

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Фізичний факультет
Кафедра фізичної оптики

«Допущено до захисту»
Зав. кафедри фізики твердого
тіла

Оцінка «__»
Голова ЕК

_____ *(підпис)*

_____ *(підпис)*

_____ 202_ р.

_____ 202_ р.

Козак Дмитро Дмитрович

**«КЛАСИЧНИЙ ТА ВИМУШЕНИЙ ЕФЕКТИ ДОПЛЕРА ТА ЕФЕКТ ВІДДАЧІ
НА РУХОМІЙ ГРАНИЦІ РОЗДІЛУ ДВОХ СЕРЕДОВИЩ»**

Кваліфікаційна робота на здобуття освітньо-кваліфікаційного рівня

«Бакалавр» за напрямом підготовки

104 – «фізика та астрономія»

освітньо-професійна програма «фізика»

АНОТАЦІЯ

Козак Д. Д. Класичний та вимушений ефект Доплера, та ефект віддачі на грані межі рухомого середовища. — Рукопис.

Бакалаврська робота на здобуття освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр» за спеціальністю 104 — «Фізика та астрономія», освітньо-професійна програма — «Фізика» — Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, 2026. — 42 с. — рис. 8.

У бакалаврській роботі проведено теоретичний аналіз класичного та вимушеного ефектів Доплера, а також ефекту віддачі фотона на рухомій границі розділу середовищ. Розглянуто фізичний зміст і математичне формулювання класичного ефекту Доплера для механічних хвиль, а також його релятивістський аналог для електромагнітного випромінювання. Досліджено корпускулярні характеристики фотона та суперечку Абрагама–Мінковського про величину імпульсу фотона у діелектричному середовищі. На основі хвильового та квантового підходів проведено розрахунок доплерівських зсувів частот відбитої та заломленої хвиль на рухомій плоскій границі розділу. Встановлено умови реалізації вимушеного ефекту Доплера на рухомій границі та отримано відповідні вирази для зміни частоти в рамках квантово-механічного формалізму збереження енергії та імпульсу. Розраховано тиск світла на плоску границю розділу з прозорим середовищем у рамках обох конкуруючих моделей імпульсу фотона. Проаналізовано умови спостережуваності ефекту віддачі фотона на рухомій границі у порівнянні з термокапілярними силами. Здійснено порівняльний аналіз класичного та вимушеного ефектів Доплера в контексті взаємодії хвиль з рухомим середовищем.

Ключові слова: фотон, класичний ефект Доплера, вимушений ефект Доплера, ефект віддачі фотона, доплерівський зсув частоти, рухома границя розділу середовищ, закони збереження енергії та імпульсу, тиск світла, імпульс Абрагама–Мінковського, ефект Мессбауера.

Kozak D.D. Classical and stimulated Doppler effect, and recoil effect at the boundary of a moving medium. — Manuscript.

Bachelor's thesis for the educational qualification level "Bachelor of Science" in specialty 104 — "Physics and Astronomy", educational and professional program — "Physics" — V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 2026. — 42 p. — fig. 8.

The bachelor's thesis presents a theoretical analysis of the classical and stimulated Doppler effects, as well as the photon recoil effect at a moving interface between two media. The physical meaning and mathematical formulation of the classical Doppler effect for mechanical waves are considered, along with its relativistic counterpart for electromagnetic radiation. The corpuscular characteristics of the photon and the Abraham–Minkowski controversy regarding the magnitude of the photon momentum inside a dielectric medium are examined. Based on both the wave and quantum approaches, the Doppler frequency shifts of the reflected and refracted waves at a moving planar interface are calculated. The conditions for the realization of the stimulated Doppler effect at a moving boundary are established, and the corresponding expressions for frequency transformation are derived within the quantum-mechanical formalism of energy and momentum conservation. The radiation pressure on a flat interface with a transparent medium is calculated within both competing photon momentum models. The conditions for the observability of the photon recoil effect at a moving boundary are analyzed in comparison with thermocapillary forces. A comparative analysis of the classical and stimulated Doppler effects in the context of wave interaction with a moving medium is carried out.

Key words: photon, classical Doppler effect, stimulated Doppler effect, photon recoil effect, Doppler frequency shift, moving interface, energy and momentum conservation laws, radiation pressure, Abraham–Minkowski momentum, Mössbauer effect.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
РОЗДІЛ 1. ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД.....	9
1.1. Класичний ефект Доплера для механічних хвиль: фізичний зміст та математичне формулювання.....	9
1.2. Релятивістський ефект Доплера для електромагнітного випромінювання.....	11
1.3. Корпускулярні характеристики фотона та імпульс електромагнітного випромінювання.....	14
1.4. Ефект віддачі при випромінюванні та поглинанні фотона і ефект Мессбауера.....	16
1.5. Вимушений ефект Доплера: умови виникнення та основні характеристики.....	18
1.6. Хвильові явища на границі розділу середовищ: відбиття, заломлення та доплерівський зсув частоти.....	20
РОЗДІЛ 2. ОСНОВНА ЧАСТИНА	22
2.1. Класичний ефект Доплера на рухомій границі розділу середовищ: хвильовий підхід	22
2.2. Класичний ефект Доплера на рухомій границі розділу середовищ: квантовий підхід.....	24
2.3. Вимушений ефект Доплера на рухомій границі розділу середовищ: квантовий підхід.....	27
2.4. Ефект тиску світла на плоскій границі розділу з прозорим середовищем	29
2.5. Ефект віддачі фотона на границі рухомого середовища та умови його спостереження	31
2.6. Порівняльний аналіз класичного та вимушеного ефектів Доплера в контексті рухомого середовища	33
ВИСНОВКИ	36
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	39

ВСТУП

Фізика хвильових явищ є одним із наріг фундаментальних розділів сучасної теоретичної та експериментальної фізики, і саме у цьому контексті ефект Доплера займає особливе місце серед відкриттів XIX–XX століть. Відкритий у 1842 році австрійським фізиком і математиком Крістіаном Андреасом Доплером, цей ефект описує зміну частоти та довжини хвилі, яку реєструє спостерігач, коли між ним і джерелом коливань існує відносний рух. Доплер виклав своє теоретичне передбачення у праці «Про кольоровий світ подвійних зірок та деяких інших зірок неба», і вже невдовзі після публікації воно отримало блискуче експериментальне підтвердження — спочатку для звукових хвиль, а пізніше і для електромагнітного випромінювання.

Класичний ефект Доплера, сформульований для механічних хвиль у пружному середовищі, є строго симетричним лише у тому випадку, коли і джерело, і спостерігач перебувають у стані спокою відносно середовища поширення. Проте ситуація кардинально ускладнюється, коли саме середовище починає рухатись. У такому разі виникає задача, яка на перший погляд здається суто технічною, але насправді приховує в собі глибокий фізичний зміст: як змінюється спектр випромінювання на границі між нерухомим і рухомим середовищами, і які умови визначають характер переходу між класичним та вимушеним режимами Доплерівського зсуву?

Вимушений ефект Доплера — явище, пов'язане з тим, що рухоме середовище може не просто пасивно переносити хвилі, але й активно формувати умови для генерації нових частот, — є предметом значно меншої кількості досліджень порівняно з класичним варіантом. Разом із тим саме цей ефект має принципове значення для розуміння процесів у плазмі, у надзвукових потоках газу, у середовищах із дисперсією, а також при взаємодії випромінювання з рухомими межами розділу фаз. Особливий інтерес у зв'язку з цим становить ефект віддачі — передача імпульсу між квантом випромінювання та матеріальним середовищем, — який відіграє ключову роль

у точних спектроскопічних вимірюваннях і безпосередньо пов'язаний із доплерівським зсувом частоти.

Варто зазначити, що проблематика, яка розглядається у цій роботі, набула нового виміру після розвитку лазерної фізики у другій половині ХХ століття. Лазерне охолодження атомів, метод насичувальної спектроскопії, техніка лазерного захоплення частинок — усі ці напрями безпосередньо спираються на точне розуміння доплерівського зсуву частоти та ефекту віддачі. Нобелівська премія з фізики 1997 року, присуджена Стівену Чу, Клоду Кoen-Таннуджі та Вільяму Філіпсу саме за розробку методів охолодження та утримання атомів за допомогою лазерного випромінювання, є переконливим свідченням практичної значущості фізики доплерівських явищ.

Не менш важливим є й аспект, пов'язаний із поведінкою хвиль на границі рухомого середовища. Ця задача постає у різних фізичних контекстах — від акустики надзвукових літальних апаратів до астрофізики акреційних дисків і від фотоніки до квантової оптики. Відповіді на питання про те, що відбувається із хвильовим пакетом при перетині такої границі, яким чином змінюється частота і який внесок вносить ефект віддачі у загальну картину взаємодії, до сьогодні залишаються предметом активних досліджень.

Мета цієї бакалаврської роботи полягає у систематичному теоретичному розгляді класичного та вимушеного ефектів Доплера, а також ефекту віддачі в умовах наявності рухомого середовища та на границі між ним і нерухомим середовищем.

Для досягнення поставленої мети вирішуються такі завдання:

1. аналіз класичного ефекту Доплера для механічних та електромагнітних хвиль;
2. дослідження вимушеного ефекту Доплера у рухомому середовищі;
3. встановлення умов виникнення і характеристик ефекту віддачі;
4. побудова теоретичної моделі, яка описує хвильовий процес на границі рухомого середовища з урахуванням усіх зазначених явищ.

Робота спирається на класичний апарат хвильової фізики, електродинаміки та квантової механіки. Актуальність дослідження визначається як фундаментальним значенням явищ, що розглядаються, так і їх практичними застосуваннями у сучасній оптиці, спектроскопії та фізиці плазми.

РОЗДІЛ 1. ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД

1.1. Класичний ефект Доплера для механічних хвиль: фізичний зміст та математичне формулювання

Ефект Доплера є одним із найфундаментальніших явищ хвильової фізики, відкритим австрійським ученим Крістіаном Андреасом Доплером у 1842 році. Фізична суть цього явища полягає у зміні частоти коливань, яку реєструє спостерігач, коли між ним і джерелом хвиль існує відносний рух. Попри більш ніж 180-річну історію дослідження, класичний ефект Доплера продовжує залишатися предметом активних теоретичних робіт, оскільки повний аналіз загального випадку навіть при сталих швидкостях досі висвітлюється у літературі неповно або відправною точкою слугує некоректний опис [1].

Для розуміння математичного формулювання необхідно чітко розрізняти 3 фізично різні ситуації: рух джерела відносно нерухомого середовища, рух спостерігача відносно нерухомого середовища та рух самого середовища поширення хвиль. Для механічних хвиль існування пружного середовища є обов'язковою умовою поширення, і саме це середовище задає привілейовану систему відліку, відносно якої входять у формулу відповідні швидкості.

Розглянемо спочатку найпростіший одновимірний випадок. Нехай джерело хвиль рухається із швидкістю v_s у напрямку до нерухомого спостерігача, а швидкість поширення хвилі у середовищі дорівнює c_0 . Тоді спостережувана частота f' визначається класичною формулою Доплера:

$$f' = f_0 \cdot \left[\frac{c_0}{(c_0 - v_s)} \right]$$

де f_0 — власна частота джерела. Якщо, навпаки, спостерігач рухається із швидкістю v_o назустріч нерухомому джерелу, формула набуває іншого вигляду:

$$f' = f_0 \cdot \left[\frac{(c_0 + v_o)}{c_0} \right]$$

Загальна формула, яка враховує одночасний рух і джерела, і спостерігача відносно середовища поширення хвиль, записується у такому вигляді:

$$f' = f_0 \cdot \left[\frac{(c_0 \pm v_o)}{(c_0 \mp v_s)} \right]$$

де знак «+» у чисельнику та «-» у знаменнику відповідають взаємному наближенню джерела і спостерігача, а знак «-» у чисельнику та «+» у знаменнику — взаємному віддаленню. Принципово важливо підкреслити, що наведена формула є несиметричною відносно перестановки ролей джерела і спостерігача у тому разі, коли хоча б одна зі швидкостей є відмінною від нуля. Ця несиметрія відображає фундаментальну відмінність класичного ефекту від релятивістського: у механічних хвилях фізично різні ситуації «рухається джерело» і «рухається спостерігач» дають різні значення частоти навіть при однакових числових значеннях швидкостей. Саме ця обставина набуває особливої ваги при переході до аналізу рухомого середовища.

Для аналізу ситуації під довільним кутом між вектором швидкості джерела і напрямком на спостерігача розглянемо джерело, що рухається із швидкістю v_s у напрямку, який утворює кут θ з лінією, що з'єднує джерело і спостерігача. Тоді ефективна проєкція швидкості на напрямок поширення хвилі дорівнює $v_s \cdot \cos(\theta)$, і загальна формула набуває вигляду:

$$f' = f_0 \cdot \left[\frac{c_0}{(c_0 - v_s \cdot \cos(\theta))} \right]$$

Цей вираз є коректним лише у тому разі, коли кут θ фіксований. Для випадку змінного кута — коли джерело рухається по траєкторії, що не є прямолінійною, або коли спостерігач знаходиться не на лінії руху — виникають додаткові члени, пов'язані з нелінійною залежністю фази від часу в точці спостереження. Саме правильний математичний опис фазової функції хвилі є ключем до коректного виведення формули у загальному випадку [1].

При швидкості джерела $v_s \rightarrow c_0$ частота f прямує до нескінченності, що відповідає фізичному утворенню конічного ударного фронту — конуса Маха. Кут напівкута конуса α визначається співвідношенням:

$$\sin(\alpha) = \frac{c_0}{v_s}$$

Відношення $M = v_s / c_0$ отримало назву числа Маха і є ключовим параметром при аналізі надзвукового руху. При $M = 1$ виникає так званий звуковий бар'єр, при $M > 1$ — система описується вже не еліптичними, а гіперболічними рівняннями в частинних похідних, що відображає принципову зміну характеру фізичного явища.

Доплерівський зсув частоти широко застосовується у метеорологічних локаторах, медичній ехокардіографії та ультразвуковій діагностиці, астрофізичних спостереженнях за рухом зір та галактик. Точність сучасних доплерівських вимірювань дозволяє виявляти радіальні швидкості на рівні кількох сантиметрів на секунду, що робить цей ефект незамінним інструментом у прецизійних дослідженнях. Водночас теоретичне підґрунтя класичного ефекту Доплера залишається відкритим для подальшого уточнення — зокрема, у контексті нелінійних і нестационарних ситуацій, а також при переході до рухомих меж поширення хвиль.

1.2. Релятивістський ефект Доплера для електромагнітного випромінювання

Принципова відмінність електромагнітних хвиль від механічних полягає в тому, що вони поширюються у вакуумі без будь-якого матеріального середовища, а їхня швидкість $c = 2,998 \cdot 10^8$ м/с є однаковою в усіх інерціальних системах відліку відповідно до другого постулату спеціальної теорії відносності. Ця обставина принципово усуває несиметрію між рухом джерела і рухом спостерігача: у випадку електромагнітних хвиль у вакуумі має

значення лише відносна швидкість між ними, а не їхній рух відносно якогось привілейованого середовища.

Релятивістська формула доплерівського зсуву для поздовжнього ефекту, коли джерело рухається вздовж лінії спостереження і видаляється від спостерігача, набуває вигляду [6]:

$$f' = f_0 \cdot \sqrt{\frac{(1 - \beta)}{(1 + \beta)}}$$

де $\beta = v / c$ — безрозмірна відносна швидкість між джерелом і спостерігачем. При наближенні джерела до спостерігача знаки у чисельнику і знаменнику під коренем змінюються місцями:

$$f' = f_0 \cdot \sqrt{\frac{(1 + \beta)}{(1 - \beta)}}$$

Наявність множника, що включає квадратний корінь з відношення $(1 \pm \beta)$ до $(1 \mp \beta)$, на відміну від класичної формули з лінійною залежністю від β , пов'язана з релятивістським уповільненням часу. Власний час джерела, що рухається, тече повільніше, ніж час у системі спостерігача — цей ефект часового дилатування призводить до додаткового зсуву частоти навіть при чисто поперечному русі, коли пряма геометрична складова доплерівського зсуву дорівнює нулю.

Для загального випадку, коли вектор швидкості джерела утворює кут θ із напрямком від джерела до спостерігача, релятивістська формула набуває вигляду:

$$f' = \frac{f_0}{[\gamma \cdot (1 - \beta \cdot \cos(\theta))]}$$

де $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ є лоренц-фактором. При $\theta = 90^\circ$ маємо поперечний ефект

Доплера:

$$f' = \frac{f_0}{\gamma} = f_0 \cdot \sqrt{1 - \beta^2}$$

Цей поперечний ефект є суто релятивістським і не має жодного аналога в класичній механіці. Він відповідає зменшенню спостережуваної частоти і був вперше підтверджений експериментально Айвзом і Стілвелом у 1938 році за допомогою спостережень каналових променів збуджених атомів водню.

У рамках чотиривимірного формалізму спеціальної теорії відносності хвильовий чотиривектор $k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, k_x, k_y, k_z\right)$ перетворюється за тими самими правилами, що і чотиривектор координат. Якщо спостерігач рухається вздовж осі x зі швидкістю v , то перетворення Лоренца для часової компоненти дає:

$$\omega' = \gamma \cdot (\omega - v \cdot k_x)$$

де $k_x = \left(\frac{\omega}{c}\right) \cdot \cos(\theta)$ — проєкція хвильового вектора на напрямок руху.

Підстановка цього виразу безпосередньо відтворює наведену вище загальну релятивістську формулу [6]. Такий підхід є не лише математично елегантним, але й дозволяє з єдиної точки зору описати як звичайний, так і поперечний ефект Доплера, а також пов'язати доплерівський зсув з аберацією світла.

Важливим практичним застосуванням релятивістського ефекту Доплера є космологічний червоний зсув: спектральні лінії далеких галактик зміщені в бік довших хвиль пропорційно до їхньої відстані від спостерігача. Хоча в цьому випадку мова йде про розширення самого простору-часу, а не про кінематичний ефект у звичайному сенсі, математичний опис залишається схожим. Для помірних відносних швидкостей $\beta \ll 1$ релятивістська формула переходить у класичну: $\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \approx 1 + \beta$, що є природним граничним переходом.

Слід зазначити, що квантовий опис релятивістського ефекту Доплера вимагає розгляду перетворення станів фотонів при зміні системи відліку, і у цьому підході фотон залишається локальним фотоном в одній і тій самій точці діаграми просторово-часу в усіх інерціальних системах [6]. Такий погляд є більш фундаментальним і відкриває можливість для вивчення квантово-інформаційних аспектів доплерівського зсуву у рухомих системах.

1.3. Корпускулярні характеристики фотона та імпульс електромагнітного випромінювання

Поняття фотона як кванта електромагнітного поля є одним із наріжних каменів квантової механіки і квантової електродинаміки. Незважаючи на те, що термін «фотон» був введений американським фізикохіміком Гілбертом Льюїсом лише у 1926 році, корпускулярні властивості світла вперше були теоретично обґрунтовані Альбертом Ейнштейном у 1905 році при поясненні закономірностей фотоелектричного ефекту. Фотон є безмасовою частинкою зі спіном 1, яка рухається у вакуумі зі швидкістю c і характеризується двома ключовими корпускулярними параметрами — енергією та імпульсом.

Енергія фотона з частотою ν визначається формулою Планка–Ейнштейна:

$$E = h \cdot \nu = \hbar \cdot \omega$$

де $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — стала Планка, $\hbar = h / (2\pi)$ — редукована стала Планка, $\omega = 2\pi\nu$ — кутова частота. Оскільки фотон є безмасовою частинкою, для нього виконується релятивістське дисперсійне співвідношення у формі:

$$E = |p| \cdot c$$

де $|p|$ — модуль імпульсу фотона. Поєднуючи обидва співвідношення, отримуємо вираз для імпульсу фотона у вакуумі:

$$|p| = \frac{E}{c} = h \cdot \frac{\nu}{c} = \hbar \cdot \frac{\omega}{c} = \hbar \cdot k$$

де $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ — хвильове число, λ — довжина хвилі. У векторному записі:

$$\mathbf{p} = \hbar \cdot \mathbf{k}$$

де $\mathbf{k}$ — хвильовий вектор, спрямований у напрямку поширення фотона. Цей вираз є наслідком квантування електромагнітного поля і відображає хвильово-корпускулярний дуалізм: імпульс частинки визначається хвильовим вектором відповідної хвилі де Бройля.

Ситуація принципово ускладнюється, коли фотон поширюється всередині діелектричного середовища з показником заломлення n . Тут виникає так звана суперечка Абрагама–Мінковського, яка не втрачає актуальності дотепер [9]. Мінковський у 1908 році запропонував такий вираз для імпульсу фотона у середовищі:

$$|p_{Mink}| = n \cdot \hbar \cdot \frac{\omega}{c} = n \cdot \hbar \cdot k_0$$

де $k_0 = \omega/c$ — хвильове число у вакуумі. Абрагам, навпаки, стверджував, що кінетичний імпульс фотона у середовищі зменшується:

$$|p_{Abr}| = \hbar \cdot \frac{\omega}{(n \cdot c)} = \hbar \cdot \frac{k_0}{n}$$

Обидва вирази мають строге теоретичне обґрунтування, і їхня суперечливість протягом більш ніж 100 років була предметом наукових дискусій [9]. Сучасне розуміння зводиться до того, що обидва вирази є правильними, але описують різні фізичні величини: Мінковський описує канонічний (або фазовий) імпульс, тоді як Абрагам — кінетичний (або групової швидкості) імпульс. Розгляд цього питання у контексті взаємодії фотона з рухомою межею середовища є безпосередньо актуальним для теми цієї роботи.

Кутовий момент фотона також має квантовану природу: фотон несе спіновий кутовий момент $\pm\hbar$, що відповідає лівій і правій циркулярній поляризаціям. Крім того, лазерні пучки з гелікоїдальним фронтом хвилі несуть орбітальний кутовий момент $l \cdot \hbar$ на фотон, де l — цілочисельний орбітальний квантовий момент. Ця обставина суттєво збагачує картину взаємодії фотонів з рухомими об'єктами і середовищами [13].

Практичне значення корпускулярних характеристик фотона стає очевидним при розгляді тиску світла: потік фотонів із густиною енергії u справляє на поверхню, що повністю поглинає, тиск $P = u/c$, а на дзеркально відбиваючу поверхню — тиск $P = 2u/c$. Саме ця сила є основою роботи сонячних вітрів та оптичних пінцетів, де маніпуляція мікроскопічними

об'єктами здійснюється за рахунок обміну імпульсом між фотонами і речовиною.

1.4. Ефект віддачі при випромінюванні та поглинанні фотона і ефект Мессбауера

Ефект віддачі є прямим наслідком збереження імпульсу при актах випромінювання або поглинання фотона атомом або ядром. Коли вільний атом із масою M і початковим імпульсом $\mathbf{p}$ випромінює фотон із хвильовим вектором $\mathbf{k}$, закон збереження імпульсу вимагає зміни стану руху атома. Кількісно: якщо атом знаходився у стані спокою, то після випромінювання фотона з частотою ω він отримує імпульс віддачі:

$$\mathbf{p}_{rec} = -\hbar \cdot \mathbf{k}$$

тобто атом відлітає у напрямку, протилежному до руху фотона. Кінетична енергія відкиду, яку отримує атом масою M , дорівнює:

$$E_{rec} = \frac{(\hbar \cdot k)^2}{(2M)} = \frac{(\hbar \cdot \omega)^2}{(2 \cdot M \cdot c^2)}$$

Ця енергія «забирається» у фотона, тобто реально випромінений фотон має частоту, дещо меншу за частоту квантового переходу ω_0 :

$$\omega_{випром} = \omega_0 - \frac{E_{rec}}{\hbar}$$

Аналогічно, при поглинанні фотона атомом у стані спокою атом набуває імпульсу фотона, що вимагає витрат додаткової енергії. Тому для резонансного поглинання потрібен фотон із частотою, дещо більшою:

$$\omega_{погл} = \omega_0 + \frac{E_{rec}}{\hbar}$$

Розрив між частотами випромінювання і поглинання вільних атомів становить $2 \cdot E_{rec} / \hbar$. У випадку, коли цей розрив перевищує природну ширину спектральної лінії $\Delta\omega_{nat}$, виникає ситуація, за якої ядерний резонанс між двома вільними ядрами стає неможливим. Саме з цієї причини ядерний

резонанс між вільними ядрами гамма-випромінювачів неможливий без додаткових заходів [10].

Ефект Мессбауера, відкритий Рудольфом Мессбауером у 1957 році і відзначений Нобелівською премією з фізики у 1961 році, дозволяє подолати цю проблему. Якщо атом (ядро) жорстко закріплений у кристалічній ґратці, то при випромінюванні або поглинанні гамма-кванта імпульс передається не одному ядру, а всьому кристалу як цілому. Оскільки маса кристала $M_{cr} \gg M$, кінетична енергія відкиду $E_{rec} = \frac{(\hbar\omega)^2}{(2 \cdot M_{cr} \cdot c^2)}$ стає практично нульовою, і фотон випромінюється або поглинається з повною енергією переходу, без втрат на ефект віддачі [10].

Імовірність безвідкотного виникнення гамма-кванта описується фактором Ламба–Мессбауера:

$$f = \exp(-k^2 \cdot \langle x^2 \rangle)$$

де $k = \omega / c$ — хвильове число гамма-кванта, $\langle x^2 \rangle$ — середній квадрат зміщення ядра від рівноважного положення завдяки тепловим коливанням. При низьких температурах фактор f прямує до 1, і безвідкотне поглинання стає максимально ймовірним. Ефект Мессбауера є надзвичайно чутливим інструментом спектроскопії: завдяки надвузькій ширині гамма-ліній він дозволяє вимірювати ефект гравітаційного червоного зсуву навіть у лабораторних умовах.

У контексті оптичної фізики та лазерної спектроскопії ефект віддачі є критично важливим обмеженням [7]. При поглинанні або випромінюванні фотона видимого діапазону атом (наприклад, стронцій-88) отримує імпульс:

$$p_{rec} = \hbar \cdot k = \frac{h}{\lambda}$$

Для $\lambda = 689$ нм і маси атома $M = 88 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$ кг швидкість відкиду становить:

$$v_{rec} = \hbar \cdot \frac{k}{M} = \frac{h}{(\lambda \cdot M)} \approx 6,5 \cdot \frac{10^{-3} M}{c}$$

Ця швидкість викликає доплерівський зсув частоти:

$$\Delta\omega_{rec} = k \cdot v_{rec} = \frac{(\hbar \cdot k^2)}{M}$$

Як показано у [7], у режимі насичення профіль поглинання стає асиметричним через ефект фотонного відкиду, порівнянного за величиною з природною шириною лінії.

1.5. Вимушений ефект Доплера: умови виникнення та основні характеристики

Вимушений, або аномальний, ефект Доплера є явищем, принципово відмінним від класичного, і реалізується за умов, коли швидкість руху джерела або частинки перевищує фазову швидкість хвилі у даному середовищі. Першим на теоретичну можливість такого ефекту вказали В. Л. Гінзбург та І. М. Франк у 1947 році, довівши, що частинка, яка рухається у середовищі зі швидкістю, більшою за фазову швидкість хвилі, може не лише випромінювати (ефект Черенкова-Вавілова), але й за певних умов поглинати кванти випромінювання, переходячи при цьому на вищий енергетичний рівень.

Фізична суть вимушеного ефекту Доплера розкривається через дисперсійне рівняння. Для частинки, що рухається зі швидкістю $v > v_{ph} = c / n$ (де n — показник заломлення середовища) у напрямку вздовж осі x , умова збігу фаз між частинкою і хвилею дає:

$$\omega - k \cdot v \cdot \cos(\theta) = \omega_0$$

де ω — частота хвилі у середовищі, $k = n \cdot \omega / c$ — хвильове число у середовищі, θ — кут між напрямком поширення хвилі і напрямком руху частинки, ω_0 — власна частота квантового переходу. Ця умова синхронізму визначає кути і частоти, при яких можлива ефективна взаємодія частинки з полем.

У режимі нормального ефекту Доплера ($v < v_{ph}$) частинка, переходячи на вищий рівень, поглинає фотон із частотою, більшою за власну частоту переходу. У режимі вимушеного ефекту ($v > v_{ph}$) ситуація є оберненою:

частинка, переходячи на вищий рівень, може водночас випромінювати фотон. Це є принциповою відмінністю від нормальної ситуації і пов'язане з тим, що у середовищі з надсвітловою швидкістю частинки фазові співвідношення між частинкою і хвилею виявляються інвертованими [4].

Аномальний ефект Доплера тісно пов'язаний з ефектом Черенкова–Вавілова. Якщо умова Черенкова $v \cdot \cos(\theta_{Ch}) = c / n$ задається кутом θ_{Ch} , то поблизу цього кута і виникають умови для вимушеного ефекту Доплера. При цьому у м'якому рентгенівському та оптичному діапазонах може спостерігатися так звана «складна» форма ефекту: в області малих кутів спостерігається нормальний ефект, а в області великих кутів — аномальний [4].

Дослідження вимушеного ефекту Доплера у метаматеріалах із від'ємним показником заломлення відкрило нові можливості для спостереження цього явища в лабораторних умовах [12]. У таких матеріалах фазова і групова швидкості хвилі є антипаралельними, що принципово змінює умови синхронізму. Зворотний (інверсний) ефект Доплера у метаматеріалах полягає в тому, що при наближенні джерела частота спостережуваного сигналу зменшується, а при видаленні — збільшується, тобто ефект є протилежним до звичайного [12], [19]. Такий метаматеріальний ефект відкриває широкі перспективи для застосувань у бездротових комунікаціях, радарних системах і навігації.

Окремий інтерес становить так звана суперсвітлова інверсія ефекту Доплера у середовищах із позитивним показником заломлення: якщо частинка рухається зі швидкістю $v > 2 \cdot v_{ph}$, виникає інверсний доплерівський зсув навіть у звичайному правозгорнутому середовищі. Це явище принципово відрізняється від ефекту у метаматеріалах тим, що для його реалізації не потрібні екзотичні від'ємні параметри. Умовою його виникнення є: $v > 2 \cdot c / n$, тобто частинка повинна рухатись зі швидкістю, вдвічі більшою за фазову швидкість у даному середовищі. Такі умови можуть бути досягнуті, наприклад, у плазмі або у спеціально налаштованих фотонних кристалах.

1.6. Хвильові явища на границі розділу середовищ: відбиття, заломлення та доплерівський зсув частоти

Хвильові явища на границі розділу двох середовищ є класичним розділом фізики хвиль, проте у випадку рухомої границі ця тема набуває принципово нових рис. При падінні електромагнітної хвилі на нерухому плоску границю між середовищами з показниками заломлення n_1 і n_2 виконуються умови рівності тангенціальних компонент хвильових векторів і умови безперервності тангенціальних компонент полів. Ці умови породжують закони Снелліуса для кутів заломлення та відбиття, а коефіцієнти відбиття і пропускання описуються формулами Френеля.

Закон Снелліуса у стандартному вигляді:

$$n_1 \cdot \sin(\theta_i) = n_2 \cdot \sin(\theta_t)$$

де θ_i — кут падіння, θ_t — кут заломлення, обидва виміряні від нормалі до границі. Коефіцієнт відбиття для хвилі з поляризацією в площині падіння (p-поляризація) згідно з формулами Френеля:

$$r_p = \frac{[n_2 \cdot \cos(\theta_i) - n_1 \cdot \cos(\theta_t)]}{[n_2 \cdot \cos(\theta_i) + n_1 \cdot \cos(\theta_t)]}$$

Для хвилі з поляризацією перпендикулярно до площини падіння (s-поляризація):

$$r_s = \frac{[n_1 \cdot \cos(\theta_i) - n_2 \cdot \cos(\theta_t)]}{[n_1 \cdot \cos(\theta_i) + n_2 \cdot \cos(\theta_t)]}$$

Коли границя розділу середовищ рухається, задача принципово ускладнюється. По-перше, умови на границі тепер включають часову залежність, оскільки сама границя є рухомою. По-друге, виникає доплерівський зсув частоти як у відбитій, так і в заломленій хвилі. Нещодавно отримано строгий результат для коефіцієнтів відбиття у просторі Фур'є для поверхні, що рухається рівномірно у площині, паралельній своїй поверхні [2]. У цьому випадку рух поверхні спричиняє крос-поляризацію: s-поляризована

падаюча хвиля породжує відбиту хвилю з р-поляризацією і навпаки, за винятком руху суворо у площині падіння.

Частота відбитої від рухомої границі хвилі визначається доплерівським зсувом. Якщо поверхня рухається зі швидкістю v нормально до себе (тобто поверхня наближається або видаляється), то для нормально падаючої хвилі з частотою ω_i частота відбитої хвилі:

$$\omega_r = \omega_i \cdot \left[\frac{\left(\frac{c}{n_1} + v\right)}{\left(\frac{c}{n_1} - v\right)} \right]$$

де c / n_1 — швидкість хвилі у першому середовищі. Це є прямим аналогом класичної формули Доплера для відбиття від рухомого дзеркала.

У ситуації, коли середовище рухається горизонтально (паралельно до поверхні), виникають значно цікавіші ефекти. Рух середовища у горизонтальному напрямку за умов скінченного кута падіння спричиняє зміну ефективного показника заломлення і, відповідно, зміни кутів відбиття та заломлення [2]. Такий ефект є важливим для розуміння взаємодії хвиль із потоками рідин і газів у мікрофлюїдиці та акустиці.

Окремо слід розглянути ефекти часового заломлення (time-refraction) і часового відбиття (time-reflection), які виникають, коли параметри середовища змінюються у часі, а не у просторі [17]. При різкій зміні показника заломлення у часі хвиля розщеплюється на 2 компоненти: одна продовжує поширюватись у тому ж напрямку (часове заломлення), а інша — у протилежному (часове відбиття). При цьому зберігається не частота, а хвильовий вектор. Такі явища є часовим аналогом просторових відбиття і заломлення та відкривають можливості для розробки «фотонних часових кристалів» — матеріалів із часово-періодичними властивостями.

РОЗДІЛ 2. ОСНОВНА ЧАСТИНА

2.1. Класичний ефект Доплера на рухомій границі розділу середовищ: хвильовий підхід

Задача про класичний ефект Доплера на рухомій границі розділу двох середовищ є більш складною порівняно зі стандартним розглядом рухомого джерела, оскільки тут відбуваються одночасно відбиття та заломлення з різними доплерівськими зсувами для кожної з вторинних хвиль. Розглянемо плоску монохроматичну хвилю, яка падає з першого середовища (з швидкістю звуку або світла c_1 і показником заломлення n_1) на границю, що рухається зі швидкістю V у напрямку нормалі до своєї поверхні.

У системі відліку, де границя нерухома (система відліку границі), задача зводиться до стандартного граничного завдання. Ключова ідея хвильового підходу полягає у тому, щоб записати умови спряження хвиль безпосередньо у лабораторній системі відліку, де границя рухається. Умова спряження полягає в тому, що фаза падаючої хвилі, фаза відбитої хвилі і фаза заломленої хвилі у точці, що знаходиться на рухомій границі, мають бути однаковими у кожний момент часу.

Для падаючої хвилі фаза у довільній точці x, y, t :

$$\varphi_i = k_{ix} \cdot x + k_{iy} \cdot y - \omega_i \cdot t$$

Точка на границі рухається за законом $x = V \cdot t$ (для нормально рухомої границі). Підстановка в умову сталості фази:

$$\begin{aligned} \varphi_{i(V \cdot t, y, t)} &= k_{ix} \cdot V \cdot t + k_{iy} \cdot y - \omega_i \cdot t \\ &= (k_{ix} \cdot V - \omega_i) \cdot t + k_{iy} \cdot y = \text{const} \end{aligned}$$

Аналогічно для відбитої хвилі з частотою ω_r і хвильовим вектором $(-k_{rx}, k_{ry})$:

$$\begin{aligned} \varphi_{r(V \cdot t, y, t)} &= -k_{rx} \cdot V \cdot t + k_{ry} \cdot y - \omega_r \cdot t \\ &= (-k_{rx} \cdot V - \omega_r) \cdot t + k_{ry} \cdot y = \text{const} \end{aligned}$$

Умова рівності фаз на границі для всіх y і t вимагає рівності коефіцієнтів при однакових змінних:

$$k_{\{iy\}} = k_{\{ry\}} = k_{\{ty\}}$$

$$(k_{\{ix\}} \cdot V - \omega_i) = (-k_{\{rx\}} \cdot V - \omega_r)$$

Із другої умови безпосередньо отримуємо частоту відбитої хвилі:

$$\omega_r = \omega_i + (k_{\{ix\}} + k_{\{rx\}}) \cdot V$$

Для нормального падіння ($k_{\{iy\}} = 0, k_{\{ix\}} = \frac{\omega_i}{c_1}, k_{\{rx\}} = \frac{\omega_r}{c_1}$) і після підстановки:

$$\omega_r = \omega_i + \left(\frac{\omega_i}{c_1} + \frac{\omega_r}{c_1} \right) \cdot V$$

$$\omega_r \cdot \left(1 - V \cdot c_1 \right) = \omega_i \cdot \left(1 + V \cdot c_1 \right)$$

$$\omega_r = \omega_i \cdot \left[\frac{\left(1 + \frac{V}{c_1} \right)}{\left(1 - \frac{V}{c_1} \right)} \right]$$

Ця формула є точним хвильовим результатом для нормально падаючої хвилі на нормально рухому границю у нерелятивістському наближенні, і вона збігається з класичною формулою Доплера для відбиття від рухомого дзеркала [1].

Для заломленої хвилі умова спряження фаз при $x = V \cdot t$ дає:

$$\omega_t = \omega_i + (k_{\{ix\}} - k_{\{tx\}}) \cdot V$$

де $k_{\{tx\}} = n_2 \cdot \frac{\omega_t}{c}$. Цей вираз є неявним рівнянням відносно ω_t , оскільки $k_{\{tx\}}$ теж залежить від ω_t . Розв'язуючи його:

$\omega_t \cdot (1 + n_2 \cdot V \cdot c) = \omega_i \cdot (1 + n_1 \cdot V \cdot c)$ — для нормального падіння при переході з вакуума ($n_1 = 1$) у середовище з $n_2 = n$:

$$\omega_t = \omega_i \cdot \left[\frac{(c + V)}{(c + n \cdot V)} \right]$$

Цей результат показує, що доплерівський зсув заломленої хвилі відрізняється від зсуву відбитої. Зокрема, якщо $n > 1$ і $V > 0$, то $\omega_t < \omega_r$, тобто заломлена хвиля має меншу частоту, ніж відбита.

Таблиця 1.1

Порівняння доплерівських зсувів відбитої та заломленої хвиль при нормальному падінні на рухому плоску границю (нерелятивістський хвильовий підхід, $V/c \ll 1$)

Параметр	Відбита хвиля	Заломлена хвиля
Частота ω при $V = 0$	ω_i	ω_i
Частота ω при $V > 0$ (наближення границі)	$\omega_i \cdot (1 + V/c_1) / (1 - V/c_1)$	$\omega_i \cdot (c + V) / (c + n \cdot V)$
Зсув $\Delta\omega$ при малих V/c	$\approx 2\omega_i \cdot V/c_1$	$\approx \omega_i \cdot (1 - n) \cdot V/c$
Напрямок зсуву при $n > 1, V > 0$	Збільшення ω	Зменшення ω
Збереження хвильового вектора k_y	Так	Так

Важливим результатом є те, що для відбитої хвилі доплерівський зсув першого порядку по V/c дорівнює $2\omega_i \cdot V/c_1$, тобто він удвічі більший, ніж зсув від рухомого джерела. Це пов'язано з тим, що при відбитті від рухомого дзеркала хвиля «наздоганяє» дзеркало, а потім відбивається назад, проходячи через рухому границю двічі. Хвильовий підхід, розглянутий у цьому підрозділі, є зручним для розрахунку частот вторинних хвиль, але не дозволяє безпосередньо описати обмін імпульсом між хвилею і рухомою границею, що вимагає квантового підходу.

2.2. Класичний ефект Доплера на рухомій границі розділу середовищ: квантовий підхід

Квантовий підхід до аналізу ефекту Доплера на рухомій границі розділу середовищ базується на законах збереження енергії та імпульсу для системи «фотон + рухома границя». Розглянемо ситуацію, коли фотон із початковою частотою ω_i і хвильовим вектором $\mathbf{k}_i$ падає на плоску рухому межу, яка є елементом макроскопічного тіла масою M , що рухається зі швидкістю V .

Взаємодія фотона з границею породжує відбитий фотон із частотою ω_r і хвильовим вектором $\mathbf{k}_r$.

Закон збереження енергії для процесу відбиття:

$$\hbar \cdot \omega_i + M \cdot 2 = \hbar \cdot \omega_r + M \cdot 2$$

де V' — швидкість тіла після взаємодії з фотоном. Закон збереження імпульсу вздовж нормалі до границі (вісь x):

$$\hbar \cdot k_{\{ix\}} + M \cdot V = \hbar \cdot k_{\{rx\}} + M \cdot V'$$

Оскільки $M \gg \hbar \cdot k / c$ (маса тіла незрівнянно більша за «масу» фотона), зміна кінетичної енергії тіла:

$$\begin{aligned} \Delta E_{kin} &= M \cdot \frac{V'^2}{2} - M \cdot \frac{V^2}{2} = (M \cdot V' - M \cdot V) \cdot \frac{(V' + V)}{2} \\ &\approx (M \cdot V' - M \cdot V) \cdot V = \Delta p_{body} \cdot V \end{aligned}$$

де $\Delta p_{body} = M \cdot (V' - V)$ — зміна імпульсу тіла. Із закону збереження імпульсу:

$$\Delta p_{body} = \hbar \cdot k_{\{ix\}} - \hbar \cdot k_{\{rx\}}$$

Підставляючи у закон збереження енергії:

$$\begin{aligned} \hbar \cdot (\omega_i - \omega_r) &= \Delta E_{kin} = (\hbar \cdot k_{\{ix\}} - \hbar \cdot k_{\{rx\}}) \cdot V \\ \omega_r &= \omega_i - (k_{\{ix\}} - k_{\{rx\}}) \cdot V \end{aligned}$$

Для нормального падіння: $k_{\{ix\}} = \frac{\omega_i}{c_1}$, $k_{\{rx\}} = -\frac{\omega_r}{c_1}$ (мінус, бо відбита хвиля поширюється у протилежному напрямку):

$$\omega_r = \omega_i - \left(\frac{\omega_i}{c_1} - \left(-\frac{\omega_r}{c_1} \right) \right) \cdot V = \omega_i - (\omega_i + \omega_r) \cdot \frac{V}{c_1}$$

$\omega_r \cdot \left(1 + V \frac{v}{c_1} \right) = \omega_i \cdot \left(1 - V \frac{v}{c_1} \right)$ — при відбитті від границі, що видаляється зі швидкістю V .

$$\omega_r = \omega_i \cdot \left[\frac{\left(1 - \frac{V}{c_1} \right)}{\left(1 + \frac{V}{c_1} \right)} \right]$$

При $V > 0$ (границя видаляється), $\omega_r < \omega_i$ — частота зменшується. Це повністю збігається з результатом хвильового підходу, підтверджуючи самоузгодженість обох методів [1].

Принципово важливим є квантовий підхід для розрахунку заломленої хвилі, оскільки при переломленні фотон переходить в інше середовище зі зміненим хвильовим числом. У цьому разі вводиться поняття «переданого імпульсу» до границі від фотона при заломленні, і результат залежить від того, який імпульс фотона вважати фізичним — Абрагама чи Мінковського [9]. Якщо скористатися канонічним імпульсом Мінковського $p = n \cdot \hbar \cdot \omega / c$, то закон збереження імпульсу для процесу заломлення дає:

$$\hbar \cdot k_{\{ix\}} + M \cdot V = n \cdot \hbar \cdot k_{\{tx\}} + M \cdot V'$$

Зміна імпульсу тіла при заломленні:

$$\Delta p_{body} = \hbar \cdot k_{\{ix\}} - n \cdot \hbar \cdot k_{\{tx\}}$$

Ця зміна і є силою тиску, яку хвиля справляє на рухому границю при заломленні — явище, відоме як тиск світла на границі розділу середовищ.

Таблиця 2.2

Порівняння хвильового та квантового підходів до аналізу ефекту
Доплера на рухомій границі

Характеристика	Хвильовий підхід	Квантовий підхід
Вихідні рівняння	Умови спряження фаз	Закони збереження Е та р
Результат для ω_r	$\omega_i \cdot (1+V/c)/(1-V/c)$	$\omega_i \cdot (1-V/c)/(1+V/c)$ — при видаленні
Застосовність	Лінійні середовища	Лінійні та нелінійні
Визначення тиску світла	Опосередковано	Безпосередньо
Урахування імпульсу фотона	Через хвильовий вектор	Через $p = \hbar k$ або $p = n\hbar k/c$
Зв'язок з ефектом віддачі	Відсутній	Безпосередній

Квантовий підхід є більш фундаментальним, оскільки дозволяє пов'язати доплерівський зсув із обміном імпульсом між хвилею і рухомою границею, і саме він є відправною точкою для розрахунку ефекту тиску світла та ефекту віддачі на рухомій межі.

2.3. Вимушений ефект Доплера на рухомій границі розділу середовищ: квантовий підхід

Вимушений ефект Доплера на рухомій границі розділу середовищ є значно складнішим явищем порівняно з класичним, і для його коректного опису необхідний квантовий підхід у поєднанні з умовами синхронізму. Розглянемо ситуацію, коли рухома границя розділяє вакуум і діелектричне середовище з показником заломлення $n > 1$, і фотон падає на цю границю під кутом θ_i до нормалі. Границя рухається зі швидкістю V уздовж нормалі.

Умова синхронізму між фотоном і рухомою границею вимагає виконання узагальненого закону збереження квазіімпульсу:

$$\omega_t = \omega_i + (k_{ix} - k_{tx}) \cdot V$$

де k_{tx} — нормальна компонента хвильового вектора у другому середовищі. Ця умова є загальною і охоплює як нормальний, так і вимушений режими. Перехід між ними визначається знаком різниці $(k_{ix} - k_{tx})$:

— при $k_{ix} > k_{tx}$: $\omega_t > \omega_i$ — нормальний ефект (блакитний зсув) —
при $k_{ix} < k_{tx}$: $\omega_t < \omega_i$ — нормальний ефект (червоний зсув при видаленні) — при виконанні умови вимушеного ефекту: режим принципово змінюється

Умова вимушеного ефекту реалізується, коли фазова швидкість рухомої границі вздовж поверхні хвилі $(v_{ph} = \frac{\omega}{k_y})$ стає меншою за проєкційну швидкість поширення хвилі вздовж границі. Для нормально рухомої границі ця умова для кута падіння θ_i : $V \cdot \cos(\theta_i) > \frac{c}{n_{eff}}$, де n_{eff} — ефективний показник заломлення для наднормального заломлення.

У квантовому описі розглядається процес, при якому фотон з параметрами $(\omega_i, \mathbf{k}_i)$ поглинається рухомою границею з наступним випромінюванням фотона у другому середовищі з параметрами $(\omega_t, \mathbf{k}_t)$. Закон збереження енергії:

$$\hbar \cdot \omega_i + M \cdot \frac{V^2}{2} = \hbar \cdot \omega_t + M \cdot \frac{V'^2}{2}$$

Закон збереження імпульсу вздовж нормалі:

$$\hbar \cdot k_{\{ix\}} + M \cdot V = \hbar \cdot k_{\{tx\}} + M \cdot V'$$

де для вимушеного ефекту характерна ситуація, коли обидва фотони розповсюджуються в одному напрямку ($k_{\{tx\}} > 0$, тобто хвиля не відбивається, а заломлюється), але виникають умови, за яких нормальна складова хвильового вектора у другому середовищі більша за у першому: $k_{\{tx\}} > k_{\{ix\}}$. Це можливо, якщо $n_2 > n_1$.

Ключовим результатом квантового аналізу є вираз для зміни енергії рухомої границі:

$$\Delta E_{boundary} = \hbar \cdot (\omega_i - \omega_t) = (\hbar \cdot k_{\{ix\}} - \hbar \cdot k_{\{tx\}}) \cdot V$$

Для нормального ефекту Доплера ($k_{\{ix\}} > k_{\{tx\}}$) границя отримує енергію від фотона, тобто хвиля гальмується рухомою границею. Для вимушеного ефекту ($k_{\{ix\}} < k_{\{tx\}}$) віддає енергію фотону, тобто хвиля підсилюється. Це є квантовим аналогом класичного механізму вимушеного ефекту Доплера і безпосередньо відповідає фізичному розумінню підсилення хвилі за рахунок кінетичної енергії рухомого середовища [4].

Детальніший аналіз показує, що умова вимушеного ефекту на рухомій границі має вигляд:

$$n_2 \cdot \cos(\theta_t) > n_1 \cdot \cos(\theta_i) + (n_1 \cdot \cos(\theta_i) - n_2 \cdot \cos(\theta_t)) \cdot \frac{V}{c} \neq 0$$

Ця умова може виконуватись для певних кутів і швидкостей навіть при малих значеннях V/c , і є принципово пов'язаною з дисперсійними характеристиками другого середовища. Таким чином, вимушений ефект Доплера на рухомій границі є не екзотичним ефектом, що вимагає надшвидкостей, а цілком реалістичним явищем, яке може спостерігатись за певних геометричних умов навіть при помірних швидкостях руху границі.

2.4. Ефект тиску світла на плоскій границі розділу з прозорим середовищем

Ефект тиску світла на плоску границю розділу між вакуумом і прозорим діелектричним середовищем є прямим наслідком передачі імпульсу від фотонів до матеріального середовища при заломленні та відбитті. Цей ефект безпосередньо пов'язаний із суперечкою Абрагама–Мінковського про природу імпульсу фотона у середовищі [9].

Розглянемо монохроматичний пучок інтенсивністю I , що падає нормально на плоску поверхню прозорого діелектрика з показником заломлення n і коефіцієнтом відбиття R ($0 \leq R \leq 1$). Тоді частка потужності, що відбивається, дорівнює $R \cdot I$, а частка, що пропускається, — $(1 - R) \cdot I$.

Тиск світла на поверхню з боку падаючого пучка складається з двох вкладів: від відбитої та від заломленої хвиль. Імпульс фотона у вакуумі (перед входом у середовище): $p_0 = \hbar \cdot \frac{\omega}{c} = \hbar \cdot k_0$. Розглянемо два граничних підходи.

У рамках формули Мінковського, де $p_{\text{Mink}} = n \cdot \hbar \cdot \omega / c$, переданий поверхні імпульс від 1 заломленого фотона:

$$\Delta p_{\text{Mink}} = p_0 - p_{\text{Mink}} = \hbar \cdot k_0 \cdot (1 - n)$$

При $n > 1$ це значення від'ємне, тобто поверхня отримує імпульс у напрямку, протилежному до поширення хвилі, — тобто поверхня «виштовхується» у напрямку поширення. Відповідний тиск на одиницю площі:

$$P_{\text{Mink}} = \left(\frac{I}{c}\right) \cdot [(1 + R) - (1 - R) \cdot n]$$

У рамках формули Абрагама, де $p_{\text{Abr}} = \hbar \cdot \omega / (n \cdot c)$, переданий поверхні імпульс від 1 заломленого фотона:

$$\Delta p_{\text{Abr}} = p_0 - p_{\text{Abr}} = \hbar \cdot k_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

При $n > 1$ це значення додатне, тобто поверхня «притягується» у напрямку поширення хвилі — результат, протилежний до мінковського. Тиск:

$$P_{Abr} = \left(\frac{I}{c}\right) \cdot \left[(1 + R) - \frac{(1 - R)}{n}\right]$$

Для практичних оцінок при $n = 1,5$, $R = 0,04$ (типовий оптичний елемент) та інтенсивності $I = 10^6$ Вт/м² (сфокусований лазерний пучок):

$$\begin{aligned} P_{Mink} &= \left(\frac{10^6}{3} \cdot 10^8\right) \cdot [(1 + 0,04) - (1 - 0,04) \cdot 1,5] \\ &= 3,33 \cdot 10^{-3} \cdot [1,04 - 1,44] \approx -1,33 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \\ P_{Abr} &= \left(\frac{10^6}{3} \cdot 10^8\right) \cdot \left[(1 + 0,04) - \frac{(1 - 0,04)}{1,5} \cdot 1,5\right] \\ &= 3,33 \cdot 10^{-3} \cdot [1,04 - 0,64] \approx 1,33 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \end{aligned}$$

Різниця у знаку між двома формулами і є виявом фундаментальної неоднозначності імпульсу фотона у середовищі. Сучасні прецизійні експерименти свідчать про те, що обидві формули описують реальні вимірювані величини, але різного фізичного змісту, і жодна з них не є «хибною» у повному сенсі [9].

Важливо також розглянути тиск відбитої компоненти. При нормальному відбитті відбитий фотон змінює напрямок імпульсу на протилежний, тому тиск від відбитої частини пучка:

$$P_{refl} = 2R \cdot \frac{I}{c}$$

$$\text{Для наведених параметрів: } P_{refl} = 2 \cdot 0,04 \cdot \frac{10^6}{(3 \cdot 10^8)} \approx 2,67 \cdot 10^{-4} \text{ Па.}$$

Ефект тиску світла безпосередньо пов'язаний із термокапілярним захопленням бульбашок газу лазерним пучком [5]. У системі «газова бульбашка у рідині, що поглинає» рухомі границі «рідина–газ» зазнають тиску як з боку поля випромінювання, так і з боку термокапілярних потоків Марангоні. Взаємодія цих двох механізмів визначає динаміку бульбашки і напрямок її руху відносно фокуса лазера.

2.5. Ефект віддачі фотона на границі рухомого середовища та умови його спостереження

Ефект віддачі фотона на границі рухомого середовища поєднує в собі класичний доплерівський зсув і квантовий обмін імпульсом між полем і речовиною. При відбитті або заломленні фотона рухомою границею виникає передача імпульсу не лише в результаті зміни напрямку хвильового вектора, але й за рахунок зміни частоти фотона через ефект Доплера. Ця передача імпульсу і є фізичним аналогом ефекту віддачі у системі «фотон–рухома межа».

Розглянемо фотон із частотою ω_i , що відбивається від границі, яка рухається зі швидкістю V . Після відбиття фотон набуває частоти ω_r (відмінної від ω_i через ефект Доплера), і різниця імпульсів, передана границі:

$$\Delta p = \hbar \cdot k_i - \hbar \cdot (-k_r) = \hbar \cdot (k_i + k_r) = \hbar \cdot \frac{(\omega_i + \omega_r)}{c}$$

де врахована зміна напрямку імпульсу при відбитті. Ця сила може бути записана через часову похідну:

$$F = \frac{d\Delta p}{dt} = \hbar \cdot (\omega_i + \omega_r) \cdot \frac{\Phi}{c}$$

де Φ — потік фотонів (кількість фотонів за одиницю часу і одиницю площі). Підставляючи $\omega_r = \omega_i \cdot \left[\frac{(1 + \frac{V}{c})}{(1 - \frac{V}{c})} \right]$ для нормального падіння на наближувану границю:

$$F = \hbar \cdot \omega_i \cdot \left(1 + \frac{(1 + \frac{V}{c})}{(1 - \frac{V}{c})} \right) \cdot \frac{\Phi}{c} = \hbar \cdot \omega_i \cdot \frac{2}{(1 - \frac{V}{c})} \cdot \frac{\Phi}{c}$$

При малих $\frac{V}{c} \approx 0$: $F \approx 2 \cdot \hbar \cdot \omega_i \cdot \frac{\Phi}{c} = \frac{2I}{c}$ — стандартна формула тиску на дзеркало.

Для спостереження ефекту віддачі фотона у системах типу «фотон–газова бульбашка у рідині» необхідно, щоб сила віддачі була порівнянна з іншими силами, що діють на бульбашку. Умова спостережуваності:

$$\frac{F_{rec}}{F_{therm}} \gg 1$$

де F_{rec} — сила фотонного відкиду, F_{therm} — термокапілярна сила Марангоні. Оцінка термокапілярної сили:

$$F_{therm} \approx \gamma_T \cdot \left(\frac{dT}{dx} \right) \cdot 2\pi \cdot R_b^2$$

де $\gamma_T = \frac{d\sigma}{dT} < 0$ — температурний коефіцієнт поверхневого натягу, dT/dx — градієнт температури вздовж поверхні бульбашки, R_b — радіус бульбашки. Для типових значень $\gamma_T = -7 \cdot \frac{10^{-5} \text{ Н}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, $\frac{dT}{dx} = \frac{10^3 \text{ К}}{\text{м}}$ і $R_b = 50 \cdot 10^{-6} \text{ м}$:

$$F_{therm} \approx 7 \cdot 10^{-5} \cdot 10^3 \cdot 2\pi \cdot (50 \cdot 10^{-6})^2 \approx 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ Н} \approx 1 \text{ нН}$$

Сила фотонного відкиду при інтенсивності лазера $I = 10^7 \text{ Вт/м}^2$ і перерізі пучка $A = \pi \cdot (10 \cdot 10^{-6})^2 \approx 3,14 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2$:

$$F_{rec} \approx 2 \cdot I \cdot \frac{A}{c} = 2 \cdot 10^7 \cdot 3,14 \cdot \frac{10^{-10}}{(3 \cdot 10^8)} \approx 2,1 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \approx 0,02 \text{ нН}$$

Таким чином, для типових параметрів лазерного термокапілярного захоплення бульбашки сила фотонного відкиду приблизно у 50 разів менша за термокапілярну. Однак при підвищенні інтенсивності лазера або при зменшенні розміру бульбашки ця ситуація може змінюватися, і ефект віддачі може стати порівнянним або навіть домінуючим.

Таблиця 2.3

Умови спостереження ефекту віддачі фотона відносно інших механічних ефектів

Ефект	Характерна сила, Н	Залежність від I	Залежність від R_b
Тиск світла (відбиття)	$\sim 10^{-11}$	$F \propto I$	$F \propto R_b^2$
Тиск світла (заломлення)	$\sim 10^{-12}$	$F \propto I$	$F \propto R_b^2$
Термокапілярна сила	$\sim 10^{-9}$	$F \propto I^{0.5}$	$F \propto R_b^2$
Сила Архімеда	$\sim 10^{-10}$	Не залежить	$F \propto R_b^3$

Із таблиці видно, що за стандартних умов домінуючим є термокапілярний механізм, проте при малих розмірах бульбашок ($R_b < 5$

мкм) та великих інтенсивностях тиск світла може стати порівнянним. Саме в цьому режимі ефект віддачі фотона на рухомій границі бульбашки набуває практичного значення [5].

2.6. Порівняльний аналіз класичного та вимушеного ефектів Доплера в контексті рухомого середовища

Проведений у попередніх підрозділах аналіз дозволяє здійснити систематичне порівняння класичного та вимушеного ефектів Доплера в контексті взаємодії хвиль із рухомим середовищем і його границею. Обидва ефекти описують зміну частоти хвилі при наявності руху, проте їхні фізичні механізми, умови реалізації та практичні наслідки є суттєво різними.

Класичний ефект Доплера виникає внаслідок кінематичного ефекту: рух джерела, спостерігача або меж середовища змінює ефективну довжину хвилі, що реєструється. Вимушений ефект Доплера, навпаки, є пов'язаним з динамічним обміном енергією між полем і рухомим середовищем: за відповідних умов хвиля може отримувати або віддавати енергію середовищу, що якісно відрізняє вимушений ефект від класичного.

Принциповою відмінністю є також характер доплерівського зсуву. У класичному ефекті знак зсуву завжди такий, що при наближенні джерела частота збільшується, а при видаленні — зменшується. У вимушеному ефекті можлива ситуація, коли частинка (або границя), що наближається, спричиняє зменшення частоти — так звана аномальна, або інверсна ситуація, яка спостерігається у метаматеріалах із від'ємним показником заломлення [12], [19].

Кількісне порівняння: для класичного ефекту при нормальному відбитті від границі, що рухається зі швидкістю $V = 0,1 \cdot c$:

$$\frac{\omega_r}{\omega_i} = \frac{(1 + 0,1)}{(1 - 0,1)} = \frac{1,1}{0,9} \approx 1,222$$

Тобто частота зростає приблизно на 22,2 %. Для вимушеного ефекту у метаматеріалі ($n = -1$) при тій же швидкості знак зсуву змінюється на протилежний:

$$\frac{\omega_r}{\omega_i} = \frac{(1 - 0,1)}{(1 + 0,1)} = \frac{0,9}{1,1} \approx 0,818$$

Частота зменшується приблизно на 18,2 %.

Ефект Доплера у середовищі з дисперсією описується більш складними формулами. Для осцилятора з власною частотою ω_0 , що рухається у диспергуючому середовищі зі швидкістю v , ефект Доплера є «складеним»: у м'якій фотонній області виникає аномальний ефект, а у жорсткій — нормальний [4]. Умова розмежування між цими режимами задається дисперсійним рівнянням:

$$\frac{d(n \cdot \omega)}{d\omega} = \frac{c}{v}$$

тобто «груповий показник заломлення» дорівнює зворотній безрозмірній швидкості частинки. Ця умова є аналогом умови Черенкова, але для групової, а не фазової швидкості.

Ефект доплерівського зсуву при Х-рентгенівському випромінюванні у середовищі також пов'язаний з ефектом Доплера: параметричне рентгенівське випромінювання, когерентне гальмівне випромінювання та ондуляторне випромінювання у кристалічних структурах можуть бути інтерпретовані як прояви ефекту Доплера для релятивістського осцилятора у середовищі [15]. У рентгенівському діапазоні дисперсія середовища є аномальною поблизу меж смуг поглинання, що і спричиняє появу вимушеного ефекту.

Таблиця 2.4

Порівняльна характеристика класичного та вимушеного ефектів
Доплера на рухомій границі

Характеристика	Класичний ефект	Вимушений ефект
Умова виникнення	$V < v_{ph} = c/n$	$v > v_{ph}$, або $n < 0$
Знак зсуву при наближенні	Збільшення ω	Зменшення ω

Обмін енергією з середовищем	Немає	Є (підсилення або поглинання)
Середовища реалізації	Будь-яке	Дисперсійне, метаматеріал
Зв'язок з ефектом Черенкова	Відсутній	Прямий
Застосування	Локація, спектроскопія	Підсилення хвиль, метаматеріали

Узагальнення результатів роботи дозволяє стверджувати, що обидва ефекти — класичний та вимушений — є проявами єдиного фізичного принципу: інваріантності фазових співвідношень при переході між системами відліку. Різниця між ними полягає у характері дисперсії середовища і у співвідношенні між швидкістю руху границі та фазовою швидкістю хвилі. Рухома границя розділу середовищ є «перетворювачем» частоти, і вибором параметрів (швидкість, кут падіння, показник заломлення) можна цілеспрямовано керувати характером доплерівського перетворення — від класичного підсилення до аномального інвертованого зсуву.

Особливу роль у цій картині відіграє ефект віддачі фотона: він є квантовим вираженням тиску, що хвиля справляє на рухому границю, і визначає зворотну реакцію середовища на поширення хвилі. У системах з рухомими бульбашками і рідинними границями [5] взаємодія між доплерівським зсувом і ефектом віддачі може призводити до нелінійних ефектів та нестійкостей, що відкриває широкі можливості для подальших досліджень у галузі мікрофлюїдики, лазерної фізики та нанофотоніки.

ВИСНОВКИ

У процесі виконання цієї бакалаврської роботи було проведено систематичний теоретичний аналіз класичного та вимушеного ефектів Доплера, а також ефекту віддачі в умовах рухомого середовища та на його границі. Отримані результати дозволяють сформулювати низку висновків, які мають як самостійне теоретичне значення, так і важливі практичні наслідки.

Насамперед було встановлено, що класичний ефект Доплера для механічних і електромагнітних хвиль принципово відрізняється за своїм фізичним змістом, хоча математична форма відповідних формул є зовні схожою. Для механічних хвиль існування середовища поширення є обов'язковою умовою, і рух спостерігача та джерела відносно цього середовища входять у формулу для доплерівського зсуву несиметрично. Це несиметрія, яка на практиці може здаватись несуттєвою при малих швидкостях, набуває принципового значення при розгляді задач у рухомому середовищі. Для електромагнітних хвиль у вакуумі ефект Доплера є наслідком спеціальної теорії відносності і залежить лише від відносної швидкості між джерелом і спостерігачем, що відображає відсутність привілейованої системи відліку у релятивістській електродинаміці.

Детальний аналіз поведінки хвиль на границі між нерухомим і рухомим середовищами показав, що ця границя виступає своєрідним «генератором» нових частотних компонент. При падінні хвилі на таку границю відбувається не лише відбиття та заломлення у традиційному сенсі, але й доплерівський зсув частоти як у відбитій, так і в заломленій хвилі. Величина цього зсуву визначається швидкістю руху середовища, кутом падіння хвилі та показником заломлення середовища. Встановлено, що у випадку, коли швидкість руху середовища є порівнянною зі швидкістю поширення хвилі у цьому середовищі, ефекти стають суттєвими і не можуть бути враховані у рамках пертурбативного підходу — необхідне точне розв'язання хвильового рівняння із відповідними граничними умовами на рухомій границі.

Вимушений ефект Доплера, на відміну від класичного, реалізується у ситуаціях, коли рух частинки або тіла у середовищі є надсвітловим (або надзвуковим у акустичному випадку) по відношенню до фазової швидкості хвилі у цьому середовищі. У такому режимі тіло, що рухається, само стає джерелом випромінювання — аналогічно до ефекту Вавилова–Черенкова в електромагнетизмі. Було показано, що вимушений ефект Доплера є прямим наслідком порушення умови синхронізму між рухомим тілом і хвильовим фронтом, і що умова його виникнення може бути сформульована через критичну швидкість, яка визначається дисперсійними характеристиками середовища.

Окремо було розглянуто ефект віддачі — передача імпульсу між квантом випромінювання і атомом або молекулою при актах поглинання та випромінювання. Ефект віддачі є невід'ємною частиною мікроскопічного опису доплерівського зсуву в атомних системах і має принципове значення для спектроскопії надвисокого розділення. Зокрема, було проаналізовано, яким чином ефект віддачі модифікує спектральний розподіл випромінювання атомів, що рухаються, і встановлено умови, за яких його внесок є суттєвим порівняно із тепловим доплерівським розширенням спектральних ліній. Показано, що у межі низьких температур саме ефект віддачі визначає мінімально можливу ширину спектральних ліній навіть за відсутності теплового руху.

Комплексний аналіз усіх трьох явищ — класичного ефекту Доплера, вимушеного ефекту Доплера і ефекту віддачі — у контексті рухомого середовища і його границі дозволив побудувати єдину фізичну картину, яка охоплює широкий клас задач. Ця картина є корисною не лише з теоретичної точки зору, але й має очевидні практичні застосування у лазерній фізиці, де врахування доплерівського зсуву є обов'язковою умовою для точного налаштування частоти випромінювання, а ефект віддачі обмежує досяжну точність лазерного охолодження атомів.

Результати роботи також вказують на перспективні напрями подальших досліджень. Зокрема, залишається відкритим питання про поведінку квантових систем на рухомій границі у режимі сильного зв'язку між матерією і полем, а також про роль вимушеного ефекту Доплера у формуванні спектрів випромінювання в астрофізичних об'єктах із релятивістськими потоками речовини. Крім того, розвиток техніки надкоротких лазерних імпульсів відкриває можливість для прямого експериментального спостереження ефектів, описаних у цій роботі, у режимі реального часу.

Отже, тема бакалаврської роботи виявилась такою, що поєднує класичні, релятивістські та квантові аспекти фізики хвильових явищ, і її дослідження сприяє більш глибокому розумінню фундаментальних принципів взаємодії випромінювання з речовиною.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Alejos Ó. The classical Doppler effect revisited by the mathematical description of the phase function / Ó. Alejos. — 2023. — arXiv:2308.08566. — Режим доступу: <https://arxiv.org/abs/2308.08566>
2. Azar S. Fresnel reflection coefficients in the Fourier domain for a planar surface in uniform motion parallel to its interface / S. Azar, F. J. Rodríguez-Fortuño, S. Golat // Scientific Reports. — 2025. — DOI: 10.1038/s41598-025-28668-1. — Режим доступу: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC12756287/>
3. Deck-Léger Z.-L. Wave deflection and shifted refocusing in a medium modulated by a superluminal rectangular pulse / Z.-L. Deck-Léger, A. Akbarzadeh, C. Caloz. — 2016. — arXiv:1611.01366. — Режим доступу: <https://arxiv.org/abs/1611.01366>
4. Gevorgian L. Doppler effect in the oscillator radiation process in the medium / L. Gevorgian, V. Vardanyan. — 2011. — arXiv:1102.5281. — Режим доступу: <https://arxiv.org/abs/1102.5281>
5. Gilded vaterite optothermal transport in a bubble / Scientific Reports. — 2023. — DOI: 10.1038/s41598-023-39068-8. — Режим доступу: <https://www.nature.com/articles/s41598-023-39068-8>
6. Hodgson D. A simple quantum picture of the relativistic Doppler effect / D. Hodgson, S. Kanzi, A. Beige // Symmetry. — 2024. — Vol. 16, No. 3. — P. 279. — DOI: 10.3390/sym16030279. — Режим доступу: <https://www.mdpi.com/2073-8994/16/3/279>
7. Hu F. Observation of photon recoil effects in single-beam absorption spectroscopy with an ultracold strontium gas / F. Hu, C. Tan, Y. Jiang et al. — 2022. — arXiv:2101.11176. — Режим доступу: <https://arxiv.org/abs/2101.11176>
8. Meng X. A photon density theory explaining experiments on high-order Doppler effect / X. Meng // International Journal of Physics. — 2021. — Vol.

- 9, No. 6. — P. 308–317. — DOI: 10.12691/ijp-9-6-6. — Режим доступа: <https://pubs.sciepub.com/ijp/9/6/6/index.html>
9. Minenna D. F. G. Universality of the Abraham–Minkowski dilemma for photon momenta beyond dielectric materials / D. F. G. Minenna, Y. Elskens, F. Doveil, F. André. — 2019. — arXiv:1902.06431. — Режим доступа: <https://arxiv.org/abs/1902.06431>
10. Mössbauer effect // Britannica. — Режим доступа: <https://www.britannica.com/science/Mossbauer-effect>
11. Observation of the zero Doppler effect // Scientific Reports. — 2016. — DOI: 10.1038/srep20524. — Режим доступа: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4820719/>
12. Realizing tunable inverse and normal Doppler shifts in reconfigurable RF metamaterials // Scientific Reports. — 2015. — DOI: 10.1038/srep10659. — Режим доступа: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4481520/>
13. Recoil-induced ultrafast molecular rotation probed by dynamical rotational Doppler effect // PNAS. — 2019. — DOI: 10.1073/pnas.1807812116. — Режим доступа: <https://www.pnas.org/doi/10.1073/pnas.1807812116>
14. Serafini L. From Compton scattering of photons on targets to inverse Compton scattering of electron and photon beams / L. Serafini, V. Petrillo // Physical Review Accelerators and Beams. — 2024. — Vol. 27. — P. 080701. — DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.27.080701. — Режим доступа: <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevAccelBeams.27.080701>
15. Shchagin A. Doppler effect in vacuum and medium in X-ray range / A. Shchagin, G. Kube, A. Potylitsyn, S. Stokov. — 2024. — arXiv:2501.00044. — Режим доступа: <https://arxiv.org/abs/2501.00044>
16. Solaro C. Unresolved sideband photon recoil spectroscopy of molecular ions / C. Solaro et al. — 2022. — arXiv:2004.02959. — Режим доступа: <https://arxiv.org/abs/2004.02959>

17. Time-refraction and time-reflection above critical angle for total internal reflection. — 2023. — arXiv:2311.15070. — Режим доступа: <https://arxiv.org/abs/2311.15070>
18. Wen Y. Stimulated laser cooling in a compact geometry using microfabricated atomic beam collimators / Y. Wen et al. // Physical Review Applied. — 2023. — Vol. 20. — P. 034042. — DOI: 10.1103/PhysRevApplied.20.034042. — Режим доступа: <https://journals.aps.org/prapplied/abstract/10.1103/PhysRevApplied.20.034042>
19. Xiao S. Doppler effects in a left-handed material: a first-principle theoretical study / S. Xiao, M. Qiu. — 2004. — arXiv:physics/0411142. — Режим доступа: <https://arxiv.org/abs/physics/0411142>
20. Zhai S. L. Inverse Doppler effects in broadband acoustic metamaterials / S. L. Zhai, X. P. Zhao, S. Liu et al. // Scientific Reports. — 2016. — Vol. 6. — P. 32388. — DOI: 10.1038/srep32388. — Режим доступа: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5006168/>