

Климова И.В.

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ ТРЕУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Рассмотрим стержень с равносторонним треугольным сечением (рис.

1).

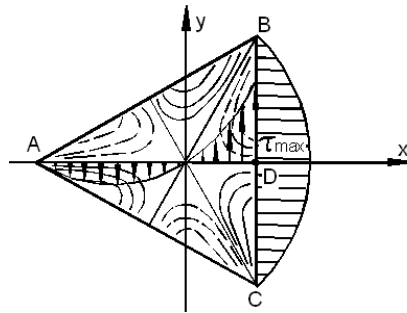


Рис. 1

Контур сечения определяется уравнением

$$x^2 + y^2 - \sqrt{3}xy = 0$$

(1)

Примем функцию депланации ϕ в виде

$$\phi = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy$$

(2)

Она удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta \phi = 0$ и поэтому является решением задачи Сен-Венана о кручении. Подставляя (2) в граничные условия, получаем:

$$2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$$

откуда следует:

$$\alpha = -\frac{\gamma}{2}, \quad \beta = \frac{\gamma}{2}$$

(3)

Если в (3) подставить $x = \sqrt{3}y$, $y = y$, то получим:

$$-\frac{\gamma}{2}(\sqrt{3}y)^2 + \frac{\gamma}{2}y^2 + \gamma(\sqrt{3}y)y = 0$$

(4)

Первая часть полученного уравнения (4) представляет собой произведение левых частей уравнений сторон равностороннего треугольника (рис. 1). Поэтому контурные условия всегда выполняются.

Вычислим геометрическую жёсткость:

$$J_p = \frac{1}{3} \int_V r^2 dV$$

(5)

Интегрирование по y ведётся от $-\frac{\sqrt{3}}{2}x$ до $\frac{\sqrt{3}}{2}x$ и по x от нуля до

$$\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\frac{2}{\sqrt{3}}$. В результате получим: $J_p = \frac{\sqrt{3}}{80} a^4$, где a — сторона треугольника.

Относительный угол поворота:

Вычисляем напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\epsilon_x + \nu \epsilon_y \right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\nu \epsilon_x + \epsilon_y \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{aligned}$$

Полагая получаем:

Эпюра для $y = 0$ показана на рис. 1

Литература:

1. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости. Физматгиз, 1959.