_0(x, t')\|_{\overline{W}_2^{1,0}}^2 = \|\varphi_0(x, t_\alpha)\|_{W_2^1(0,1)}^2 + \int_{t_\alpha - \tau}^{t_\alpha} \|\varphi_0(x, t')\|_{W_2^1(0,1)}^2 dt';$$

$p(t) \in L_2(t_\alpha, T)$  — управляющее воздействие;

для встречающихся здесь функциональных пространств приняты стандартные обозначения [4].

Следует отметить, что при фиксированном  $p(t)$  существует единственное обобщенное решение задачи (1)—(3) как элемент пространства  $W_2^1(Q)$ . В этом можно убедиться, используя методы работы [4].

Задача оптимального управления состоит в определении  $p(t) \in L_2(t_a, T)$  такого, что функционал

$$I[p] = \int_0^1 [U^2(x, T) + U_i^2(x, T)] dx + \gamma \int_{t_a}^T p^2(t) dt, \quad \gamma = \text{const} > 0 \quad (4)$$

принимает наименьшее значение.

Построим программное управление в задаче (1)–(4). Для этого воспользуемся методом Фурье по полной ортонормированной в  $L_2(0, 1)$  системе функций спектральной задачи

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X(0) = X(1) = 0. \quad (*)$$

Тогда исходная задача принимает вид

$$\ddot{U}_i(t) = -\lambda_i^2 U_i(t) + b^2 U_i(t - \tau) + g_i p(t) + f_i(t); \quad (5)$$

$$U_i(t') = \varphi_{0i}(t'), \quad t' \in [t_a - \tau, t_a]; \quad \dot{U}_i(t_a) = \varphi_{1i}, \quad i = 1, 2, \dots; \quad (6)$$

$$I[p] = \sum_{i=1}^2 [U_i^2(T) + \dot{U}_i^2(T)] + \gamma \int_{t_a}^T p^2(t) dt, \quad (7)$$

где  $\varphi$  — коэффициенты Фурье соответствующих функций по системе (\*).

Решение задачи (5)–(6) при фиксированном  $i \in N$  имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{U}_i(t) = \Phi_i(t - t_a) \bar{U}_i(t_a) + \sum_{j=1}^2 \int_{t_a}^{t_a + \tau_j} \Phi_i(t - \xi) A_{ij} \bar{U}_i(\xi - \tau_j) d\xi + \\ + \int_{t_a}^t \Phi_i(t - \xi) [B_i p(\xi) + C f_i(\xi)] d\xi, \end{aligned} \quad (8)$$

где матричная функция  $\Phi_i(t)$  определяется из решения уравнения

$$\dot{\Phi}_i(t) = \sum_{l=1}^2 A_{il} \Phi_i(t - \tau_l), \quad \Phi_i(0) = E, \quad \Phi_i(-t) = 0; \quad (9)$$

здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} \bar{U}_i^* = \{U_{1i} = U_{1i}, \dot{U}_i = U_{2i}\}, \quad \tau_1 = 0, \quad \tau_2 = \tau; \quad U_{1i}(t') = \varphi_{0i}(t'), \\ U_{2i}(t_a) = \varphi_{1i}; \end{aligned}$$

$$A_{i1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_i^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{i2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ g_i \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_i = \left[ \Phi_i^{kl}(t) \right]_{k,l=1,2}.$$

Решая (9), получим

$$\Phi_i^{12}(t) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^l (k+l)! b^{2k} (t-k\tau)^{(k-l)}}{k! l! (k-l)! 2^{k+l} \lambda_i^{k+l+1}} [q(k+l+3) \times \\ \times \cos \lambda_i (t-k\tau) + q(k+l) \sin \lambda_i (t-k\tau)] \eta(t-k\tau);$$

$$\Phi_i^{11}(t) = \Phi_i^{22}(t) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^l (k+l)! b^{2k} (t-k\tau)^{(k-l-1)}}{k! l! (k-l)! 2^{k+l} \lambda_i^{k+l+1}} \times \\ \times [\cos \lambda_i (t-k\tau) ((k-l)q(k+l+3) + \lambda_i (t-k\tau)q(k+l)) + \\ + \sin \lambda_i (t-k\tau) ((k-l)q(k+l) - \lambda_i (t-k\tau)q(k+l+3))] \eta(t-k\tau);$$

$$\Phi_i^{21}(t) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^l (k+l)! b^{2(k+1)} (t-(k+1)\tau)^{(k-l)}}{k! l! (k-l)! 2^{k+l} \lambda_i^{k+l+1}} [q(k+l+3) \times \\ \times \cos \lambda_i (t-(k+1)\tau) + q(k+l) \sin \lambda_i (t-(k+1)\tau)] \eta(t-(k+1)\tau) - \\ - \lambda_i^2 \Phi_i^{12}(t),$$

где  $m = \left[ \frac{T-t_a}{\tau} \right]$  — целая часть числа;

$$q(z) = \begin{cases} 0, z - \text{нечетное} \\ -1, z = 4r - 2, r \in N; \\ 1, z = 4(r-1), r \in N, (t-k\tau)^{-l} \equiv 0, l > 0; \end{cases}$$

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0. \end{cases}$$

С учетом принятых обозначений вариация функционала (7) принимает вид

$$\delta I = 2 \sum_{l=1}^{\infty} [U_{1l}(T) \delta U_{1l}(T) + U_{2l}(T) \delta U_{2l}(T) + 2\gamma \int_{t_a}^T p(t) \delta p(t) dt], \quad (10)$$

где

$$\delta U_{1l}(t) = g_l \int_{t_a}^t \Phi_i^{12}(t-\xi) \delta p(\xi) d\xi;$$

$$\delta U_{2l}(t) = g_l \int_{t_a}^t \Phi_i^{11}(t-\xi) \delta p(\xi) d\xi.$$

Тогда необходимые и достаточные условия оптимальности выражаются в виде следующего уравнения Фредгольма [2]:

$$p(t) + \int_{t_a}^T K(t, \xi) p(\xi) d\xi = f(t), \quad (11)$$

где  $K(t, \xi) = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^{\infty} g_i^2 \mu_i(\xi, t);$

$$f(t) = -\frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^{\infty} g_i \{ \varphi_{0i}(t_a) [\Phi_i^{11}(T - t_a) \Phi_i^{12}(T - t) + \Phi_i^{21}(T - t_a) \Phi_i^{11}(T - t)] + \varphi_{1i}(t_a) \mu_i(t_a, t) + b^2 \int_{t_a}^{t_a + \tau} \varphi_{0i}(\xi - \tau) \mu_i(\xi, t) d\xi + \int_{t_a}^T f_i(\xi) \mu_i(\xi, t) d\xi.$$

$$\mu_i(\xi, t) = \Phi_i^{12}(T - \xi) \Phi_i^{12}(T - t) + \Phi_i^{11}(T - \xi) \Phi_i^{11}(T - t).$$

**Теорема.** Уравнение (11) в пространстве  $L_2(t_a, T)$  имеет единственное решение.

Действительно, оператор  $A$ , определяемый формулой

$$Ap = p(t) + \int_{t_a}^T K(t, \xi) p(\xi) d\xi,$$

действует из  $L_2(t_a, T)$  в  $L_2(t_a, T)$ , так как  $\int_{t_a}^T \int_{t_a}^T K^2(t, \xi) dt d\xi < \infty,$

$$\int_{t_a}^T f^2(t) dt < \infty.$$

Очевидно, что  $A$  — симметричен и положительно определен. Отсюда и из методов математической физики [1] следует утверждение теоремы. Так как точное решение уравнения (11) получить не представляется возможным, то рассмотрим его приближенное решение, взяв в рядах определяющих функций  $K(t, \xi), f(t)$  конечное число слагаемых, т. е. рассмотрим уравнение

$$p_n(t) + \int_{t_a}^T K_n(t, \xi) p_n(\xi) d\xi = f_n(t). \quad (12)$$

При любом  $n \in N$  уравнение (12) имеет единственное решение в  $L_2(t_a, T)$ , а оператор, определяемый формулой

$$A_n p_n = p_n(t) + \int_{t_a}^T K_n(t, \xi) p_n(\xi) d\xi,$$

положительно определен.

Тогда оценка меры уклонения  $p_n(t)$  от  $p(t)$  задается неравенством  $\|p - p_n\| \leq \|f - f_n\| + \|K - K_n\| \|f\|$  (13).

Из изложенного следует, что

$$\|p - p_n\|_{L_2(t_a, T)} < o_1(n), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} o_1(n) = 0;$$

$$|J[p] - J[p_n]| < o_2(n), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} o_2(n) = 0.$$

( $o_1(n)$ ,  $o_2(n)$  здесь не приводятся из-за их громоздкости). Следует отметить, что скорость сходимости указанных величин определяется скоростью сходимости рядов для функций  $f(t)$ ,  $K(t, \xi)$ .

Так как уравнение (12) имеет вырожденное ядро, то можем записать

$$p_n(t) = \sum_{i=1}^n [\varphi_{0i}(t_a) r_i^1(t, t_a) + \varphi_{1i} r_i^2(t, t_a) + b^2 \int_{t_a}^{t_a + \tau} \varphi_{0i}(\xi - \tau) R_i \times \\ \times (t, t_a, \xi) d\xi + \int_{t_a}^T f_i(\xi) R_i(t, t_a, \xi) d\xi], \quad (14)$$

где  $r_i^j(t, t_a)$ ,  $j = \overline{1, 2}$ ;  $R_i(t, t_a, \xi)$  — известные функции.

Приближенное программное управление (14) в исходной задаче является оптимальным управлением в следующей конечномерной задаче:

$$\ddot{U}_i(t) = -\lambda_i^2 U_i(t) + b^2 U_i(t - \tau) + g_i p(t) + f_i(t); \quad (15)$$

$$U_i(t') = \varphi_{0i}(t'), \quad t' \in [t_a - \tau, t_a]; \quad \dot{U}_i(t_a) = \varphi_{1i}, \quad i = \overline{1, n}; \quad (16)$$

$$I_n = \sum_{i=1}^n [U_i^2(T) + \dot{U}_i^2(T)] + \gamma \int_{t_a}^T p^2(t) dt. \quad (17)$$

Действительно, решая задачу (15) — (17) так же, как и исходную, для управления  $p(t)$  получим уравнение (12), т. е.  $p(t) = p_n(t)$ . Подход Н. Н. Красовского [3] к получению синтезированных управлений по известным программным управлениям обобщается здесь на класс задач (15) — (17), так как управле-

ние (14) является функцией от  $t_a$ ,  $\varphi_{0i}(t_a)$ ,  $\varphi_{1i}(t_a)$  и функционалом от  $\varphi_{0i}(t')$ ,  $t' \in [t_a - \tau, t_a]$  Тогда управление

$$p_n = \sum_{i=1}^n [U_i(t) r_i^1(t, t) + U_i(t) r_i^2(t, t) + b^2 \int_t^{t+\tau} U_i(\xi - \tau) R_i(t, t, \xi) d\xi + \int_t^T f_i(\xi) R_i(t, t, \xi) d\xi] \quad (18)$$

будет синтезированным в задаче (15)–(17), ибо траектории системы (15)–(16) с управлениями (18) и (14) совпадают (здесь мы воспользовались принципом оптимальности), а система (15)–(16) с управлением (18) имеет единственное решение (полученная при этом система приводится к эквивалентной системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода).

**О п р е д е л е н и е.** Приближенное синтезированное управление в исходной задаче имеет вид

$$\bar{p}_n(t) = \int_0^1 r_n^1(t, y) \bar{U}^n(y, t) dy + \int_0^1 r_n^2(t, y) \bar{U}_t^n(y, t) dy + b^2 \int_t^{t+\tau} \int_0^1 R_n \times \times (t, \xi, y) \bar{U}^n(y, \xi - \tau) dy d\xi + \int_t^T \int_0^1 R_n(t, \xi, y) f(y, \xi) dy d\xi, \quad (19)$$

где функция  $\bar{U}^n(x, t)$  является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{tt}^n(x, t) = & \bar{U}_{xx}^n(x, t) + b^2 \bar{U}^n(x, t - \tau) + g(x) \left[ \int_0^1 r_n^1(t, y) \bar{U}^n(y, t) dy + \right. \\ & \left. + \int_0^1 r_n^2(t, y) \bar{U}_t^n(y, t) dy + b^2 \int_t^{t+\tau} \int_0^1 R_n(t, \xi, y) \bar{U}^n(y, \xi - \tau) dy d\xi + \right. \\ & \left. + \int_t^T \int_0^1 R_n(t, \xi, y) f(y, \xi) dy d\xi + f(x, t); \right] \quad (20) \end{aligned}$$

$$\bar{U}^n(0, t) = \bar{U}^n(1, t) = 0; \quad (21)$$

$$\bar{U}^n(x, t') = \varphi_0(x, t'), \quad t' \in [t_a - \tau, t_a]; \quad \bar{U}_t^n(x, t_a) = \varphi_1(x); \quad (22)$$

здесь введены обозначения

$$r_n^1(t, x) = \sum_{i=1}^n r_i^1(t, t) X_i(x), \quad r_n^2(x, t) = \sum_{i=1}^n r_i^2(t, t) X_i(x),$$

$$R_n(t, \xi, x) = \sum_{i=1}^n R_i(t, t, \xi) X_i(x).$$

Используя метод Фурье, легко показать, что

$$\|p - \bar{p}_n\| < o_1(n), \quad |I[p] - I[\bar{p}_n]| < o_2(n).$$

*Замечание.* Управление колебательным процессом с упругой наследственностью. Рассмотрим управляемый процесс, описываемый в области  $Q$  соотношениями [7]

$$U_{tt}(x, t) = U_{xx}(x, t) + \bar{b}^2 U_{xx}(x, t - \tau) + g(x)p(t) + f(x, t); \quad (23)$$

$$U(0, t) = U(1, t) = 0; \quad (24)$$

$$U(x, t') = \varphi_0(x, t'), \quad t' \in [t_a - \tau, t_a]; \quad U_t(x, t_a) = \varphi_1(x). \quad (25)$$

Минимизируемый функционал зададим формулой (4). Оказывается, что формально задача решается по вышеизложенным формулам, так как остается справедливым представление (8), в котором вместо  $b^2$  следует подставить  $-\lambda_i^2 \bar{b}^2$ . Тогда, например, функция  $\Phi_i^{12}(t)$  принимает вид

$$\Phi_i^{12}(t) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^{l+k} (k+l)! \lambda_i^k \bar{b}^{2k} (t - k\tau)^{(k-l)}}{k! l! (k-l)! 2^{k+l} \lambda_i^{l+1}} \times$$

$$\times [q(k+l+3) \cos \lambda_i(t - k\tau) + q(k+l) \sin \lambda_i(t - k\tau)] \eta(t - k\tau).$$

Для того чтобы избавиться от формализма при решении задачи (23) — (25), (4), по полученным выше формулам, на данные задачи следует наложить ограничения

$$\varphi_0(x, t') \in \bar{W}_2^{m+1,0}, \quad \|\varphi_0(x, t')\|_{\bar{W}_2^{m+1,0}}^2 = \|\varphi_0(x, t_a)\|_{W_2^{m+1}(0,1)}^2 +$$

$$+ \int_{t_a - \tau}^{t_a} \|\varphi_0(x, t')\|_{W_2^{m+2}(0,1)}^2 dt'; \quad g(x), \varphi_1(x) \in W_2^m(0, 1);$$

$$f(x, t) \in W_2^{m,0}(Q).$$

Действительно, при указанных ограничениях приближенные (программные и синтезированные) управления сходятся к точным как по норме пространства  $L_2(t_a, T)$ , так и по функционалу. Из этого замечания следует как непохоже «ведут себя» колебательные процессы с запаздыванием в зависимости от того, в какой член уравнения оно входит.

Список литературы: 1. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978. — 463 с. 2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 542 с. 3. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 475 с. 4. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. — 407 с. 5. Рахимов М. О. О синтезе оптимального управления упругими колебаниями: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—Днепропетровск, 1978.—130 с. 6. Сиразетдинов Т. К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1977. — 479 с. 7. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971.—296 с. 8. Янушевский Р. Т. Управление объектами с запаздыванием.— М.: Наука, 1978.—416 с.

Поступила в редколлегию 06.01.80.

УДК 519.3 : 531/534

Н. А. АВРАМЧУК

### К ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В вариационной задаче Майера о выведении точки переменной массы  $m$  на заданную траекторию в центральном поле силы тяжести рассмотрим в качестве управлений:  $\theta$ —угол наклона силы тяги к горизонту (угол тангажа) и  $\beta$ -массовый расход, причем  $0 \leq \beta \leq \bar{\beta}$ .

Считая угловую скорость вращения Земли  $\Omega$  малым параметром ( $\Omega \approx 10^{-4}$ ) и раскладывая координаты гравитационного ускорения по степеням этого параметра, систему уравнений движения запишем в виде

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v;$$

$$\ddot{u} = \frac{c\beta}{m} \cos \theta + \Omega(2\dot{\theta} - k g_0 x) + 3\Omega^2 k^2 g_0 x y + \dots;$$

$$\ddot{v} = \frac{c\beta}{m} \sin \theta - g_0 - 2\Omega(u - k g_0 y) - 3\Omega^2 k^2 g_0 \left( y^2 - \frac{1}{2} x^2 \right) + \dots;$$

$$\dot{m} = -\beta, \quad 0 \leq \beta \leq \bar{\beta}. \quad (1)$$

Здесь  $c = \text{const}$  — относительная скорость истечения;  $u, v$  — проекции вектора скорости на координатные оси;  $g_0$  — ускорение силы тяжести на поверхности Земли;  $k$  — коэффициент пропорциональности величин  $\Omega$  и  $\frac{1}{r}$ , где  $r$  — радиус Земли.

Граничными условиями являются [2, 4]:  $x(0) = x_0, y(0) = y_0, u(0) = u_0, v(0) = v_0, m(0) = m_0, m(T) = m_T, \varphi(x_T, y_T) = 0,$

$$\vartheta_T \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_T + u_T \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_T = 0. \quad (2)$$