

Матрица X задачи (21)—(22) имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -e^{TP_1(-is)} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{P_2(-is)}{P_1(-is)}(e^{TP_1(-is)} - 1) & -1 \\ 0 & 1 & a & -1 \\ -1 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что $\det X \equiv 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Борок. Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений. «Матем. сб.», № 6, 1969.
2. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. ГИФМЛ, 1958, стр. 51.
3. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов. Пространства основных и обобщенных функций. ГИФМЛ, 1958.
4. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. ГИФМЛ, 1967, стр. 59.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫМИ БЫСТРО- РАСТУЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. С. Рыжий

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial x^n} + \sum_{k=0}^{n-1} q_k(x) \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k}, \quad (1)$$

где $n \geq 2$, $-\infty < x < \infty$, $0 \leq t < \infty$, $a \neq 0$ — комплексное число, $q_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) — комплекснозначные функции,

$$u(x, 0) = 0. \quad (2)$$

Пусть $q(x) \equiv q_0(x) = v_1(x) + iv_2(x)$. Считая $v_2(x) \neq 0$, установим некоторые классы единственности и близко примыкающие к ним классы неединственности решений задачи (1)—(2). Условия, налагаемые ниже на коэффициент $q(x)$, не ограничивают сверху его порядок роста при $|x| \rightarrow \infty$, а рост остальных коэффициентов подчинен росту $q(x)$. Я. И. Житомирский исследовал случай $v_2(x) \equiv 0$ [1] и случай, когда $v_2(x) \neq 0$ и коэффициенты уравнения (1) имеют «медленный» рост [2].

Будем говорить, что выполняется условие А, если $1^\circ v_1(x)$ и $v_2(x)$ — вещественные дважды непрерывно дифференцируемые функции,

$$2^\circ |q'(x)|^2 |q(x)|^{-(2+\frac{1}{n})} \text{ и } |q''(x)| |q(x)|^{-(1+\frac{1}{n})}$$

принадлежат пространству L_1 при $|x| \geq x_0$ для какого-нибудь $x_0 > 0$,

$$3^\circ |q(x)| \rightarrow \infty \text{ при } |x| \rightarrow \infty,$$

$$4^\circ |q_k(x)| |q(x)|^{-\frac{n-k-1}{n}} \quad (k = 1, \dots, n-1)$$

принадлежат пространству L_1 при $|x| \geq x_0$ для какого-нибудь $x_0 > 0$.

Рассматриваем решения, удовлетворяющие оценкам

$$|D_x^k u(x, t)| \leq F(x) e^{\beta t} \quad (k = 0, 1, \dots, n), \quad (3)$$

где $\beta > 0$ — какое-либо число, а $F(x)$ — непрерывная функция, выбираемая в зависимости от $q(x)$.

Фиксируем в (3) произвольное число $\beta > 0$. Преобразование Лапласа по t сводит уравнение (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению с переменной x ($-\infty < x < \infty$) и комплексным параметром λ ($\operatorname{Re} \lambda > \beta$):

$$ay^{(n)}(x, \lambda) + \sum_{k=0}^{n-1} q_k(x) y^{(k)}(x, \lambda) = \lambda y(x, \lambda). \quad (4)$$

Собственные значения уравнения $y^{(n)}(x, \lambda) = (\lambda - q(x))a^{-1} \times \times y(x, \lambda)$ имеют вид

$$w_j(x, \lambda) = \left| \frac{\lambda - q(x)}{a} \right|^{\frac{1}{n}} \exp \left(\frac{i}{n} \arg \frac{\lambda - q(x)}{a} + \frac{2\pi j i}{n} \right) \quad (j = 0, 1, \dots, n-1). \quad (5)$$

Используя L — диагональный метод [3], можно убедиться в справедливости следующих лемм.

Лемма 1. Пусть коэффициенты $q_i(x)$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) уравнения (4) удовлетворяют условию A и при данном значении λ все функции $\operatorname{Re}[w_j(x, \lambda) - w_k(x, \lambda)]$ ($j, k = 0, 1, \dots, n-1$) сохраняют знак при $x \geq x_0$ ($x \leq -x_0$) для какого-нибудь $x_0 > 0$.

Тогда при этом значении λ уравнение (4) имеет n линейно независимых решений вида

$$y_j^{(p)}(x, \lambda) = \left(\frac{\lambda - q(x)}{a} \right)^{-\frac{n-1}{2n} + \frac{p}{n}} [\varepsilon_j^p + 0(1)] \exp \left\{ \int_0^x w_j(t, \lambda) dt \right\}, \quad (6)$$

$$j, p = 0, 1, \dots, n-1; 0(1) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty (x \rightarrow -\infty).$$

Лемма 2. Пусть: 1) $q_i(x)$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) удовлетворяют условию A ,

2) $|q(x)|$ — монотонная функция при $x \leq -x_0$ и $x \geq x_0$ для какого-либо $x_0 > 0$,

3) существует число $m > 1$ такое, что все функции $\operatorname{Re}[w_i(x, \lambda) - w_k(x, \lambda)]$ ($j, k = 0, 1, \dots, n-1$) сохраняют знак в области

$$D_m = \left\{ (x, \lambda) : (x \geq p(mr)) \cup (x \leq \tilde{p}(mr)), r = |\lambda|, \right. \\ \left. \operatorname{Re} \lambda > \beta > 0 \right\}, \quad (7)$$

где $\tilde{p}(\xi) < 0$ и $p(\xi) > 0$ — функции, обратные к $|q(x)|$.

Тогда в этой области уравнение (4) имеет n линейно независимых решений вида

$$y_j^{(p)}(x, \lambda) = \left(\frac{\lambda - q(x)}{a} \right)^{-\frac{n-1}{2n} + \frac{p}{n}} [\varepsilon_j^p + \delta_{pj}(x, \lambda)] \exp \left\{ \int_0^x w_j(t, \lambda) dt \right\}, \quad (8)$$

$j, p = 0, 1, \dots, n-1$, причем для любого $\varepsilon > 0$ существует число $r_\varepsilon > 0$ такое, что для тех $(x, \lambda) \in D_m$, где $r > r_\varepsilon$, имеем $|\delta_{pj}(x, \lambda)| < \varepsilon$.

Будем говорить, что функция $q(x) = v_1(x) + i v_2(x)$ удовлетворяет условию B , если

1° существует $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{v_2(x)}{v_1(x)} = l$ ($0 \leq |l| \leq +\infty$),

2° функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ сохраняют знак при $x \geq x_0$ и $x \leq -x_0$ для какого-нибудь $x_0 > 0$, причем $\operatorname{sgn} v_i(x) = \operatorname{sgn} v_i(x)$ ($i = 1, 2$).

Положим $\Theta = \operatorname{arctg} l$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}$), $\varphi = \arg a$ ($-\pi < \varphi \leq \pi$), $\gamma_i = \operatorname{sgn} v_i(x)$ ($i = 1, 2$) (при больших $|x|$, где $v_i(x)$ сохраняют знак),

$$\mu_j = \cos \frac{1}{n} \left[\Theta - \varphi + 2\pi j - \frac{\pi}{2} \gamma_2 (1 + \gamma_1) \right] \quad (j = 0, 1, \dots, n-1), \quad (9)$$

$$\mu = \min_{0 \leq j \leq n-1} |\mu_j|.$$

Теорема 1. Пусть 1) $q_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) удовлетворяют условиям A и B ,

2) при каждом λ из какого-нибудь множества E точек области $\{\lambda = \sigma + i\tau : \sigma > \beta > 0, \tau \gamma_2 < 0\}$, имеющего конечную предельную точку, все функции $\operatorname{Re}[w_j(x, \lambda) - w_k(x, \lambda)]$ ($j, k = 0, 1, \dots, n-1$) сохраняют знак для $|x| \geq x_\lambda > 0$,

3) $\mu > 0$.

Тогда если решение $u(x, t)$ задачи (1)–(2) удовлетворяет при каких-либо $\beta > 0$ и $\varepsilon > 0$ оценке

$$\left| D_x^p u(x, t) \right| \leq C \exp \left\{ \beta t + (\mu - \varepsilon) \left| \int_0^x \left| \frac{q(t)}{a} \right|^{\frac{1}{n}} dt \right| \right\}, \quad (10)$$

где $p = 0, 1, \dots, n-1$, $-\infty < x < \infty$, $0 \leq t < \infty$, то $u(x, t) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (1) — (2) в классе (10), тогда его преобразование Лапласа $y(x, \lambda) \equiv \int_0^\infty u(x, t) e^{-\lambda t} dt$ — аналитическое в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > \beta > 0$ решение уравнения (4) и

$$|y^{(p)}(x, \lambda)| \leq A \exp \left\{ (\mu - \varepsilon) \left| \int_0^x \left| \frac{q(t)}{a} \right|^{\frac{1}{n}} dt \right| \right\}, \quad (11)$$

$$p = 0, 1, \dots, n-1, \quad -\infty < x < \infty.$$

Фиксируем любое число $\lambda \in E$. Согласно лемме 1, при данном λ имеется n линейно независимых решений $y_j(x, \lambda)$ уравнения (4) вида (6). Тогда

$$y(x, \lambda) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} C_j(\lambda) y_j(x, \lambda). \quad (12)$$

Дифференцируя (12) $n-1$ раз по x , из полученной системы, учитывая (6), найдем

$$C_j(\lambda) = \frac{D_j(x, \lambda)}{D(x, \lambda)} \exp \left\{ - \int_0^x w_j(t, \lambda) dt \right\}, \quad (13)$$

где

$$D(x, \lambda) = \det \|d_{lk}\|; \quad d_{lk} = \varepsilon_k^l + 0(1), \quad \varepsilon_k = \exp \frac{2\pi k i}{n}$$

($k, l = 0, 1, \dots, n-1$), $0(1) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, а определитель $D_j(x, \lambda)$ получается из $D(x, \lambda)$ при замене j -го столбца на столбец

$$\left\{ y(x, \lambda) \left(\frac{\lambda - q}{a} \right)^{\frac{n-1}{2n}}, \dots, y^{(l)}(x, \lambda) \left(\frac{\lambda - q}{a} \right)^{\frac{n-1}{2n} - \frac{l}{n}}, \dots, y^{(n-1)}(x, \lambda) \left(\frac{\lambda - q}{a} \right)^{-\frac{n-1}{2n}} \right\}.$$

При $|x| \rightarrow \infty$ $D(x, \lambda) \rightarrow \det \|\varepsilon_k^l\| \neq 0$.

Из (11) и (13) при больших $|x|$ следует оценка

$$|C_l(\lambda)| \leq A_1 \exp \left\{ (\mu - \varepsilon_1) \left| \int_0^x \left| \frac{q(t)}{a} \right|^{\frac{1}{n}} dt \right| - \int_0^x \operatorname{Re} w_l(t, \lambda) dt \right\} \quad (14)$$

$$(0 < \varepsilon_1 < \varepsilon).$$

При больших $|x|$, учитывая условие $\tau\gamma_2 < 0$, имеем в силу (5)

$$|w_j(x, \lambda)| \geq |a^{-1}q(x)|^{\frac{1}{n}} [1 - A_2(1 + \gamma_1)|q(x)|^{-1}], \quad (15)$$

$$\arg w_j(x, \lambda) = \frac{1}{n} \left[\psi - \varphi + 2\pi j - \frac{\pi}{2} \gamma'_2(1 + \gamma'_1) \right], \quad (16)$$

где обозначено

$$\psi = \arctg \frac{\tau - v_2(x)}{\sigma - v_1(x)}, \quad \gamma'_1 = \operatorname{sgn}(v_1(x) - \sigma), \quad \gamma'_2 = \operatorname{sgn}(v_2(x) - \tau).$$

Из (9) и (16) получаем оценку

$$|\cosarg w_j(x, \lambda) - \mu_j| \leq \frac{1}{n} \left| \Theta - \psi - \frac{\pi}{2} [\gamma'_2(1 + \gamma'_1) - \gamma'_2(1 + \gamma'_1)] \right|, \quad (17)$$

из которой следует, что при фиксированном λ

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \cosarg w_j(x, \lambda) = \mu_j \quad (j = 0, 1, \dots, n-1). \quad (18)$$

В случае $\mu_j \geq \mu > 0$ возьмем $x > 0$. Учитывая, что

$$\operatorname{Re} w_j(x, \lambda) = |w_j(x, \lambda)| \cosarg w_j(x, \lambda) \geq \left| \frac{q(x)}{a} \right|^{\frac{1}{n}} \left(\mu_j - \frac{\varepsilon_1}{2} \right)$$

при $x \geq x_0$, где $x_0 > 0$ — достаточно большое число, имеем из (14)

$$|C_j(\lambda)| \leq A_3 \exp \left\{ \left(\mu - \mu_j - \frac{\varepsilon_1}{2} \right) \int_0^x \left| \frac{q(t)}{a} \right|^{\frac{1}{n}} dt \right\}.$$

Здесь правая часть стремится к 0 при $x \rightarrow +\infty$, поскольку $\mu - \mu_j - \frac{\varepsilon_1}{2} < 0$. Итак, $C_j(\lambda) = 0$ в рассматриваемой точке λ .

В случае $\mu_j \leq -\mu < 0$ берем $x < 0$ и, учитывая, что $\operatorname{Re} w_j \leq \left(\mu_j + \frac{\varepsilon_1}{2} \right) \left| \frac{q(x)}{a} \right|^{\frac{1}{n}}$ при $x < -x_1 < 0$, где x_1 — достаточно большое число, аналогично получаем $C_j(\lambda) = 0$.

Итак, $C_j(\lambda) = 0$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$) при каждом $\lambda \in E$, а тогда здесь $y(x, \lambda) = 0$. В силу аналитичности $y(x, \lambda) \equiv 0$ и потому $u(x, t) \equiv 0$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1)–2) теоремы 1 и, кроме того, условия

3) $\mu = 0$,

4) если $\mu_i = 0$, то также $\operatorname{Re} w_i(x, \lambda)$ удовлетворяет условию 2).

Тогда если решение $u(x, t)$ задачи (1)–(2) удовлетворяет при каком-либо $\beta > 0$ оценке

$$|D_x^p u(x, t)| \leq \alpha(x) (1 + |q(x)|)^{-\frac{n-1}{2n} + \frac{p}{n}} \exp\{\beta t\}, \quad (19)$$

$$p = 0, 1, \dots, n-1, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq t < \infty,$$

где $\alpha(x)$ — четная непрерывная функция, для которой $\inf \alpha(x) = 0$, то $u(x, t) \equiv 0$.

Доказательство. Рассуждения, аналогичные использованным в теореме 1, приводят к оценке $|C_j(\lambda)| \leq A\alpha(x)$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$). Поскольку $\inf \alpha(x) = 0$, то $C_j(\lambda) \equiv 0$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$) и потому $y(x, \lambda) \equiv 0$ и $u(x, t) \equiv 0$.

Обозначим

$$\mu = \max_{0 \leq j \leq n-1} |\mu_j| \quad (\text{см. (9)}).$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1)–3) леммы 2 и, кроме того, условия

4) $q(x)$ удовлетворяет условию B, причем, если $l = 0$, то исключаем случай $v_1(x) \rightarrow +\infty$ при $|x| \rightarrow \infty$,

$$5) \int_{-\infty}^{\infty} |q(x)|^{-1+\frac{1}{n}} dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |q(x)|^{-1+\frac{1}{n}} dx < \infty. \quad (20)$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует решение $u(x, t) \not\equiv 0$ задачи (1)–(2), удовлетворяющее при некотором $\alpha > 0$ оценкам

$$|D_x^k u(x, t)| \leq C \exp \left\{ \alpha t + \left(\mu + \varepsilon \right) \left| \int_0^x \left| \frac{q(t)}{a} \right|^{\frac{1}{n}} dt \right| \right\}, \quad (21)$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Доказательство. Пусть $y(x, \lambda)$ — решение уравнения (4) при начальных условиях $y^{(k)}(0, \lambda) = y_{0k}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Используя лемму 4 работы [4], получаем оценку

$$|y^{(k)}(x, \lambda)| \leq A \exp \left\{ A_1 (|x| + 1) \left[h(|x|) + r^{\frac{1}{n}} \right] \right\},$$

где

$$h(x) = \sup_{t \in [-x, x]} |q(t)|^{\frac{1}{n}}, \quad r = |\lambda|, \quad -\infty < x < \infty.$$

Пусть $x = p(\xi) > x_0$ и $x = \tilde{p}(\xi) < -x_0$ — функции, обратные к функции $\xi = |q(x)|$. Тогда на сегменте $\tilde{p}(mr) \leq x \leq p(mr)$, где

$r = |\lambda|$, $\operatorname{Re} \lambda > \beta$, при достаточно большом m будет $|q(x)| \leq mr$,
 $h(x) \leq A_2 r^{\frac{1}{n}}$ и

$$|y^{(k)}(x, \lambda)| \leq A_3 \exp \left\{ A_4 r^{\frac{1}{n}} [p(mr) + |\tilde{p}(mr)|] \right\} \quad (22)$$

($k = 0, 1, \dots, n-1$).

Выбор числа $m > 1$ будет уточнен позже.

Рассмотрим теперь $y(x, \lambda)$ в области D_m (см. (7)). Согласно лемме 2, уравнение (5) имеет здесь n линейно независимых решений $y_j(x, \lambda)$ вида (8). В тождестве (12) и равенстве (13) вместо 0 (1) теперь надо взять $\delta_{ik}(x, \lambda)$ (см. (8)). Полагая $x = p(mr)$ и замечая, что $\delta_{ik}(p(mr), \lambda) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, находим с учетом (22)

$$|C_j(\lambda)| \leq A_5 r^{\frac{n-1}{2n}} \exp \left\{ A_6 r^{\frac{1}{n}} [p(mr) + |\tilde{p}(mr)|] \right\}, \quad (23)$$

$j = 0, 1, \dots, n-1$, $r = |\lambda| \geq r_0$, где r_0 — достаточно большое число.

Для точек областей D_m $|x| \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда в случае $0 < |l| < \infty$ $|v_i(x)| \sim K_i |q(x)|$ ($i = 1, 2$) и потому

$$\left| \frac{\sigma}{v_1(x)} \right| \leq \frac{A_7 r}{|q(x)|} \leq \frac{A_7}{m}, \quad \left| \frac{\tau}{v_2(x)} \right| \leq \frac{A_8 r}{|q(x)|} \leq \frac{A_8}{m}.$$

Следовательно, $\gamma_i = \gamma'_i$ ($i = 1, 2$) для больших m и $\frac{\tau - v_2}{\sigma - v_1} = \left(\frac{\tau}{v_1} - \frac{v_2}{v_1} \right) \left(\frac{\sigma}{v_1} - 1 \right)^{-1} \rightarrow l$ при $m \rightarrow \infty$.

Тогда из оценки (17), которая верна при любом λ , при m достаточно большом получаем в области D_m

$$\begin{aligned} |\cos \arg w_j(x, \lambda) - \mu_j| &\leq \frac{1}{n} |\psi - \Theta| = \frac{1}{n} \left| \operatorname{arctg} \frac{\tau - v_2}{\sigma - v_1} - \operatorname{arctg} l \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \left| \frac{\tau - v_2}{\sigma - v_1} - l \right| \cdot \left| 1 + \frac{\tau - v_2}{\sigma - v_1} \cdot l \right|^{-1} \leq \frac{|\tau - l\sigma| + |lv_1 - v_2|}{n |v_1| |v_1^{-1}\sigma - 1|} \leq \\ &\leq A_9 \left(\frac{r}{|q(x)|} + \left| l - \frac{v_2(x)}{v_1(x)} \right| \right) \leq A_9 \left(\frac{1}{m} + \left| l - \frac{v_2(x)}{v_1(x)} \right| \right). \end{aligned} \quad (24)$$

В случаях $l = 0$ и $|l| = +\infty$ в аналогичных оценках вместо $\left| l - \frac{v_2(x)}{v_1(x)} \right|$ будет $|v_2| |v_1|^{-1}$ и $|v_1| |v_2|^{-1}$ соответственно.

Пусть $\varepsilon > 0$ — любое число. В приведенных выше рассуждениях возьмем число $m = m_\varepsilon$ столь большое, чтобы в области D_{m_ε} выполнялись неравенства

$$|\cos \arg w_j(x, \lambda) - \mu_j| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (j = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$(1 + m_\varepsilon^{-1})^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \varepsilon (3\hat{\mu} + \varepsilon)^{-1}. \quad (25)$$

Тогда в области D_{m_ε} имеем

$$\operatorname{Re} w_l(x, \lambda) - \left(\overset{\wedge}{\mu} + \varepsilon \right) \left| \frac{q(x)}{a} \right|^{\frac{1}{n}} \leq \left| \frac{q(x)}{a} \right|^{\frac{1}{n}} \left[(m_\varepsilon^{-1} + 1)^{\frac{1}{n}} \left(\overset{\wedge}{\mu} + \frac{\varepsilon}{3} \right) - \right. \\ \left. - \left(\overset{\wedge}{\mu} + \varepsilon \right) \right] \leq -\frac{\varepsilon}{3} \left| \frac{q(x)}{a} \right|^{\frac{1}{n}}.$$

Далее доказательство аналогично доказательству теоремы 3 в [1], где теперь роль $q_0(x)$ выполняет $|q(x)|$.

Замечания. 1. Классы единственности (10) и неединственности (21) при $\mu \neq 0$ весьма близко примыкают друг к другу, поскольку $0 < \mu \leq \overset{\wedge}{\mu} \leq 1$, а $\varepsilon > 0$ можно взять произвольно малое.

2. Условие сохранения знака функций $\operatorname{Re}[w_l(x, \lambda) - w_k(x, \lambda)]$ при фиксированном λ и больших $|x|$, а также в областях D_m (см. (7)) не является слишком существенным ограничением. Оно, в частности, выполняется, например, если $\theta - \varphi \neq 0, \pm \pi$.

В заключение автор приносит благодарность В. М. Борок за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. И. Житомирский. Классы единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с быстрорастущими коэффициентами. «Изв. АН СССР, серия матем.», 31, № 5, 1967.

2. Я. И. Житомирский. Классы единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с растущими коэффициентами. «Изв. АН СССР, серия матем.», 31, № 4, 1967.

3. И. М. Рапопорт. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Изд-во АН УССР, К., 1954.

4. Г. Н. Золотарев. Теоремы единственности для одного класса интегральных представлений. «Матем. сб.» 78 (120), № 3, 1969.

5. С. Мандельбройт. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. Изд-во иностр. лит. М., 1955.

ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ И УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Ю. А. Александров, А. А. Янцевич

В настоящее время наиболее полно разработана теория оптимальной фильтрации и управления в случае квадратичных функционалов качества и гауссовских сигналов [1—8, 10, 13, 14]. Однако ряд прикладных задач требует учета нелинейности объекта управления, негауссовского характера сигналов и рассмотрения функционалов качества, не являющихся квадратичными. В этом случае возникает необходимость в построении теории

нелинейной оптимальной фильтрации и управления. При синтезе оптимальных фильтров для гауссовских сигналов может быть использована теория Винера — Калмана [8]. В работах Р. Л. Стратоновича [3] был предложен подход к решению задачи нелинейной фильтрации и управления, основанный на теории условных марковских процессов. В настоящей работе рассмотрены задачи оптимальной фильтрации и управления с использованием аппарата квазимарковских процессов [9, 11, 12]. Это дает возможность расширить прикладные методы теории случайных процессов и решить ряд задач фильтрации и управления в квазинормальном приближении.

Оптимальная фильтрация неслучайного сигнала и управление линейной стационарной системой

1. *Постановка задачи.* Пусть сигнал $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dx(t)}{dt} + f(x) = 0, \quad (1)$$

где $f(x) = -\frac{1}{\varphi'(x)}$, $\varphi(y)$ — функция, обратная известной функции $x = x(y)$.

Наблюдаемый процесс $r(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dr(t)}{dt} = -f[x(t)] + \xi_1(t), \quad (2)$$

где $\xi_1(t) = \frac{d\zeta_1}{dt}$ — белый шум, $\zeta_1(t)$ — винеровский процесс, причем $\langle \zeta_1 \rangle = 0$, $\langle d\zeta_1^2 \rangle = N_1 dt$, а скобки $\langle \dots \rangle$ означают среднее по вероятности.

Управляемый объект описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} = u(t) + \xi_2(t), \quad (3)$$

где $u(t)$ — сигнал управления, $\xi_2(t)$ — белый шум, причем

$$\langle \xi_2(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_2(t) \xi_2(t + \tau) \rangle = N_2 \delta(\tau).$$

Требуется определить оптимальное управление $u = u^*$, минимизирующее функционал качества

$$S = \min_u M \left[\int_0^T F(x, y, \sigma) d\sigma \right] \quad (4)$$

и связывающее систему уравнений (1) и (3). Так как полезный сигнал $x(t)$ наблюдается в шумах, то прежде всего необходимо

решить задачу оптимальной фильтрации, а затем оптимального управления.

2. *Оптимальная фильтрация неслучайного сигнала в шумах.* Запишем уравнение для наблюдаемого сигнала:

$$\Delta r(t) = -[f[x(t)] \Delta t + \xi_1(t) \Delta t. \quad (5)$$

Локальные характеристики $\langle \Delta r \rangle$ и $\langle \Delta r^2 \rangle$ процесса $r(t)$ можно определить на основании (5):

$$\langle \Delta r \rangle = -f[x(t)] \Delta t; \quad (6)$$

$$\langle \Delta r^2 \rangle = N_1 \Delta t.$$

Уравнение для апостериорной плотности может быть записано в виде [9, 11, 12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x} [A(x) W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x) W] - W \left\{ \int_{-l}^l \frac{\partial}{\partial x} [A(x) W] dx + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_{-l}^l \frac{d^2}{dx^2} [B(x) W] dx \right\} + \frac{1}{2N_1} [-r^2(t) + 2r(t)x - x^2] W - \\ & - \frac{1}{2N_1} W \int_{-l}^l \{[-r^2(t) + 2r(t)x - x^2] W\} dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как в рассматриваемом случае $A(x) = f(x)$, $B(x) = 0$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x} [f(x) W] - W \int_{-l}^l \frac{\partial}{\partial x} [f(x) W] dx + N_1^{-1} \left[r(t)x - \frac{x^2}{2} \right] W - \\ & - N_1^{-1} W \int_{-l}^l \left[r(t)x - \frac{x^2}{2} \right] W dx, \end{aligned} \quad (8)$$

причем

$$W(x, t)|_{t=t_0} = W_0(x). \quad (9)$$

При отсутствии шумов необходимо решить уравнение для априорной плотности

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [f(x) W] \quad (10)$$

при условии

$$W(x, t)|_{t=t_0} = W(x - x_0). \quad (11)$$

Решение уравнения (8) с учетом условия (9) в общем случае представляет существенные трудности. Поэтому целесообразно перейти к уравнениям для одномерных моментов

$$\langle x^i \rangle = \int_{-l}^l x^i W(x, t) dx. \quad (12)$$

Умножая левую и правую части уравнения (8) на x^i и интегрируя по x , находим

$$\begin{aligned} \frac{d \langle x^i \rangle}{dt} = & \int_{-l}^l x^i \frac{\partial}{\partial x} [f(x) W] dx - \int_{-l}^l x^i \left\{ W \int_{-l}^l \frac{\partial}{\partial x} [f(x) W] dx \right\} dx + \\ & + N_1^{-1} \int_{-l}^l \left[r(t) x^{i+1} - \frac{x^{i+2}}{2} \right] W dx - N_1^{-1} \int_{-l}^l x^i W \times \\ & \times \left\{ \int_{-l}^l \left[r(t) x - \frac{x^2}{2} \right] W dx \right\} dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнения для $\langle x^i \rangle$ являются «незамкнутыми», так как для определения моментов $\langle x^k \rangle$ требуется знать моменты $\langle x^{k+1} \rangle$, $\langle x^{k+2} \rangle$, В этом случае задачу оптимальной в общем случае нелинейной фильтрации можно решить приближенно, обрывая зацепляющуюся систему уравнений для одномерных моментов и используя различные гипотезы «замыкания». Так, например, в квазинормальном приближении, полагая кумулянты $k_4 = k_5 = \dots = 0$, для замыкания уравнений можно воспользоваться соотношениями

$$\begin{aligned} \langle x^3 \rangle &= k_3, \quad \langle x^4 \rangle = f(\langle x^2 \rangle, \langle x^3 \rangle), \\ \langle x^5 \rangle &= g(\langle x^2 \rangle, \langle x^3 \rangle), \dots \end{aligned} \quad (14)$$

3. *Оптимальное управление линейным объектом.* Представим уравнения (1) и (3) в виде системы:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f(x_1), \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dx_m}{dt} &= x_{m+1}, \\ \frac{dx_{m+1}}{dt} &= -\frac{1}{b_m} [b_{m-1}x_m + b_{m-2}x_{m-1} + \dots + b_1x_3 - u(t)] + \frac{1}{b_m} \xi_2(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Рассматривая функционал качества

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}, t) = \min_u M \left\{ \int_t^T [(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^4 + \dots + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_1 (x_1 - x_2)^2}{\beta_1 + \gamma_1 (x_1 - x_2)^2} + \frac{\alpha_2 (x_1 - x_2)^4}{\beta_2 + \gamma_2 (x_1 - x_2)^4} + \dots + cu^2] d\sigma \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

получаем стандартным методом [4, 13] уравнение динамического программирования

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \tau} = \min_u & \left\{ (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^4 + \dots + \frac{\alpha_1 (x_1 - x_2)^2}{\beta_1 + \gamma_1 (x_1 - x_2)^2} + \right. \\ & + \frac{\alpha_2 (x_1 - x_2)^4}{\beta_2 + \gamma_2 (x_1 - x_2)^4} + \dots + cu^2 + f(x_1) \frac{\partial S}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial S}{\partial x_2} + \dots + (17) \\ & + x_{m-1} \frac{\partial S}{\partial x_m} - \frac{1}{b_m} [b_{m-1}x_m + b_{m-2}x_{m-1} + \dots + b_1x_3 - u] \frac{\partial S}{\partial x_{m+1}} + \\ & \left. + \frac{N_2}{2b_m^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x_{m+1}^2} \right\}. \end{aligned}$$

Использовать (17) для решения задачи оптимального управления не представляется возможным, так как $x_1(t)$ наблюдается в шумах. Это приводит к необходимости оптимальной фильтрации сигнала и минимизации функционала качества вида

$$\begin{aligned} M_1 \{S(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}, \tau)\} = \min_u M_1 M \left\{ \int_0^T [(x_1 - x_2)^2 + \right. \\ + (x_1 - x_2)^4 + \dots + \frac{\alpha_1 (x_1 - x_2)^2}{\beta_1 + \gamma_1 (x_1 - x_2)^2} + \\ \left. + \frac{\alpha_2 (x_1 - x_2)^4}{\beta_2 + \gamma_2 (x_1 - x_2)^4} + \dots + cu^2] d\sigma \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

причем M_1 означает усреднение по x_1 с учетом оптимальной фильтрации сигнала $x_1(t)$, $x_1 = \hat{x}_1 + \tilde{x}_1$, где $\hat{x}_1(t)$ — оптимальная оценка сигнала $x_1(t)$, а $\tilde{x}_1(t)$ — мгновенная ошибка фильтрации. В этом случае уравнение динамического программирования будет

$$\begin{aligned} M_1 \left\{ \frac{\partial S}{\partial \tau} \right\} = \min_u M_1 \left\{ (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^4 + \dots + \right. \\ + \frac{\alpha_1 (x_1 - x_2)^2}{\beta_1 + \gamma_1 (x_1 - x_2)^2} + \frac{\alpha_2 (x_1 - x_2)^4}{\beta_2 + \gamma_2 (x_1 - x_2)^4} + \dots + cu^2 + f(x_1) \frac{\partial S}{\partial x_1} + \\ + x_3 \frac{\partial S}{\partial x_2} + \dots + x_{m-1} \frac{\partial S}{\partial x_m} - \frac{1}{b_m} [b_{m-1}x_m + b_{m-2}x_{m-1} + \\ + \dots + b_1x_3 - u] \frac{\partial S}{\partial x_{m+1}} + \frac{N_2}{2b_m^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x_{m+1}^2} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Решение (19) будем искать в виде ряда

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}, \tau) = S_0(\tau) + \sum_i S_i(\tau) x_i + \sum_{ij} S_{ij}(\tau) x_i x_j + \\ + \sum_{ijk} S_{ijk}(\tau) x_i x_j x_k + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда из (19) и (20) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \tau} = \min_u & \left\{ \left(\hat{x}_1 - x_2 \right)^2 + \left(\hat{x}_1 - x_2 \right)^4 + \dots + \right. \\ & + \frac{\alpha_1 \left[\left(\hat{x}_1 - x_2 \right)^2 + \langle \tilde{x}_1^2 \rangle \right]}{\beta_1 + \gamma_1 \left[\left(\hat{x}_1 - x_2 \right)^2 + \langle \tilde{x}_1^2 \rangle \right]} + M_1 \left\{ \frac{\alpha_2 (x_1 - x_2)^4}{\beta_2 + \gamma_2 (x_1 - x_2)^4} \right\} + \dots + cu^2 + \\ & + M_1 \left\{ f(x_1) \frac{\partial S}{\partial x_1} \right\} + x_3 \frac{\partial \hat{S}}{\partial x_2} + \dots + x_{m-1} \frac{\partial \hat{S}}{\partial x_m} - \\ & - \frac{1}{b_m} [b_{m-1}x_m + \dots + b_1x_3 - u] \frac{\partial \hat{S}}{\partial x_{m+1}} + \frac{N_2}{2b_m^2} \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial x_{m+1}^2} \left. \right\} + \quad (21) \\ & + \Psi(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}; \langle \tilde{x}_1^2 \rangle, \langle \tilde{x}_1^3 \rangle, \dots), \end{aligned}$$

где

$$\langle \tilde{x}_1^2 \rangle = M_1 \{ \tilde{x}_1^2 \}; \quad \langle \tilde{x}_1^3 \rangle = M_1 \{ \langle \tilde{x}_1^3 \rangle \}, \dots; \quad \hat{S} = M_1 \{ S \}.$$

Предполагая, что множество допустимых управлений неограничено, находим из (21) оптимальное управление

$$u = u^* - \frac{1}{2cb_m} \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial x_{m+1}} \right). \quad (22)$$

Тогда уравнение для функции $\hat{S}(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}, \tau)$ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \tau} = & \left\{ \left(\hat{x}_1 - x_2 \right)^2 + \left(\hat{x}_1 - x_2 \right)^4 + \dots + \right. \\ & + \frac{\alpha_1 \left[\left(\hat{x}_1 - x_2 \right)^2 + \langle \tilde{x}_1^2 \rangle \right]}{\beta_1 + \gamma_1 \left[\left(\hat{x}_1 - x_2 \right)^2 + \langle \tilde{x}_1^2 \rangle \right]} + M_1 \left\{ \frac{\alpha_2 (x_1 - x_2)^4}{\beta_2 + \gamma_2 (x_1 - x_2)^4} \right\} + \\ & + \dots + M_1 \left\{ f(x_1) \frac{\partial S}{\partial x_1} \right\} + x_3 \frac{\partial \hat{S}}{\partial x_2} + \dots + x_{m-1} \frac{\partial \hat{S}}{\partial x_m} - \quad (23) \\ & - \frac{1}{b_m} [b_{m-1}x_m + b_{m-2}x_{m-1} + \dots + b_1x_3] \frac{\partial \hat{S}}{\partial x_{m+1}} + \frac{N_2}{2b_m^2} \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial x_{m+1}^2} - \\ & - \frac{1}{4cb_m} \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial x_{m+1}} \right)^2 + \Psi(x_1, x_2, \dots, \langle \tilde{x}_1^2 \rangle, \langle \tilde{x}_1^3 \rangle, \dots). \end{aligned}$$

Подстановка (20), с учетом замены x_1 на $x_1^{\wedge}$, в (23) позволяет найти систему нелинейных дифференциальных уравнений, решение которых в общем случае целесообразно производить на аналоговых или цифровых вычислительных машинах.

4. Пример. Пусть сигнал $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dx(t)}{dt} + \beta \left(\frac{x^2}{\alpha^2} - 1 \right) = 0, \quad (24)$$

решение которого $x(t) = \alpha \operatorname{th} \beta t$, а стохастическое дифференциальное уравнение для наблюдаемого процесса $r(t)$ —

$$dr(t) = -\beta \left[\frac{1}{\alpha^2} x^2(t) - 1 \right] dt + d\zeta_1(t), \quad (25)$$

где

$$\langle \zeta_1(t) \rangle = 0; \quad \langle \Delta \zeta_1^2(t) \rangle = N_1 \Delta t.$$

Предположим далее, что на объект, описываемый дифференциальным уравнением первого порядка, помимо управления $u(t)$ воздействует шум $\xi_2(t)$. Таким образом

$$dy(t) = u(t) dt + d\zeta_2(t), \quad (26)$$

где

$$\langle \zeta_2(t) \rangle = 0; \quad \langle \Delta \zeta_2^2(t) \rangle = N_2 \Delta t.$$

Для решения задачи оптимальной нелинейной фильтрации воспользуемся уравнением (8). В рассматриваемом случае имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} & \left[\beta \left(\frac{1}{\alpha^2} x^2 - 1 \right) W \right] + N_1^{-1} \left[r(t) x - \frac{x^2}{2} \right] W - \\ & - N_1^{-1} W \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[r(t) x - \frac{x^2}{2} \right] W dx \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

причем

$$W(x, t)|_{t=t_0} = W_0(x).$$

Перейдем от (27) к системе уравнений для одномерных моментов:

$$\begin{aligned} \frac{d \langle x \rangle}{dt} = N_1^{-1} \langle x^2 \rangle [r(t) - \langle x \rangle] - \frac{\beta}{\alpha^2} \langle x^2 \rangle - \\ - N_1^{-1} \frac{\langle x^3 \rangle}{2} + \beta, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} = -2 \frac{\beta}{\alpha^2} \langle x^3 \rangle + 2\beta \langle x \rangle + N_1^{-1} \langle x^4 \rangle - \\ - (2N_1)^{-1} \langle x^2 \rangle^2, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\frac{d \langle x^3 \rangle}{dt} = -3 \frac{\beta}{\alpha^2} \langle x^4 \rangle + 3\beta \langle x^2 \rangle + (2N_1)^{-1} \langle x^5 \rangle - \\ - (2N_1)^{-1} \langle x^2 \rangle \langle x^3 \rangle \quad (30)$$

..... и т. д.

В квазинормальном приближении, учитывая (14), наряду с (29) и (30) имеем также

$$\frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} = -\frac{2\beta}{\alpha^2} \langle x^3 \rangle - 2\beta \langle x \rangle + F_1(\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle x^3 \rangle), \quad (31)$$

$$\frac{d \langle x^3 \rangle}{dt} = -\frac{3\beta}{\alpha^2} F_1(\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle x^3 \rangle), \\ + F_2(\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle x^3 \rangle, \langle x^4 \rangle). \quad (32)$$

Из (28), (31) и (32) следует, что задача оптимальной нелинейной фильтрации сигнала в шумах может быть решена в квазинормальном приближении для моментов $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ и $\langle x^3 \rangle$.

Пусть функционал качества, который необходимо минимизировать, будет

$$M_1 \{S(x, y, t)\} = \min_u M_1 M \left\{ \int_t^T [(x-y)^2 + cu^2] d\tau \right\}. \quad (33)$$

Так как объект управления линейный, а функционал качества квадратичный, то наряду с (24) полезный сигнал целесообразно задать дифференциальным уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = \varphi(t), \quad (34)$$

где

$$x(t) = a \operatorname{th} bt; \quad \varphi(t) = ab \frac{1}{\operatorname{ch}^2 bt}. \quad (35)$$

Тогда уравнение динамического программирования (21) для рассматриваемого случая имеет вид

$$M_1 \left\{ \frac{\partial S}{\partial \tau} \right\} = \min_u M_1 \left\{ (x-y)^2 + cu^2 + \varphi(T-\tau) \frac{\partial S}{\partial x} + \right. \\ \left. + u \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{N_2}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right\}. \quad (36)$$

Решение (36) будем искать в виде ряда:

$$S(x, y, \tau) = S_0(\tau) + S_1(\tau)x + S_2(\tau)y + 2S_{12}(\tau)xy + \\ + S_{11}(\tau)x^2 + S_{22}(\tau)y^2. \quad (37)$$

Находя производные $\frac{\partial S}{\partial \tau}$, $\frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial S}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}$ и усредняя по x с учетом

подстановки $x = \hat{x} + \tilde{x}$, получаем

$$\frac{\hat{\partial S}(\hat{x}, y, \tau)}{\partial \tau} = \min_u \left\{ (\hat{x} - y)^2 + cu^2 + \varphi(T - \tau) \frac{\hat{\partial S}}{\partial x} + u \frac{\hat{\partial S}}{\partial y} + \frac{N_2}{2} \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial y^2} \right\} + \Psi(\langle \tilde{x}^2 \rangle), \quad (38)$$

где Ψ — функция, зависящая от оптимальной дисперсии. Полагая, что область допустимых управлений неограничена, имеем

$$u = u^* = -\frac{1}{2c} \left(\frac{\hat{\partial S}}{\partial y} \right). \quad (39)$$

Подставляя (39) в (38), находим уравнение для производящей функции

$$\frac{\hat{\partial S}}{\partial \tau} = (\hat{x} - y)^2 + \varphi(T - \tau) \frac{\hat{\partial S}}{\partial x} + \frac{N_2}{2} \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial y^2} - \frac{1}{4c} \left(\frac{\hat{\partial S}}{\partial y} \right)^2. \quad (40)$$

Решение (40) может быть получено с помощью подстановки в (40) ряда (37) и замены x на $\hat{x}$. Таким образом может быть получена система нелинейных уравнений для компонент производящей функции:

$$\frac{\hat{d}\hat{S}_0}{d\tau} = \frac{\hat{S}_{12}^2}{c} \langle \tilde{x}^2 \rangle + \varphi(T - \tau) \hat{S}_1 + N_2 \hat{S}_{22} - \frac{1}{4c} \hat{S}_2^2; \quad (41)$$

$$\frac{\hat{d}\hat{S}_1}{d\tau} = 2\varphi(T - \tau) \hat{S}_{11} - \frac{\hat{S}_2 \hat{S}_{12}}{c};$$

$$\frac{\hat{d}\hat{S}_2}{d\tau} = 2\varphi(T - \tau) \hat{S}_{12} - \frac{\hat{S}_{22} \hat{S}_2}{c};$$

$$\frac{\hat{d}\hat{S}_{11}}{d\tau} = 1 - \frac{\hat{S}_{12}^2}{c}; \quad (42)$$

$$\frac{\hat{d}\hat{S}_{12}}{d\tau} = -1 - \frac{\hat{S}_{12} \hat{S}_{22}}{c};$$

$$\frac{\hat{d}\hat{S}_{22}}{d\tau} = 1 - \frac{\hat{S}_{22}^2}{c}.$$

Уравнения (41), (42) должны решаться с учетом начальных условий при $\tau = 0$, $\hat{S}_0 = \hat{S}_1 = \hat{S}_2 = \hat{S}_{12} = \hat{S}_{11} = \hat{S}_{22} = 0$. Оптимальное управление

$$u = u^* = -\frac{1}{2c} (\hat{S}_2 + 2\hat{S}_{12}\hat{x} + 2\hat{S}_{22}y). \quad (43)$$

Полагая $c = 1$, найдем решение уравнений для компонент производящей функции, входящих в (43):

$$\hat{S}_{22}(\tau) = \text{th } \tau; \quad (44)$$

$$\hat{S}_{12}(\tau) = -\text{th } \tau; \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_2(\tau) = -2a (\text{ch } \tau)^{-1} \left\{ 1 - \frac{\text{ch } T}{\text{ch}(T - \tau)} + \text{sh } T [\text{arctg}(\text{sh } \tau) - \right. \\ \left. - \text{arctg}[\text{sh}(T - \tau)]] \right\}, \quad (b = 1); \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_2(\tau) = -2 (\text{ch } \tau)^{-1} \{ a \text{sh } T [4T - \text{th } 2T + \text{th } 2(T - \tau)] - \\ - 2a \text{ch } T [\ln \text{ch } 2T - \ln \text{ch } 2(T - \tau)] \}, \quad (b = 0,5). \end{aligned} \quad (47)$$

Таким образом, получено явное выражение для оптимального управления $u = u^*$, которое замыкает систему (24), (26) с учетом оптимальной нелинейной фильтрации. Ошибки оптимальной фильтрации и управления определяются уравнением (41).

Оптимальная фильтрация квазимарковского сигнала и управление линейной стационарной системой

1. *Постановка задачи.* Пусть сигнал $x(t)$ определяется стохастическим дифференциальным уравнением

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + A_1(x) [1 + \eta(t)] = \sqrt{B_1(x)} \xi_1(t), \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned} \langle \xi_1 \rangle &= 0; \quad \langle \xi_1 \xi_{1\tau} \rangle = N_1 \delta(\tau); \\ \langle \eta \rangle &= 0; \quad \langle \eta \eta_\tau \rangle = N \delta(\tau); \quad \langle \xi_1 \eta_\tau \rangle = 0. \end{aligned}$$

Наблюдается сигнал

$$r(t) = x(t) + \xi_2(t), \quad (49)$$

где

$$\langle \xi_2 \rangle = 0; \quad \langle \xi_2 \xi_{2\tau} \rangle = N_2 \delta(\tau); \quad \langle \xi_1 \xi_{2\tau} \rangle = 0; \quad \langle \xi_2 \eta_\tau \rangle = 0.$$

Полиномы $A_1(x)$ и $B_1(x)$, например для распределения Пирсона, берутся в виде

$$\begin{aligned} A_1(x) &= a_0 + bx; \\ B_1(x) &= c_1 x^2 + dx + q. \end{aligned} \quad (50)$$

Управляемый объект описывается дифференциальным уравнением:

$$b_m \frac{d^m y}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dy}{dt} = u(t) + \xi_3(t), \quad (51)$$

где

$$\langle \xi_3 \rangle = 0; \quad \langle \xi_3 \xi_{3\tau} \rangle = N_3 \delta(\tau).$$

Требуется определить оптимальное управление $u = u^*$, минимизирующее функционал качества

$$S = \min_u M \left\{ \int_0^T F(x, y, \sigma) d\sigma \right\}. \quad (52)$$

Так как сигнал $x(t)$ наблюдается в шумах, то задача распадается на две: оптимальную фильтрацию и оптимальное управление линейным объектом. Решим их последовательно.

2. *Оптимальная фильтрация квазимарковского сигнала.* Решим задачу оптимальной фильтрации квазимарковского сигнала, описываемого уравнением (1) в белом гауссовском шуме.

Уравнение для апостериорной плотности распределения вероятностей $W(x, t)$ в случае наблюдаемого процесса (49) имеет вид [9, 11, 12]:

$$\begin{aligned} L_t \left\{ \frac{\partial W}{\partial t} \right\} = & - \frac{\partial}{\partial x} [A(x) W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ [D_{11}(x) - 2D_{10}(x) + D_{00}(x)] W \} - \\ & - \left\{ \frac{1}{2} \int_{-l}^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D_{11}(x) - 2D_{10}(x) + D_{00}(x)] W dx + \right. \\ & + \int_{-l}^l \frac{\partial}{\partial x} [A(x) W] dx \Big\} W + L_t \left\{ N_2^{-1} \left[r(t)x - \frac{x^2}{2} \right] W \right\} - \\ & - L_t \left\{ N_2^{-1} W \int_{-l}^l \left[r(t)x - \frac{x^2}{2} \right] W dx \right\}, \end{aligned} \quad (53)$$

где

$$L_t = a_n \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d}{dt} + a_1, \quad (54)$$

$$W(x, t)|_{t=0} = W_0(x);$$

$$\left. \frac{\partial^{k-1} W(x, t)}{\partial t^{k-1}} \right|_{t=0} = \Psi_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (55)$$

Решение уравнения (53) с учетом соответствующих начальных и граничных условий сложно. Поэтому перейдем к уравнениям для одномерных моментов (12). Умножая левую и правую

части (53) на x^i и интегрируя по x , находим бесконечную «зацепляющуюся» цепочку уравнений для $\langle x^i \rangle$:

$$\begin{aligned}
 L_t \left\{ \frac{d \langle x^i \rangle}{dt} \right\} = & - \int_{-l}^l x^i \frac{\partial}{\partial x} [A(x) W] dx + \frac{1}{2} \int_{-l}^l x^i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ [D_{11}(x) - \\
 & - 2D_{10}(x) + D_{00}(x)] W \} dx - \int_{-l}^l x^i \left\{ \frac{1}{2} \int_{-l}^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D_{11}(x) - 2D_{10}(x) + \right. \\
 & \left. + D_{00}(x)] W dx + \int_{-l}^l \frac{\partial}{\partial x} [A(x) W] dx \right\} W dx + \quad (56) \\
 & + L_t N_2^{-1} \int_{-l}^l x^i \left\{ \left[r(t)x - \frac{x^2}{2} \right] W \right\} dx - L_t N_2^{-1} \int_{-l}^l x^i \left\{ \int_{-l}^l \left[r(t)x - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{x^2}{2} \right] W dx \right\} W dx.
 \end{aligned}$$

Уравнения для $\langle x^i \rangle$ являются «незамкнутыми», так как для определения моментов $\langle x^k \rangle$ требуется знать моменты более высокого порядка $\langle x^{k+1} \rangle$, $\langle x^{k+2} \rangle$ и т. д.

В квазинормальном приближении можно использовать для замыкания системы (56) соотношения (14).

Таким образом, приближенное решение задачи оптимальной нелинейной фильтрации может быть получено в замкнутой форме путем обрыва зацепляющейся системы уравнений (56) для одномерных моментов.

3. *Оптимальное управление линейным объектом.* Запишем уравнения сигнала (48) и объекта управления (50) в виде системы:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= x_2; \\
 \frac{dx_2}{dt} &= x_3; \\
 &\dots \dots \dots \\
 \frac{dx_n}{dt} &= -\frac{1}{a_n} \{ a_{n-1}x_n + a_{n-2}x_{n-1} + \dots + a_2x_3 + a_1x_2 + \\
 &+ A(x_1)[1 + \eta(t)] \} + \frac{1}{a_n} \sqrt{B(x_1)} \xi_1(t),
 \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_{n+1}}{dt} &= x_{n+2} = \frac{dy}{dt}; \\
 \frac{dx_{n+2}}{dt} &= x_{n+3}; \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned} \quad (58)$$

$$\frac{dx_{n+m}}{dt} = -\frac{1}{b_m} [b_{m-1}x_{n+m-1} + b_{m-2}x_{n+m-2} + \dots + b_2x_{n+3} + b_1x_{n+2}] + \frac{1}{b_m} u(t) + \frac{1}{b_m} \xi_3(t).$$

Так как сигнал $x(t)$ наблюдается в шумах, то в рассматриваемом случае при решении задачи оптимального управления необходимо минимизировать функционал качества

$$M_1 \{S(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, t)\} = \min_u M_1 M \left\{ \int_t^T [(x_1 - x_{n+1})^2 + (x_1 - x_{n+1})^4 + \dots + \frac{\alpha_1 (x_1 - x_{n+1})^2}{\beta_1 + \gamma_1 (x_1 - x_{n+1})^2} + \frac{\alpha_2 (x_1 - x_{n+1})^4}{\beta_2 + \gamma_2 (x_1 - x_{n+1})^4} + \dots + cu^2] d\sigma \right\}, \quad (59)$$

где M_1 означает усреднение по $x_1, x_2, \dots, x_n$ с учетом оптимальной фильтрации $x_k(t)$, а $x_1 = \hat{x}_1 + \tilde{x}_1$; $x_2 = \hat{x}_2 + \tilde{x}_2$; ...; $x_n = \hat{x}_n + \tilde{x}_n$. В этом случае уравнение динамического программирования будет

$$M_1 \left\{ \frac{\partial S}{\partial \tau} \right\} = \min_u M_1 \left\{ (x_1 - x_{n+1})^2 + (x_1 - x_{n+1})^4 + \dots + \frac{\alpha_1 (x_1 - x_{n+1})^2}{\beta_1 + \gamma_1 (x_1 - x_{n+1})^2} + \frac{\alpha_2 (x_1 - x_{n+1})^4}{\beta_2 + \gamma_2 (x_1 - x_{n+1})^4} + \dots + cu^2 + \right. \\ \left. + x_2 \frac{\partial S}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial S}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial S}{\partial x_{n-1}} - \frac{1}{a_n} (a_{n-1}x_n + a_{n-2}x_{n-1} + \dots + a_1x_2 + x_1) \frac{\partial S}{\partial x_n} + x_{n+2} \frac{\partial S}{\partial x_{n+1}} + x_{n+3} \frac{\partial S}{\partial x_{n+2}} + \dots + x_{n+m} \frac{\partial S}{\partial x_{n+m-1}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{b_m} [b_{m-1}x_{n+m-1} + b_{m-2}x_{n+m-2} + \dots + b_2x_{n+2} + b_1x_{n+2} - u(t)] \frac{\partial S}{\partial x_{n+m}} + \frac{N_1}{2a_n^2} B(x_1) \frac{\partial^2 S}{\partial x_n^2} + \frac{N}{2a_n^2} A^2(x_1) \frac{\partial^2 S}{\partial x_n^2} + \frac{N_3}{2b_m^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x_{n+m}^2} \right\}. \quad (60)$$

Решение (60) будем искать в виде ряда

$$S = S_0(\tau) + \sum_i S_i(\tau) x_i + \sum_{ij} S_{ij}(\tau) x_i x_j + \sum_{ijk} S_{ijk}(\tau) x_i x_j x_k + \dots \quad (61)$$

Тогда, определив производные от S по x_i, τ , усредняя по x_1 ,

$x_2, \dots, x_n$ и подставляя $x_1 = \hat{x}_1 + \tilde{x}_1, \dots, x_n = \hat{x}_n + \tilde{x}_n$, получим уравнение динамического программирования:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \tau} = \min_u & \left\{ \left(\hat{x}_1 - x_{n+1} \right)^2 + \left(\hat{x}_1 - x_{n+1} \right)^4 + \dots + \right. \\ & + \frac{\alpha_1 \left[\left(\hat{x}_1 - x_{n+1} \right)^2 + \langle \tilde{x}_1^2 \rangle \right]}{\beta_1 + \gamma_1 \left[\left(\hat{x}_1 - x_{n+1} \right)^2 + \langle \tilde{x}_1^2 \rangle \right]} + \dots + cu^2 + \hat{x}_2 \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{x}_1} + \\ & + \hat{x}_3 \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{x}_2} + \dots + \hat{x}_n \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{x}_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \left(a_{n-1} \hat{x}_n + a_{n-2} \hat{x}_{n-1} + \right. \\ & + \dots + a_1 \hat{x}_2 + \hat{x}_1 \left. \right) \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{x}_n} + x_{n+2} \frac{\partial \hat{S}}{\partial x_{n+1}} + x_{n+3} \frac{\partial \hat{S}}{\partial x_{n+2}} + \dots + \\ & + x_{n+m} \frac{\partial \hat{S}}{\partial x_{n+m-1}} - \frac{1}{b_m} [b_{m-1} x_{n+m-1} + b_{m-2} x_{n+m-2} + \dots + b_2 x_{n+2} + \\ & + b_1 x_{n+1} - u(t)] \frac{\partial \hat{S}}{\partial x_{n+m}} + \frac{N_1}{2a_n^2} B \left(\hat{x}_1 \right) \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{x}_n^2} + \frac{N}{2a_n^2} A^2 \left(\hat{x}_1 \right) \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial \hat{x}_n^2} + \\ & + \frac{N_3}{2b_m^2} \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial x_{n+m}^2} \left. \right\} + \Psi \left[\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \langle \tilde{x}_1^2 \rangle, \langle \tilde{x}_2^2 \rangle, \dots \right]. \quad (62) \end{aligned}$$

Оптимальное управление для случая, когда множество допустимых управлений неограничено, определяется выражением

$$u = u^* = - \frac{1}{2cb_m} \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial x_{n+m}} \right).$$

Тогда уравнение для производящей функции принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \tau} = & \left\{ \left[\left(\hat{x}_1 - x_{n+1} \right)^2 + \left(\hat{x}_1 - x_{n+1} \right)^4 + \dots + \right. \right. \\ & + \frac{\alpha_1 \left[\left(\hat{x}_1 - x_{n+1} \right)^2 + \langle \tilde{x}_1^2 \rangle \right]}{\beta_1 + \gamma_1 \left[\left(\hat{x}_1 - x_{n+1} \right)^2 + \langle \tilde{x}_1^2 \rangle \right]} + \dots + \hat{x}_2 \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{x}_1} + \hat{x}_3 \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{x}_2} + \\ & + \dots + \hat{x}_n \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{x}_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \left(a_{n-1} \hat{x}_n + a_{n-2} \hat{x}_{n-1} + \dots + a_1 \hat{x}_2 + \hat{x}_1 \right) \left. \right] \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{x}_n} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + x_{n+2} \frac{\hat{\partial S}}{\partial x_{n+1}} + x_{n+3} \frac{\hat{\partial S}}{\partial x_{n+2}} + \dots + x_{n+m} \frac{\hat{\partial S}}{\partial x_{n+m-1}} - \\
& - \frac{1}{b_m} [b_{m-1} x_{n+m-1} + b_{m-2} x_{n+m-2} + \dots + b_2 x_{n+2} + b_1 x_{n+1}] \frac{\hat{\partial S}}{\partial x_{n+m}} + \\
& + \frac{N_1}{2a_n^2} B(x_1) \frac{\hat{\partial}^2 S}{\partial x_n^2} + \frac{N}{2a_n^2} A^2(x_1) \frac{\hat{\partial}^2 S}{\partial x_n^2} + \frac{N_3}{2b_m^2} \frac{\hat{\partial}^2 S}{\partial x_{n+m}^2} - \\
& - \frac{1}{4cb_m^2} \left(\frac{\hat{\partial S}}{\partial x_{n+m}} \right)^2 \Bigg\} + \Psi(x_1, x_2, \dots, \langle \tilde{x}_1^2 \rangle, \langle \tilde{x}_2^2 \rangle, \dots),
\end{aligned} \quad (63)$$

где

$$\hat{S} = S(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}, \tau).$$

В результате подстановки в (63) ряда (61) и замены $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$ соответственно их оптимальными оценками $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$ можно получить систему нелинейных дифференциальных уравнений для компонент производящей функции $\hat{S}_i, \hat{S}_{ij}, \hat{S}_{ijk}$ и т. д. В общем случае решение этих уравнений целесообразно находить с помощью аналоговых или цифровых вычислительных машин.

4. Пример. Пусть сигнал $x(t)$ определяется стохастическим дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{a_1} x + \frac{1}{a_1} \xi_1(t), \quad (64)$$

наблюдается сигнал $r(t)$, причем

$$dr(t) = -\frac{1}{a_1} x(t) dt + d\zeta_2(t), \quad (65)$$

где

$$\begin{aligned}
\langle \Delta \zeta_1 \rangle &= 0; \quad \langle \Delta \zeta_1^2 \rangle = N_1 \Delta t; \\
\langle \Delta \zeta_2 \rangle &= 0; \quad \langle \Delta \zeta_2^2 \rangle = N_2 \Delta t; \quad \langle \Delta \zeta_1 \Delta \zeta_2 \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Уравнение управляемого объекта

$$dy(t) = u(t) dt + d\zeta_3(t), \quad (66)$$

где

$$\begin{aligned}
\langle \Delta \zeta_3 \rangle &= 0; \quad \langle \Delta \zeta_3^2 \rangle = N_3 \Delta t; \quad \langle \Delta \zeta_1 \Delta \zeta_3 \rangle = 0; \\
\langle \Delta \zeta_2 \Delta \zeta_3 \rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Необходимо найти оптимальное управление $u(t)$, замыкающее уравнения (64), (66) и минимизирующее функционал качества

$$S(x, y, t) = \min_u M \left\{ \int_t^T [(x - y)^2 + cu^2] d\sigma \right\}.$$

Так как сигнал $x(t)$ наблюдается в шумах, то функционал стоимости принимает вид

$$M_1 \{S(x, y, t)\} = \min_u M_1 M \left\{ \int_t^T [(x - y)^2 + cu^2] d\sigma \right\}, \quad (67)$$

где M_1 означает усреднение по x с учетом оптимальной фильтрации. Таким образом, предварительно необходимо решить задачу оптимальной фильтрации. Уравнение для апостериорной плотности распределения вероятностей в рассматриваемом случае будет [9, 11, 12]

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{a_1} W(x, t) \right] + \frac{N_1}{2a_1^2} \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} + \\ & + N_2^{-1} \left[r(t)x - \frac{x^2}{2} \right] W(x, t) - N_2^{-1} W(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} \left[r(t)x - \right. \\ & \left. - \frac{x^2}{2} \right] W(x, t) dx. \end{aligned} \quad (68)$$

Найдем зацепляющуюся систему уравнений для одномерных моментов $\langle x^i \rangle$:

$$a_1 \frac{d \langle x \rangle}{dt} + \langle x \rangle = N_2^{-1} \langle x^2 \rangle [r(t) - \langle x \rangle], \quad (69)$$

$$a_1 \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} + 2 \langle x^2 \rangle + N_2^{-1} \langle x^2 \rangle^2 = \frac{N_1}{2a_1^2}. \quad (70)$$

Так как гауссовский случайный процесс $x(t)$ наблюдается в гауссовском белом шуме, то система уравнений замыкается на двух первых моментах $\langle x \rangle$ и $\langle x^2 \rangle$. Заметим, что уравнения оптимальной фильтрации (69) и (70) полностью совпадают с результатами, полученными в [3, 10]. Для установившегося режима из (70) следует

$$\langle x^2 \rangle = \sqrt{N_2^2 + N_2 \frac{N_1}{2a_1^2}} - N_2. \quad (71)$$

Теперь можно переходить к решению задачи оптимального управления.

Уравнение динамического программирования (62) в рассматриваемом случае следующее

$$M_1 \left\{ \frac{\partial S}{\partial \tau} \right\} = \min_u M_1 \left\{ (x - y)^2 + cu^2 - \frac{x}{a_1} \frac{\partial S}{\partial x} + u \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{N_1}{2a_1^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{N_3}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right\}, \quad (72)$$

где $\tau = T - t$.

Решение (72) будем искать в виде ряда:

$$S(x, y, \tau) = S_0(\tau) + S_1(\tau)x + S_2(\tau)y + 2S_{12}(\tau)xy + S_{11}(\tau)x^2 + S_{22}(\tau)y^2. \quad (73)$$

Определив производные от S по x, y, τ и усредняя по x с учетом подстановки $x = \hat{x} + \tilde{x}$, найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \tau} = \min_u \left\{ \left(\hat{x} - y \right)^2 + cu^2 - \frac{\hat{x}}{a_1} \frac{\partial \hat{S}}{\partial x} + u \frac{\partial \hat{S}}{\partial y} + \right. \\ \left. + \frac{N_1}{2a_1^2} \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial x^2} + \frac{N_3}{2} \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial y^2} \right\} + \Psi \left(\left\langle \tilde{x}^2 \right\rangle \right). \end{aligned} \quad (74)$$

Полагая, что множество допустимых управлений неограничено, находим

$$u = u^* = -\frac{1}{2c} \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial y} \right). \quad (75)$$

Подставляя (71) в (70), получим уравнение для $\hat{S}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \tau} = \left[\left(\hat{x} - y \right)^2 + \frac{\hat{x}}{a_1} \frac{\partial \hat{S}}{\partial x} + \frac{N_1}{2a_1^2} \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial x^2} + \frac{N_3}{2} \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial y^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4c} \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial y} \right)^2 \right] + \Psi \left[\left\langle \tilde{x}^2 \right\rangle \right]. \end{aligned} \quad (76)$$

Подстановка в (76) ряда (73) с учетом замены x на оптимальную оценку $\hat{x}$ позволяет получить систему уравнений для компонент производящей функции:

$$\begin{aligned} \frac{dS_0}{d\tau} = \left\langle \tilde{x}^2 \right\rangle - \frac{dS_{11}}{d\tau} \left\langle \tilde{x}^2 \right\rangle - \frac{2S_{11}}{a_1} \left\langle \tilde{x}^2 \right\rangle - \frac{\hat{S}_2}{2c} + \\ + \frac{N_1}{a_1^2} \hat{S}_{11} + N_3 \hat{S}_{22}, \end{aligned} \quad (77)$$

где

$$\frac{N_1}{2a_1^2} = 2 \langle \tilde{x}^2 \rangle + N_2^{-1} \langle \tilde{x}^2 \rangle^2, \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{S}_1}{d\tau} &= -\frac{\hat{S}_2 \hat{S}_{12}}{c} - \frac{\hat{S}_{11}}{a_1}, \\ \frac{d\hat{S}_2}{d\tau} &= -\frac{\hat{S}_{22} \hat{S}_2}{c}; \\ \frac{d\hat{S}_{12}}{d\tau} &= -1 - \frac{\hat{S}_{12} \hat{S}_{12}}{c} - \frac{\hat{S}_{22}}{a_1}; \\ \frac{d\hat{S}_{11}}{d\tau} &= 1 - 2 \frac{\hat{S}_{11}}{a_1} - \frac{\hat{S}_{12}^2}{c}; \\ \frac{d\hat{S}_{22}}{d\tau} &= 1 - \frac{\hat{S}_{22}}{c}. \end{aligned} \quad (79)$$

Решение уравнений (77), (79) необходимо искать при начальных условиях: $\hat{S}_0 = \hat{S}_1 = \hat{S}_{12} = \hat{S}_2 = \hat{S}_{11} = \hat{S}_{22} = 0$, если $\tau = 0$. Подстановка значения $\frac{d\hat{S}_{11}}{d\tau}$ из (79) в (77) приводит к уравнению

$$\frac{d\hat{S}_0}{d\tau} = -\frac{\hat{S}_2^2}{4c} + \frac{N_1}{a_1^2} \hat{S}_{11} + N_3 \hat{S}_{22} + \frac{\hat{S}_{12}^2}{c} \langle \tilde{x}^2 \rangle. \quad (80)$$

Решения уравнений для компонент производящей функции при $c = 1$ имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{S}_1(\tau) &= e^{-\frac{\tau}{a_1}} - 1; \\ \hat{S}_2(\tau) &\equiv 0; \\ \hat{S}_{12}(\tau) &= -\left[e^{-\frac{\tau}{a_1}} \operatorname{ch} \tau \right]^{-1} \left\{ \frac{e^{\frac{\tau}{a_1}}}{a_1^2 - 1} [a_1 \operatorname{ch} \tau - \operatorname{sh} \tau] - \frac{a_1}{a_1^2 - 1} \right\}; \\ \hat{S}_{22}(\tau) &= \operatorname{th} \tau. \end{aligned} \quad (81)$$

Оптимальное управление определяется выражением

$$u = u^* = -\frac{1}{c} [\hat{S}_{12} \hat{x} + \hat{S}_{22} y]. \quad (82)$$

Подставляя $\hat{S}_{12}(\tau)$ и $\hat{S}_{22}(\tau)$ из (81) в (82), находим

$$u^* = \left\{ \left[e^{-\frac{\tau}{a_1}} \operatorname{ch} \tau \right]^{-1} \left[\frac{e^{\frac{\tau}{a_1}}}{a_1^2 - 1} (a_1 \operatorname{ch} \tau - \operatorname{sh} \tau) - \frac{a_1}{a_1^2 - 1} \right] \hat{x} - (\operatorname{th} \tau) y \right\}. \quad (83)$$

В установившемся режиме имеем

$$u^* = -\frac{1}{c} [\hat{S}_{12}x - \hat{S}_{22}y] = \left[\frac{a_1}{a_1 \sqrt{c} + c} \right] \hat{x} - \left(\frac{\sqrt{c}}{c} \right) y. \quad (84)$$

При $a_1 = c = 1$, $u = u^* = \frac{1}{2} \hat{x} - y$, что находится в полном соответствии с результатами работы [13].

Определим ошибку оптимальной фильтрации и управления в установившемся режиме:

$$\frac{d\hat{S}_0}{d\tau} = \frac{N_1}{a_1^2} \hat{S}_{11} + N_3 \hat{S}_{22} + \frac{\hat{S}_{12}^2}{c} \langle \tilde{x}^2 \rangle = \text{const}, \quad (85)$$

где

$$\frac{N_1}{2a_1^2} = 2 \langle \tilde{x}^2 \rangle + N_2^{-1} \langle \tilde{x}^2 \rangle^2;$$

$$\langle \tilde{x}^2 \rangle = \sqrt{N_2^2 + N_2 \frac{N_1}{a_1^2}} - N_2;$$

$$\hat{S}_{11} = \frac{a_1}{2c} \left[c - \frac{a_1^2 c^2}{(a_1 \sqrt{c} + c)^2} \right];$$

$$\hat{S}_{12} = -\frac{a_1 c}{a_1 \sqrt{c} + c}; \quad \hat{S}_2 \equiv 0; \quad \hat{S}_{22} = \sqrt{c}.$$

Установившаяся погрешность определяется составляющими ошибок, которые возникают в результате оптимальной фильтрации и управления, и ошибками, учитывающими влияние внутренних шумов. Таким образом,

$$\frac{d\hat{S}_0}{d\tau} = \frac{N_1}{2a_1 c} \left[c - \frac{a_1^2 c^2}{(a_1 \sqrt{c} + c)^2} \right] + N_3 \sqrt{c} + \frac{a_1^2 c}{(a_1 \sqrt{c} + c)^2} \langle \tilde{x}^2 \rangle. \quad (86)$$

Рассмотрим частные случаи. а) Пусть $N_1 = N_2 = N_3 = a_1 = c = 1$. Тогда

$$\frac{d\hat{S}_0}{d\tau} = 0,1 + 0,37 + 1 = 1,47.$$

б) Пусть $N_1 = N_2 = N_3 = c = 1$; $a_1 = 10$. Тогда

$$\frac{d\hat{S}_0}{d\tau} = 0,0045 + 0,0085 + 1 = 1,013.$$

в) Пусть $N_1 = N_2 = N_3 = c = 1$; $a_1 = 0,1$. В этом случае

$$\frac{d\hat{S}_0}{d\tau} = 10 + 5 + 1 = 16$$

Таким образом, если сигнал узкополосен, то влияние внутренних шумов объекта управления наиболее существенно.

В случае расширения спектра сигнала в значительной степени возрастают и ошибки оптимальной фильтрации.

В заключение отметим, что рассмотренные в работе методы оптимальной нелинейной фильтрации (с привлечением аппарата квазимарковских процессов) и оптимального управления линейными стационарными объектами управления могут быть распространены и на задачи оптимального управления нелинейными стационарными объектами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, М., 1961.

2. Н. Н. Красовский. Теория управления движением. Изд-во «Наука», М., 1968.

3. Р. Л. Стратонович. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. Изд-во МГУ, 1966.

4. А. М. Летов. Динамика полета и управление. Изд-во «Наука», М., 1969.

5. М. Атанс, П. Фалб. Оптимальное управление. Изд-во «Машиностроение», М., 1968.

6. К. Мерриэм. Теория оптимизации и расчет систем управления с обратной связью. Изд-во «Мир», М., 1967.

7. Р. Ли. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. Изд-во «Наука», М., 1966.

8. R. E. Kalman, R. S. Bucy. Amer. Soc. mech. Eng. J. basic Engng. 1961, March, 95.

9. Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. О некоторых классах случайных процессов с последствием. Вестник ХГУ, серия мех.-матем., вып. 34. Изд-во Харьковск. ун-та, 1969.

10. Э. М. Хазен. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. Изд-во «Сов. Радио», М., 1968.

11. Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. Случайные процессы с последствием и некоторые их приложения. Основные соотношения. I. Вестник ХГУ, серия мех.-матем., вып. 35. Изд-во Харьковск. ун-та, 1970.

12. Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. Случайные процессы с последствием и некоторые их приложения. Оптимальное обнаружение, фильтрация и управление. II Вестник ХГУ, серия мех.-матем., вып. 35. Изд-во Харьковск. ун-та, 1970.

13. N. G. F. Sancho. Optimization of Linear Stochastic Control Systems Operating over a Finite Time Interval. Int. J. Control, 1966, vol. 3, № 4, pp 313—314.

14. N. G. F. Sancho. Optimal Control of Systems with Random Gain of Plant. Int. J. Control, 1965, vol. 2, № 6, pp 509—527.

О СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

Ю. А. Александров, А. А. Янцевич

Введение. В настоящее время значительное число работ посвящено игровым ситуациям. Однако стохастический вариант их недостаточно изучен [1]. В данной работе рассматриваются многомерные стохастические игровые задачи. Предполагается, что взаимодействия осуществляются через объекты взаимодействующих сторон, причем между входными воздействиями связи отсутствуют [2]. Игра считается законченной, если произошел «захват», т. е. ошибка (функционал качества) минимаксного управления игровой ситуацией стала меньше некоторой наперед заданной положительной величины [3]. Рассматриваются стохастический и детерминированный варианты входных воздействий с учетом шумов, ряд вариантов дифференциальных уравнений объектов управления для «хорошей» и «плохой» организации взаимодействия, а также «слабого» и «сильного» взаимовлияния [2—4].

Задачи оптимальной фильтрации (оценки) и оптимального управления рассматриваются отдельно. При решении задачи оптимальной фильтрации существенно используется аппарат квазимарковских процессов, рассмотренный в [5, 6], и уравнения для апостериорных плотностей распределения вероятностей или зацепляющаяся система дифференциальных уравнений для одномерных моментов. Предполагается, что функционал качества является не обязательно квадратичным, а динамика игры описывается стохастическими дифференциальными уравнениями. Решение рассматриваемой задачи с использованием методов динамического программирования и оптимальной квазинормальной фильтрации сводится к нахождению решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, которое в каждом конкретном случае легко реализуется на аналоговых или цифровых вычислительных устройствах.

1. *Входные сигналы.* Пусть стохастические дифференциальные уравнения входных сигналов игровой системы будут

$$L_i \{x_i\} = -A_i(x_i) [1 - \eta_i(t)] + \sqrt{B_i(x_i)} \xi_{1i}(t) + x_{0i}, \quad (1)$$

где

$$\langle \eta_i \rangle = 0, \quad \langle \eta_i \eta_{i\tau} \rangle = N_i \delta(\tau); \quad \langle \xi_{1i} \rangle = 0, \quad \langle \xi_{1i} \xi_{1i\tau} \rangle = N_{1i} \delta(\tau);$$

$$x_{0i} = \text{const}; \quad L_k = D^k + a_{k, k-1} D^{k-1} + \dots + a_{k2} D^2 + a_{k1} D -$$

линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами;

$$D^k = \frac{d^k}{dt^k}; \quad i = n + m.$$

n, m — число взаимодействующих каналов I и II сторон соответственно $A(x)$, $B(x)$ — некоторые полиномы от x . В детерминированном случае дифференциальные уравнения входного сигнала канала берутся в виде

$$\frac{dx_i(t)}{dt} + f_i[x_i(t)] = 0. \quad (2)$$

2. Уравнения объектов взаимодействующих сторон. В случае «хорошей» организации взаимодействия в качестве дифференциальных уравнений объектов взаимодействующих систем принимаем [2]

$$P_i \left\{ \frac{dy_i(t)}{dt} \right\} = - \sum_{j=1}^{n+m} K_{ij} y_j(t) + u_i(t) + \xi_{2i}(t), \quad (3)$$

соответственно при «плохой» организации взаимодействия

$$P_i \left\{ \frac{dy_i(t)}{dt} \right\} = - \sum_{j=1}^{n+m} K_{ij} y_j(t) R_i^{-1} y_i(t) + u_i(t) + \xi_{2i}(t). \quad (4)$$

Для случая «хорошей» организации и «сильного» взаимодействия сторон

$$P_i \left\{ \frac{dy_i(t)}{dt} \right\} = - \sum_{j=1}^{n+m} K_{ij} y_j(t) [1 + Q_{ij} R_i^{-1} y_i(t)] + u_i(t) + \xi_{2i}(t), \quad (5)$$

а при «плохой» организации и «сильном» взаимодействии между сторонами

$$P_i \left\{ \frac{dy_i(t)}{dt} \right\} = - \sum_{j=1}^{n+m} K_{ij} y_j(t) y_i(t) R_i^{-1} [1 + Q_{ij}] + u_i(t) + \xi_{2i}(t), \quad (6)$$

где $P_i = D^{r-1} + b_{r-1,i} D^{r-2} + \dots + b_{2i} D + b_{1i}$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами;

K_{ij} — коэффициент взаимовлияния сторон;

Q_{ij} — коэффициент сильного взаимодействия,

причем

$$K_{ij} = \begin{cases} K_{ij}, & i \neq j \\ 0, & i = j, \end{cases} \quad Q_{ij} = \begin{cases} Q_{ij}, & i \neq j \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

R_n, R_m — число активных единиц первой и второй взаимодействующих сторон (при $t = t_0$, $y_n = R_n$ и $y_m = R_m$);

$u_i(t)$ — управление i -го канала.

Рассмотрим функционал качества вида

$$\begin{aligned}
 & S(x_1, x_2, \dots, x_{n+m}; y_1, y_2, \dots, y_{n+m}, t) = \\
 = & \max_{u_1, \dots, u_n} \min_{u_{n+1}, \dots, u_{n+m}} M \left\{ \int_t^T \left[\sum_{r=1}^{n+m} (x_r - y_r)^2 + \sum_{r=1}^{n+m} (x_r - y_r)^4 + \dots + \right. \right. \\
 & + \sum_{r=1}^{n+m} \frac{\alpha_1 (x_r - y_r)^2}{\beta_1 + \gamma_1 (x_r - y_r)^2} + \sum_{r=1}^{n+m} \frac{\alpha_2 (x_r - y_r)^4}{\beta_2 + \gamma_2 (x_r - y_r)^4} + \dots + \\
 & \left. \left. + \left(\sum_{p=1}^n c_p u_p^2 - \sum_{q=n+1}^{n+m} c_q u_q^2 \right) + \left(\sum_{k=1}^n y_k - \sum_{l=n+1}^{n+m} y_l \right)^2 \right] d\sigma \right\}, \quad (7)
 \end{aligned}$$

где

$$c_p > 0, c_q > 0, \alpha_k > 0, \beta_k > 0, \gamma_k > 0.$$

3. *Оптимальная фильтрация квазимарковского сигнала в белом гауссовском шуме.* Так как входные сигналы (1) не взаимодействуют, то достаточно рассмотреть оптимальную фильтрацию в одном канале, используя уравнение квазимарковского сигнала

$$L\{x(t)\} = -A(x)[1 + \eta(t)] + \sqrt{B(x)}\xi(t) + x_0, \quad (8)$$

где

$$L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_2D^2 + a_1D -$$

линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.

Пусть наблюдается сигнал

$$r(t) = x(t) + \xi(t), \quad (9)$$

где

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi \xi_\tau \rangle = N_\xi \delta(\tau).$$

Задачу оптимальной фильтрации можно решить путем использования уравнения для апостериорной плотности распределения вероятностей, которое в рассматриваемом случае имеет вид [5, 6]

$$\begin{aligned}
 L_1 \left\{ \frac{\partial W}{\partial t} \right\} = & - \frac{\partial}{\partial x} [A(x)W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D_{11}(x) - 2D_{10}(x) + \\
 & + D_{00}(x)]W - \left\{ \frac{1}{2} \int_{-l}^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D_{11}(x) - 2D_{10}(x) + D_{00}(x)]W dx + \right. \\
 & + \int_{-l}^l \frac{\partial}{\partial x} [A(x)W] dx \Big\} W + L_1 \left\{ N_\xi^{-1} \left[r(t)x - \frac{x^2}{2} \right] W \right\} - \\
 & - L_1 \left\{ N_\xi^{-1} W \int_{-l}^l \left[r(t)x - \frac{x^2}{2} \right] W dx \right\}, \quad (10)
 \end{aligned}$$

где

$$W = W(x, t),$$

$$L_1 = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + a_{n-1} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} + \dots + a_2 \frac{d}{dt} + a_1, \quad (11)$$

$$W(x, t)|_{t=0} = W_0(x); \quad \left. \frac{\partial^{k-1} W(x, t)}{\partial t^{k-1}} \right|_{t=0} = \psi_{n-1}(x) = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим решение задачи оптимальной фильтрации, переходя к системе уравнений для одномерных моментов $\langle x^i \rangle = \int_{-l}^l x^i W(x, t) dx$. Умножая левую и правую части уравнения (10) на x^i и интегрируя по x в пределах $\pm l$, находим бесконечную «зацепляющуюся» систему уравнений для $\langle x^i \rangle$:

$$\begin{aligned} L \left\{ \frac{d \langle x^i \rangle}{dt} \right\} = & - \int_{-l}^l x^i \frac{\partial}{\partial x} [A(x) W] dx + \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left[x^i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ [D_{11}(x) - \right. \\ & \left. - 2D_{10}(x) + D_{00}(x)] W \} \right] dx - \int_{-l}^l x^i \left\{ \frac{1}{2} \int_{-l}^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D_{11}(x) - \right. \\ & \left. - 2D_{10}(x) + D_{00}(x)] W dx + \int_{-l}^l \frac{\partial}{\partial x} [A(x) W] dx \right\} W dx + \\ & + L_1 N_{\xi}^{-1} \int_{-l}^l \left[r(t) x^{i+1} - \frac{x^{i+2}}{2} \right] W dx - L_1 N_{\xi}^{-1} \int_{-l}^l x^i \left\{ \int_{-l}^l [r(t) x - \right. \\ & \left. - \frac{x^2}{2} \right] W dx \right\} W dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнения для $\langle x^i \rangle$ являются «незамкнутыми», так как для определения моментов $\langle x^k \rangle$ необходимо знать моменты более высокого порядка $\langle x^{k+1} \rangle$, $\langle x^{k+2} \rangle$ и т. д. Для решения задачи оптимальной фильтрации в квазинормальном приближении необходимо положить кумулянты $k_4 = k_5 = \dots = 0$. В этом случае $\langle x^4 \rangle = F_1(\dots, \langle x^3 \rangle)$, $\langle x^5 \rangle = F_2(\dots, \langle x^4 \rangle)$, и система уравнений для первых трех моментов замыкается. При решении практических задач можно учесть бескумулянтные приближения более высоких порядков, что приводит к повышению точности оптимальной нелинейной фильтрации.

4. *Оптимальная фильтрация детерминированного сигнала в белом гауссовском шуме.* При решении задачи оптимальной фильтрации детерминированного сигнала целесообразно использовать уравнение сигнала (2) с учетом того, что взаимосвязи отсутствуют и наблюдается сигнал с шумом:

$$\frac{dr(t)}{dt} = -f[x(t)] + \zeta(t), \quad (14)$$

где

$$\langle \zeta \rangle = 0; \langle \zeta \zeta_\tau \rangle = N_\zeta \delta(\tau).$$

Уравнение для апостериорной плотности может быть записано в виде [1, 5, 6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x} [A(x) W] - W \left\{ \int_{-l}^l \frac{\partial}{\partial x} [A(x) W] dx \right\} + \\ & + N_\zeta^{-1} \left[r(t) x - \frac{x^2}{2} \right] W - N_\zeta^{-1} W \left\{ \int_{-l}^l \left[r(t) x - \frac{x^2}{2} \right] W dx \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$A(x) = -f(x).$$

Перейдем к уравнениям для одномерных моментов $\langle x^i \rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{d \langle x^i \rangle}{dt} = & \int_{-\infty}^{\infty} x^i \frac{\partial}{\partial x} [f(x) W] dx - \int_{-\infty}^{\infty} x^i \left\{ W \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} [f(x) W] dx \right\} dx + \\ & + N_\zeta^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left[r(t) x^{i+1} - \frac{x^{i+2}}{2} \right] W dx - N_\zeta^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} x^i W \int_{-\infty}^{\infty} \left[r(t) x - \right. \\ & \left. - \frac{x^2}{2} \right] W dx \Big\} dx. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнения (16) для $\langle x^i \rangle$, как и уравнение (13), являются незамкнутыми. Для приближенного решения задачи оптимальной фильтрации сигнала $x(t)$ необходимо осуществить обрыв зацепляющейся системы уравнений для одномерных моментов, используя различные гипотезы «замыкания».

5. Дифференциальные игры для детерминированных воздействий с учетом гауссовских шумов. Уравнения для сигнала и объекта управления одного из каналов запишем, используя (2) и (4) — (7), в виде

$$\frac{dx_i(t)}{dt} + f_i[x_i(t)] = 0, \quad (17)$$

$$P_i \left\{ \frac{dy_i(t)}{dt} \right\} = \varphi_i[K, R, Q, y] + u_i(t) + \xi_{2i}(t), \quad (18)$$

где $\varphi_i[K, R, Q, y]$ — правые части уравнений (3) — (6) при

$$u_i = \xi_{2i} = 0.$$

Так как наблюдается сигнал $r(t)$, который удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dr_i(t)}{dt} = -f[x_i(t)] + \xi_{3i}(t), \quad (19)$$

то необходимо решить задачу оптимальной фильтрации детерминированного сигнала. Используя уравнение для одномерных

моментов (16) и ограничиваясь, например, квазинормальным приближением, найдем решение задачи нелинейной оптимальной фильтрации в рамках первых трех моментных функций $\langle x_i(t) \rangle$, $\langle x_i^2(t) \rangle$ и $\langle x_i^3(t) \rangle$, где $\langle x_i(t) \rangle$ представляют оптимальную оценку сигнала $x_i(t)$, а $\langle x_i^2(t) \rangle$ и $\langle x_i^3(t) \rangle$ характеризуют ошибки оптимальной фильтрации. Ввиду того, что сигнал $x_i(t)$ наблюдается в шумах, функционал качества (7) необходимо записать в виде

$$M_1\{S(x_1, x_2, \dots, x_{n+m}; y_1, y_2, \dots, y_{n+m}, t)\} = \\ = \max_{u_1, \dots, u_n} \min_{u_{n+1}, \dots, u_{n+m}} M_1 M \left\{ \int_0^T \left[\sum_{r=1}^{n+m} (x_r - y_r)^2 + \sum_{r=1}^{n+m} (x_r - y_r)^4 + \dots + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{r=1}^{n+m} \frac{\alpha_r (x_r - y_r)^2}{\beta_r + \gamma_r (x_r - y_r)^2} + \sum_{r=1}^{n+m} \frac{\alpha_r (x_r - y_r)^4}{\beta_r + \gamma_r (x_r - y_r)^4} + \dots + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\sum_{k=1}^n y_k - \sum_{l=n+1}^{n+m} y_l \right)^2 + \dots + \left(\sum_{p=1}^n c_p u_p^2 - \sum_{q=n+1}^{n+m} c_q u_q^2 \right) \right] d\sigma \right\}, \quad (20)$$

где M_1 означает усреднение по $x_i(t)$ с учетом оптимальной фильтрации, причем $x_i(t) = \hat{x}_i(t) + \tilde{x}_i(t)$, где $\hat{x}_i(t) = \langle x_i(t) \rangle$ — оптимальная оценка сигнала $x_i(t)$, $\langle \tilde{x}_i(t) \rangle = 0$, а $\langle \tilde{x}_i^k(t) \rangle = \langle x_i^k(t) \rangle$, ($K = 2, 3, 4, \dots$) — одномерные моменты соответствующих порядков, характеризующие ошибки оптимальной фильтрации; $\tilde{x}_i(t) = \tilde{x}_i(t)$ — центрированный случайный процесс. Используя обычную методику динамического программирования и учитывая (18), получим

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial \tau} = \max_{u_1, \dots, u_n} \min_{u_{n+1}, \dots, u_{n+m}} M_1 \left\{ \sum_{r=1}^{n+m} [(x_r - y_r)^2 + (x_r - y_r)^4 + \dots + \right. \\ \left. + \sum_{r=1}^{n+m} \frac{\alpha_r (x_r - y_r)^2}{\beta_r + \gamma_r (x_r - y_r)^2} + \sum_{r=1}^{n+m} \frac{\alpha_r (x_r - y_r)^4}{\beta_r + \gamma_r (x_r - y_r)^4} + \dots + \right. \\ \left. + \left(\sum_{k=1}^n y_k - \sum_{l=n+1}^{n+m} y_l \right)^2 + \dots + \left(\sum_{p=1}^n c_p u_p^2 - \sum_{q=n+1}^{n+m} c_q u_q^2 \right) - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{n+m} f_i(x_i) \frac{\partial S}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n+m} \left[y_{i2} \frac{\partial S}{\partial y_{i1}} + y_{i3} \frac{\partial S}{\partial y_{i2}} + \dots + \{\varphi_i[K, R, Q, y] + \right. \right. \\ \left. \left. + u_i\} \frac{\partial S}{\partial y_{iqi}} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+m} N_{2i} \frac{\partial^2 S}{\partial y_{iqi}^2} \right\}, \quad (21)$$

где $\tau = T - t$,

$$\hat{S}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n+m}; \hat{y}_{11}, \hat{y}_{12}, \dots, \hat{y}_{1, n+m}; \hat{y}_{21}, \hat{y}_{22}, \dots, \hat{y}_{2, n+m}; \dots; \\ \hat{y}_{n+m, 1}, \dots, \hat{y}_{n+m, n+m}) = M_1 \{S(x_1, x_2, \dots, x_{n+m}; y_{11}, y_{12}, \dots, \\ y_{1, n+m}; y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2, n+m}; \dots; y_{n+m, 1}, y_{n+m, 2}, \dots, y_{n+m, n+m})\}.$$

Решение (21) будем искать в виде ряда

$$S(z_1, z_2, \dots, z_{n+m}, \tau) = S_0(\tau) + \sum_i S_i(\tau) z_i + \sum_{ij} S_{ij}(\tau) z_i z_j + \\ + \sum_{ijk} S_{ijk}(\tau) z_i z_j z_k + \dots \quad (22)$$

Тогда уравнение (21) принимает вид

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial \tau} = \max_{u_1, \dots, u_n} \min_{u_{n+1}, \dots, u_{n+m}} \left\{ \sum_{r=1}^{n+m} (\hat{x}_r - y_r)^2 + (\hat{x}_r - y_r)^4 + \dots + \right. \\ + \sum_{r=1}^{n+m} \frac{\alpha_r [(\hat{x}_r - y_r)^2 + \langle \tilde{x}_r^2 \rangle]}{\beta_r + \gamma_r [(\hat{x}_r - y_r)^2 + \langle \tilde{x}_r^2 \rangle]} + \dots + \left(\sum_{k=1}^n y_k - \sum_{l=n+1}^{n+m} y_l \right)^2 + \\ + \dots + \left(\sum_{p=1}^n c_p u_p^2 - \sum_{q=n+1}^{n+m} c_q u_q^2 \right) - \sum_{i=1}^{n+m} f_i(x_i) \frac{\partial \hat{S}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n+m} \left[y_{i2} \frac{\partial \hat{S}}{\partial y_{i1}} + \right. \\ + y_{i3} \frac{\partial \hat{S}}{\partial y_{i2}} + \dots + \{ \varphi_i[K, R, Q, y] + u_i \} \frac{\partial \hat{S}}{\partial y_{iq_i}} \Big] + \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+m} N_{2i} \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial y_{iq_i}^2} \right\} + \Psi(\hat{x}_i, y_{ij}, \langle \tilde{x}_i^2 \rangle, \langle \tilde{x}_i^3 \rangle, \dots). \quad (23)$$

В дальнейшем предполагаем, что множество допустимых управлений неограничено. Минимизируя (23), по управлениям $u_{n+1}, \dots, u_{n+m}$, находим

$$u_{n+j} = u_{n+j}^* = - \frac{1}{2c_{n+j}} \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial y_{n+j, q_{n+j}}} \right), \quad (24)$$

где $j = 1, 2, \dots, m$.

Максимизируя затем (23) по управлениям $u_1, \dots, u_n$, получаем

$$u_v = u_v^* = \frac{1}{2c_v} \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial y_{v, q_v}} \right), \quad (25)$$

где $v = 1, 2, \dots, n$.

Подставляя (24) и (25) в (23), приходим к уравнению для производящей функции $\hat{S}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \tau} = & \left\{ \sum_{r=1}^{n+m} (\hat{x}_r - y_r)^2 + \sum_{r=1}^{n+m} (\hat{x}_r - y_r)^4 + \dots + \left(\sum_{k=1}^n y_k - \sum_{l=n+1}^{n+m} y_l \right)^2 + \right. \\ & + \dots + \sum_{r=1}^{n+m} \frac{\alpha_r \left[(\hat{x}_r - y_r)^2 + \langle \tilde{x}_r^2 \rangle \right]}{\beta_r + \gamma_r \left[(\hat{x}_r - y_r)^2 + \langle \tilde{x}_r^2 \rangle \right]} + \dots - \sum_{i=1}^{n+m} f_i(x_i) \frac{\partial \hat{S}}{\partial x_i} + \\ & + \sum_{i=1}^{n+m} \left[y_{i2} \frac{\partial \hat{S}}{\partial y_{i1}} + y_{i3} \frac{\partial \hat{S}}{\partial y_{i2}} + \dots + \varphi_i[K, R, Q, y] \frac{\partial \hat{S}}{\partial y_{iq_i}} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+m} N_{2i} \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial y_{iq_i}^2} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n c_k^{-1} \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial y_{iq_i}} \right)^2 - \frac{1}{4} \sum_{l=n+1}^{n+m} c_l^{-1} \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial y_{lq_l}} \right)^2 \Big\} + \\ & + \Psi(x_i, y_{ij}, \langle \tilde{x}_i^2 \rangle, \langle \tilde{x}_i^3 \rangle, \dots). \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя в (26) значение $\hat{S}$ в виде ряда

$$\begin{aligned} \hat{S}(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_{n+m}, \tau) = & \hat{S}_0(\tau) + \sum_i \hat{S}_i(\tau) \hat{z}_i + \\ & + \sum_{ij} \hat{S}_{ij}(\tau) \hat{z}_i \hat{z}_j + \dots, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{z}_k &= \hat{x}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ \hat{z}_l &= y_l, \quad l = n+1, n+2, \dots, n+m, \end{aligned}$$

можно найти систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для компонент производящей функции $\hat{S}_{ij} \dots(\tau)$. Решение этих уравнений в случае высокой размерности задачи целесообразно находить с помощью цифровых или аналоговых вычислительных машин.

6. Дифференциальные игры для квазимарковских воздействий с учетом гауссовских шумов. В рассматриваемом случае уравнения сигнала и объекта для одного из каналов запишем, используя выражения (1) и (3)–(6) в виде

$$L_i \{x_i(t)\} = -A_i(x_i) [1 + \gamma_i(t)] + \sqrt{B_i(x_i)} \xi_{1i}(t) + x_{0i}, \quad (28)$$

$$P_i \left\{ \frac{dy_i(t)}{dt} \right\} = \varphi_i[K, R, Q, y] + u_i(t) + \xi_{2i}(t), \quad (29)$$

где L_i и P_i — линейные дифференциальные операторы, $\eta_i(t)$, $\xi_{1i}(t)$ и $\xi_{2i}(t)$ — белые гауссовские шумы, спектральные плотности которых обозначены N , N_1 , и N_2 соответственно. На воздействие $x_i(t)$ налагается белый шум $\xi_{3i}(t)$, причем $\langle \xi_{3i}(t) \rangle = 0$; $\langle \xi_{3i}(t) \xi_{3i}(t + \tau) \rangle = N_{3i} \delta(\tau)$. Таким образом, для выделения полезной составляющей воздействия необходимо осуществить оптимальную фильтрацию квазимарковского сигнала $x_i(t)$ из смеси $r_i(t) = x_i(t) + \xi_{3i}(t)$. Воспользовавшись результатами п. 3, запишем уравнение для одномерных моментов

$$\begin{aligned}
 L_{1i} \left\{ \frac{d \langle x_i^k \rangle}{dt} \right\} = & - \int_{-l}^l x_i^k \frac{\partial}{\partial x_i} [A(x_i) W] dx_i + \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left[x_i^k \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left\{ [D_{11}(x_i) - \right. \right. \\
 & - 2D_{10}(x_i) + D_{00}(x_i)] W dx_i - \int_{-l}^l x_i^k \left\{ \frac{1}{2} \int_{-l}^l \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} [D_{11}(x_i) - \right. \\
 & - 2D_{10}(x_i) + D_{00}(x_i)] W dx_i + \int_{-l}^l \frac{\partial}{\partial x_i} [A(x_i) W] dx_i \Big\} W dx_i + \\
 & + L_{1i} \left[N_{3i}^{-1} \int_{-l}^l \left\{ r_i(t) x_i^{k+1} - \frac{x_i^{k+2}}{2} \right\} W \right] dx_i - L_{1i} \left[N_{3i}^{-1} \int_{-l}^l x_i^k \times \right. \\
 & \times \left. \left\{ \int_{-l}^l \left[r(t) x_i - \frac{x_i^2}{2} \right] W dx_i \right\} W dx_i \right]. \quad (30)
 \end{aligned}$$

Для решения задачи оптимального управления в конфликтной ситуации функционал качества возьмем в виде (20). Используя стандартную методику [7], запишем уравнение динамического программирования. Принимая во внимание (29) и учитывая оптимальную фильтрацию, находим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \hat{S}}{\partial \tau} = & \max_{u_1, \dots, u_n} \min_{u_{n+1}, \dots, u_{n+m}} M_1 \left\{ \sum_{r=1}^{n+m} (x_r - y_r)^2 + \sum_{r=1}^{n+m} (x_r - y_r)^4 + \dots + \right. \\
 & + \sum_{r=1}^{n+m} \frac{\alpha_r (x_r - y_r)^2}{\beta_r + \gamma_r (x_r - y_r)^2} + \sum_{r=1}^{n+m} \frac{\alpha_r (x_r - y_r)^4}{\beta_r + \gamma_r (x_r - y_r)^4} + \dots + \\
 & + \left(\sum_{k=1}^n y_k - \sum_{i=n+1}^{n+m} y_i \right)^2 + \dots + \left(\sum_{p=1}^n c_p u_p^2 - \sum_{q=n+1}^{n+m} c_q u_q^2 \right) + \\
 & + \sum_{i=1}^{n+m} \left\{ x_{i2} \frac{\partial S}{\partial x_{i1}} + x_{i3} \frac{\partial S}{\partial x_{i2}} + \dots + [f_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik_i}) + x_{i0}] \times \right. \\
 & \times \left. \frac{\partial S}{\partial x_{ik_i}} \right\} + \sum_{i=1}^{n+m} \left[y_{i2} \frac{\partial S}{\partial y_{i1}} + y_{i3} \frac{\partial S}{\partial y_{i2}} + \dots + \{ \varphi_i[K, R, Q, y] + \right. \\
 & + u_i \} \left. \frac{\partial S}{\partial y_{ik_i}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+m} N_{1i} \frac{\partial^2 S}{\partial x_{ik_i}^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+m} N_{2i} \frac{\partial^2 S}{\partial y_{ik_i}^2} \right\}, \quad (31)
 \end{aligned}$$

где

$$M_1\{S\} = \hat{S} \left(\hat{x}_{11}, \hat{x}_{12}, \dots, \hat{x}_{1, n+m}; \hat{x}_{21}, \hat{x}_{22}, \dots, \hat{x}_{2, n+m}; \dots; \right. \\ \left. \hat{x}_{n+m, 1}, \hat{x}_{n+m, 2}, \dots, \hat{x}_{n+m, n+m}; \hat{y}_{11}, \hat{y}_{12}, \dots, \hat{y}_{1, n+m}; \hat{y}_{21}, \hat{y}_{22}, \dots, \right. \\ \left. \hat{y}_{2, n+m}; \dots; \hat{y}_{n+m, 1}, \hat{y}_{n+m, 2}, \dots, \hat{y}_{n+m, n+m}; \tau \right).$$

Решение (31) будем искать в виде ряда

$$S(z_1, z_2, \dots, z_{n+m}, \tau) = S_0(\tau) + \sum_i S_i(\tau) z_i + \sum_{ij} S_{ij}(\tau) z_i z_j + \\ + \sum_{ijk} S_{ijk}(\tau) z_i z_j z_k + \dots \quad (32)$$

Подставляя (32) в (31) и усредняя с учетом $x_i = \hat{x}_i + \tilde{x}_i$, получим

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial \tau} = \max_{u_1, \dots, u_n} \min_{u_{n+1}, \dots, u_{n+m}} \left\{ \sum_{r=1}^{n+m} \left(\hat{x}_r - y_r \right)^2 + \sum_{r=1}^{n+m} \left(x_r - y_r \right)^4 + \dots + \right. \\ \left. + \sum_{r=1}^{n+m} \frac{\alpha_r \left[\left(\hat{x}_r - y_r \right)^2 + \langle \tilde{x}_r^2 \rangle \right]}{\beta_r + \gamma_r \left[\left(\hat{x}_r - y_r \right)^2 + \langle \tilde{x}_r^2 \rangle \right]} + \dots + \left(\sum_{k=1}^n y_k - \sum_{l=n+1}^{n+m} y_l \right)^2 + \right. \\ \left. + \dots + \left(\sum_{p=1}^n c_p u_p^2 - \sum_{q=n+1}^{n+m} c_q u_q^2 \right) + \sum_{i=1}^{n+m} \left\{ \hat{x}_{i2} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{x}_{i2}} + \hat{x}_{i3} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{x}_{i2}} + \right. \right. \\ \left. + \dots + \left[f_i \left(\hat{x}_{i1}, \hat{x}_{i2}, \dots, \hat{x}_{ik_i} \right) + x_{i0} \right] \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{x}_{ik_i}} \right\} + \sum_{i=1}^{n+m} \left[y_{i2} \frac{\partial \hat{S}}{\partial y_{i1}} + \right. \\ \left. + y_{i3} \frac{\partial \hat{S}}{\partial y_{i2}} + \dots + \{ \varphi_i [K, R, Q, y] + u_i \} \frac{\partial \hat{S}}{\partial y_{iq_i}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+m} N_{1i} \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial \hat{x}_{ik_i}^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+m} N_{2i} \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial y_{iq_i}^2} \right\} + \Psi \left(\hat{x}_{ij}, y_{kl}, \right. \\ \left. \langle \tilde{x}_{ij}^2 \rangle, \langle \tilde{x}_{ij}^3 \rangle, \dots \right). \quad (33)$$

В дальнейшем предполагаем, что управления неограничены. Тогда, выполняя операцию минимизации и максимизации в (33), находим соответственно

$$u_{n+i} = u_{n+i}^* = - \frac{1}{2c_{n+i}} \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial y_{n+i, q_{n+i}}} \right) \quad (34)$$

$$u_v = u_v^* = \frac{1}{2c_v} \left(\frac{\hat{\partial S}}{\partial y_{v, q_v}} \right). \quad (35)$$

Подставляя (34) и (35) в (33), получим уравнение для производящей функции

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\partial S}}{\partial \tau} = & \left\{ \sum_{r=1}^{n+m} (\hat{x}_r - y_r)^2 + \sum_{r=1}^{n+m} (\hat{x}_r - y_r)^4 + \dots + \left(\sum_{k=1}^n y_k - \sum_{l=n+1}^{n+m} y_l \right)^2 + \right. \\ & + \dots + \sum_{r=1}^{n+m} \frac{\alpha_r [(\hat{x}_r - y_r)^2 + \langle \tilde{x}_r^2 \rangle]}{\beta_r + \gamma_r [(\hat{x}_r - y_r)^2 + \langle \tilde{x}_r^2 \rangle]} + \dots + \sum_{i=1}^{n+m} \left\{ \hat{x}_{i2} \frac{\hat{\partial S}}{\partial \hat{x}_{i2}} + \right. \\ & + \hat{x}_{i3} \frac{\hat{\partial S}}{\partial \hat{x}_{i2}} + \dots + [f_i(\hat{x}_{i1}, \hat{x}_{i2}, \dots, \hat{x}_{ik_i}) + x_{i0}] \frac{\hat{\partial S}}{\partial \hat{x}_{ik_i}} \Big\} + \\ & + \sum_{i=1}^{n+m} \left[y_{i2} \frac{\hat{\partial S}}{\partial y_{i1}} + y_{i3} \frac{\hat{\partial S}}{\partial y_{i2}} + \dots + \varphi_i[K, R, Q, y] \frac{\hat{\partial S}}{\partial y_{iq_i}} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+m} N_{1i} \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial \hat{x}_{ik_i}^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+m} N_{2i} \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial y_{iq_i}^2} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n c_k^{-1} \left(\frac{\hat{\partial S}}{\partial y_{iq_i}} \right)^2 - \\ & - \frac{1}{4} \sum_{l=n+1}^{n+m} c_l^{-1} \left(\frac{\hat{\partial S}}{\partial y_{lq_l}} \right)^2 \Big\} + \Psi(\hat{x}_{ij}, y_{kl}, \langle \tilde{x}_{ij}^2 \rangle, \langle \tilde{x}_{ij}^3 \rangle, \dots). \quad (36) \end{aligned}$$

Подставляя в (36) ряд

$$\hat{S} = \hat{S}_0(\tau) + \sum_i \hat{S}_i(\tau) \hat{z}_i + \sum_{ij} \hat{S}_{ij}(\tau) \hat{z}_i \hat{z}_j + \dots,$$

можно найти систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для компонент производящей функции $\hat{S}_{ij} \dots(\tau)$.

Таким образом, решение задачи о дифференциальной игре в случае квазимарковских входов с учетом шумов в наблюдаемых сигналах и внутренних шумов в управляемых объектах сводится к интегрированию некоторой стандартной системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, которое в каждом конкретном случае может быть реализовано на аналоговых или цифровых вычислительных устройствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Л. Стратонович. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. Изд-во МГУ, 1966.
2. Е. С. Вентцель. Введение в исследование операций. Изд-во «Сов. Радио», М., 1964.
3. Р. Айзекс. Дифференциальные игры. Изд-во «Мир», М., 1967.
4. Х. К. Уэйсс. Некоторые тактические дифференциальные игры и выбор поддерживающей системы оружия. Применение теории игр в военном деле. Сборник переводов с англ. под ред. В. О. Ашкеназы. Изд-во «Сов. Радио», М., 1961.
5. Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. О некоторых классах случайных процессов с последствием. Вестник ХГУ, серия мех.-матем. Изд-во Харьковск. ун-та, вып. 34, 1969.
6. Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. Случайные процессы с последствием и некоторые их приложения. Основные соотношения. I. Вестник ХГУ, серия мех.-матем. Изд-во Харьковск. ун-та, вып. 35, 1970.
7. N. G. F. Sancho. Optimization of Linear Stochastic Control Systems Operating over a Finite Time Interval. Int. J. Control, 1966, vol. 3, № 4.

О ЯВЛЕНИИ ЗЕРКАЛЬНОГО СЛЕДА ЗА КОРАБЛЕМ

А. Г. Боев

При небольшом ветре на поверхности моря за движущимся кораблем видна полоса воды, которая на фоне «шероховатого» моря производит впечатление зеркальной. Ниже приводится объяснение этого явления.

Показывается, что возникновение зеркальной дорожки на поверхности моря связано с гашением ветровых волн турбулентностью гидродинамического следа корабля. Так как при этом наиболее интенсивно гасятся короткие волны (рябь), то поверхность моря как бы разглаживается и становится зеркальной. Время существования зеркального следа зависит от скорости корабля и скорости ветра. Приведен график изменения амплитуды ряби с длиной волны 3 см в следе за кораблем,двигающимся со скоростью 10 узлов при скорости ветра 3 балла.

1. Жидкость плотности ρ занимает полупространство $x_3 \geq 0$ (плоскость $x_3 = 0$ соответствует невозмущенной поверхности моря, координаты x_1, x_2 описывают положение точки на ней); свободная поверхность жидкости находится под действием случайного давления $p_w(x_1, x_2, t)$, вызванного турбулентным ветром.

Турбулентному следу корабля соответствует на поверхности полоса $x_1 \geq 0, |x_2| \leq l$ (l — ширина следа). Задача состоит в определении амплитуды ветровых волн в следе. Задача решается в предположениях:

- а) волновое движение малой амплитуды;
- б) масштабы неоднородности и время вырождения турбулент-

ности в следе много больше длин λ и периодов T рассматриваемых волн;

в) изменение энергии турбулентности под действием ветра за периоды рассматриваемых волн мало.

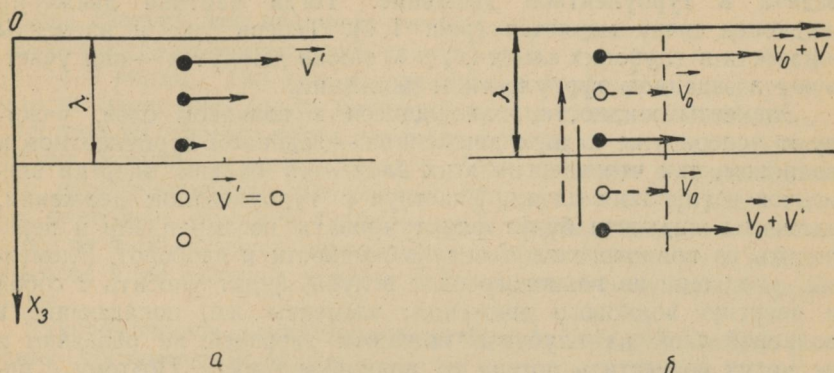


Рис. 1.

Прежде чем перейти к решению задачи, остановимся на рассмотрении того физического механизма, который будем считать ответственным за изменение энергии волны — механизма «вертикального перемешивания» жидкости (перемешивания, вызванного наличием флуктуаций компоненты скорости турбулентного движения нормальной к поверхности), и покажем, что этот механизм, вследствие неоднородности волнового движения по глубине, всегда приводит к уносу энергии воды вглубь и, следовательно, к затуханию ее.

С целью пояснения работы этого механизма рассмотрим сначала поверхностную волну длины λ в спокойном нетурбулентном море.

Поверхностная волна длины λ представляет собой такое движение жидкости, при котором скорость жидкости v' и давление в ней p' экспоненциально убывают вглубь, так что с достаточно хорошей точностью можно считать, что эти величины отличны от нуля лишь в слое глубины λ — «волновом слое» (рис. 1, а). Вне его жидкость не движется.

Хорошо известно [1], что амплитуда $A(k, t)$ -свободной гравитационной волны с волновым числом $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ удовлетворяет уравнению линейного осциллятора

$$A''(k, t) + \omega^2 A(k, t) = 0. \quad (1.1)$$

где $\omega = \sqrt{gk}$ — частота свободной гравитационной волны, g — ускорение свободного падения, штрих означает дифференцирование по времени. Таким образом, волновой слой ведет себя

как консервативная система — кинетическая энергия вертикальных колебаний переходит в потенциальную энергию поднятой жидкости и обратно.

Пусть теперь в некоторый момент времени жидкость приведена в турбулентное движение. Тогда картина движения жидкости сразу меняется (рис. 1, б). Теперь уже и элементы жидкости в глубоких слоях ($x_3 > \lambda$) также движутся — они участвуют в заданном турбулентном движении.

Элементы жидкости, находящиеся в волновом слое, участвуют теперь уже в двух движениях — заданном турбулентном и волновом, так что энергия этих элементов больше энергии элементов в глубоких слоях. Участвуя в турбулентном движении, элементы жидкости будут флуктуировать по вертикали и переходить из волнового слоя вглубь жидкости и наоборот. Элементы, уходящие из волнового слоя вглубь, будут уносить с собой и энергию волнового движения: элементы же, попадающие в волновой слой из глубины, волновой энергией не обладают и не могут возместить потери ее волновым слоем. Поэтому с появлением турбулентного движения из волнового слоя вглубь жидкости будет существовать поток волновой энергии и, следовательно, энергия волны будет уменьшаться. При этом волновой слой уже не сможет вести себя как консервативная система, а будет вести себя как система с диссипацией. Амплитуда A свободной гравитационной волны должна при этом удовлетворять не уравнению (1.1), а уравнению линейного осциллятора с затуханием

$$A'' + 2\gamma A' + \omega^2 A = 0, \quad (1.2)$$

где коэффициент затухания γ должен определяться параметрами турбулентности — интенсивностью турбулентных флуктуаций нормальных к поверхности и их нормированным пространственным спектром. Зависимость γ от параметров турбулентности можно найти из следующих соображений: по отношению к длине λ и частоте ω все турбулентные флуктуации с длинами L и частотами Ω можно разделить на четыре типа:

- а) «длинные» — $L \geq \lambda$ и «короткие» — $L < \lambda$;
- б) «быстрые» — $\Omega \geq \omega$ и «медленные» — $\Omega < \omega$.

Понятно, что медленные турбулентные флуктуации не могут заметно влиять на поведение волны; основное влияние на волну будут оказывать лишь быстрые. Однако и среди быстрых флуктуаций не все будут играть одинаковую роль в поведении волны. Действительно, так как энергия волнового движения максимальна на поверхности и экспоненциально убывает вглубь, то для того, чтобы существовал заметный унос ее из волнового слоя, необходимо, чтобы размер L вертикальной турбулентной флуктуации был либо больше, либо порядка длины волны ($L \geq \lambda$).

Таким образом, среди всех турбулентных флуктуаций основное влияние на волну будут оказывать лишь быстрые и в то же время длинные

$$\Omega > \omega, \quad L \geq \lambda. \quad (1.3)$$

Отсюда следует, что величина коэффициента γ должна меняться в зависимости от соотношения частот и длин турбулентных флуктуаций и волны. Так как распределение турбулентных флуктуаций по масштабам характеризуется пространственным спектром, а частоты их определяются интенсивностью, то от этих величин должен зависеть и коэффициент γ . Что касается «горизонтального перемешивания», вызываемого флуктуациями горизонтальных компонент скорости турбулентного движения, то оно может привести лишь к перераспределению волновой энергии в волновом слое и не должно заметно влиять на изменение энергии волны.

Руководствуясь изложенными соображениями перейдем к решению поставленной задачи.

2. Задача заключается в решении системы уравнений

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k} [-p \delta_{ik} + \langle \rho v_i v_k \rangle - \rho v_i v_k], \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad (2.1)$$

с граничными и начальными условиями

$$\rho - \rho g \eta - \rho \langle v_3^2 \rangle + \rho v_3^2 = p_w, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \bar{v}_\beta \frac{\partial \eta}{\partial x_\beta} - \left\langle v_\beta \frac{\partial \eta}{\partial x_\beta} \right\rangle = -v_3, \\ x_3 = \eta,$$

$$\mathbf{v} \rightarrow \dot{\mathbf{v}}, \quad p \rightarrow \dot{p} \quad \text{при } x_3 \rightarrow \infty, \quad t > 0; \quad (2.2)$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{R}, 0), \quad p = \dot{p}(\mathbf{R}, 0), \quad \eta = \dot{\eta}(\mathbf{R}, 0) \quad \text{при } t = 0.$$

Здесь $\mathbf{v}$, p , η — соответственно флуктуации скорости, давления и высоты поверхности, скобками $\langle \rangle$ обозначено осреднение по времени на интервале $T_1 \gg \frac{2\pi}{\omega}$ — периода рассматриваемой волны.

Решение задачи (2.1) — (2.2) будем отыскивать в виде

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v}', \quad p = \dot{p} + p', \quad \eta = \dot{\eta} + \eta', \quad (2.3)$$

где $\dot{\mathbf{v}}$, $\dot{p}$ — соответственно флуктуации скорости и давления заданного турбулентного движения, $\dot{\eta}$ — флуктуация высоты поверхности, вызванная этим движением, $\mathbf{v}'$, p' , η' — аналогичные величины, относящиеся к волновому потоку. В силу предположений п. 1

$$\langle \mathbf{v}'^2 \rangle \ll \langle \dot{\mathbf{v}}^2 \rangle, \quad \langle p'^2 \rangle \ll \langle \dot{p}^2 \rangle, \quad \langle \eta'^2 \rangle \ll \langle \dot{\eta}^2 \rangle. \quad (2.4)$$

Так как на волну периода $\frac{2\pi}{\omega}$ оказывают влияние лишь быстрые турбулентные флуктуации, то в дальнейшем будем считать величины $\dot{v}$, $\dot{p}$, $\dot{\eta}$ быстропеременными, т. е. неоднократно осциллирующими за время $\frac{2\pi}{\omega}$. Функции v' , p' , η' вследствие взаимодействия волнового и турбулентного потоков являются функциями «медленного» (период рассматриваемой волны) и «быстрого» (периодов турбулентных флуктуаций) времен. Вследствие этого решение (2.3) нельзя рассматривать как суперпозицию среднего (медленного) и флуктуационного (быстрого) слагаемых, относящихся соответственно к волновому и турбулентным потокам.

Чтобы получить уравнения, описывающие волновое движение в турбулентном море, поступим следующим образом: после подстановки (2.3) в (2.1) — (2.2) и отбрасывания нелинейных по волновым величинам членов осредним полученные уравнения по времени на интервале $\theta \ll \frac{2\pi}{\omega}$ (скобка справа означает такое осреднение). Учитывая, что

$$\dot{v} \rangle = \dot{p} \rangle = \dot{\eta} \rangle = 0, \quad \dot{v}_i \dot{v}_k \rangle = \langle \dot{v}_i \dot{v}_k \rangle, \quad v'_i \dot{v}_k \rangle \neq 0, \quad (2.5)$$

получим (штрихи ниже опущены и введены обозначения $\eta' \rangle \equiv \zeta$, $v' \rangle \equiv u$, $p' \rangle \equiv p$)

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k} [-\rho \delta_{ik} - J_{ik} - J_{ki}], \quad \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} = 0; \quad (2.6)$$

$$p = p_w + \rho g \zeta - 2J_{33}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + N + N_0 = -u_3, \quad \text{при } x_3 = 0; \quad (2.7)$$

$$p \rightarrow 0, \quad u \rightarrow 0 \quad \text{при } x_3 \rightarrow \infty, \quad t > 0;$$

$$u = p = \zeta = 0 \quad \text{при } t = 0, \quad (2.8)$$

где

$$J_{ik} = \rho \dot{v}_i v_k \rangle - \langle \rho \dot{v}_i v_k \rangle, \quad J_{ki} = \rho \dot{v}_k v_i \rangle - \langle \rho \dot{v}_k v_i \rangle; \quad (2.9)$$

$$N = \dot{v}_\beta \frac{\partial \eta}{\partial x_\beta} \rangle - \langle \dot{v}_\beta \frac{\partial \eta}{\partial x_\beta} \rangle, \quad N_0 = v_\beta \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial x_\beta} \rangle - \langle v_\beta \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial x_\beta} \rangle. \quad (2.10)$$

Первое из условий (2.7) определяет величину возмущения давления p , вызванного флуктуациями ветра, величины J_{ik} , N , N_0 , определенные (2.9) — (2.10), характеризуют взаимодействие волнового и турбулентного потоков. Система (2.6) — (2.8) незамкнута, так как в нее, кроме u_i , p , η , входит одиннадцать неизвестных функций — девять функций J_{ik} , N и N_0 .

3. По физическому смыслу тензор J_{ik} представляет собой тензор средней (за время $\theta \ll \frac{2\pi}{\omega}$) плотности потока импульса

волны $\rho v'_k$, вызванного флуктуациями скорости турбулентного потока $\bar{v}_i$. При этом компоненты J_{3k} представляют собой компоненты плотности потока импульса волны $\rho v'_k$, вызванного флуктуациям нормальной к поверхности компоненты скорости турбулентного движения и описывают эффект «вертикального перемешивания» волны. Компоненты $J_{\beta k}$ ($\beta = 1, 2$) характеризуют плотность потока импульса волны, вызванную флуктуациями горизонтальных компонент скорости турбулентного движения, и описывают эффекты «горизонтального перемешивания» волны. Следуя физическим соображениям п. 1, будем считать, что

$$J_{\beta k} \ll J_{3k}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

Функциями N и N_0 , входящими в уравнение возмущенной поверхности ζ и описывающими эффекты, связанные с изменением углов наклонов волн, вызванные флуктуациями горизонтальных компонент скорости на поверхности, также будем в дальнейшем пренебрегать

$$N = N_0 = 0. \quad (3.2)$$

Таким образом, для замыкания системы (2.6) — (2.8) остается выразить через искомые функции волнового движения лишь три величины J_{3k} . С этой целью рассмотрим сначала физический механизм, который приводит к появлению их в уравнениях.

Пусть $d\sigma$ — площадка на глубине x_3 и (1) — элемент жидкости, удаленный от этой площадки на расстояние l из интервала $(l, l + dl)$ (рис. 2). Участвуя в турбулентном движении, данный элемент будет совершать вертикальные флуктуации около своего среднего положения $x_3 - l$ и «проскакивать» через площадку $d\sigma$. Так как этот элемент участвует в то же время и в волновом движении, то при прохождении через $d\sigma$ он будет проносить через нее и импульс волны ρv_k . Таким образом, в точке x_3 возникает дополнительный поток импульса волны, связанный с переносом импульса из точки $x_3 - l$.

Суммируя потоки импульсов, переносимые через $d\sigma$ всеми элементами жидкости из полосы шириной $d\sigma$ и образующими, параллельными оси x_3 , осредняя по времени на интервале $\theta \ll$

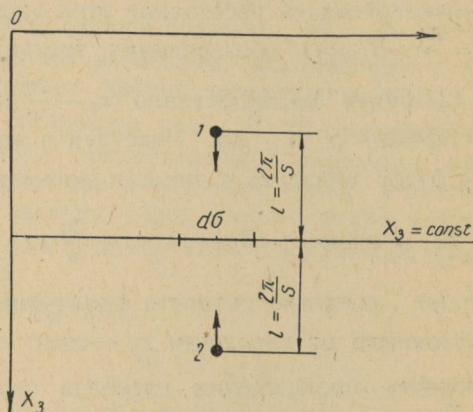


Рис. 2.

$\ll \frac{2\pi}{\omega}$ и относя сумму к ширине площадки, получим плотность потока импульса волны, вызванную вертикальными турбулентными флуктуациями, фигурирующую в уравнениях под названием J_{3k} . Используя эти соображения, можно подсчитать J_{3k} непосредственно.

Рассмотрим наряду с элементом (1) симметричный ему относительно плоскости $x_3 = \text{const}$ элемент (2) (рис. 2) и будем характеризовать расстояние этих элементов до плоскости числом $s = \frac{2\pi}{l}$. В этих обозначениях третьи координаты элементов (1) и (2) будут соответственно $x_3 - \frac{2\pi}{s}$ и $x_3 + \frac{2\pi}{s}$, где s взято из интервала $(s, s + ds)$. Участвуя в волновом движении, элемент (1) будет обладать в момент времени t импульсом $\rho v \left(x_3 - \frac{2\pi}{s}, r, t \right)$, а элемент (2) — $\rho v \left(x_3 + \frac{2\pi}{s}, r, t \right)$. Если обозначить через $d\dot{v}_3(\bar{s})$ среднюю скорость флуктуационного движения элемента, отстоящего от плоскости $x_3 = \text{const}$ на расстояние $\frac{2\pi}{s}$ (это будет скорость прохождения элемента через $d\sigma$), то через время τ (время прохождения элементами (1) и (2) расстояния $\frac{2\pi}{s}$) в точке x_3 появится поток импульса

$$dp_{3k}d\sigma = \rho d\dot{v}_3 \left[v_k \left(x_3 - \frac{2\pi}{s}, r, t \right) - v_k \left(x_3 + \frac{2\pi}{s}, r, t \right) \right] d\sigma. \quad (3.3)$$

При написании этой формулы учтено, что элемент (1) проходит через $d\sigma$ с положительной скоростью, а элемент (2) — с отрицательной. Нужно нам выражение для J_{3k} получится из (3.3) суммированием по всем элементам из полосы шириной $d\sigma$ (номером элемента здесь является число s), осреднением по времени на интервале θ и делением полученного выражения на $d\sigma$. Так как количество элементов жидкости снизу и сверху от площадки различно, то целесообразно представить (3.3) в виде

$$dp_{3k}d\sigma = dp_{3k}^-d\sigma + dp_{3k}^+d\tau,$$

где

$$dp_{3k}^- = \rho d\dot{v}_3(s) \left[v_k \left(x_3 - \frac{2\pi}{s}, r, t \right) - v_k(x_3, r, t + \tau) \right];$$

$$dp_{3k}^+ = \rho d\dot{v}_3(s) \left[v_k(x_3, r, t + \tau) - v_k \left(x_3 + \frac{2\pi}{s}, r, t \right) \right],$$

и просуммировать каждое слагаемое отдельно. В итоге получим

$$p_{3k} = p_{3k}^- + p_{3k}^+ = \rho \int_{\frac{2\pi}{x_3}}^{\infty} d\dot{v}_3(s) \left[v_k \left(x_3 - \frac{2\pi}{s}, r, t \right) - v_k \left(x_3, r, t + \tau \right) \right] + \\ + \rho \int_0^{\infty} d\dot{v}_3(s) \left[v_k \left(x_3, r, t + \tau \right) - v_k \left(x_3 + \frac{2\pi}{s}, r, t \right) \right].$$

Так как v_k отличны от нуля лишь в волновом слое, то суммирование в p_{3k}^- ведется лишь по элементам, находящимся в нем и, следовательно, p_{3k}^- описывает эффект перераспределения волнового импульса внутри волнового слоя. В p_{3k}^+ суммирование происходит как по элементам, принадлежащим волновому слою, так и по элементам, находящимся в глубоких слоях, и поэтому именно p_{3k}^+ описывает тот процесс уноса энергии волны вглубь, который обсуждался в п. 1. Исходя из этих соображений, будем считать в дальнейшем, что

$$p_{3k}^- \ll p_{3k}^+$$

и, следовательно,

$$p_{3k} = \rho \int_0^{\infty} d\dot{v}_3(s) \left[v_k \left(x_3, r, t + \tau \right) - v_k \left(x_3 + \frac{2\pi}{s}, r, t \right) \right]. \quad (3.4)$$

Чтобы найти $d\dot{v}_3(s)$, — среднюю скорость флуктуационного движения элемента, приходящего в точку x_3 из точки, удаленной от нее на расстояние $\frac{2\pi}{s}$, поступим следующим образом.

Рассмотрим элемент (1) и ряд элементов, отстоящих от него по вертикали на различных расстояниях. Участвуя в турбулентном движении, элемент (1) будет флуктуировать и при отклонении на расстояние $\frac{2\pi}{s}$ от своего среднего положения будет взаимодействовать с элементом с номером s и обмениваться с ним энергией. В результате этих флуктуаций и взаимодействия движение элементов в различных точках потока в среднем будет коррелировано, а корреляционная функция [2]

$$Q_{33}(\xi) = \langle \dot{v}_3(R) \dot{v}_3(R + e_3 \xi) \rangle$$

при каждом значении своего аргумента ξ будет служить мерой флуктуационного движения элементов с амплитудой ξ . Если представить Q_{33} в виде интеграла Фурье

$$Q_{33}(\xi) = \int_0^{\infty} \varphi_{33}(s) \cos \xi s ds,$$

то одномерный пространственный спектр φ_{33} будет характеризовать среднюю энергию флуктуационного движения элементов с амплитудой $\frac{2\pi}{s}$, а величина размерности скорости, построенная из величин φ_{33} , s , ds может служить мерой средней скорости флуктуационного движения с амплитудой $\frac{2\pi}{s}$. Эту величину и будем использовать в качестве скорости $d\dot{v}_3(s)$. Таким образом,

$$d\dot{v}_3(s) = \varphi_{33}^{\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} ds$$

и величины p_{3k} можно записать в виде

$$p_{3k} = \rho \int_0^\infty \varphi_{33}^{\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} ds \left[v_k(x_3, r, t + \tau) - v_k\left(x_3 + \frac{2\pi}{s}, r, t\right) \right]. \quad (3.5)$$

Для быстрых турбулентных флуктуаций, которые представляют основной интерес, временем τ можно пренебречь. В этом случае

$$p_{3k} = \rho \int_{\Omega(s) > \omega} ds \cdot s^{-\frac{1}{2}} \varphi_{33}^{\frac{1}{2}} \left[v_k(x_3, r, t) - v_k\left(x_3 + \frac{2\pi}{s}, r, t\right) \right], \quad (3.6)$$

где интегрирование должно производиться лишь по «быстрым» флуктуациям. В дальнейшем для простоты будем предполагать, что интегрирование в (3.6) можно распространить на все s от 0 до ∞ . Осредняя теперь (3.6) по времени на интервале $0 \ll \ll \frac{2\pi}{\omega}$ и вводя в рассмотрение нормированный одномерный пространственный спектр F_{33}

$$\varphi_{33} = \langle \dot{v}_3^2 \rangle F_{33},$$

получим искомые величины

$$J_{3k} = \rho \sqrt{\langle \dot{v}_3^2 \rangle} \int_0^\infty F_{33}^{\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} ds \left[u_k(r, x_3, t) - u_k\left(r, x_3 + \frac{2\pi}{s}, t\right) \right]. \quad (3.7)$$

Они выражаются через средние, экспериментально измеряемые параметры турбулентности и искомую скорость волнового движения, что и требовалось для замыкания системы уравнений (2.6).

Таким образом, задача описания волнового движения малой амплитуды (в нашем случае это ветровые волны) в турбулентном море может быть сформулирована в виде

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ -p \delta_{ik} - \delta_{k3} \int_0^\infty \varphi_{33}^{\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} ds \left[u_k(x_3, r, t) - u_k \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(x_3 + \frac{2\pi}{s}, r, t \right) \right] \right\}, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \quad i, k = 1, 2, 3$$

с граничными и начальными условиями

$$p_w = p - \rho g \zeta + 2J_{33}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u_3 \text{ при } x_3 = 0;$$

$$p \rightarrow 0, \quad u \rightarrow 0 \quad \text{при } x_3 \rightarrow \infty, \quad t > 0; \quad (3.9)$$

$$u = p = \zeta = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (3.10)$$

4. Если представить высоту поверхности интегралом Фурье—Стилтьеса

$$\zeta = \int dA(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} \{r_1, r_2\},$$

вычисленным по всей плоскости $\mathbf{k} \{k_1, k_2\}$, то решение уравнений (3.8), удовлетворяющее граничным условиям, будет иметь вид

$$p = \int dp(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - kx_3}, \quad u_3 = - \int dA'(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - kx_3},$$

$$u_1 = u_2 = \frac{i}{2} \int dA'(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - kx_3},$$

где $k_1 = k_2 = k > 0$, штрих означает дифференцирование по времени. Для определения амплитуд dA получим уравнение

$$dA''(\mathbf{k}, t) + 2kJdA' + \omega^2 dA = \frac{k}{\rho} dp_w(\mathbf{k}, t), \quad (4.1)$$

где $\omega = \sqrt{gk}$ — частота свободных гравитационных волн с волновым числом k , dp_w — преобразование Фурье—Стилтьеса ветрового давления

$$dp_w(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} p_w(x_1, x_2, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} dx_1 dx_2.$$

Через J обозначена неотрицательная величина

$$J(k) = \frac{1}{2} \sqrt{\langle \dot{v}_3^2 \rangle} \int_0^{\infty} s^{-\frac{1}{2}} F_{33}^{\frac{1}{2}} ds \left[1 - e^{-\frac{2\pi k}{s}} \right] \geq 0. \quad (4.2)$$

Уравнение (4.1) представляет собой уравнение колебаний маятника под действием случайной силы с коэффициентом трения

$$\mu = kJ = \frac{1}{2} \sqrt{\langle \dot{v}_3^2 \rangle} \int_0^{\infty} s^{-\frac{1}{2}} F_{33}^{\frac{1}{2}} ds \left[1 - e^{-\frac{2\pi k}{s}} \right] \geq 0.$$

Наличие у него в подынтегральном выражении множителя $[1 - e^{-\frac{2\pi k}{s}}]$ свидетельствует о неодинаковом влиянии турбулентных флуктуаций различных масштабов на поведение поверхностной

волны длины λ . Асимптотический при $t \rightarrow \infty$ пространственный спектр высоты поверхности имеет вид

$$\Phi = \left\langle \frac{dA(k, t) dA^*(k, t)}{dk_1 dk_2} \right\rangle = \frac{k}{4\rho^2 \gamma^2 \mu} \Pi_1(k, \gamma), \quad (4.3)$$

где

$$\Pi_1(k, \gamma) = \int_0^\infty d\tau \cos \gamma \tau \left\langle \frac{dp_\omega dp_\omega^*}{dk_1 dk_2} \right\rangle, \quad \gamma = \sqrt{\omega^2 - (Jk)^2}$$

— пространственный спектр флуктуаций давления ветра.

В дальнейшем будем интегресоваться спектром Φ , относенным к спектру Φ_0 волн вне следа. При составлении спектра Φ_0 следует учесть существование естественной турбулентности моря, вызванной ветром и обрушением волн. Считая, что естественная турбулентность моря действует на волну аналогично турбулентности в следе, получим

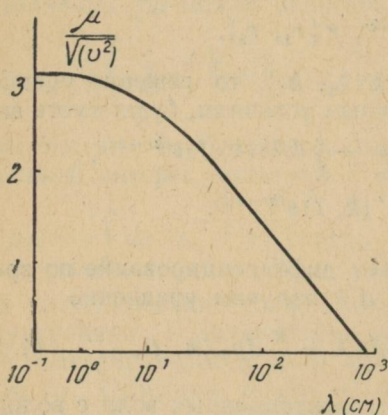


Рис. 3.

$$\Phi_0 = \frac{k}{4\rho^2 \beta^2 n k} \Pi_1(k, \beta), \quad \beta = \sqrt{\omega^2 - (n k^2)^2}, \quad (4.4)$$

где

$$n(V) = 1.51 \cdot 10^{-9} V^3 \text{ (см}^2 \cdot \text{сек)}$$

— коэффициент турбулентной вязкости моря [3], V — скорость ветра. Относительно пространственного спектра флуктуаций ветрового давления будем предполагать

$$\Pi_1 = \begin{cases} f, (k, t) & t < T = \min \left\{ \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma} \right\} \\ 0 & , \quad t \geq T. \end{cases} \quad (4.5)$$

Предположение (4.5) означает, что поведение волны определяется спектром Π_1 лишь в начальной стадии образования. Для дальнейшего поведения волны существенно взаимодействие ее с ветром, что приводит к быстрому росту ее и обрушению. Считая, что естественная турбулентность моря имеется и в следе, получим

$$\frac{A}{A_0} = \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^{\frac{1}{2}} = \left\{ 1 + \frac{\sqrt{\langle \dot{v}_3^2 \rangle}}{n k} \int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}} F_{33}^{\frac{1}{2}} \left[1 - e^{-\frac{2\pi k}{s}} \right] ds \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.6)$$

5. В связи с недостатком экспериментальных данных о спектрах и интенсивностях турбулентности в следе за самодвижущимся телом, введем следующие предположения:

а) спектры в следе за самодвижущимся телом совпадают с аналогичными спектрами струи;

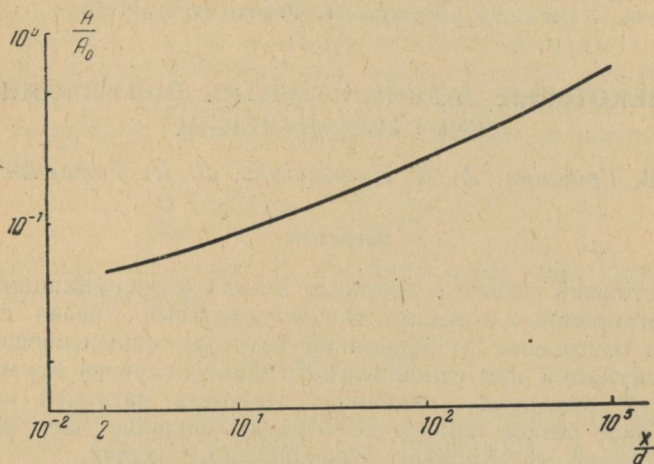


Рис. 4.

б) интенсивность флуктуаций скорости $\langle \dot{v}_3^2 \rangle$ связана с интенсивностью флуктуаций осевой компоненты скорости соотношением

$$\langle \dot{v}_3^2 \rangle = \langle \dot{v}_1^2 \rangle. \quad (5.1)$$

Для спутных струй это соотношение выполняется хорошо [4]. Предположение (5.1) позволяет пользоваться при вычислении коэффициента μ экспериментальными данными работы [5]. Коэффициент μ как функция длины волны λ , вычисленный по нормированному спектру струи [6], представлен на рис. 3. Видно, что при одной и той же интенсивности турбулентности наиболее сильно гасятся короткие волны сантиметрового диапазона (рябь). Степень гашения этих волн и определяет степень зеркальности морской поверхности в следе за кораблем. Для оценки величины уменьшения амплитуды ряби приведем кривую относительной амплитуды ряби в следе за кораблем диаметра d , движущимся со скоростью 10 узлов при скорости ветра 3 балла (рис. 4).

ЛИТЕРАТУРА

1. О. М. Филлипс. Резонансные явления в гравитационных волнах. Гидродинамическая неустойчивость. Изд-во «Мир», 1964.
2. А. С. Монин, А. М. Яглом. Статистическая гидромеханика, т. 2. Физматгиз, 1967.

3. С. К. Вен. Обобщенные спектры ветрового волнения и их практическое использование. Сб. «Ветровые волны». Изд-во иностр. лит., 1962.

4. А. А. Таунсенд. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. Изд-во иностр. лит., 1959.

5. E. Naudasher. Flow in the wake of self-propelled bodies and related sources of turbulence, J. Fl. Mech, v. 22, p. 4. (1965).

6. И. О. Хинце. Турбулентность. Физматгиз, М., 1963.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ РАЗВИТИЯ ПОПУЛЯЦИЙ ПРИ САМООПЫЛЕНИИ

В. В. Гришина, А. И. Литвиненко, Л. П. Татарченко

Введение

В настоящей работе с помощью метода классификации генотипов организмов с k несцепленными локусами указан простой алгоритм построения итерационной матрицы, определяющей развитие популяций при самоопылении. В ряде случаев эту матрицу порядка 3^k оказалось возможным заменить матрицей порядка $k + 1$. Такое резкое понижение порядка матрицы дает возможность численно моделировать разнообразные задачи.

Аналогичные задачи изучались и раньше. Так, в работе Воркмана и Алларда* рассмотрены случаи $k = 1, 2$. Для больших значений k предложенный в указанной работе метод приводит к весьма громоздким вычислениям. В нашей работе представлены вычисления для всех $k \leq 12$. Составленная нами программа для ЭВМ М-20 позволяет производить расчеты для $k \leq 20$.

Постулируем. 1. Если имеется совокупность из m отцовских и n материнских гамет, то равновероятно появление любой из mn зигот.

2. Изучаемые популяции размножаются путем самоопыления.

Любой из гибридов первого поколения с равной вероятностью может дать любую из 2^k возможных различных по генотипу гамет. Так как отцовский и материнский организмы одинаковы по генотипу (постулат 2), то число различных равновероятных отцовских и материнских гамет одно и то же и равно 2^k . Но тогда в силу первого постулата, равновероятно появление любой из $2^k \cdot 2^k = 4^k$ различных зигот. Эту совокупность зигот можно разбить на классы различными способами. Если к p -му классу ($p = 0, 1, \dots, k$) отнести организмы с p гомозиготными рецессивными парами генов, то получим известную менделевскую

* Workman P. L., Allard R. W. Population Studies in predominantly self-pollinated species. III. A matrix model for mixed selfing and random outcrossing. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1962, 48, № 8, 1318—1325.

классификацию, в которой p -й класс содержит $C_k^p 3^{k-p}$ зигот в соответствии с формулой

$$\sum_{p=0}^k C_k^p 3^{k-p} = 4^k. \quad (1)$$

Для наших целей более удобна другая классификация: к p -му классу ($p = 0, 1, \dots, k$) мы будем относить организмы, у которых ровно p пар гетерозиготных генов. Простой подсчет показывает, что p -й класс содержит $C_k^p 2^{k-p}$ различных по генотипу зигот, но каждая зигота встречается 2^p раз в соответствии с формулой

$$\sum_{p=0}^k C_k^p 2^{k-p} 2^p = \sum_{p=0}^k C_k^p 2^k = 4^k. \quad (2)$$

Суммирование различных по генотипу зигот дает размерность итерационной матрицы

$$\sum_{p=0}^k C_k^p 2^{k-p} = 3^k. \quad (3)$$

Подчеркнем, что законы Менделя справедливы только в вероятностном смысле. Поэтому все проводимые в дальнейшем детерминированные подсчеты нужно понимать только как комбинаторные. Для придания им вероятностного смысла достаточно произвести нормировку.

§ 1. Исследование развития популяции при отсутствии селекции

Рассмотрим задачу об изменении количественного состава различных генотипов от поколения к поколению при условии, что каждый организм производит одинаковое число потомков. В связи с (1) — (2) удобно считать это число равным 4^k .

Так как существует (в соответствии с (3)) 3^k генотипических разновидностей, то задание состава поколения означает задание вектора размерности 3^k :

$$\bar{U}_n = \{U_1^{(n)}, U_2^{(n)}, \dots, U_{3^k}^{(n)}\},$$

где $U_i^{(n)}$ — количество организмов с генотипом i в поколении n . Разобьем компоненты вектора $\bar{U}_n$ на $k+1$ групп согласно второй классификации, указанной во введении. Размерность p -й группы компонент вектора $\bar{U}_n$ будет равна $C_k^p 2^{k-p}$. Внутри групп нумерация произвольна.

Пусть организм с генотипом j дает в потомстве α_{ij} организмов с генотипом i . Тогда

$$\sum_{j=1}^{3^k} \alpha_{ij} U_j^{(n)} = U_i^{(n+1)} \quad (i = 1, 2, \dots, 3^k). \quad (4)$$

Числа $\alpha_{i,j}$ являются элементами некоторой матрицы D порядка 3^k , а формула (4) может быть записана в виде.

$$D\bar{U}_n = \bar{U}_{n+1}. \quad (5)$$

Структура и элементы матрицы D легко описываются, если воспользоваться принятой нами классификацией.

Разобьем матрицу D на $(k+1)^2$ клеток $A_{p,q}$ ($p, q = 0, 1, \dots, k$). Для этого строки и столбцы матрицы D разобьем на $k+1$ групп соответственно разбиению компонент вектора $\bar{U}_n$ на группы. Тогда очевидно, что матрица $A_{p,q}$ содержит $C_k^p 2^{k-p}$ строк и $C_k^q 2^{k-q}$ столбцов.

Если родители гетерозиготны по p локусам, то их потомки могут быть гетерозиготны также не более чем по p локусам, причем гетерозиготные локусы у потомков обязательно были гетерозиготными локусами у родителей. Отсюда следует, что потомки организма некоторого класса или сохраняют генотип родителей, или переходят в класс с меньшим числом гетерозиготных локусов. Это означает, что организм с генотипом j может дать в потомстве только организмы с генотипами $i \leq j$ и D есть верхняя треугольная матрица, т. е. $\alpha_{i,j} = 0$ при $i > j$. Для клеточных матриц это означает, что A_{pq} при $p > q$ является нулевой матрицей.

Теперь рассмотрим организм с генотипом j для

$$1 + \sum_{t=0}^{q-1} C_k^t 2^{k-t} \leq j \leq \sum_{t=0}^q C_k^t 2^{k-t}, \text{ где } q = 0, 1, \dots, k.$$

Это организм с некоторыми q локусами в гетерозиготном состоянии. Его потомство состоит из 4^k равновероятных организмов. Разбивая их на классы, согласно нашей классификации (формула (2)), получим, что в p -м классе ($p = 0, 1, \dots, q$) будет $C_q^p 2^{q-p}$ различных по генотипу организмов, и каждый из них повторяется в общей совокупности $2^{2k-2q+p}$ раз в соответствии с формулой

$$\sum_{p=0}^q C_q^p 2^{q-p} 2^{2k-2q+p} = 4^k. \quad (6)$$

Таким образом, элементами матрицы D будут нули и числа $2^{2k-2q+p}$, ибо организм генотипа j с q локусами в гетерозиготном состоянии или вообще не дает в потомстве организмов с генотипом i ($\alpha_{i,j} = 0$), или дает их в количестве $2^{2k-2q+p}$, где $p \leq q$ — число гетерозиготных локусов у организма с генотипом i .

Для дальнейшего достаточно знать только количество отличных от нуля элементов в каждой строке и столбце матрицы $A_{p,q}$.

Так как каждый организм с q локусами в гетерозиготном состоянии дает в потомстве $C_q^p 2^{q-p}$ различных равновероятных организмов с p локусами в гетерозиготном состоянии, то в каждом столбце матрицы $A_{p,q}$ будет $C_q^p 2^{q-p}$ отличных от нуля элементов (равных $2^{2k-2q+p}$).

Для того чтобы найти число элементов некоторой строки матрицы $A_{p,q}$, отличных от нуля, нужно знать, сколько различных организмов с q локусами в гетерозиготном состоянии могут дать в потомстве данный организм с данными p локусами, несущими гены в гетерозиготном состоянии. Вычисления удобнее провести, подсчитав, сколько различных организмов с q локусами, несущими гены в гетерозиготном состоянии, мы можем получить из организма с p локусами в гетерозиготном состоянии ($p \leq q$) формальным переводом части гомозиготных локусов в гетерозиготное состояние.

Так как p данных фиксированных локусов были и остаются в гетерозиготном состоянии, то для получения организма с q локусами в гетерозиготном состоянии нужно $q-p$ локусов из $k-p$ перевести из гомозиготного состояния в гетерозиготное. Но это можно сделать C_{k-p}^{q-p} способами.

Таким образом, у матрицы $A_{p,q}$ имеется $C_k^p 2^{k-p}$ строк и $C_k^q 2^{k-q}$ столбцов; элементы этой матрицы равны нулю или $2^{2k-2q+p}$; в каждом столбце матрицы число отличных от нуля элементов равно $C_q^p 2^{q-p}$, а в каждой строке — C_{k-p}^{q-p} .

Отметим еще одно важное свойство матрицы D . Так как

$$C_q^p 2^{q-p} = C_{k-p}^{q-p} = 1 \quad (p = q),$$

то матрицы $A_{p,p}$ диагональны. Диагональные же элементы матрицы $A_{p,p}$ равны 2^{2k-p} .

Теперь процесс развития популяции исследуется совсем просто. Согласно (5), это итерационный процесс, порождаемый матрицей D . Так как матрица D треугольна и элементы ее действительны, то последовательность $\bar{U}_n$ будет сходиться по направлению к собственному вектору, соответствующему наибольшему по модулю собственному числу. Наибольшее собственное число совпадает с диагональными элементами матрицы $A_{0,0}$. Оно равно 4^k , а его кратность 2^k . Соответствующими ему собственными векторами являются векторы

$$\bar{x}_i = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\} \quad (i = 1, 2, \dots, 2^k),$$

где i -я компонента вектора $\bar{x}_i$ равна единице.

Таким образом, при развитии самоопыляющейся популяции доля гетерозиготных организмов стремится к нулю и популяция приближается к совокупности организмов, гомозиготных по всем локусам.

§ 2. Редукция матрицы D в некоторых ситуациях

Оперативная память вычислительной электронной машины М-20 содержит 4096 ячеек. Так как треугольная матрица порядка 3^k содержит $\frac{(3^k + 1) 3^k}{2}$ существенных элементов, то изучение развития популяции с использованием только оперативной памяти машины М-20 возможно для организмов не более чем с четырьмя несцепленными локусами. Однако описанный выше итерационный процесс может быть существенно упрощен для целого ряда задач. Рассмотрим например, развитие популяции с начальным вектором, у которого компоненты в каждой из $k + 1$ групп равны между собой:

$$\bar{U}_1 = \{\alpha^{(1)}, \alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(1)}; \beta^{(1)}, \dots, \beta^{(1)}; \dots; \delta^{(1)}\}.$$

Рассматриваемый случай включает в себя, в частности, исследование развития популяции при самоопылении, когда первое поколение целиком состоит из гибридов первого поколения F_1 . В этом случае только компонента $\delta^{(1)}$ отлична от нуля, а все остальные компоненты вектора $\bar{U}_1$ равны нулю.

Применяя матрицу D к $\bar{U}_1$ получим вектор

$$\bar{U}_2 = \{\alpha^{(2)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(2)}; \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(2)}; \dots; \delta^{(2)}\},$$

у которого опять все компоненты внутри каждой группы равны. Это свойство, очевидно, сохраняется и в дальнейших итерациях. Это означает, что достаточно следить за поведением в итерациях одной компоненты из каждой группы. Тем самым вместо вектора размерности 3^k мы получаем вектор размерности $k + 1$. Матрица D размерности 3^k должна быть заменена при этом на матрицу d размерности $k + 1$. Эта замена происходит путем замены каждой клеточной матрицы $A_{p,q}$ элементом $\bar{d}_{p,q}$ следующим образом: элемент $\bar{d}_{p,q}$ матрицы $\bar{d}$ полагается равным $C_{k-p}^q 2^{2k-2q+p}$. Таким образом, $\bar{d}_{p,q}$ равен отличному от нуля элементу матрицы $A_{p,q}$, умноженному на число отличных от нуля элементов любой из строк матрицы $A_{p,q}$.

Указанная редукция позволяет численно исследовать задачи развития популяций без использования внешней памяти машины М-20 для $k \leq 80$ вместо $k \leq 4$ в «полной» задаче.

Результаты численного счета представлены в табл. 1. В ней приведено процентное содержание гомозиготных организмов (Y) и гетерозиготных хотя бы по одному локусу (H) для различных поколений и для $k = 2, \dots, 12$. Вычисления оканчивались, когда доля гетерозиготных организмов в популяции становилась меньше

Таблица 1

Число локу- сов	1 поколение		2		3		4		5		6		7		8	
	У	Н	У	Н	У	Н	У	Н	У	Н	У	Н	У	Н	У	Н
k-2	0	100	25,00	75,00	56,25	43,75	76,56	23,44	87,89	12,11	93,85	6,15	96,90	3,10	98,44	1,56
k-3	0	100	12,50	87,50	42,19	57,81	56,99	43,01	82,40	17,60	90,91	9,08	95,38	4,62	97,68	2,32
k-4	0	100	6,25	93,75	31,64	68,36	58,62	41,38	77,23	22,77	88,07	11,93	93,89	6,11	96,91	3,09
k-5	0	100	3,12	96,88	23,73	76,27	51,29	48,71	72,42	27,58	85,32	14,68	92,43	7,57	96,15	3,85
k-6	0	100	1,56	98,44	17,80	82,20	44,88	55,12	67,89	32,11	82,65	17,35	90,98	9,02	95,40	4,60
k-7	0	100	0,78	99,22	13,35	86,65	39,27	60,73	63,65	26,35	80,07	19,93	89,56	10,44	94,66	5,34
k-8	0	100	0,39	99,61	10,01	89,99	34,40	65,60	59,70	40,30	77,60	22,40	88,20	11,80	93,91	6,09
k-9	0	100	0,20	99,80	7,51	92,49	30,10	69,90	55,90	44,10	75,14	24,86	86,78	13,22	93,18	6,82
k-10	0	100	0,10	99,90	5,63	94,37	24,30	75,70	52,40	47,60	72,80	27,20	85,40	14,60	92,45	7,55
k-11	0	100	0,05	99,95	4,22	95,78	23,00	77,00	49,20	50,80	70,80	29,20	84,10	15,90	91,73	8,27
k-12	0	100	0,02	99,98	3,17	96,83	20,10	79,90	46,10	53,90	68,30	31,70	82,80	17,20	91,02	8,98

Продолжение табл. 1

Число локу- сов	9		10		11		12		13		14		15	
	У	Н	У	Н	У	Н	У	Н	У	Н	У	Н	У	Н
k-2	99,22	0,78	99,61	0,39	99,80	0,20	99,90	0,10	—	—	—	—	—	—
k-3	98,83	1,17	99,41	0,59	99,70	0,30	99,85	0,15	99,93	0,07	—	—	—	—
k-4	98,45	1,55	99,22	0,78	99,61	0,39	99,80	0,20	99,90	0,10	—	—	—	—
k-5	98,07	1,93	99,03	0,97	99,51	0,49	99,76	0,24	99,88	0,11	99,94	0,06	—	—
k-6	97,68	2,32	98,83	1,17	99,41	0,59	99,71	0,29	99,85	0,15	99,93	0,07	—	—
k-7	97,30	2,70	98,64	1,36	99,32	0,68	99,66	0,34	99,83	0,17	99,91	0,09	—	—
k-8	96,91	3,09	98,44	1,56	99,22	0,78	99,61	0,39	99,80	0,20	99,90	0,10	—	—
k-9	96,53	3,47	98,25	1,75	99,12	0,88	99,56	0,44	99,78	0,12	99,89	0,11	99,95	0,05
k-10	96,16	3,84	98,06	1,94	99,03	0,97	99,51	0,49	99,75	0,25	99,88	0,12	99,93	0,07
k-11	95,78	4,22	97,82	2,18	98,93	1,07	99,46	0,54	99,73	0,27	99,86	0,14	99,93	0,07
k-12	95,11	4,89	97,68	2,32	98,83	1,17	99,14	0,86	99,70	0,30	99,85	0,15	99,93	0,07

0,1%. Отметим, что при численном счете матрица D нормировалась путем деления каждого ее элемента на 4^k . Тогда $\frac{a_{i,j}}{4^k}$ есть вероятность появления организма i -го генотипа при размножении организмов j -го генотипа. А i -я компонента вектора $\bar{U}_n$ есть вероятность того, что произвольно выбранный организм из n -го поколения имеет генотип i .

§ 3. Развитие популяции организмов с одной парой летальных генов

В качестве второго примера использования приведенной выше классификации совокупности организмов рассмотрим одну из задач селекции.

Будем считать, что из каждого поколения исключаются организмы, у которых генетическая формула содержит одну определенную пару генов в гомозиготном состоянии. Для определенности будем считать, что это рецессивные гены.

В природе этот процесс реализуется в том случае, когда рассматриваемый ген является летальным: в гомозиготном состоянии данный ген приводит организм к гибели. Процесс может быть реализован и искусственно, если рассматриваемый ген в гомозиготном состоянии приводит к резкому фенотипическому отличию организма. Тогда такие организмы легко могут быть изъяты из общей совокупности.

Для решения задачи нам нужно знать, как теперь будет выглядеть матрица D . Очевидно, что из нее должны быть исключены все строки и столбцы, соответствующие летальному гену в гомозиготном состоянии. Так как строки и столбцы матрицы D разбиты на группы, согласно принятой нами классификации, то нам нужно только знать, сколько исключается организмов из каждого класса.

В классе организмов с p локусами в гетерозиготном состоянии содержится $C_{k-1}^p 2^{k-p}$ генотипов. Рассмотрим те из них, у которых рассматриваемый ген находится в гомозиготном состоянии. Так как один локус (с летальным геном в гомозиготном состоянии) находится в фиксированном состоянии, то из оставшихся $k-1$ локусов p должны быть в гетерозиготном состоянии и $k-p-1$ — в гомозиготном. p гетерозиготных локусов можно выбрать из $k-1$ локуса C_{k-1}^p способами. А так как каждый из $k-p-1$ локусов в гомозиготном состоянии может находиться в одном из двух состояний (LL или ll), то в p -м классе всего существует $C_{k-1}^p 2^{k-p-1}$ генотипов организмов с летальным геном в гомозиготном состоянии. Значит, после исключения из p -го

Таблица 2

Число локусов	1 поколение		2		3		4		5		6		7		8	
	У	Н	У	Н	У	Н	У	Н	У	Н	У	Н	У	Н	У	Н
k-2	0	100	16,66	83,34	45,00	55,00	68,05	31,95	82,72	17,28	91,00	9,00	95,41	4,59	97,68	2,32
k-3	0	100	6,33	93,67	33,75	66,25	59,55	40,45	77,55	22,45	88,16	11,84	93,92	6,08	96,92	3,08
k-4	0	100	4,17	95,83	25,31	74,69	52,11	47,89	72,70	27,30	85,40	14,60	92,45	7,55	96,16	3,84
k-5	0	100	2,08	97,92	18,98	81,02	45,59	54,41	68,16	31,84	82,74	17,26	91,01	8,99	95,40	4,60
k-6	0	100	1,04	98,96	14,24	85,76	39,89	60,11	63,90	36,10	80,15	19,85	89,58	10,42	94,66	5,34
k-7	0	100	0,52	99,48	10,68	89,32	34,91	65,09	59,90	40,10	77,64	22,36	88,18	11,82	93,92	6,08
k-8	0	100	0,26	99,74	8,01	91,99	30,50	69,50	56,20	43,80	75,20	24,80	86,80	13,20	93,20	6,80
k-9	0	100	0,13	99,87	6,01	93,99	26,70	73,30	52,80	47,20	72,90	27,10	85,40	14,60	92,50	7,50
k-10	0	100	0,07	99,93	4,50	95,50	23,40	76,60	49,30	50,70	70,60	29,40	84,10	15,90	91,70	8,30
k-11	0	100	0,03	99,97	3,38	96,62	20,50	79,50	46,30	53,70	68,40	31,60	82,80	17,20	91,00	9,00
k-12	0	100	0,02	99,98	2,53	97,47	17,90	82,10	43,40	56,60	66,20	33,80	81,50	18,50	90,31	9,69

Продолжение табл. 2

Число локусов	9		10		11		12		13		14		15	
	У	Н	У	Н	У	Н	У	Н	У	Н	У	Н	У	Н
k-2	98,83	1,17	99,41	0,59	99,71	0,29	99,85	0,15	99,93	0,07	—	—	—	—
k-3	98,45	1,55	99,22	0,78	99,60	0,40	99,80	0,20	99,90	0,10	—	—	—	—
k-4	98,06	1,94	99,02	0,98	99,51	0,49	99,76	0,24	99,88	0,12	99,93	0,07	—	—
k-5	97,68	2,32	98,83	1,17	99,41	0,59	99,70	0,30	99,85	0,15	99,93	0,07	—	—
k-6	97,29	2,71	98,64	1,36	99,32	0,68	99,66	0,34	99,83	0,17	99,91	0,09	—	—
k-7	96,92	3,08	98,45	1,55	99,22	0,78	99,61	0,39	99,80	0,20	99,90	0,10	—	—
k-8	96,54	3,46	98,25	1,75	99,12	0,88	99,56	0,44	99,76	0,24	99,89	0,11	99,94	0,06
k-9	96,16	3,84	98,06	1,94	99,02	0,98	99,51	0,49	99,75	0,25	99,88	0,12	99,93	0,07
k-10	95,79	4,21	97,87	2,13	98,93	1,07	99,48	0,52	99,73	0,27	99,86	0,14	99,93	0,07
k-11	95,41	4,59	97,68	2,32	98,83	1,17	99,41	0,59	99,71	0,29	99,85	0,15	99,93	0,07
k-12	95,04	4,96	97,49	2,51	98,74	1,26	99,37	0,63	99,68	0,32	99,84	0,16	99,92	0,08

класса генотипов организмов с летальным геном в гомозиготном состоянии в нем останется генотипов:

$$C_k^p 2^{k-p} - C_{k-1}^p 2^{k-p-1} = C_k^p \frac{k+p}{k} 2^{k-p-1} \quad (p = 0, 1, \dots, k).$$

Суммируя последнюю величину по p , получим общее число оставшихся генотипов: $2 \cdot 3^{k-1}$. Это и будет порядок матрицы D в рассматриваемом случае.

Вычеркивание некоторой строки матрицы D означает, что данный генотип не появляется в последующем поколении (соответствующий данному генотипу элемент вектора $\bar{U}_n$ будет равен нулю). Вычеркивание же столбца матрицы D означает, что данный генотип не дает потомства. Учитывая эти замечания, рассмотрим некоторую определенную остающуюся строку матрицы $A_{p,q}$. Ее ненулевые элементы определяются генотипом организма, не имеющего летального гена в гомозиготном состоянии. Значит, при вычеркивании столбцов матрицы D , проходящих через матрицу $A_{p,q}$, эти столбцы пройдут только через нулевые элементы остающейся строки. Но это означает, что в оставшихся строках матрицы $A_{p,q}$ будет снова по C_{k-p}^{q-p} отличных от нуля элементов $2^{2k-2q-p}$. Но тогда и редуцированная матрица d совпадает с редуцированной матрицей предыдущей задачи. Отличие же в итерационном процессе будет состоять в том, что теперь p -я ($p = 0, 1, \dots, k$) компонента редуцированного вектора должна учитываться $C_k^p \frac{k+p}{k} 2^{k-p-1}$ раз. Результаты вычислений для $k = 2, \dots, 12$ представлены в табл. 2.

В заключение отметим, что, используя указанный выше прием редукции, можно строить математические модели большого числа различных задач теории развития популяций при самоопылении. Например, можно провести исследование развития популяции организмов с несколькими парами летальных генов, моделирование явления гетерозиса, селекция с исключением из популяции организмов с несколькими парами генов в гетерозиготном и гомозиготном состоянии, развитие популяций, в которых различные организмы дают различное число потомков и другие.

РЕФЕРАТЫ

УДК 517.949.2

О полноте системы решений Флоке линейных дифференциальных уравнений первого порядка с запаздываниями, кратными периоду коэффициентов. Гурарий В. П., Кулеско Н. А., Мацаев В. И., Палант Ю. А. «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 36, 1971, стр. 3—10.

Доказывается, что если ω — периодические коэффициенты уравнения

$$y'(t) = \sum_{k=0}^n p_k(t) y(t - k\omega) \text{ удовлетворяют условиям } 1) p_k(t) \in L[0, \omega] \ (k =$$

$= 0, 1, \dots, n)$, 2) $p_n(t) \geq 0$ (≤ 0), на любом интервале $p_n(t) > 0$ (< 0) на множестве положительной меры, то система решений Флоке этого уравнения полна в пространстве всех его решений на $(0, \infty)$ в топологии равномерной сходимости на каждом компактном множестве.

Библиографических ссылок 3.

УДК 517.946

Безусловно корректные краевые задачи в бесконечном слое. Борок В. М. «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 36, 1971, стр. 10—14.

Установлено необходимое и достаточное условие того, чтобы краевая задача

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) = 0; \ x \in R^m, \ t \in [0, T]; \ u(x, 0) =$$

$= u_0(x); \ u(x, T) = u_T(x)$ $P(s), Q(s)$ — произвольные полиномы, $u_0(x)$ и $u_T(x)$ — заданные функции, была корректно разрешима в классе всех достаточно гладких функций без дополнительных условий бесконечности.

Библиографических ссылок 4.

УДК 512.519:4.

К теореме Сушкевича—Риса. II. Глускин Л. М. «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 36, 1971, стр. 14—36.

В работе изучаются позиционные оперативы, не содержащие собственных идеалов, описывается строение таких оперативов.

Библиографических ссылок 12.

УДК 513.88

Инвариантные операторные узлы. Дубовой В. К. «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 36, 1971, стр. 36—61.

Вводится понятие инвариантности операторного узла, исследуется возможность разложения инвариантного операторного узла, описываются неразложимые инвариантные операторные узлы для случая нормальных представлений.

Библиографических ссылок 7.

УДК 517.944

О краевой задаче в бесконечном слое для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Антыпко И. И. «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 36, 1971, стр. 62—72.

Получена классификация краевой задачи и теоремы единственности и неединственности решения. Исследован вопрос о том, как изменение краевых условий может влиять на характер краевой задачи.

Библиографических ссылок 4.

О единственности решения задачи Коши для уравнений с комплекснозначными быстрорастущими коэффициентами. Рыжий В. С. «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 36, 1971, стр. 72—79.

$$\text{Для уравнений } \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial x^n} + \sum_{k=0}^{n-1} q_k(x) \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k},$$

где $n \geq 2$, $-\infty < x < \infty$, $0 \leq t < \infty$, $a \neq 0$ — комплексное число, $q_k(x)$ — комплекснозначные функции, получены классы единственности и неединственности решения задачи Коши. Условия, налагаемые на коэффициент $q_0(x) \equiv v_1(x) + iv_2(x)$ ($v_2(x) \neq 0$), не ограничивают сверху его порядок роста при $|x| \rightarrow \infty$. Коэффициенты $q_k(x)$ при $k \geq 1$ подчинены $q_0(x)$.

Библиографических ссылок 5.

УДК 519.2.

Оптимальная фильтрация сигналов и управление линейными объектами. Александров Ю. А., Янецвич А. А., «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 36, 1971, стр. 79—98.

Рассмотрены оптимальная фильтрация и управление линейными объектами для негауссовских сигналов и функционалов качества, не являющихся квадратичными. Используя аппарат квазимарковских процессов и динамическое программирование, получили решение задачи в квазинормальном приближении.

Библиографических ссылок 14.

УДК 519.2.

О стохастических дифференциальных играх. Александров Ю. А., Янецвич А. А., «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 36, 1971, стр. 99—110.

Рассматриваются многомерные стохастические игровые задачи. С помощью квазимарковских процессов и динамического программирования получены решения в квазинормальном приближении.

Библиографических ссылок 7.

УДК 532.593

О явлении зеркального следа за кораблем. Боев А. Г., «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 36, 1971, стр. 110—122.

Рассматривается задача о гашении ветровых волн в турбулентном следе за кораблем. Приведено распределение амплитуды ряби с длиной волн 3 см в следе за кораблем, движущимся со скоростью 10 узлов при скорости ветра 3 балла.

Рисунков 4. Библиографических ссылок 6.

УДК 518.825

Некоторые задачи развития популяций при самоопылении. Гришина В. В., Литвиненко А. И., Татарченко Л. П., «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 36, 1971, стр. 122—130.

Указан простой алгоритм построения итерационной матрицы (порядка 3κ), определяющей развитие популяции при самоопылении, и алгоритм перехода к новой матрице. Приведены результаты вычислений (для $\kappa = 2, \dots, 12$) двух задач: задачи развития популяции без селекции и задачи развития популяции организмов с одной парой летательных генов при условии, что каждый организм производит одинаковое число потомков.

Таблиц 2.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
В. П. Гурарий, Н. А. Кулеско, В. И. Мацаев, Ю. А. Палант. О полноте системы решений Флоке линейных дифференциальных уравнений первого порядка с запаздываниями, кратными периоду коэффициентов	3
В. М. Борок. Безусловно корректные краевые задачи в бесконечном слое	10
Л. М. Глушкин. К теореме Сушкевича—Риса. II	14
В. К. Дубовой. Инвариантные операторные узлы	36
И. И. Антыпко. О краевой задаче в бесконечном слое для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных	62
В. С. Рыжий. О единственности решения задачи Коши для уравнений с комплекснозначными быстрорастущими коэффициентами	72
Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. Оптимальная фильтрация сигналов и управление линейными объектами	79
Ю. А. Александров, А. А. Янцевич. О стохастических дифференциальных играх	99
А. Г. Боев. О явлении зеркального следа за кораблем	110
В. В. Гришина, А. И. Литвиненко, Л. П. Татарченко. Некоторые задачи развития популяций при самоопылении	122

Редактор *Е. П. Иващенко*
 Художеств. ред. *А. С. Трофименко*
 Техредактор *Т. П. Воробийко*
 Корректоры *Р. Е. Дорф, В. И. Цатурова*

Сдано в набор 7/IX 1970 г. Подписано к печати 11/V 1971 г. БЦ 50102. Формат 60×90^{1/16}. Объем 8,25 печ. л., 8,25 усл.-печ. л., 7,5 уч.-изд. л. Заказ 0-1870. Тираж 500. Цена 75 коп.

Типоофсетная фабрика «Коммунист» Комитета по печати при Совете Министров Украинской ССР. Харьков, ул. Энгельса, 11.