

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Фізичний факультет
Кафедра фізики низьких температур

«Допущено до захисту»

Оцінка «_____»

В.о. зав. кафедри фізики
низьких температур проф.
Шкловський В.О. _____
“___” грудня 2024 р.

Голова ЕК:
член-кореспондент НАН України,
д-р фіз.-мат. наук,
Сорокін О. В. _____
19 грудня 2024 р.

Чикіна Олена Леонідівна

**Джозефсонівські вихори на сходинках нульового поля вольт-амперної
характеристики довгого контакту Джозефсона**

Кваліфікаційна робота на здобуття
освітнього ступеня «Магістр»
спеціальність 104 – «фізика та астрономія»
освітньо-професійна програма «Фізика»

Науковий керівник:
професор кафедри фізики низьких
температур доктор фіз.-мат. наук
Гриб О. М.

Харків 2024

Анотація

Чикіна О. Л. «Джозефсонівські вихори на сходах нульового поля вольт-амперної характеристики довгого контакту Джозефсона» . - Рукопис

Кваліфікаційна робота на здобуття освітньо-кваліфікаційного рівня «Магістр» за спеціальністю 104 – «фізика та астрономія» – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 2024. – С.37 , Рис. 10.

На основі розрахунків в рамках резистивно-ємнісної моделі довгого контакту Джозефсона знайдено, що залежність напруги на контакті від струму такого контакту з неоднорідним розподілом критичного струму має сходи (сходи нульового поля). Напруги, при яких знаходяться ці сходи, відповідають напругам парних сходинок Фіске. В роботі показано, що імпульси напруги, які виникають на сходах, є джозефсонівськими вихорами. Знайдено, що перша сходи на залежності напруги на контакті від струму задовільно апроксимується за допомогою моделі, яка приймає до уваги тільки рух джозефсонівських вихорів у нескінченно довгому контакті.

Ключові слова: резонансні сходи, контакти Джозефсона, джозефсонівські вихори, сходи Фіске.

Abstract

Chykina O. L. «Josephson vortices at zero-field steps of IV-characteristics of the long Josephson junction». – Manuscript.

Qualifying work for educational and qualification level – «Master», direction of training 104 – “physics and astronomy”. – Kharkiv National V. N. Karazin University, 2024, – P. 37 , Fig. 10.

Calculations of the IV- characteristic of a long Josephson junction with a non-uniform distribution of the critical current within the framework of the resistive-capacitive model of a long junction showed the existence of steps in the IV-characteristic (so-called zero-field steps). The voltages at which the zero-field steps are located correspond to the voltages of even Fiske steps. It is shown that the voltage pulses that arise at the zero-field steps are Josephson vortices. It was found that the first zero-field step was satisfactorily approximated by a model that takes into account only the motion of Josephson vortices in an infinitely long junction.

Keywords: resonant steps, Josephson junctions, Josephson vortices, Fiske steps.

ЗМІСТ

ВСТУП	5
1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ	7
1.1 Основне рівняння електродинаміки контакту Джозефсона.....	7
1.2 Рішення рівняння синус-Гордона для контакту нескінченної довжини.....	9
1.3 Модель Фултона-Дайнса руху вихорів.....	11
1.4 Постановка задачі.....	13
2 МОДЕЛЬ ДОВГОГО КОНТАКТУ	14
2.1 Рівняння збереження струму та квантування магнітного потоку.....	14
2.2 Розрахунок залежності $V = f(I_b)$ і параметри контакту.....	16
3 РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ ТА ОБГОВОРЕННЯ	18
3.1 Функції $\frac{V}{(nV_c)} = f(I/(nI_{ca}))$ для довгого контакту з рівномірним розподілом критичних струмів.....	18
3.2 Функції $\frac{V}{(nV_c)} = f(I/(nI_{ca}))$ для довгого контакту з нерівномірним розподілом критичних струмів.....	20
3.3 Коливання напруги на першій сходинці	22
3.4 Залежність $\left(\frac{\lambda}{\lambda_J}\right)^2 = f\left(\left(\frac{V}{V_{p=1}}\right)^2\right)$ на першій сходинці.....	23
3.5 Зміни різниці фаз параметра порядку з часом.....	24
3.6 Залежність $\frac{V}{(nV_c)} = f(I/(nI_{ca}))$ на першій сходинці	26
3.7 Випромінювання довгого контакту.....	28
3.8 Рух вихорів на інших сходинках.....	32
ВИСНОВКИ	35
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	36

ВСТУП

Протягом останнього десятиліття дослідження сходинок нульового поля (сходинок на залежності усередненої напруги від струму зміщення, які утворюються без впливу магнітного поля) у довгих джозефсонівських контактах, набув актуальності завдяки успішним експериментам з отримання когерентного випромінювання довгих внутрішніх джозефсонівських контактів у високотемпературних надпровідниках [1-5]. Довгими контактами є контакти, довжина яких перевищує подвійну глибину проникнення магнітного поля в контакт [6]. Когерентне випромінювання спостерігалось в експериментах на згаданих вище сходинок [1, 2]. Було зроблено кілька спроб теоретичного пояснення цього ефекту [7-10], однак, єдиної теорії щодо пояснення як появи самих сходинок, так і ефекту когерентного випромінювання на них в даний час не існує. В роботах [11-16] було зауважено, що на залежності усередненої напруги від струму зміщення довгого контакту утворюються сходинок в тому разі, коли розподіл критичних струмів вздовж контакту неоднорідний. Цей метод формування сходинок застосовано в даній роботі. Відомо, що сходинок без прикладеного до контакту магнітного поля виникають при напругах, що співпадають з парними сходиноками Фіске і пов'язані з модами геометричних резонансів та появою стоячих хвиль напруги в контакті [6, 17]. Однак, формування цих сходинок пов'язано з періодичним рухом квантів магнітного потоку в контакті (джозефсонівських вихорів) від одного кінця контакту до іншого [18]. Аналітичний опис такої вольт-амперної характеристики можна зробити, прийнявши кілька припущень, які значно обмежують сферу застосування відповідних теорій [6, 19-21]. Однак, існує приблизний простий підхід для опису вольт-амперної характеристики довгого контакту на першій сходинок в контакті нескінченної довжини [18, 22]. Згідно цьому підходу, дисипацію енергії в одиницю часу, пов'язану з рухом джозефсонівського вихору,

пов'язують з дією деякого ефективного опору контакту, так що залежність напруги на контакті від струму формується як звичайна омічна залежність, у якому названий ефективний опір грає роль опору довгого контакту [18]. В описаному підході вся залежність усередненої напруги на контакті від струму зміщення повністю визначена тільки одним каналом дисипації, а саме рухом джозефсонівських вихорів. Цей підхід було використано в даній роботі для того, щоби перевірити, чи описуються сходинки єдино дисипацією енергії при руху джозефсонівських вихорів, оскільки отримати сходинки можна і за допомогою гармонічних хвиль [22].

Мета досліджень – встановлення характеру коливань напруги і механізму формування вольт – амперної характеристики на першій сходинці.

Об'єкт досліджень – електричні властивості довгого контакту Джозефсона.

Предмет дослідження – залежність усередненої напруги від струму зміщення довгого контакту при напругах, близьких до першої сходинки.

Метод дослідження – моделювання довгого контакту Джозефсона за допомогою системи диференціальних рівнянь і вирішення цієї системи чисельним методом Рунге-Кутта. Робоча гіпотеза – припущення, що джозефсонівські вихори в довгому контакті кінцевої довжини описуються такими самими виразами, як у нескінченному контакті.

В першому розділі роботи наведено вивід рівняння синус-Гордона та його рішення. В другому розділі наведено опис моделі довгого контакту і методи розрахунків вольт-амперної характеристики. В третьому розділі наведено результати розрахунків та їх обговорення. В підрозділах 3.1-3.6 частково використані результати робіт [23, 24], написаних в ході проведення досліджень. Особистий внесок автора був вирішальним в проведенні розрахунків, результати яких наведено в кваліфікаційній роботі, а також в обробці та інтерпретації результатів. Автор також доповів результати роботи на міжнародній конференції

[23]. Робота виконана на кафедрі фізики низьких температур фізичного факультету Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1 Основне рівняння електродинаміки контакту Джозефсона

Контактом Джозефсона називається конструкція, яка складається з двох надпровідників, розділених прошарком матеріалу, який не має надпровідних властивостей. Якщо прошарок достатньо тонкий, то через нього можливе тунелювання куперівських пар [6]. Якщо таким прошарком є діелектрик, то його товщина не повинна перевищувати 3 нм. Надпровідний струм куперівських пар (або надструм) у контакті Джозефсона може йти без прикладеної до контакту різниці потенціалів (але, зрозуміло, при наявності джерела струму, який приєднано до контакту). Густина надструму через контакт визначається виразом

$$J = J_c \sin \varphi,$$

(1.1)

де J_c – густина критичного струму контакту, φ – різниця фаз хвильової функції куперівських пар на берегах контакту. Якщо до контакту прикладена різниця потенціалів V , то різниця фаз φ змінюється з часом t :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{\Phi_0} V, \quad (1.2)$$

де $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ – квант магнітного потоку. Вирази (1.1) та (1.2) називаються першим та другим співвідношеннями Джозефсона, відповідно. З виразів (1.1) та (1.2) слідує закон збереження загальної густини струму J_b через контакт, в якому враховано не тільки густина надструму (1.1), але і густина струму квазічастинок:

$$J_b = J_c \sin \varphi + \frac{V}{R_s}, \quad (1.3)$$

де R_s – електричний опір одиниці площі контакту. Можна виразити J_b через різницю фаз на берегах контакту:

$$J_b = J_c \sin \varphi + \frac{\Phi_0}{2\pi R_s} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Рівняння (1.3), (1.4) інакше називаються резистивною моделлю контакту.

Розглянемо контакт Джозефсона у магнітному полі \vec{B} . Розташуємо координатні осі так, щоби вісь z була перпендикулярна площині контакту, а вектор магнітного поля \vec{B} знаходився в площині xy . Тоді похідні фази φ хвильової функції куперіських пар по координатам x та y дорівнюють [6]:

$$\frac{d\varphi(x,y,t)}{dx} = \frac{2\pi}{\Phi_0} B_y d, \quad (1.5)$$

$$\frac{d\varphi(x,y,t)}{dy} = -\frac{2\pi}{\Phi_0} B_x d, \quad (1.6)$$

де B_x, B_y – компоненти магнітного поля в напрямках x та y , $d = 2\lambda_L + d_1$, λ_L – лондонівська глибина проникнення магнітного поля в надпровідні електроди контакту, d_1 – товщина діелектричного бар'єру між надпровідними електродами. Вирази (1.5) та (1.6) разом з другим співвідношенням Джозефсона (1.2) складають єдину систему відгуку різниці фаз на берегах контакту Джозефсона на компоненти вектор-потенціалу електромагнітного поля. З виразів (1.5), (1.6) знаходимо значення компонент магнітного поля:

$$B_y = \frac{\Phi_0}{d \cdot 2\pi} \frac{d\varphi(x,y,t)}{dx}, \quad (1.7)$$

$$B_x = -\frac{\Phi_0}{d \cdot 2\pi} \frac{d\varphi(x,y,t)}{dy}. \quad (1.8)$$

Для знаходження зв'язку між надструмом та магнітним полем використаємо рівняння Максвелла:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\vec{J}}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1.9)$$

де c – швидкість світла в вакуумі, ε_0 – діелектрична проникність вакууму, $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$, ε_r – відносна діелектрична проникність діелектрика, \vec{E} – електричне поле в діелектрику. Записане в компонентах вздовж координатних осей рівняння (1.9) виглядає так:

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{J_z}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial D_z}{\partial t}, \quad (1.10)$$

де $D_z = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r V}{d_1}$. Якщо через контакт протікає надструм J , то, підставивши у рівняння (1.10) вирази (1.1) замість компоненти струму J_z , а також вирази (1.2), (1.7), (1.8), отримуємо:

$$\frac{d^2 \varphi(x,y,t)}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi(x,y,t)}{dy^2} - \frac{1}{\underline{c}^2} \frac{\partial^2 \varphi(x,y,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda_j^2} \sin \varphi(x,y,t), \quad (1.11)$$

$$\underline{c} = c \left(\frac{d_1}{\varepsilon_r d} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.12)$$

$$\lambda_j = \left(\frac{\Phi_0 \varepsilon_0 c^2}{2\pi J_c d} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.13)$$

де $C_s = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{d_1}$ – ємність контакту на одиницю площі, \underline{c} – швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль в контакті, λ_j – глибина проникнення магнітного поля в контакт. Якщо через контакт тече струм J_b , то, підставивши вираз (1.4) замість J_z в (1.10), отримуємо таке рівняння:

$$\frac{d^2 \varphi(x,y,t)}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} - \frac{1}{\underline{c}^2} \frac{\partial^2 \varphi(x,y,t)}{\partial t^2} - \frac{\beta}{\underline{c}^2} \frac{\partial \varphi(x,y,t)}{\partial t} = \frac{1}{\lambda_j^2} \left[\sin \varphi(x,y,t) - \frac{I_b}{I_c} \right], \quad (1.14)$$

де $\beta = \frac{1}{(R_s C_s)}$ – константа затухання. Рівняння (1.11) та (1.14) називаються основними рівняннями електродинаміки контакту Джозефсона. Рівняння (1.11) інакше називається рівнянням синус-Гордона [6]. Оскільки ми розглядаємо квазіодновимірний випадок (тобто, $\varphi(x,t)$), то в подальшому будемо використовувати рівняння (1.11) та (1.14) без члену $\frac{d^2 \varphi(x,y,t)}{dy^2}$:

$$\frac{d^2 \varphi(x,t)}{dx^2} - \frac{1}{\underline{c}^2} \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda_j^2} \sin \varphi(x,t), \quad (1.15)$$

$$\frac{d^2 \varphi(x,t)}{dx^2} - \frac{1}{\underline{c}^2} \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\beta}{\underline{c}^2} \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{\lambda_j^2} \left[\sin \varphi(x,t) - \frac{I_b}{I_c} \right]. \quad (1.16)$$

1.2 Рішення рівняння синус-Гордона для контакту нескінченної довжини.

Рівняння синус-Гордона (1.15) має багато типів рішень, які відповідають «руху» різниці фаз хвильової функції куперівських пар вздовж контакту (нагадаємо, що ми розглядаємо квазіодновимірний випадок). Познайомитися з найпростішими аналітичними рішеннями рівняння синус-Гордона (1.15) та класифікацією цих рішень можна при розгляді гіпотетичного випадку контакту Джозефсона нескінченної довжини [6]. Одне з рішень рівняння (1.15) для такого контакту має вигляд хвилі постійного профілю (або хвилі, що біжить):

$$\varphi = \varphi_r(x - ut), \quad (1.17)$$

де u – швидкість хвилі. Для знаходження рішення рівняння (15) зробимо заміну змінних:

$$\xi = x - ut. \quad (1.18)$$

Тоді рівняння (1.15) без члена, який описує затухання, можна записати так:

$$\frac{d^2 \varphi_r(\xi)}{d\xi^2} (1 - u^2) = \sin \sin \varphi_r(\xi). \quad (1.19)$$

В формальне рішення рівняння (1.19) фаза $\varphi_r(\xi)$ входить в еліптичний інтеграл:

$$\int_0^{\varphi_r} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(E - \cos\varphi)}} = \frac{\xi}{\sqrt{1-u^2}}, \quad (1.20)$$

де E – довільна константа інтегрування. Інтеграл в лівій частині (1.20) можна в окремих випадках розрахувати аналітично і, обернувши цей вираз, знайти залежність $\varphi_r(\xi)$. В залежності від значень E та u , можуть існувати різні типи рішень (1.20). Розглянемо три типи таких рішень. Перший тип рішень отримуємо при $E=1$, $|u| < 1$. В цьому випадку значення φ_r дорівнює:

$$\varphi_r = 4tg^{-1} \left[e^{\pm \frac{\xi}{\sqrt{1-u^2}}} \right]. \quad (1.21)$$

Це рішення представляє собою односолітонне рішення, причому знаки «+» та «-» відповідають руху солітона (або кінка) та антисолітона (антикінка) відповідно.

Ці односолітонні рішення відповідають руху джозефсонівського вихору та антивихору, відповідно.

Другий тип рішень отримуємо, коли $E > 1$, $u < 1$. В цьому випадку рішення для φ_r дорівнює [6]:

$$\varphi_r = \cos^{-1} \left[2cd^2 \left(\frac{\xi}{\gamma\sqrt{1-u^2}} \right) - 1 \right], \quad (1.22)$$

де cd – еліптична функція з параметром $\gamma = \frac{2}{(E+1)}$. Це рішення відповідає ґратці джозефсонівських вихорів.

Для третього типу рішень, коли $-1 < E < 1$, $|u| > 1$, рішення для φ_r дорівнює [6]:

$$\varphi_r = \sin^{-1} \left[k \cdot \operatorname{sn} \left(\left| \frac{\xi}{\sqrt{1-u^2}} \right| k \right) \right], \quad (1.23)$$

де sn – еліптична функція з параметром $k > 1$. Це рішення відповідає хвилям з великою амплітудою. В граничному випадку при $E \rightarrow 1$, $\varphi_r \rightarrow 0$, рішення зводиться до хвиль з малою амплітудою (так звані «плазмові хвилі»).

1.3 Модель Фултона-Дайнса руху вихорів

Відомо, що положення сходинок залежності напруги на контактї від струму збігаються з положеннями напруги V_p парних сходинок Фіске (які також збігаються з напругами, що відповідають частотам геометричних резонансів контакту) [6]:

$$V_p = \frac{\Phi_0 c}{D} p, \quad (1.24)$$

де D – це довжина контакту, Φ_0 – це квант магнітного потоку, $p=1,2,\dots$, c – швидкість світла в довгому контактї. У подальшому ми розглядаємо лише випадок $p=1$. При напругах $V < V_{p=1}$ квант магнітного потоку періодично переміщується від одного кінця контакту до іншого зі швидкістю v ($v < c$), тому справедливий такий вираз [18]:

$$V = \frac{\Phi_0 v}{D}. \quad (1.25)$$

Для опису руху джозефсонівського вихору було використано відоме аналітичне розв'язання рівняння Феррела-Прейнджа [21]:

$$\varphi(x, t) = 2\sin^{-1}\operatorname{sech}\left(\frac{x-v\cdot t}{\lambda}\right) \quad (1.26)$$

$$\lambda = \lambda_J \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (1.27)$$

де t це час, $\lambda_J = \left[\frac{\Phi_0}{(2\pi\mu_0 J_c d)}\right]^{\frac{1}{2}}$, J_c – це густина критичного струму, μ_0 – магнітна проникність вакууму, $d = 2\lambda_L + t_b$, λ_L – лондонівська глибина проникнення магнітного поля, t_b – ширина бар'єру. Тоді, використовуючи друге рівняння Джозефсона $V = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, з (1.3) виходить такий вираз [18]:

$$V(x, t) = \frac{\Phi_0 v}{\pi \lambda} \operatorname{sech}\left(\frac{x-v\cdot t}{\lambda}\right). \quad (1.28)$$

Залежність напруги на контакті від струму при напрузі, близькій до $V_{p=1}$ отримується з рівності вхідної потужності $V \cdot I$ та швидкості дисипації в контакті:

$$V \cdot I = \sigma \int V^2 dx, \quad (1.29)$$

де $\sigma = \frac{1}{(R \cdot D)}$ – провідність контакту на одиницю довжини, R – електричний опір довгого контакту. Тоді, використовуючи вирази (1.2) та (1.5), отримуємо вираз для вольт – амперної характеристики при $V < V_{p=1}$ [18]:

$$I = \frac{V}{\frac{\pi^2 R}{2D} \lambda}, \quad (1.30)$$

Основні припущення, використані для виведення рівняння (1.30), полягали в тому, що форма вихору Джозефсона, а також швидкість дисипації були такими ж, як і в нескінченному контакті [18]. У даній роботі ми перевіряємо коректність виразу (1.30) для неоднорідного контакту з обмеженою довжиною. Ми записали розподіл напруги вздовж контакту на першій сходинці, обчислили значення λ при різних напругах, та підставили їх у вираз (1.30) і отримали залежність усередненої напруги від струму зміщення для цієї сходинки. Зазначимо, що така процедура визначення λ дозволила нам уникнути обчислення швидкостей v , які

були необхідні для визначення λ з використанням рівняння (1.27). Отриману залежність усередненої напруги від струму зміщення ми порівняли з тією, що була обчислена з розв'язку динамічних рівнянь.

Перевірка застосування виразу (1.30) для опису залежності усередненої по часу напруги від струму зміщення дозволить визначити, чи визначена ця залежність єдино рухом джозефсонівських вихорів. Поставлене питання актуально, оскільки сходинки без прикладеного магнітного поля можуть виникати також без участі вихорів, тобто, з участю гармонічних хвиль напруги [22].

1.4 Постановка задачі.

Як було зазначено у Вступі, мета досліджень даної роботи – встановлення характеру коливань напруги і механізму формування вольт – амперної характеристики на першій сходинці. Для досягнення поставленої мети сформульовано такі завдання:

- а) змоделювати довгий контакт Джозефсона;
- б) використовуючи розвинуту модель, розрахувати вольт – амперну характеристику контакту при напрузі, яка відповідає геометричному резонансу контакту (тобто, на першій сходинці);
- в) візуалізувати рух джозефсонівських вихорів, виміряти їх ширину і з цих даних розрахувати джозефсонівську глибину проникнення магнітного поля в контакт при різних значеннях напруги на сходинках згідно рівнянню (1.28);
- г) розрахувати значення напруги згідно виразу (1.30) з використанням значень джозефсонівської глибини проникнення магнітного поля і побудувати вольт – амперну характеристику контакту згідно теорії Фултона-Дайнса [18];
- д) порівняти вольт – амперну характеристику, розраховану згідно чисельного рішення системи рівнянь довгого контакту Джозефсона і характеристику, отриману в рамках теорії Фултона-Дайнса.

Для вирішення поставлених задач достатньо застосування простих граничних умов для довгого контакту, а саме граничних умов для довгої лінії з відкритими кінцями. Такий тип граничних умов не пов'язаний з вирішенням задач випромінювання контакту, оскільки при таких умовах високочастотні струми на кінцях контакту дорівнюють нулю і випромінювання від контакту не відбувається. Однак, представляє інтерес вивчення питання, чи синхронізовано випромінювання від різних частин довгого контакту при напругах, які відповідають сходинкам. Для вирішення цієї задачі буде застосовані спеціальні граничні умови у вигляді фіктивних додаткових контурів.

2 МОДЕЛЬ ДОВГОГО КОНТАКТУ

2.1 Рівняння збереження струму та квантування магнітного потоку.

Для математичного опису довгого контакту ми використали стандартний метод поділу контакту довжиною D на секції (рисунок 2.1) [12 - 16]. При такому

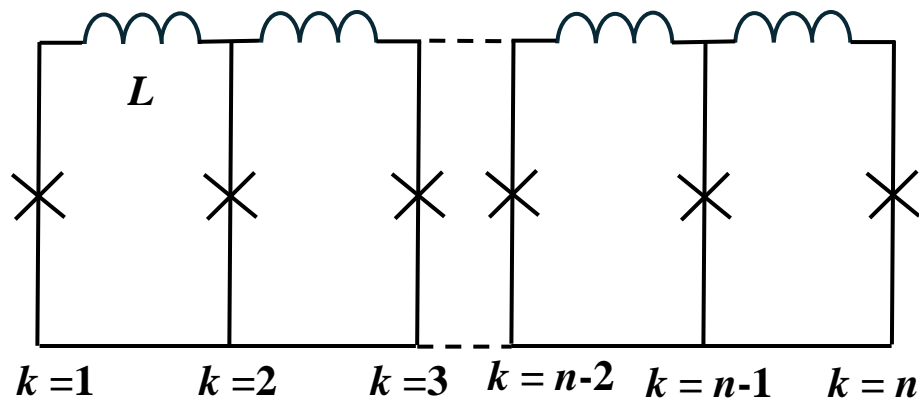


Рис. 2.1 - Довгий контакт, поділений на n «елементарних» контактів (позначені хрестиками на рисунку).

описі кожна з секцій є «елементарним» контактом Джозефсона, який описується за допомогою резистивно-ємнісної моделі контакту з критичним струмом I_{ck} , електричним опором R_k та ємністю C_k , де $k=1, \dots, n$. У високочастотній схемі

довгого контакту вважається, що "елементарний" контакт з параметрами I_{ck} і R_k знаходиться в середині секції, а відстань ζ між «елементарними» контактами дорівнює довжині секції $\zeta = \frac{D}{n}$. Петля між двома «елементарними» контактами має індуктивність L_k . У подальшому розгляді ми припускаємо, що ємності, індуктивності та характеристичні напруги V_c «елементарних» контактів не залежать від номеру контакту, тобто, для будь-якого номеру k мають місце рівності $C_k = C$, $L_k = L$, $I_{ck}R_k = V_c$. Швидкість світла в довгому контакті дорівнює $\underline{c} = \frac{\zeta}{\sqrt{LC}}$. Тоді умови збереження струму разом з умовами збереження магнітного потоку записуються так:

$$\frac{\Phi_0 C}{2\pi} \frac{d^2 \varphi_k}{dt^2} + \frac{\Phi_0}{2\pi R_k} \frac{d\varphi_k}{dt} + I_{ck} \sin \varphi_k = I_b - I_{k-1,k}^R + I_{k,k+1}^R, k = 2 \dots n - 1, \quad (2.1)$$

$$I_{k-1,k}^R L + \left[\frac{\Phi_0}{2\pi} (\varphi_{k-1} - \varphi_k) \right] = 0, k = 2 \dots n - 1, \quad (2.2)$$

де φ_k – це різниця фаз на k -му «елементарному» контакті, $I_{k-1,k}^R$ – циркулюючий струм у петлі між "елементарними" контактами з індексами $k-1$ і k .

Граничні умови для задачі аналогічні відповідним граничним умовам для довгої лінії з відкритими кінцями. Для розрахунку потужності випромінювання для виконання таких умов до кінців довгого контакту було під'єднано дві фіктивних петлі, в яких, крім «елементарних» контактів на краях, знаходилися індуктивності L_f , ємності C_f та електричні опори R_f . Значення цих параметрів забезпечували реальну частину імпедансу $Z_a \approx 377$ Ом, що відповідає імпедансу вакууму. Оскільки реальна частина імпедансу довгого контакту порядку 0,1 Ом, співвідношення імпедансів близьке до майже повного відбиття електромагнітних хвиль від країв контакту, тобто, моделює умови $I_{0,1}^R \approx 0$ та $I_{n,n+1}^R \approx 0$ для довгої лінії з відкритими кінцями.

Розглянемо питання співвідношення розвинутої в попередньому розгляді дискретної моделі довгого контакту та неперервної моделі. Було показано, що

система (2.1), (2.2) еквівалентна системі рівнянь синус-Гордона з членом, який описує затухання та членом з зовнішнім струмом [6]:

$$\frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} - \frac{1}{c_k^2} \left[\frac{d^2 \varphi_k}{dt^2} + \beta_k \frac{d\varphi_k}{dt} \right] = \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\sin \varphi_k + \frac{I_b}{I_{ck}} \right], \quad k=1, \dots, n, \quad (2.3)$$

де $\beta_k = \frac{1}{(R_k C)}$. Зазначимо, що значення I_{ck} , λ_k , c_k і \mathbb{R}_k повинні бути визначені вздовж переходу. Загальний струм зміщення був заданий як $I = \sum_{k=1}^n I_b$. Дискретність у наших числових розрахунках не є принциповою, хоча в деяких ситуаціях (послідовність малих контактів, розташованих на великих відстанях один від одного) вона може мати принципове значення. Однак, така ситуація в даній роботі не розглядається. Для розрахунків була вибрана досить велика кількість «елементарних» контактів ($n=1600$), яка забезпечувала повну відсутність ефектів, які характерні для моделі, що враховує дискретність [14]. Використання динамічних рівнянь у формі системи рівнянь (2.1) і (2.2) є кращим для розв'язку задач динаміки фаз, ніж рівняння (2.3), оскільки кожне з рівнянь (2.1), (2.2) і кожен член цих рівнянь мають чітке фізичне значення. Рівняння (2.1), (2.2) вирішувались методом Рунге-Кутта. Напруга на довгому контакті дорівнює:

$$V = \frac{\Phi_0}{2\pi n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{d\varphi_k}{dt} \right), \quad (2.4)$$

де риска над виразом означає усереднення виразу за часом, який значно перевищує період коливань напруги на контакті.

2.2 Розрахунок залежності $V = f(I_b)$ і параметри контакту.

Відповідно до сформульованих в підрозділі 1.5 завдань дослідження, була розроблена процедура розрахунку залежності $V = f(I_b)$ двома методами, а саме згідно рішення рівнянь (2.1), (2.2), та згідно рівнянню (1.30). Другим методом залежність напруги на контакті від струму була отримана наступним чином. Ми записували просторовий розподіл змінної напруги (тобто джозефсонівських

вихорів) вздовж контакту на першій сходинці. Ширину імпульсу напруги на половині висоти цього імпульсу X можна обчислити "вручну", або за шириною лоренцівського максимуму, який був апроксимацією вихору. Обидва методи визначення ширини дали схожі результати, що відрізнялися приблизно на 3%. Оскільки джозефсонівський вихор (солітон) описується гіперболічним секансом (1.28) від величини $\frac{x}{\lambda}$, величина λ пов'язана з шириною цієї функції на половині висоти:

$$X = 2 \operatorname{sech}^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) \lambda \approx 2,634 \cdot \lambda. \quad (2.5)$$

Таким чином, з величини X можна визначити λ . Зауважимо, що ширина X на половині висоти не залежить від множника перед гіперболічним секансом у виразі (1.28). Тому, не зважаючи на те, що величина λ входить у множник перед функцією гіперболічного секанса у виразі (1.28), залежність ширини X від параметра λ визначається виразом (1.28). Використовуючи описану процедуру при різних струмах зміщення I_b , ми отримали таблицю значень $\lambda(V)$. Отриманий набір $\lambda(V)$ був підставлений у рівняння (1.30). Параметри R і D у рівнянні (1.30) є заданими параметрами моделі. Отримані згідно рівняння (1.30) та згідно моделі динаміки фаз (2.1)-(2.3) залежності $V = f(I_b)$ були порівняні в цій роботі.

Збурення в довгому контакті були отримані наступним чином. Відомо, що розв'язки рівнянь (2.1), (2.2) є нестабільними при порушенні рівномірного просторового розподілу критичних струмів [17-20]. Ми створили таку нерівномірність шляхом зменшення критичного струму довільного "елементарного" контакту на 0,01%. Електромагнітне збурення, яке утворилося в одній із петель "елементарних" контактів з різними критичними струмами, поширювалося через усі петлі до кінця довгого переходу, відбивалося від кінця і потім поширюватися вздовж контакту назад.

Глибина проникнення магнітного поля при заданій температурі $\lambda_L(T)$ знаходилася з виразу

$$\lambda_L(T) = \frac{\lambda_L(0)}{\sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4}} \quad (2.6)$$

$$\underline{c} = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 C_s d}}, \quad (2.7)$$

де $d = 2\lambda(T) \cdot \text{ctg}\left(\frac{l}{\lambda(T)}\right) + \delta$. Контакт ділився на n частин, так що розмір кожної частини дорівнював $\xi = D/n$. Тоді індуктивність частини ξ дорівнює:

$$L = \frac{\xi^2}{c^2 C}, \quad (2.8)$$

де $C = C_s \cdot W \cdot \xi$ – ємність даної частини контакту (в подальшому будемо вважати, що ємності всіх частин контакту мають однакову величину). Критичний струм i -ї частини ξ довгого контакту дорівнює $I_{ci} = J_{ci} \cdot W \cdot \xi$, де J_{ci} – густина критичного струму i -ї частини. В тому випадку, коли контакт однорідний, тобто, всі J_{ci} мають однакові значення, всі критичні струми «елементарних» контактів I_{ci} однакові. Електричний опір i -ї частини довгого контакту дорівнює $R_i = \frac{V_c}{I_{ci}}$. Зрозуміло, для контакту з однорідним критичним струмом всі значення R_i однакові, тобто, $R_i = R$ для будь-якого i .

Для розрахунків були визначені наступні параметри контакту. Контакт мав довжину $D = 1,10 \cdot 10^{-4}$ м та ширину $W = 3 \cdot 10^{-4}$ м. Надпровідні електроди контакту мали критичну температуру $T_c = 9,25$ К і знаходився при температурі $T = 4,2$ К. Ширина надпровідних електродів була $l = 4 \cdot 10^{-9}$ м. Контакт мав товщину діелектричного бар'єру $\delta = 1 \cdot 10^{-9}$ м. Були задані густина критичного струму через контакт $J_c = 5,1375 \cdot 10^4$ А/м², характеристична напруга $V_c = 1,2 \cdot 10^{-3}$ В, ємність одиниці площі контакту $C_s = 4,8 \cdot 10^{-4}$ Ф/м². Глибина проникнення магнітного поля в надпровідні електроди дорівнювала $\lambda_L(0) = 2 \cdot 10^{-7}$ м.

3 РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ ТА ОБГОВОРЕННЯ

В підрозділах 3.1-3.6 частково використані результати робіт [23, 24], написаних автором кваліфікаційної роботи в ході проведення досліджень.

3.1 Функції $\frac{V}{(nV_c)} = f(I/(nI_{ca}))$ для довгого контакту з рівномірним розподілом критичних струмів.

Залежність $\frac{V}{(nV_c)} = f(I/(nI_{ca}))$, тобто, залежність напруги на контакті від струму в нормалізованих безрозмірних одиницях струму і напруги для рівномірного просторового розподілу критичних струмів вздовж контакту показана на рисунку 3.1 [24]. Ця залежність має типовий вид залежності напруги від струму для одиночного «елементарного» контакту з великою ємністю в рамках резистивно-ємнісної моделі. Такий вигляд ця залежність має тому, що всі «елементарні» контакти мають однакові критичні струми, і ніяких збурень в петлях між контактами не виникає. Тому напруга V_i на всіх контактах однакова, і значення V дорівнює nV_i , так що усереднена нормалізована величина $V/(nV_c)$ дорівнює напрузі на одному «елементарному» контакті. Так само, загальний струм зміщення I через довгий контакт з всіма однаковими критичними струмами «елементарних» контактів дорівнює nI_b , а критичний струм довгого контакту дорівнює nI_c , так що в нормалізованих безрозмірних величинах маємо $\frac{nI_b}{nI_c} = \frac{I_b}{I_c}$.

Будемо далі представляти залежності струму через контакти від

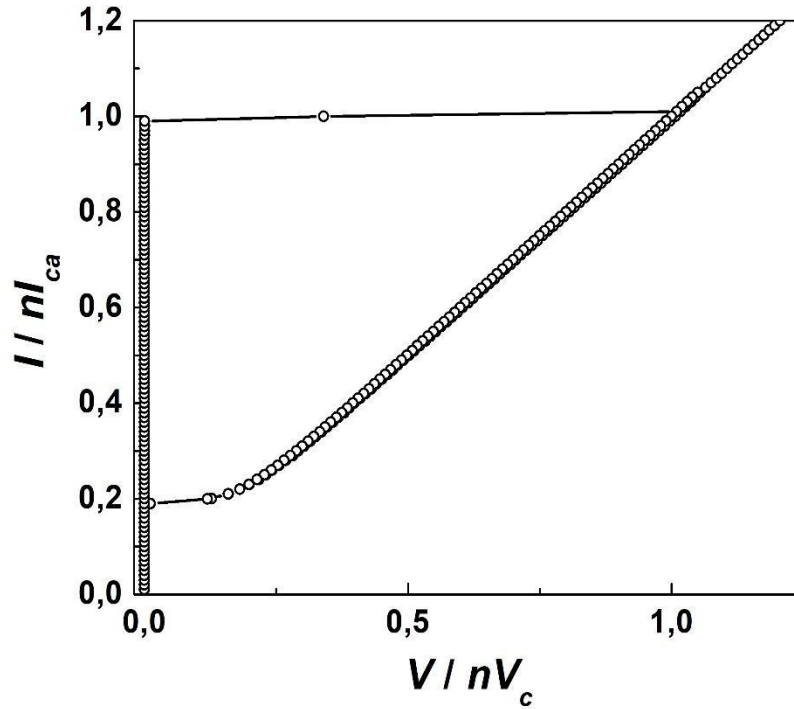


Рисунок 3.1 – Залежність напруги на контакті від струму для довгого контакту з $\mathcal{R}_c=40,84$ [24].

усередненої напруги саме в цих нормалізованих одиницях, тому, що таке представлення дозволяє позбутися залежності результатів від кількості «елементарних» контактів n , яка у розрахунках може бути довільною. Зауважимо, що можна назвати описаний динамічний стан контакту, при якому в середині контакту не протікають вихорові струми, безвихровим, або мейсснерівським станом. Цей стан порушується при будь-якій неоднорідності в розподіл критичних струмів вздовж контакту, коли в петлях виникають струми.

3.2 Функції $\frac{V}{(nV_c)} = f(I/(nI_{ca}))$ для довгого контакту з нерівномірним розподілом критичних струмів.

Ефект, який розглянуто в цьому підрозділі, утворюється при нерівномірному розподілі струмів вздовж контакту. Зауважимо, що в загальному випадку йдеться

не тільки про розподіл критичних струмів, але і про нерівномірний розподіл струмів зміщення вздовж контакту, який може утворюватися в деяких експериментах [6]. Далі, якщо йдеться саме про розподіл критичних струмів, то слід згадати, про модуляцію критичних струмів за допомогою зовнішнього магнітного поля [17]. Однак, ми розглядаємо довгий контакт при відсутності зовнішнього магнітного поля. Тому для утворення нерівномірного просторового розподілу критичних струмів слід створити цю неоднорідність в контакті. Для утворення такої неоднорідності критичний струм довільного контакту в розподілі було зменшено на $10^{-2}\%$ (цей контакт в розрахунках мав номер $k = 50$). Всі інші «елементарні» контакти мали однакові критичні струми, значення яких залежало від кількості сегментів n , на які поділено довгий контакт (див. підрозділ 2.1).

Результат розрахунку функції $\frac{V}{(nV_c)} = f(I/(nI_{ca}))$ показаний на рисунку 3.2 [24].

На відміну від залежності $\frac{V}{(nV_c)} = f(I/(nI_{ca}))$ для довгого контакту з однаковими критичними струмами, на рисунку 3.2 є п'ять сходинок [24]. Для розрахунку цих сходинок було застосовано наступну процедуру. Спочатку залежність $\frac{V}{(nV_c)} = f(I/(nI_{ca}))$ розраховувалась від значень $I/(nI_{ca}) = 0$ до

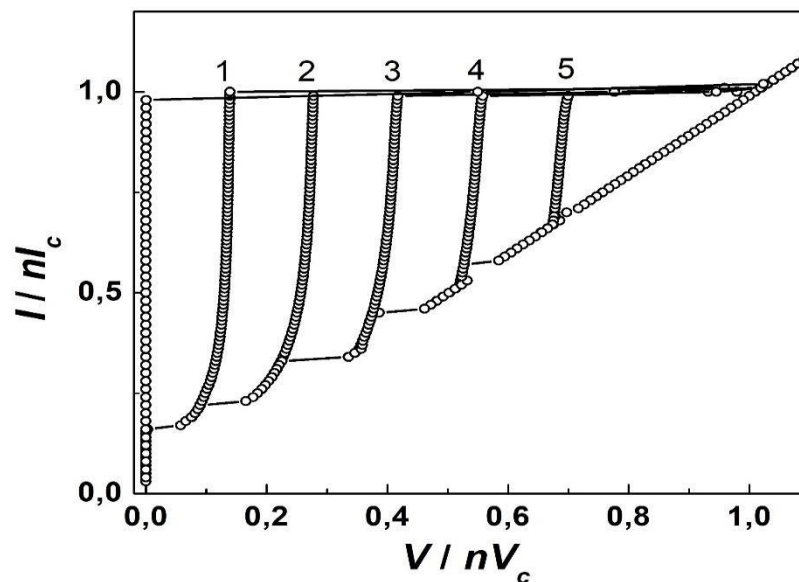


Рисунок 3.2 – Залежність напруги на контакті від струму для довгого контакту з $R_c=40,84$. Сходинок пронумеровані цифрами від 1 до 5 [24].

значень $\frac{I}{(nI_{ca})} = 1,08$ при збільшенні струму I з кроком $\frac{\Delta I}{(nI_{ca})=0,01} \cdot I_{ca}$. Потім напрям струму зміщення змінювався, і значення I зменшувалися до величини, трохи меншої ніж початкові значення I для сходинок (наприклад, $I/(nI_{ca}) = 0,18$ на рисунку 3.2, з тим самим кроком. Після цього струм I знову поступово збільшувався з цим кроком до значення $\frac{I}{(nI_{ca})} = 1,08$. Ця процедура розрахунку дозволила розрахувати сходинок до значень $\frac{I}{(nI_{ca})} = 1,00$, при яких сходинок стає нестабільною. Описана вище процедура розрахунку була застосована до кожної сходинок.

Усереднені напруги, при яких виникають сходинок, розраховані згідно рівнянню (1.24) дорівнюють $\frac{V_p}{V_c} = 0,139 \cdot p$, де p – ціле число. Отже, усереднені напруги, на яких є сходинок, дорівнюють $\frac{V_{p=1}}{V_c} = 0,139$, $\frac{V_{p=2}}{V_c} = 0,278$, $\frac{V_{p=3}}{V_c} = 0,417$, $\frac{V_{p=4}}{V_c} = 0,556$, $\frac{V_{p=5}}{V_c} = 0,695$. Ці значення добре узгоджуються з напругами, які відповідають верхівкам сходинок на рисунку 3.2. Таким чином, ми підтвердили припущення, що сходинок на рисунку 3.2 є сходинокми, які виникають без прикладеного ззовні магнітного поля [24].

Обговоримо тепер причини появи сходинок на залежності $\frac{V}{(nV_c)} = f(I/(nI_{ca}))$. Теоретично доведено, що рішення рівнянь (2.1), (2.2) для довгого контакту стає нестабільним при введенні неоднорідності в розподіл критичних струмів. Напруга на контакті з відмінним від інших критичним струмом відрізняється від напруги на інших контактах. Згідно рівнянню (2.2), в асиметричних двохконтактних інтерферометрах, які утворюються в петлях високочастотної схеми зліва та справа від цього контакту, виникають циркулюючі струми. Згідно

рівнянню (2.1), ці циркулюючі струми змінюють напругу на сусідніх контактах. В свою чергу, завдяки цим зміненим напругам в петлях, в яких знаходяться ці сусідні контакти, виникають циркулюючі струми і т. д. Так збудження електромагнітного поля, яке виникає в місці «дефектного елементарного контакту», розповсюджується вздовж довгого контакту Джозефсона. На краях контакту збудження відбиваються і після цього розповсюджуються в зворотному напрямі.

3.3 Коливання напруги на першій сходинці.

Залежності змінної напруги від координати в різні моменти часу на сходинках, показані на рисунку 3.3а, б для першої сходинки при різних струмах зміщення [24]. На рисунку 3.3а показані імпульси напруги в різні моменти часу при $\frac{V}{(nV_C)=0,110}$, $\frac{I}{(nI_{ca})}=0,32$, тобто, біля підніжжя сходинки [24]. Імпульси дуже широкі і мають різну висоту. Однак, біля вершини сходинки при $\frac{V}{(nV_C)=0,138}$, $\frac{I}{(nI_{ca})}=0,99$, імпульси стають вузькі, і вони мають однакову форму [24]. Така зміна ширини імпульсів характерна для скорочення Лоренца (1.27).

Поведінка імпульсів при зміні часу точно відповідає картині, описаній в роботі [18]. Імпульси розповсюджуються вздовж контакту, відбиваються від країв контакту, і міняють напрям руху. Коли вони добігають до протилежного краю контакту, вони знову відбиваються від цього краю і продовжують свій рух.

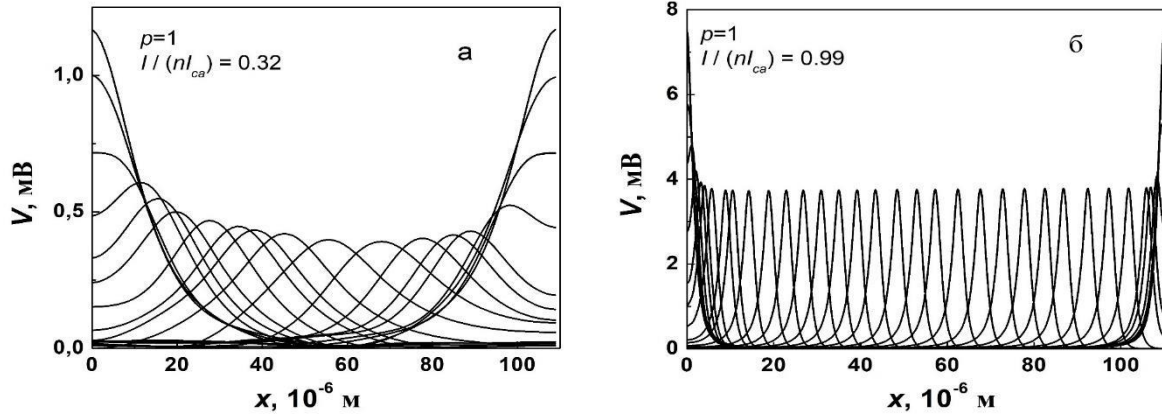


Рисунок 3.3 – Розподіли напруги вздовж довгого контакту на першій сходинці при $I/(nI_{ca}) = 0,60$ (а) та при $I/(nI_{ca}) = 0,99$ (б) [24].

У процесі відбиття близько краю контакту імпульси сильно деформуються. Деформація імпульсів особливо сильна при напругах, близьких до підніжжя сходинки (рисунок 3.3а).

3.4 Залежність $\left(\frac{\lambda}{\lambda_J}\right)^2 = f\left(\left(\frac{V}{V_{p=1}}\right)^2\right)$ на першій сходинці.

Ширина імпульсів напруги на першій сходинці були виміряні згідно методиці, наведеній в підрозділі 2.2, і глибина проникнення магнітного поля була розрахована згідно виразу (2.5). Залежність $\left(\frac{\lambda}{\lambda_J}\right)^2 = f\left(\left(\frac{V}{V_{p=1}}\right)^2\right)$ показана на рисунку 3.4 кружками. Згідно рівнянню (1.27), ця залежність має бути лінійною з нахилом -1. Однак нахил -1.08 ± 0.02 з'являється лише для $\frac{V}{V_{p=1}} \geq 0.88$ (лінія 1 на рис. 3.4) [24]. Для всієї залежності $\left(\frac{\lambda}{\lambda_J}\right)^2 = f\left(\left(\frac{V}{V_{p=1}}\right)^2\right)$ нахил прямої більший (приблизно -1.29 ± 0.02 , лінія 2 на рис. 3.4). Можна припустити, що відхилення значення \perp від залежності (1.27) зумовлена кінцевими розмірами контакту. Якщо співвідношення $D \perp \gg 1$ справедливо, напруга вихору має вигляд (1.28), який

з'являється при $\frac{V}{V_{p=1}} \geq 0.88$, а нахил співвідношення $\left(\frac{\lambda}{\lambda_J}\right)^2 = f\left(\left(\frac{V}{V_{p=1}}\right)^2\right)$ стає близький до -1. Однак, при значеннях $\frac{V}{V_{p=1}} \leq 0.6$ умова

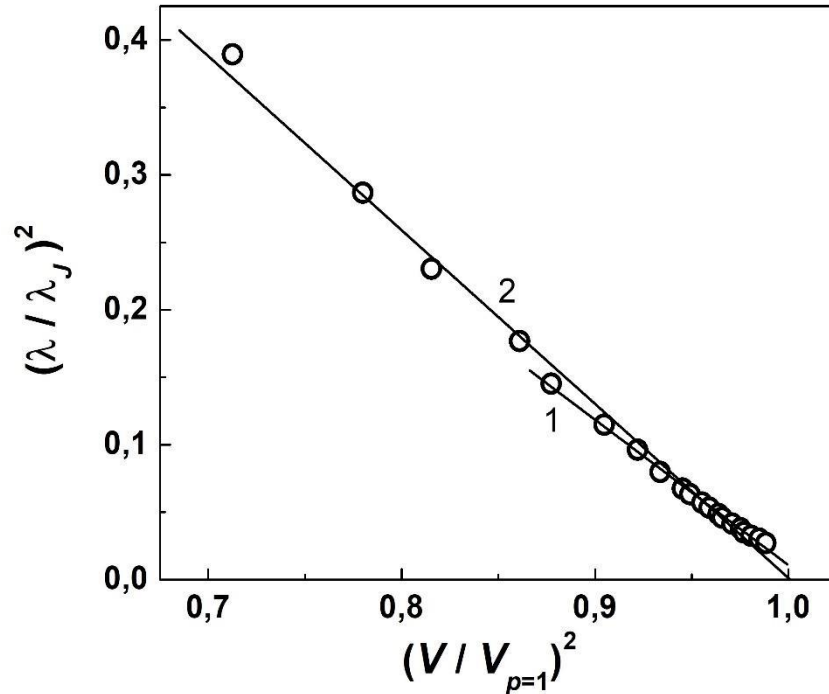


Рисунок 3.4 – Залежність $\left(\frac{\lambda}{\lambda_J}\right)^2 = f\left(\left(\frac{V}{V_{p=1}}\right)^2\right)$ (кружки). Лінійні апроксимації мають нахили -1.08 ± 0.02 (лінія 1) та -1.29 ± 0.02 (лінія 2) [24].

$D \ll 1$ не виконується, тому наближення нескінченно довгого контакту для досліджуваного процесу перестає діяти. Тому рівняння (1.27) перестає виконуватися, і нахил залежності $\left(\frac{\lambda}{\lambda_J}\right)^2 = f\left(\left(\frac{V}{V_{p=1}}\right)^2\right)$ змінюється [24].

3.5 Зміни різниці фаз параметра порядку з часом.

Тепер ми доведемо, що спостережувані імпульси напруги є джозефсонівські вихори. На рисунку 3.5 наведено графіки залежності $\varphi(x, t)$ для різних моментів часу [24]. Відомо, що вихор Джозефсона відповідає зміні різниці фаз параметра

порядку $\varphi(x, t)$ надпровідних електродів на 2π (така зміна фаз називається кінком) [6]. Саме така зміна (кінк) спостерігається на рис. 3.5 в момент часу t_1 . Відстань між горизонтальними лініями А і Б на рисунку 3.5 дорівнює 2π . З часом цей кінк рухається від правого кінця контакту до лівого кінця [24].

Похідна $\varphi(x, t)$ по часу t утворює саме ті імпульси напруги, які показані на рисунку 2(а), (б), тобто джозефсонівські вихори. У момент t_2 кінк досягає лівого кінця контакту, а в наступні моменти часу $t_3 - t_2$ різниця фаз $\varphi(x, t)$ змінюється на 2π і кінк починає рух від лівого кінця контакту до правого кінця. Оскільки напруга $V(x, t)$ пов'язана з похідною різниці фаз на контакті по часу співвідношенням $V(x, t) = \left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\right) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$, рух джозефсонівського вихору відповідає руху кінку. Якщо ми назвемо вихор, який рухається від правого кінця до лівого (тобто навпаки до напрямку осі x), антивихором, то можна сказати, що антивихор рухається від моменту t_1 до моменту t_2 , далі між моментами t_2 і t_3 він перетворюється на вихор і рухається до правого кінця контакту. Між моментами часу t_4 і t_5 вихор перетворюється на антивихор, а потім рухається від правого

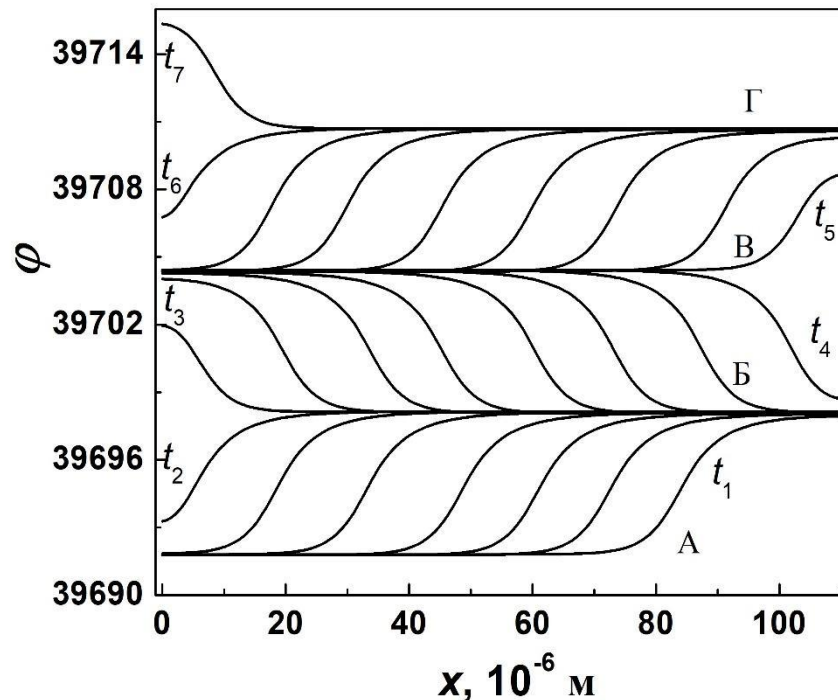


Рисунок 3.5 – Залежність $\varphi(x, t)$ в різні моменти часу для $\frac{V}{(nV_c)=0,134}$, $I/(nI_{ca}) = 0,700$. Моменту t_1 відповідає початок запису, а t_7 – останній момент запису. Значення φ для ліній А, Б, В, Г відрізняються на 2π [24].

кінця перехід до лівого кінця тощо. Цей механізм руху вихорів добре відомий [18], і ми описуємо його тут для доказу того, що рух імпульсів напруги, які ми вивчаємо, є по суті динамікою руху джозефсонівських вихорів.

3.6 Залежність $\frac{V}{(nV_c)} = f(I/(nI_{ca}))$ на першій сходинці.

Перша сходинка на залежності $\frac{V}{(nV_c)} = f(I/(nI_{ca}))$, розрахована з застосуванням рішення рівнянь збереження струму (2.1) та умов квантування магнітного потоку (2.2) показана на рисунку 3.6 лінією. Розрахунки цієї залежності, проведені з застосуванням моделі Фултона-Дайнса [18] показані кружками на рисунку 3.6 [24]. Для визначення початкового рівня напруги на сходинці залежності $\frac{V}{(nV_c)} = f(I/(nI_{ca}))$ ми додали до виразу (1.30) член $\frac{V}{R}$, який відповідає струму квазічастинок через контакт:

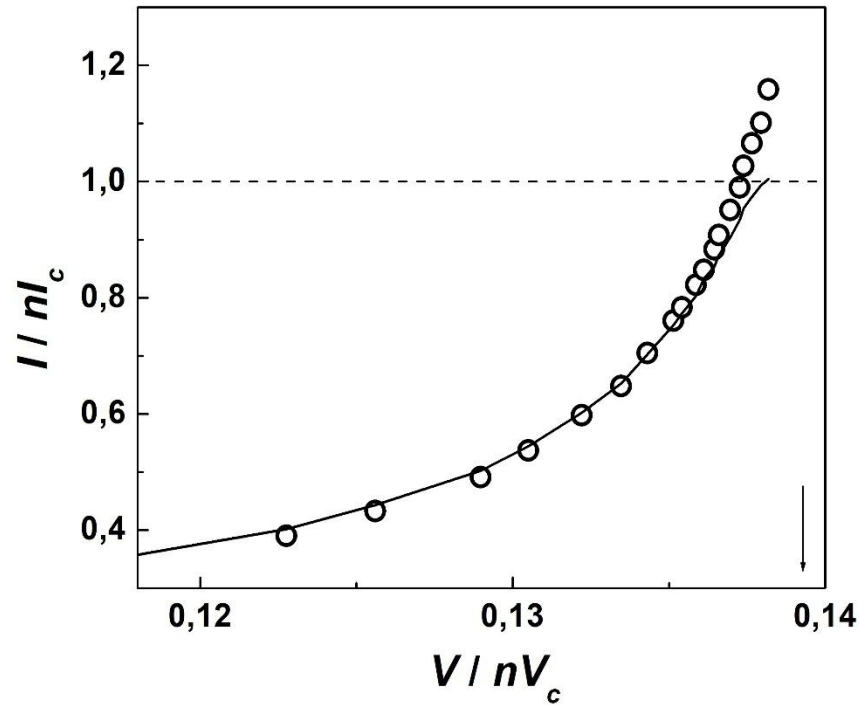


Рисунок 3.6 – Вольт-амперні характеристики на першій сходинці, отримані за допомогою рішень рівнянь (2.1) і (2.2) (лінія), та рівняння (3.1) (кружки). Пунктирна лінія показує границю стабільності рішень. Стрілкою показано точне положення сходинки [24].

$$I = \frac{V}{\frac{\pi^2 R \lambda}{2D}} + \frac{V}{R}. \quad (3.1)$$

З рисунку 3.6 видно, що рівняння (3.1) цілком задовільно апроксимує сходинку отриману з рішень рівнянь (2.1) та (2.2). Опір R був змінним параметром апроксимації рівняння (3.1). Найменше середньоквадратичне відхилення апроксимації отримано при значенні $R = 0,820$ Ом, яке приблизно на 15% більше, ніж точне значення $R = 0,708$ Ом, отримане при рішенні рівнянь (2.1) та (2.2). Кілька точок, розрахованих за допомогою рівняння (3.1) знаходиться вище межі стабільності залежності $\frac{V}{(nV_c)} = f(I/(nI_{ca}))$ (тобто, $I/(nI_{ca}) = 1,0$). Це правильно, оскільки при струмі $I/(nI_{ca}) = 1,0$ значення напруги на контакті дорівнює тільки $V/V_c = 0,138$, а це значення менше точного значення напруги положення сходинки $V/V_c = 0,139$, розрахованого з рівняння (1.24). В безпосередній близькості від

значення $I/(nI_{ca}) = 1,0$ апроксимація залежності $\frac{V}{(nV_c)} = f(I/(nI_{ca}))$, отримана за допомогою рівняння (3.1), стає крутішою, ніж крива, розрахована з розв'язку рівнянь (2.1) і (2.2). Це прямий наслідок згаданого вище припущення, що швидкість дисипація енергії за рахунок джозефсонівських вихорів така ж, як і в нескінченному контакті [18]. Завдяки кінцевим розмірам контакту, коефіцієнт 2 у знаменниках рівнянь (1.30) і (3.1) змінюється на менше значення, яке призводить до зменшення струму I і зменшення залежності $\frac{V}{(nV_c)} = f(I/(nI_{ca}))$.

У даній роботі чисельними методами досліджено вплив джозефсонівських вихорів на формування першої сходинки. Цей вплив вивчали двома методами. Одним з методів було чисельне розв'язання динамічних рівнянь [12-17]. Просторовий розподіл критичних струмів вдовж контакту мав невелику нерівномірність 10^{-3} %, що дозволило утворити сходинки на залежності $\frac{V}{(nV_c)} = f(I/(nI_{ca}))$. Детально досліджено поширення імпульсів напруги вздовж контакту. Доведено, що ці імпульси є вихорами Джозефсона, і проаналізували періодичний рух вихорів у контакті. Ми реєстрували рух вихорів і визначали джозефсонівські глибини проникнення магнітного поля для різної величини усередненої напруги. Ці дані були підставлені в аналітичний вираз для розрахунку першої сходинки другим методом. Згідно з другим методом, вольт-амперна крива може бути знайдена з виразу, який описує еквівалентність вхідної потужності та швидкості дисипації в контакті. Для отримання швидкості дисипації було використано аналітичний вираз для напруги, пов'язаної з вихором у контакті нескінченної довжини [18]. Порівняння залежностей усередненої напруги від струму зміщення, знайдених двома згаданими методами, показало, що вони майже ідентичні, за винятком вершини сходинки, де другий метод дав більші значення [24]. Ми показали, що походження цих більших значень є припущення про те, що швидкість дисипації енергії, пов'язана з

джозефсонівськими вихорами така сама, як у нескінченному контакті. Зазначимо, що другий спосіб визначення залежності усередненої напруги від струму зміщення враховує лише динаміку джозефсонівських вихорів. Оскільки ці залежності, отримані двома методами, майже ідентичні на першій сходинці, можна зробити висновок, що ця залежність формується рухом джозефсонівських вихорів.

3.7 Випромінювання довгого контакту.

Відомо, що на сходинках Фіске вольт-амперної характеристики реєструється випромінювання від контакту Джозефсона [6]. Виникає питання, чи існує таке випромінювання від контакту на сходинках. Для розрахунків потужності випромінювання були змінені граничні умови для рівнянь збереження струму і квантування магнітного потоку (2.1) та (2.2). Для цього в фіктивних контурах перед контактом з індексом $k = 1$ та після контакту з індексом $k = n$ були добавлені послідовні з'єднання конденсатора з ємністю C_e , індуктивності L_e та електричним опором R_e . Значення цих радіотехнічних елементів були підібрані таким чином, що резонансна частота була далеко від джозефсонівських частот випромінювання, а активна частина імпедансу на характеристичній частоті контакту дорівнювала характеристичному імпедансу вакууму. Тоді струми $I_{0,1}^R$, $I_{n,n+1}$ через конденсатори C_e у кінцевих фіктивних контурах дорівнюють:

$$I_{0,1}^R = \frac{dq_0}{dt}, \quad I_{n,n+1} = \frac{dq_{n+1}}{dt}, \quad (3.2)$$

де q_0 та q_{n+1} – заряди на конденсаторах C_e на лівому та правому краю контакту, відповідно. Рівняння Кірхгофа для фіктивних контурів мають такий вигляд:

$$L_e \frac{d^2 q_0}{dt^2} + R_e \frac{dq_0}{dt} + \frac{q_0}{C_e} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad (3.3)$$

$$L_e \frac{d^2 q_{n+1}}{dt^2} + R_e \frac{dq_{n+1}}{dt} + \frac{q_{n+1}}{C_e} = -\frac{d\varphi_n}{dt}. \quad (3.4)$$

Тоді рівняння збереження струму (2.1) та (2.2) для контактів з номерами $k=1$ та

$k=n$ можна записати так:

$$\frac{\Phi_0 C}{2\pi} \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + \frac{\Phi_0}{2\pi R_{i,j}} \frac{d\varphi_1}{dt} + I_{ci,j} \sin \sin \square_1 = I_b - \frac{dq_0}{dt} + I_{1,2}^R, k = 1, \quad (3.5)$$

$$\frac{\Phi_0 C}{2\pi} \frac{d^2 \varphi_n}{dt^2} + \frac{\Phi_0}{2\pi R_{i,j}} \frac{d\varphi_n}{dt} + I_{ci,j} \sin \sin \square_n = I_b - I_{n-1,n}^R + \frac{dq_{n+1}}{dt}, k = n. \quad (3.6)$$

Рівняння (3.5) та (3.6) грають роль граничних умов даної задачі.

Була розраховувалася потужність емісії від кожного краю системи:

$$P_i = \frac{1}{Z_a} \left[\frac{\Phi_0}{2\pi} \left(\frac{d\varphi_i}{dt} - \frac{d\varphi_i}{dt} \right) \right]^2, i = 1, n. \quad (3.7)$$

Другий член у квадратних скобках виразу (3.7) – це усереднена напруга на контакті (2.4), тому вираз (3.7) є квадратом змінної частини напруги на «елементарному» контакті з лівого або правого краю довгого контакту, поділений на електричний опір R_a . Вирази типу (3.7) застосовуються в моделях систем багатьох контактів Джозефсона для розрахунків потужності випромінювання [6, 17]. Розрахована згідно виразу (3.7) потужність випромінювання довгого контакту представлена на рисунку 3.7. Нахил цієї залежності поступово збільшується, і при значеннях $\frac{V}{(nV_c)} \approx 0,13$ ця залежність починає нагадувати сходинку. Величина потужності $P_1 \sim 10^{-11}-10^{-10}$ Вт

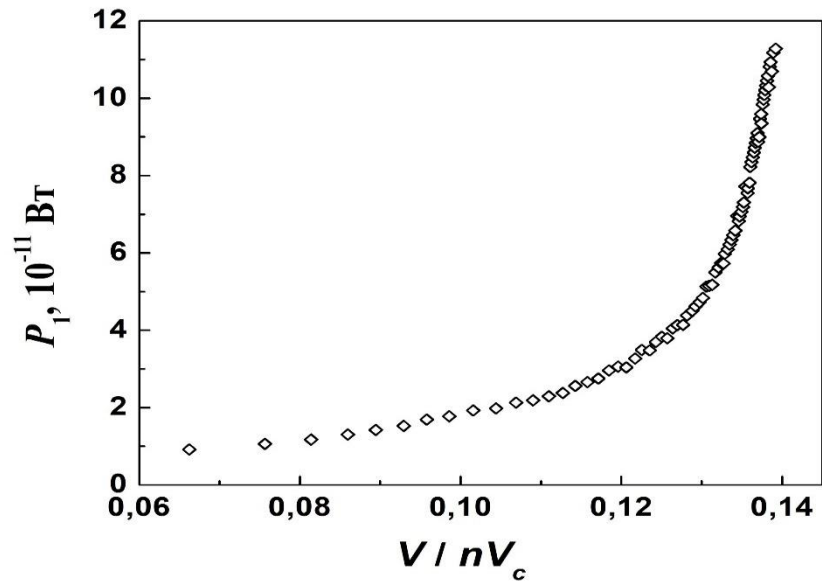


Рисунок 3.7 – Залежність потужності випромінювання лівого кінця довгого контакту Джозефсона від усередненої нормалізованої напруги на контакті.

характерні для випромінювання автономних, тобто, не пов'язаних між собою (або з якою-небудь системою) контактів Джозефсона. Можна зробити висновок, що наявність великого числа «елементарних» контактів ніяк не проявлена в такій величині, як потужність випромінювання з кінців довгого контакту. Однак, наявність як сходинки, так і зростаючий характер залежності $P_1 = f\left[\frac{V}{(nV_c)}\right]$ вказує на змішування частот кількох сигналів, оскільки саме змішування частот сигналів і приводить до появи сходинки на залежності усередненої напруги від струму зміщення. Взаємна синхронізація осциляцій напруги на контактах і є проявом такого змішування. Виникають питання, чи синхронізуються осциляції напруги на «елементарних» контактах на сходинках, і з яким саме сигналом змішуються джозефсонівські осциляції напруги на «елементарних» контактах.

Відповідь на перше питання можна отримати з розгляду однієї з необхідних ознак взаємної синхронізації осциляцій напруги на контактах. Оскільки джозефсонівська частота випромінювання пропорційна усередненій напрузі, для отримання синхронізованого стану осциляцій з однаковою джозефсонівською

частотою, усереднені напруги на контактах повинні бути строго рівні між собою [17]. Тому для того, щоби перевірити можливість існування синхронізації «елементарних» контактів, треба побудувати розподіл усередненої напруги вздовж довгого контакту. Якщо контакти в розподілі мають строго однакову напругу, вони можуть знаходитися в синхронізованому стані. Розподіл усередненої напруги вздовж довгого контакту показано на рисунку 3.8 для трьох струмів зміщення: $I/(nI_{ca}) = 0,39$ (крива 1), $I/(nI_{ca}) = 0,40$ (крива 2) та $I/(nI_{ca}) = 0,41$ (крива 3). На залежності $\frac{V}{(nV_c)} = f(I/(nI_{ca}))$ (рисунок 3.6) такі значення нормалізованого струму зміщення відповідають значенням $\frac{V}{(nV_c)}$, які дорівнюють 0,122, 0,123 та 0,124, відповідно. З даних, наведених на рисунку 3.8,

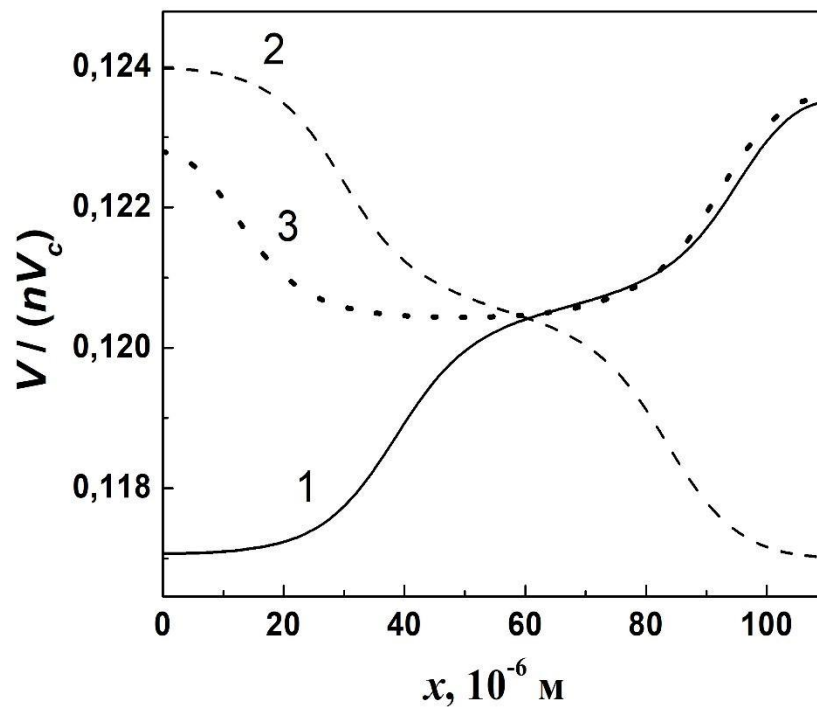


Рисунок 3.8 – Розподіл усередненої напруги вздовж контакту при $I/(nI_{ca}) = 0,39$ (крива 1, жирна лінія), $I/(nI_{ca}) = 0,40$ (крива 2, довгі риски) та $I/(nI_{ca}) = 0,41$ (крива 3, короткі риски).

видно, що розподіл усередненої напруги вздовж контакту фактично не має

ділянок, на яких «елементарні» контакти мають строго однакову напругу. Це значить, що «елементарні» контакти не синхронізовані на сходинці. Це значить, що збільшення потужності випромінювання на першій сходинці відбувається за рахунок можливості збільшення струму зміщення, тобто, за рахунок збільшення вхідної потужності, яка подається на контакт. Зауважимо, що в гістерезисному регіоні залежності усередненої напруги від струму зміщення згадане вище збільшення потужності можливе, оскільки воно не приводить до зменшення амплітуди джозефсонівських осциляцій.

Згідно роботі [18], сходинки утворюються завдяки тому, що періодичний рух джозефсонівських вихорів вздовж контактів зміщується з джозефсонівською генерацією, тобто, періодичні імпульси напруги, породжені джозефсонівськими вихорами, зміщуються з осциляціями напруги на контакті. Як відомо, при малій усередненій напрузі осциляції напруги також мають форму імпульсів завдяки тому, що осциляції напруги складаються з багатьох гармонік. Тому можна припустити, що ці імпульси можуть взаємодіяти. Ймовірно, цим пояснюється відсутність сходинок на залежності усередненої напруги від струму зміщення при напрузі, яка вище характеристичної напруги контакту. Зауважимо, що висновок про синхронізацію частин довгого контакту ід дією руху джозефсонівських вихорів можна порівняти з «зовнішньою» синхронізацією випромінювання систем контактів за допомогою опромінення [17], а також з синхронізацією випромінювання за допомогою стоячих хвиль в системі [13]. Механізм синхронізації в усіх трьох випадках однаковий, хоча процеси різні.

3.8 Рух вихорів на інших сходинках.

В попередніх підрозділах була докладно описана динаміка вихорів при напругах, які відповідали першій сходинці (тобто, для $p=1$ у виразі (1.24)). Однак, на залежності усередненої напруги від струму зміщення є п'ять сходинок, які відповідають значенням $p=1, 2, \dots, 5$ у виразі (1.24). Розглянемо якісно рух

джозефсонівських вихорів на інших сходинках. На рисунку 3.9а, б показані розподіли напруги вздовж контакту на другій і на п'ятій сходинках в різні моменти часу. Зауважимо, що номер сходинки відповідає кількості вихорів, які знаходяться в контакті в будь-який момент часу. Наприклад, для $p=2$ (рисунок 3.9а) два вихори заходять у контакт одночасно з протилежних боків контакту і рухаються у протилежних напрямках. В якийсь момент часу (чверть періоду

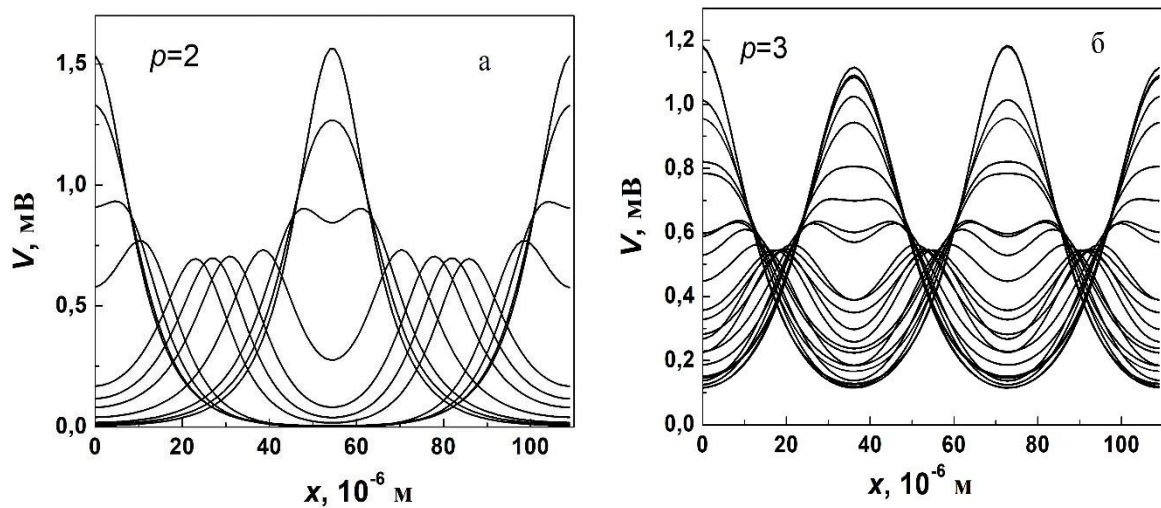


Рисунок 3.9 – Розподіл напруги вздовж контакту при $p = 2$, $I/(nI_{ca}) = 0,51$ (а) та при $p = 3$, $I/(nI_{ca}) = 0,48$ (б) в різні моменти часу.

коливань) посередині контакту вони накладаються один на одного так, що їх координати співпадають, а потім обидва вихори продовжують свій рух у протилежних напрямках. Після досягнення протилежного краю контакту (половина періоду коливань) вихори відбиваються від країв контакту і продовжують свій рух у протилежному напрямі як антивихори. Зауважимо, що на рисунку 3.9а, б ми бачимо не рух окремих вихорів, як це було у випадку $p=1$, а суперпозицію цих вихорів, яка утворює загальний розподіл напруги вздовж контакту. Тому в контакті існують місця, в яких суперпозиція напруги приводить до подвоєння напруги (тобто, місця, де вихорі повністю накладаються один на другий). У випадку $p=3$ (рисунок 3.9б) існують уже два таких місця суперпозиції

напруги, і зміни розподілу напруги з часом полягають в тому, що вихорі рухаються між такими місцями. При збільшенні номеру сходинки таких місць суперпозиції напруги стає більше, і загальний розподіл напруги вздовж контакту нагадує розподіл пучності напруги в довгій лінії з розімкнутими кінцями. Однак, це не так, оскільки рух окремих вихорів залишається таким самим – тобто, вздовж контакту від одного краю до іншого і навпаки.

В даній роботі побудована модель динаміки джозефсонівських вихорів при напругах, які відповідають сходинкам, які були отримані при внесенні неоднорідності в розподілі критичних струмів вздовж контакту. В подальшій роботі має сенс порівняти цю динаміку з рухом вихорів, який відбувається при досягненні неоднорідного розподілу критичних струмів іншим способом, а саме при внесенні довгого контакту в зовнішнє магнітне поле. Виявлення відмінностей в русі вихорів в названих двох випадках дозволить розширити теорію динаміки контактів Джозефсона. Крім того, необхідне узагальнення отриманих результатів, оскільки в даній роботі наведено розрахунки, які описують динаміку вихорів на першій сходинці залежності напруги на контакті від струму для одного набору параметрів, а саме для значення параметра МакКамбера 40,84. Зауважимо, що якраз такі значення параметра МакКамбера $\beta_C \sim 20 - 40$ отримано для внутрішніх контактів [1-5]. Однак, має інтерес дослідити формування сходинок для двох граничних випадків $\beta_C \ll 1$ та $\beta_C \gg 1$. Має інтерес також дослідити ефекти, які були знайдені і обговорені в цій роботі, при різній довжині контакту.

ВИСНОВКИ

1. Знайдено, що залежність напруги на контакті від струму для довгого контакту з неоднорідним розподілом критичного струму має резонансні сходинки, які виникають без прикладеного зовнішнього магнітного поля. Напруги, при яких знаходяться сходинки, відповідають парним сходинкам Фіске.

2. Доведено, що імпульси напруги, які виникають на сходинках залежності напруги на контакті від струму, при нерівномірному розподілі критичних струмів, породжені джозефсонівськими вихорами.

3. Знайдено, що перша сходинка на залежності напруги на контакті від струму задовільно апроксимується за допомогою моделі, яка приймає до уваги тільки рух джозефсонівських вихорів у нескінченно довгому контакті.

В кваліфікаційній роботі частково використані результати робіт [23, 24], написаних і опублікованих автором та його науковим керівником в ході проведення досліджень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ozyuzer L. Emission of coherent THz radiation from superconductors / L. Ozyuzer, L. A. E. Koshelev, C. Kurter, N. Gopalsami, Q. Li, M. Tachiki, K. Kadowaki, T. Yamamoto, H. Minami, H. Yamaguchi, T. Tachiki, K. E. Gray, W.-K. Kwok, U. Welp // *Science*.- 2007.- V.318, P.-1291-1293.
2. Tsujimoto Manabu. Geometrical Resonance Conditions for THz Radiation from the Intrinsic Josephson Junctions in $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ / Manabu Tsujimoto, Kazuhiro Yamaki, Kota Deguchi, Takashi Yamamoto, Takanari Kashiwagi, Hidetoshi Minami, Masashi Tachiki, Kazuo Kadowaki, and Richard A. Klemm // *Phys. Rev. Lett.*-2010.- V.105.- P. 037005-1-4.
3. Kadowaki K. Direct observation of terahertz electromagnetic waves emitted from intrinsic Josephson junctions in single $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ /K. Kadowaki, H. Yamaguchi, K. Kawamata, T. Yamamoto, H. Minami, I. Kakeya, U. Welp, L. Ozyuzer, A. Koshelev, C. Kurter, K.E. Gray, W.-K. Kwok // *Physica*.- 2008.- V. 468C.- P.634–639.
4. Gray K. E. Emission of terahertz waves from stacks of intrinsic Josephson junctions / K.E. Gray, L. Ozyuzer, A.E. Koshelev, C. Kurter, K. Kadowaki, T. Yamamoto, H. Minami, H.Yamaguchi, M. Tachiki, W.-K. Kwok, and U. Welp // *IEEE Trans. on Applied Superconductivity*.-2009.- V. 19, №. 3.- P. 886-890.
5. Gross B. Hot-spot formation in stacks of intrinsic Josephson junctions in $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ /B. Gross, S. Guénon, J. Yuan, M. Y. Li, J. Li, A. Ishii, R. G. Mints, T. Hatano, P. H. Wu, D. Koelle, H. B. Wang, and R. Kleiner // *Phys. Rev.*- 2012.- B86.- 094524 (2012).
6. Barone A. Physics and Applications of the Josephson Effect / A. Barone and G. Paterno // New York: Wiley.- 1982.- 529 P.

7. Koshelev A. E. Resonant electromagnetic emission from intrinsic Josephson-junction stacks with laterally modulated Josephson critical current / A. E. Koshelev, L. N. Bulaevskii // *Phys. Rev. B.*- 2008.- V. 77, № 1.- P. 014530-1-15.
8. Matsumoto H. Theory of THz emission from the intrinsic Josephson junction / H. Matsumoto, T. Koyama, M. Machida, M. Tachiki // *Physica C.*- 2008.- V. 468.- P. 1899–1902.
9. Koyama T. In-phase electrodynamics and terahertz wave emission in extended intrinsic Josephson junctions / Tomio Koyama, Hideki Matsumoto, Masahiko Machida, and Kazuo Kadowaki // *Phys. Rev. B.*- 2009.- V. 79, № 10.- P. 104522-1-12.
10. Rudau F. Three-Dimensional Simulations of the Electrothermal and Terahertz Emission Properties of $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ Intrinsic Josephson Junction Stacks / F. Rudau, R. Wieland, J. Langer, X. J. Zhou, M. Ji, N. Kinev, L. Y. Hao, Y. Huang, J. Li, P. H. Wu, T. Hatano, V. P. Koshelets, H. B. Wang, D. Koelle, and R. Kleiner // *Physical Review Applied.*- 2016.- V. 5, № 4.- 044017-1-8.
11. Russo M. Self-resonant modes in Josephson junctions exhibiting a nonuniform maximum current distribution / M. Russo and R. Vaglio // *Phys. Rev. B.*- 1978.- V. 17, № 5.- P. 2171-2174.
12. Grib A. IV-characteristics and power of emission from stacks of long Josephson junctions with Gaussian spread of critical currents / Alexander Grib, Ruslan Vovk, Sergiy Savich, Volodymyr Shaternik // *Applied Nanoscience.*- 2020.- V. 10.- P. 2849-2854.
13. Grib A. Zero-field steps and coherent emission of externally heated long Josephson junctions / Alexander Grib, Paul Seidel, Masayoshi Tonouchi // *Supercond. Sci. Technol.* - 1917.- V.30.- 014004.
14. Grib A. Electrical characteristics of long Josephson junctions based on Tungsten Nanorods as weak links: effect of random critical-current distributions / A Grib,

- S Savich, R Vovk, V Shaternik, A Shapovalov, P Seidel // IEEE Transactions on Applied Superconductivity.- 2018.- V. 28 (7), PP. 1-6.
15. Grib A. Resonant modes in a stack of intrinsic Josephson junctions / Alexander Grib, Paul Seidel // IEEE Transactions on Applied Superconductivity.- 2017.- V. 27, n.4.- 1800604 - P. 1-4.
 16. Grib A. The coherent dynamic state of intrinsic Josephson junctions / Alexander Grib and Paul Seidel // IEEE Transactions on Applied Superconductivity.- 2016.-V. 26, No. 3.- art. no. 1801004.
 17. Likharev K. K. Dynamics of Josephson junctions and circuits / K. K. Likharev // Philadelphia: Gordon and Breach. - 1991. - 750 P.
 18. Fulton T. A. Single vortex propagation in Josephson tunnel junctions / T. A. Fulton and R. C. Dynes // Solid State Commun.- 1973.- V. 12.- P. 57-60.
 19. Lebowitz P. Properties of Vortex Lines in Superconducting Barriers / P. Lebowitz and M. J. Stephen // Phys. Rev. - 1967, V. 163.- P. 376.
 20. Kuplevakhsy S. Exact analytical solution of a classical problem of the Josephson tunnel junction / S.V. Kuplevakhsy, A.M. Glukhov // Low Temp. Phys.-2010.- V. 36.- P. 1012–1021 [Fiz. Nizk. Temp.- 2010.- V. 36.- P. 1253].
 21. Ferrell R. Self-field limiting of Josephson tunneling of superconducting electron pairs// Richard A. Ferrell and Richard E. Prange // Phys. Rev. Lett. - 1963.- V.10.- P.479-482.
 22. Takanaka K. Zero field steps in Josephson junctions / K. Takanaka // Solid State Commun.-1979.- V. 29.- P. 443-445.
 23. Grib A. The formation of IV-characteristics of long Josephson junctions at zero-field steps / A. Grib, O. Chykina //Abstracts book : IV International advanced study conference "Condensed Matter & Low Temperature Physics 2024" : [3-7 June 2024, Kharkiv, Ukraine].-Kharkiv.-2024.-P.62.
 24. Grib A. The IV-characteristic of the long Josephson junction at the zero-field step /Alexander Grib and Olena Chykina // Low Temperature Physics.-2024.-

V.50, N. 11.- P. 970–975 [Fiz. Nizk. Temp. - 2024, V. 50, N 11, P. 1082–1087].