

И. М. ЛИФШИЦ (Харьков)

О РЕГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ОПЕРАТОРА
С КВАЗИНЕПРЕРЫВНЫМ СПЕКТРОМ

1. В заметке¹ была рассмотрена задача об определении спектрального разложения эрмитовского оператора $L + t\Delta$, где L — невозмущенный эрмитовский оператор, разложение которого предполагается известным, а Δ — оператор возмущения, удовлетворяющий некоторым общим требованиям регулярности. Ниже дается распространение теории на случай оператора с квазинепрерывным спектром.

Пусть будет L_α — семейство эрмитовских операторов, зависящих от параметра α , $\lambda_p^{(\alpha)}$ — их собственные значения, $\psi_p^{(\alpha)} = \psi_p^{(\alpha)}(x)$ — их нормированные собственные функции, x — аргумент, или совокупность аргументов, дискретный или непрерывный.

Мы будем говорить, что оператор L_α имеет при достаточно малых α квазинепрерывный относительно α спектр, если:

1) существует такая не зависящая от α кусочно непрерывно дифференцируемая функция $\lambda(u)$, что

$$\begin{aligned}\lambda_p^{(\alpha)} &\equiv \lambda_\alpha(u_p) = \lambda(u_p) + O(\alpha), \quad u_p = p\alpha, \\ \Delta\lambda_p^{(\alpha)} &= \lambda_{p+1}^{(\alpha)} - \lambda_p^{(\alpha)} = \alpha \left[\left(\frac{d\lambda}{du} \right)_{u_p} + O(\alpha) \right];\end{aligned}\quad (1)$$

2) собственные функции $\chi_{u_p}^{(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \psi_p^{(\alpha)}$ плавно меняются с изменением $\lambda(u_p)$, т. е. существуют такое семейство функций $\chi_u(x)$ и такая область изменения аргумента x , в которой

$$\begin{aligned}\chi_{u_p}^{(\alpha)}(x) &= \chi_{u_p}(x) + O(\alpha), \\ \Delta\chi_{u_p}^{(\alpha)} &= \chi_{u_{p+1}}^{(\alpha)} - \chi_{u_p}^{(\alpha)} = \alpha \left[\left(\frac{\partial \chi_u}{\partial u} \right)_{u_p} + O(\alpha) \right].\end{aligned}\quad (2)$$

В пределе при $\alpha \rightarrow 0$ мы получаем оператор L_0 с непрерывным спектром, заполняющим область значений функции $\lambda(u)$. В крайних задачах роль параметра α играет обыкновенно величина $\frac{1}{l}$, где l характеризует размеры области (если последние достаточно велики). Соотношение (2) имеет место в области $|x| \ll l$ (в любой конечной области при $l \rightarrow \infty$).

Пусть регулярный оператор возмущения Δ удовлетворяет дополнительному требованию

$$\begin{aligned}\Delta_{pq}^{(\alpha)} &= \alpha (\Delta\chi_{u_p}^{(\alpha)}, \chi_{u_q}^{(\alpha)}) = \delta_{pq} \mu_\alpha(u_p) + \alpha \Delta_{u_p u_q} + O(\alpha^2), \\ \mu_\alpha(u_p) &= \mu(u_p) + O(\alpha),\end{aligned}\quad (3)$$

где $\mu(u)$ и Δ_{uv} — кусочно непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов ($\mu(u) = 0$, если существует конечный предел $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (\Delta\chi_{u_p}^{(\alpha)}, \chi_{u_p}^{(\alpha)})$).

Предположим, что $\lambda^*(u) = \lambda(u) + t\mu(u)$ — монотонная функция. Тогда, выбирая в уравнениях (9) и (1) работы¹ для собственных значений возмущённого оператора $L_\alpha + t\Delta$, входящую в эти уравнения последовательность μ_p равной $\mu_\alpha(u_p)$, мы преобразуем при некоторых, довольно общих предположениях относительно $\Lambda_{u_p u_q}^{(\alpha)}$, $\lambda_\alpha^*(u_p)$ уравнение (1) к виду

$$1 + at \sum_p \frac{c_\alpha(u_p, t)}{\lambda_\alpha^*(u_p) - z} = 0, \quad (4)$$

$$\lambda_\alpha^*(u) = \lambda_\alpha(u) + t\mu_\alpha(u),$$

$$c_\alpha(u, t) = c(u, t) + O(\alpha),$$

$$c(u, t) = \Lambda(u) + \dots + \frac{t^n}{n!} \oint \dots \oint \frac{\Delta(u, u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n}{[\lambda^*(u_1) - \lambda^*(u)] \dots [\lambda^*(u_n) - \lambda^*(u)]} + \dots$$

(символом $\oint$ обозначено главное значение интеграла, а $\Lambda(u_1, u_2, \dots, u_n)$ означает определитель $|\Delta u_i u_k|_{i, k=1}^n$).

2. При достаточно малых α коэффициенты $c_\alpha(u_p, t)$, плавно меняясь с u_p , изменяют свой знак только в окрестности нулей или разрывов кусочно непрерывной функции $c(u, t)$. В силу теорем (a) — (b) работы¹ это означает, что между каждой парой чисел $\lambda_\alpha^*(u_p)$ и $\lambda_\alpha^*(u_{p+1})$, за исключением, быть может, окрестности вышеуказанных нулей или разрывов $c(u, t)$, лежат собственные значения возмущённого оператора $L_\alpha + t\Delta$. Эти собственные значения расположены, таким образом, в области D изменения функции $\lambda^*(u)$ и в пределе при $\alpha \rightarrow 0$ плотно заполняют её, образуя квазинепрерывный спектр возмущённого оператора. Кроме этих значений уравнение (4) может иметь корни, лежащие вне области D и в пределе при $\alpha \rightarrow 0$ остающиеся изолированными. Эти корни образуют собственно-дискретный спектр возмущённого оператора.

В дальнейшем мы будем для удобства считать диагональную добавку $t\mu_\alpha(u_p)\delta_{pq}$, если таковая имеется, включённой в невозмущённый оператор $(L_\alpha)_{pq} = [\lambda_\alpha(u_p) + t\mu_\alpha(u_p)]\delta_{pq}$ и в соответствии с этим опускать значок * у собственных чисел $\lambda_\alpha(u_p)$ и $\lambda(u)$.

3. Собственные значения $z(u_p)$ возмущённого оператора $L_\alpha + t\Delta$, принадлежащие к квазинепрерывному спектру, могут быть представлены в виде

$$z(u_p) = \lambda_\alpha(u_p) + \alpha \left(\frac{d\lambda}{du} \right)_{u_p} \xi(u_p), \quad (5)$$

где функция $\xi(u)$ даётся явным выражением

$$\operatorname{tg} \pi \xi = \frac{\pi t c(u, t)}{\frac{d\lambda}{du} \left[1 + t \oint \frac{c(v, t) dv}{\lambda(v) - \lambda(u)} \right]} + O(\alpha), \quad (6)$$

или, выбирая в (6) в качестве аргумента собственное значение λ ,

$$\operatorname{tg} \pi \xi = \frac{\pi t I(\lambda, t)}{1 + \int_D \frac{I(s, t)}{s - \lambda} ds} + O(\alpha), \quad (6a)$$

$$\int_D = \int_{\lambda_{g1}^-}^{\lambda_{g1}^+} + \dots + \int_{\lambda_{gn}^-}^{\lambda_{gn}^+}, \quad I(s, t) = c(v, t) \frac{dv}{ds}, \quad s = \lambda(v).$$

λ_g и λ_g^- — левые и правые граничные точки интервалов, образующих область D квазинепрерывного спектра (в частности, может быть, $\lambda_g^- = \infty$).

Доказательство формул (5) и (6) можно получить преобразованием и оценкой суммы в уравнении (4) при условии (5):

$$at \sum_q \frac{c_q(u_q, t)}{\lambda_q(u_q) - z(u_p)} = - \frac{tc(u_p, t)}{\left(\frac{d\lambda}{du}\right)_{u_p}} \pi \operatorname{ctg} \pi \xi + \int \frac{c(v, t) dv}{\lambda(v) - \lambda(u)} + O(\alpha).$$

4. Особый интерес представляет исследование формулы (6а) вблизи граничных точек λ_g .

Могут представиться два случая:

$$1) I(s, t) \rightarrow 0 \text{ при } s \rightarrow \lambda_g, \int \frac{I(s, t)}{s - \lambda} ds \text{ остаётся конечным при } \lambda \rightarrow \lambda_g.$$

При малых t это даёт

$$\xi \sim tI(\lambda, t) \sim \frac{t\Delta_{uu}}{\frac{d\lambda}{du}}; \quad (7)$$

2) $I(s, t)$ остаётся при $s \rightarrow \lambda_g$ конечным или возрастает медленнее, чем $(s - \lambda_g)^{-1}$. В этом случае $\int \frac{I(s, t)}{s - \lambda} ds$ расходится при $\lambda \rightarrow \lambda_g$, и вблизи λ_g формула (6а) даёт

$$\xi \sim \frac{I(\lambda, t)}{\int \frac{I(s, t)}{s - \lambda} ds}. \quad (8)$$

При малых t , однако, таких, что

$$1 \ll t \int \frac{\Delta_{u_1 u_1} du_1}{\lambda(u_1) - \lambda(u)} \gg \frac{t^n}{n!} \int \dots \int \frac{\Delta(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n}{[\lambda(u_1) - \lambda(u)] \dots [\lambda(u_n) - \lambda(u)]}, \quad (9)$$

$$n > 1,$$

выражение (8) почти не зависит от t и равно

$$\xi \sim \Delta_{uu} / \frac{d\lambda}{du} \int \frac{\Delta_{vv} dv}{\lambda(v) - \lambda(u)}.$$

5. Собственные функции $\varphi_{u_p}(x) = \sqrt{\alpha} [f_{u_p}(x) + O(\alpha)]$, принадлежащие квазинепрерывному спектру возмущённой задачи, на основании формул [II] работы¹ могут быть вычислены аналогичным методом и представлены в той области изменения x , в которой имеют место соотношения (2), следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} f_u &= t \int \frac{b_u(v, t) \chi_v}{\lambda(u) - \lambda(v)} dv + \frac{tc(u, t)}{\frac{d\lambda}{du}} \cdot \pi \operatorname{ctg} \pi \xi \cdot \chi_u, \\ b_u(v, t) &= \Delta\left(\frac{u}{v}\right) + \dots + \frac{t^n}{n!} \int \dots \int \frac{\Delta\left(\begin{smallmatrix} u & u_1 & \dots & u_n \\ v & v_1 & \dots & v_n \end{smallmatrix}\right) du_1 \dots du_n}{[\lambda(u_1) - \lambda(u)] \dots [\lambda(u_n) - \lambda(u)]} + \dots, \\ \Delta\left(\begin{smallmatrix} u_1, \dots, u_n \\ v_1, \dots, v_n \end{smallmatrix}\right) &= \begin{vmatrix} \Delta_{u_1 v_1} & \dots & \Delta_{u_1 v_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{u_n v_1} & \dots & \Delta_{u_n v_n} \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

или в силу [II]

$$f_u = \left[1 + t \int \frac{c(v, t) dv}{\lambda(v) - \lambda(u)} \right] \chi_u + t \int \frac{b_u(v, t) \chi_v dv}{\lambda(u) - \lambda(v)}. \quad (10a)$$

Полученные формулы для f_u сохраняют, естественно, силу и для предельного случая непрерывного спектра ($\alpha \rightarrow 0$).

При достаточно малых t вдали от края интервала непрерывного спектра ортогональная добавка к невозмущённой собственной функции χ_u имеет согласно (10a) вид

$$\delta \chi_u \sim t \int \frac{\Delta u_v \chi_v dv}{\lambda(u) - \lambda(v)},$$

что представляет известную формулу теории малых возмущений в непрерывном спектре.

Напротив, вблизи края интервала, где имеет место соотношение (9), получаем

$$f_u \sim \text{const.} \left[\chi_u + \frac{\int \frac{\Delta u_v \chi_v dv}{\lambda(u) - \lambda(v)}}{\int \frac{\Delta v dv}{\lambda(v) - \lambda(u)}} \right].$$

6. Изолированные собственные значения возмущённого оператора $L_\alpha + t \Delta$ появляются в том случае, если определяющее эти значения уравнение (4) имеет корни, лежащие вне области D , или, точнее, той части этой области, в которой $c(u, t) \neq 0$. Для таких корней указанное уравнение может быть приведено к виду

$$1 + tF(z, t) + O(\alpha) = 0,$$

$$F(z, t) = \int \frac{c(u, t)}{\lambda(u) - z} du. \quad (11)$$

Уравнение (11), как это можно показать, остаётся справедливым и тогда, когда функция $\lambda(u)$ немонотонна и обратная функция $u(\lambda)$ многозначна.

Наконец, в часто встречающихся в физике многомерных задачах, когда λ есть функция векторного аргумента $\lambda = \lambda(\vec{u})$, удовлетворяющая некоторым, довольно общим требованиям непрерывности, $F(z, t)$ в уравнении (11) записывается аналогичным образом:

$$F(z, t) = \int \frac{c(\vec{u}, t)}{\lambda(\vec{u}) - z} dV_{\vec{u}}.$$

Выражение для собственных функций, отвечающих числам z_d , может быть получено подобным же методом. Это даёт

$$\varphi_p = \int \frac{b_p(u, t) \chi_u du}{\lambda(u) - z_d} + O(\alpha),$$

$$b_p(u, t) = \Delta \left(\begin{matrix} u \\ u_0 \end{matrix} \right) + t \int \frac{\Delta \left(\begin{matrix} u, u_1 \\ u_0, u_1 \end{matrix} \right) du_1}{\lambda(u_1) - z_d} + \dots \quad (12)$$

(u_0 — произвольное значение u) и аналогичное выражение для многомерной задачи.

7. Предельное положение изолированных собственных значений z_d (при $\alpha \rightarrow 0$) определяется уравнением

$$1 + tF(z, t) = 0, \quad F(z, t) = \int_D \frac{I(s, t)}{s - z} ds, \quad (13)$$

где $I(s, t)$ даётся формулой

$$I(s, t) = \sum_j c(u_j, t) \frac{du_j}{ds},$$

$$\lambda(u_j) = s,$$

в одномерном и интегралом по поверхности

$$I(s, t) = \int_{\lambda(\vec{u})=s} \frac{c(u, t)}{|\nabla \lambda(\vec{u})|} d\Omega$$

— в многомерном случае. При $z \rightarrow \infty$ $F(z, t) \rightarrow 0$. Отсюда следует, что достаточно большие собственные значения z_d могут существовать лишь при больших t и определяются в этом случае формулой

$$z_d \sim t \int_D I(s, t) ds.$$

Единственными особенностями функции $F(z, t)$ на действительной оси (вне области D) могут явиться граничные точки этой области λ_g . Соответственно с этим мы будем различать два случая:

$$1. \quad I(s, t) \Big|_{s \rightarrow \lambda_g} \rightarrow 0; \quad F(\lambda_g, t) < \infty.$$

В этом случае при малых $|t|$ уравнение (13) не имеет корней на действительной оси (вне области D). Это означает, что первое собственное значение z_d дискретного спектра появляется при возрастании $|t|$ только тогда, когда параметр t достигает критического значения ($1 + t_k F(z_0, t_k) = 0$); это собственное значение появляется в точке z_0 , где $|F(z, t)|$ максимально. Могут представиться две возможности:

а) собственное значение дискретного спектра z_d появляется на одной из границ области D ($z_0 = \lambda_g$) и в дальнейшем при возрастании $|t|$ удаляется от этой границы;

б) собственное значение z_d появляется на некотором расстоянии от границ λ_g ($z_0 \neq \lambda_g$) и при $|t| > |t_k|$ расщепляется на два *):

$$(z_d)_{1,2} = z_0 \pm \beta \sqrt{|t - t_k|} + O(t - t_k);$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2(F + t_k F')}{t_k F''}} \Big|_{z_0, t_k}.$$

2. $I(s, t)$ остаётся при $s \rightarrow \lambda_g$ конечным или возрастает медленнее, чем $(s - \lambda_g)^{-1}$, хотя бы для одного из λ_g ; $F(z, t) \Big|_{z \rightarrow \lambda_g} \rightarrow \infty$.

*) Мы не рассматриваем здесь особых случаев, например:

$$F(z_0, t_k) + t_k F'_k(z_0, t_k) = 0.$$

В этом случае при малых t имеется, по крайней мере, одно собственное значение, неограниченно приближающееся к этой границе λ_g при $t \rightarrow 0$. Если вблизи $s = \lambda_g$

$$I(s, t) \sim (s - \lambda_g)^{-a} I_0 \quad (0 < a < 1),$$

то при малых t

$$z_d - \lambda_g \sim (I_0 t)^{\frac{1}{a}} \quad (I_0 t > 0).$$

Если же $I(s) \Big|_{s \rightarrow \lambda_g} \rightarrow I_0$, то

$$z_d - \lambda_g \sim \exp\left(-\frac{1}{t I_0}\right) \quad (I_0 t > 0).$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Лифшиц, ДАН, 1945, 28, 83.