

Ж-14038
П-327431

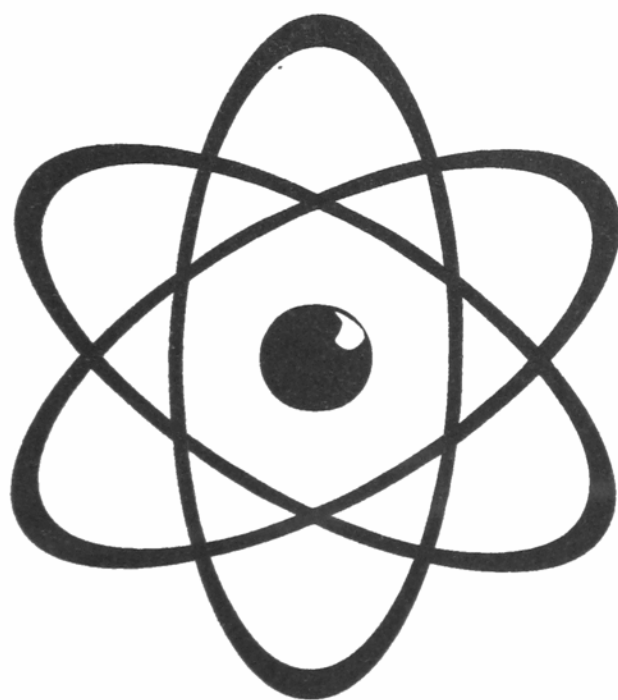
ISSN 0453-8048

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

ВІСНИК

ХАРКІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

№ 463



1999

“Вісник Харківського університету” (серія фізична «Ядра, частинки, поля») є збірником наукових робіт, який містить результати досліджень з фізики елементарних частинок, ядерної фізики, фізики плазми та плазмових технологій, фізики твердого тіла та радіаційної фізики. Збірник призначений для викладачів, наукових співробітників, аспірантів та студентів, що спеціалізуються у відповідних або суміжних галузях науки. Його включено до Переліку наукових видань ВАК, в яких можуть публікуватися основні результати дисертаційних робіт. До публікації приймаються статті, написані українською, російською або англійською мовами згідно з правилами для авторів і мають позитивні рекомендації двох рецензентів, призначених редакцією. Запланована періодичність випуску збірника — 4 рази на рік.

Редакційна колегія

Головний редактор — **Залюбовський І.І.** — чл.-кор. НАН України, д-р ф.-м. наук, професор
Заст. головного редактора — **Азаренков М.О.** — д-р ф.-м. наук, професор

Члени редакційної колегії:

Адаменко І. М. — д-р ф.-м. наук, професор
Бережной Ю. А. — д-р ф. -м. наук, професор
Коваль А. Г. — д-р ф.-м. наук, професор
Кондратенко А. М. — д-р ф.-м. наук, професор
Лапшин В. І. — д-р ф. -м. наук, професор
Нечипоренко Є. П. — д-р ф.-м. наук, професор
Товстяк В. В. — д-р ф.-м. наук
Толок В. Т. — чл.-кор. НАН України, д-р ф.-м. наук, професор

Відповідальний секретар — **Кірдін А.І.** — к. ф.-м. наук

Адреса редакційної колегії: 310108, Харків, пр. Курчатова, 31.
Харківський державний університет. Фізико-технічний факультет, к. 402.
Тел. 35-28-34. E-mail: kirdin@pht.univer.kharkov.ua

*Друкується за рішенням Вченої Ради Харківського державного університету.
Протокол № 10 від 26 листопада 1999 р.*

ISSN 0453-8048

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

Заснований у 1964 р.

ВІСНИК

ХАРКІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

№ 463

серія фізична

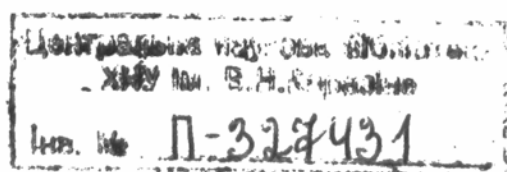
«Ядра, частинки, поля»

Випуск **4 /8/**

Харків
1999

Зміст

С.А. Дуллий	Необратимость и дополнительные симметрии на гиперболической суперплоскости	3
В.Г. Зима, С.А. Федорук	Спиновая частица с индексным биспинором	9
С.С. Зуб	Лагранжев формализм для магнитных систем, принцип Герца и магнитная потенциальная яма	15
В.М. Рашкован, А.В. Марчук, И.А. Пономарева	Учет релятивизма при движении заряда в поле сверхпроводящего кольца	21
И.Н. Кудрявцев	Дисперсия фононов и теплоемкость металлооксидных высокотемпературных сверхпроводников	27
С.В. Березовский, Ю.В. Середа, П.А. Щелоковский	Термодинамическая модель поля параметра порядка в несоразмерной фазе сегнетоэлектрика $\text{Sn}_2\text{P}_2\text{Se}_6$	34
A.V. Kirichok, S.T. Mouharov	About mechanisms of interaction between high- and low-frequency oscillations excited by charged beam in corrugated plasma-filled waveguide	39
Н.А. Азаренков, А.В. Гапон, И.Б. Денисенко	Аксиальная и радиальная структура цилиндрического газового разряда на несимметричных волнах	46
Н.А. Азаренков, В.Ф. Клепиков, В.П. Олефир, А.Е. Споров	Квадрупольные непотенциальные волны в слабонеоднородном столбе магнитоактивной плазмы	51
С.Н. Аболмасов, А.А. Бизюков, А.Е. Кашаба, К.Н. Середа	Неустойчивость анодного слоя разряда в поперечном магнитном поле	55
Ю.А. Бизюков, В.И. Муратов, В.Д. Федорченко	Формирование электронных сгустков волнами Бернштейна - Грина - Крускала	60
В.В. Брюховецкий, В.Ф. Клепиков, Р.И. Кузнецова	Радиационные факторы и сверхпластичность металлов и сплавов	63
А.И. Кирдин, В.Т. Лазурик	Альbedo рентгеновского излучения от гетерогенного материала типа "поглотитель внутри рассеивателя"	67
А.И. Кирдин, В.Т. Лазурик	Альbedo рентгеновского излучения от гетерогенного материала типа "рассеиватель внутри поглотителя"	71
Е.А. Баранник, С.А. Гирнык, Н.Г. Стервоедов, В.В. Товстяк	Акустическая установка для калибровки измерений скорости потоков жидкости доплеровскими методами	74
Р.В. Палагута, М.Ю. Силкин, Н.Г. Стервоедов, С.Н. Стервоедов	Система регистрации информации с импульсной камеры деления	79
Г.А. Кривоносков, Н.В. Найденов, Н.А. Хижняк	Модель высоковольтной трансформаторной ускоряющей установки	83



УДК 539.12

НЕОБРАТИМОСТЬ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СУПЕРПЛОСКОСТИ

С. А. Дуплій

Лаборатория ядерной физики, физико-технический факультет
Харьковский государственный университет, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 310077, Украина
E-mails: Steven.A.Duplij@univer.kharkov.ua duplij@member.ams.org
Internet: <http://gluon.physik.uni-kl.de/~duplij>
Поступила в редакцию 26 октября 1999 г.

Исследованы необратимые свойства матриц, содержащих четные нильпотентные элементы и делители нуля и возникающих в N -расширенной суперконформной геометрии. Найдена дуальность между перманентом и детерминантом и между минорами и алгебраическими дополнениями, предложена новая формула для обратной матрицы через перманенты и миноры. В дополнение к обратимым изучены и необратимые дробно-линейные преобразования суперплоскости $\mathbb{C}^{1|0}$, для которых введен новый тип симметрии. Построена необратимая гиперболическая геометрия на суперплоскости, в которой имеется два различных инвариантных двойных отношения и два расстояния, найден аналог производной Шварца и других формул.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: нильпотентность, перманент, дробно-линейное преобразование, двойное отношение, гиперболическая геометрия.

В данной работе изучаются необратимые свойства матриц, содержащих нильпотентные элементы и делители нуля, определенный тип которых возникает при анализе N -расширенных редуцированных преобразований [1–3]. Показывается, что перманенты играют для них дуальную (по отношению к детерминантам) роль в большинстве принципиальных формул и утверждений (даже в нахождении обратной матрицы). Найденные дуальные свойства изучаются в общем случае матриц содержащих нильпотентные элементы, что может быть применено в моделях элементарных частиц, использующих суперсимметрию в качестве основополагающего принципа. Введенные матрицы используются для определения обратимых и необратимых дробно-линейных преобразований суперплоскости специального вида, для которых найден новый вид симметрии. Далее строится необратимая гиперболическая геометрия на четной части суперплоскости, в которой имеется два различно определенных инвариантных двойных отношения и два гиперболических расстояния, аналог производной Шварца и других классических формул [4].

ПЕРМАНЕНТЫ И SCF-МАТРИЦЫ

Свойства перманентов обычных матриц существенно отличаются от свойств детерминантов, что до сих пор существенно ограничивало их применение комбинаторными построениями и вероятностными задачами [5], а также теорией инвариантов [6] и перманентных идеалов [7]. Однако, если матрицы содержат нильпотентные элементы и делители нуля, то для некоторого типа таких матриц, возникающего при анализе N -расширенных суперконформных преобразований (см. [8, 9]), перманенты начинают играть дуальную (по отношению к детерминантам) роль [2].

Рассмотрим вначале для иллюстрации идеи 2×2 матрицы с четными элементами из грассмановой алгебры $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$, т. е. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{\Lambda_0}(2)$ (Λ_0 и Λ_1 содержат четные и нечетные элементы: см. обозначения в [10]). Перманент в этом случае имеет вид [5]

$$\text{per } A = ad + bc. \quad (1)$$

Если определить скалярное произведение стандартным образом $A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr } AB^T$, то для перманента суммы матриц получаем $\text{per } (A + B) = \text{per } A + \text{per } B + A \times B^M$, где B^T — транспонированная матрица и B^M — матрица миноров. Отсюда следуют важные частные случаи, которые будут использованы в дальнейших выкладках, $\text{per } (A - kI) = k^2 - k \cdot \text{tr } A + \text{per } A$, $\text{per } (A - A^{MT}) = 2\text{per } A - \text{tr } A^2$, где $k \in \Lambda_0$ и I — единичная матрица. Отсюда следует определение перманента матрицы в терминах скалярного произведения $\text{per } A = \frac{1}{2} \text{tr } A \times A^M$, которое справедливо для матриц любого порядка. Отметим, что, если A не содержит нильпотентных составляющих и положительна и $\text{per } A = 1$, то матрица $B = A - I$ нильпотентна [11]. Введем еще одну матричную функцию $\text{scf}_{\pm} A$, которая играет важную роль при рассмотрении свойств матриц, содержащих нильпотентные элементы, по формулам

$$\text{scf}_{+} A \stackrel{\text{def}}{=} ac, \quad \text{scf}_{-} A \stackrel{\text{def}}{=} bd, \quad (2)$$

т. е. $\text{scf}_{\pm} A$ определяет степень ортогональности элементов первого и второго столбца матрицы A соответственно. Необходимость введения функции $\text{scf}_{\pm} A$ видна из следующего ключевого соотношения

$$A^{MT} \cdot A = \begin{pmatrix} \text{per } A & 2\text{scf}_{-} A \\ 2\text{scf}_{+} A & \text{per } A \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Сравним это соотношение с подобным для детерминанта $A^{DT} \cdot A = \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot I$, где A — матрица алгебраических дополнений. Тогда естественным является определение $N = 2$ scf-матрицы как 2×2 четной матрицы с элементами из Λ_0 , у которой элементы столбцов ортогональны

$$\text{scf}_{\pm} A_{\text{scf}} = 0. \quad (4)$$

Отметим, что для $N = 2$ scf-матриц выполняется соотношение, аналогичное стандартному

$$A_{\text{scf}}^{MT} \cdot A_{\text{scf}} = \begin{pmatrix} \text{per } A_{\text{scf}} & 0 \\ 0 & \text{per } A_{\text{scf}} \end{pmatrix} = \text{per } A_{\text{scf}} \cdot I. \quad (5)$$

и, следовательно, имеет место дualность $\text{per } A_{\text{scf}} \leftrightarrow \det A_{\text{scf}}$, $A_{\text{scf}}^M \leftrightarrow A_{\text{scf}}^D$. Тогда понятно, что при $\epsilon[\text{per } A_{\text{scf}}] \neq 0$ для scf-матриц можно ввести другое дualное определение обратной матрицы, использующей не детерминант, а перманент: для $N = 2$ scf-матрицы, удовлетворяющей условию $\epsilon[\text{per } A_{\text{scf}}] \neq 0$, per-обратная матрица определяется следующей формулой

$$A_{\text{scf}}^{-1\text{per}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A_{\text{scf}}^{MT}}{\text{per } A_{\text{scf}}}, \quad (6)$$

что можно сравнить со стандартной формулой $A^{-1} = A^{DT} / \det A$. Отсюда видно, что для per-обратной матрицы выполняется соотношение $A_{\text{scf}}^{-1\text{per}} \cdot A_{\text{scf}} = I$. Отметим некоторые свойства $N = 2$ scf-матриц, следующие из их определения, которые, однако, не выполняются для обычных матриц, например: $\text{tr } A_{\text{scf}}^n = a^n + d^n + [1 + (-1)^n](bc)^{\frac{n}{2}}$, $(\text{per}_{\det})^n A_{\text{scf}} = (\text{per}_{\det})^n A_{\text{scf}}^n = (ad)^n + (\pm 1)^n (bc)^n$. Отсюда, в частности, следуют связи между перманентом и детерминантом scf-матриц $\text{per }^{2n} A_{\text{scf}} = \det^{2n} A_{\text{scf}}$, $\text{per } A_{\text{scf}}^{2n} = \det A_{\text{scf}}^{2n}$, а также $\det A_{\text{scf}} \cdot \text{per } A_{\text{scf}} = a^2 d^2 - b^2 c^2$ и нетривиальная связь между перманентом и следом scf-матрицы $(2\text{per } A_{\text{scf}} - \text{tr } A_{\text{scf}}^2)(2\text{per } A_{\text{scf}} + \text{tr } A_{\text{scf}}^2 - \text{tr }^2 A_{\text{scf}}) = 0$, где каждый из сомножителей отличен от нуля, а их ортогональность достигается за счет scf-условий (4). Одной из причин, почему перманенты не применялись широко в приложениях, как детерминанты, служит тот факт, что в общем случае перманент не мультипликативен, т. е. формула Бине-Коши $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ не выполняется без дополнительных условий для перманентов [5] (также, как и инвариантность при линейных операциях над матрицами). Замечательно, что именно уравнения (4) и являются требуемыми дополнительными условиями, и тогда $\text{per}(A_{\text{scf}} \cdot B_{\text{scf}}) = \text{per } A_{\text{scf}} \cdot \text{per } B_{\text{scf}}$. Отметим также и другие важные формулы, справедливые для детерминантов и только для scf-матриц [2] $\text{per}(A_{\text{scf}} \cdot B_{\text{scf}} \cdot A_{\text{scf}}^{-1}) = \text{per } B_{\text{scf}}$, $\text{per } A_{\text{scf}}^{-1} = \text{per}^{-1} A_{\text{scf}}$, где A_{scf}^{-1} — обратная матрица в обычном определении.

Важным свойством scf-матриц является их связь с ортогональными матрицами при смене базиса, что использовалось ранее при рассмотрении необратимых редуцированных $N = 2$ и $N = 4$ преобразований [1, 2]. Так, если $A_0 = U^{-1} \cdot A \cdot U$, $B_0 = U^{-1} \cdot B \cdot U$, где $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ — матрица перехода в комплексный базис, то для произведения двух матриц в разных базисах можно получить $A_0^T \cdot B_0 = U^{-1} \cdot A^{MT} \cdot B \cdot U$. Если выбрать $A_0 = B_0$, то получим связь ортогональности в координатном базисе со свойствами scf-матриц в комплексном базисе [2]

$$A_0^T \cdot A_0 = U^{-1} \cdot A^{MT} \cdot A \cdot U = \text{per } A \cdot I + \text{scf}_+ A \cdot \sigma^+ + \text{scf}_- A \cdot \sigma^-, \quad (7)$$

где I — единичная 2×2 матрица, $\sigma^{\pm} = \sigma_3 \pm i\sigma_1$. Поэтому в обратимом случае $\epsilon[\text{per } A] \neq 0$ нормированные на $\sqrt{\text{per } A}$ scf-матрицы (с $\text{scf}_{\pm} A_{\text{scf}} = 0$) $N_{0,\text{scf}} = A_{0,\text{scf}} / \sqrt{\text{per } A_{\text{scf}}}$ подобны ортогональным матрицам, т. е. $N_{0,\text{scf}}^T \cdot N_{0,\text{scf}} = I$, следовательно $N_{0,\text{scf}} \in O_{\Lambda_0}(2)$. Для нормированных scf-матриц ортогональность в одном базисе связана с per-обратимостью в другом $N_{0,\text{scf}}^T \cdot N_{0,\text{scf}} = U^{-1} \cdot N_{\text{scf}}^{-1\text{per}} \cdot N_{\text{scf}} \cdot U$, где $N_{\text{scf}} = A_{\text{scf}} / \sqrt{\text{per } A_{\text{scf}}}$ и $N_{\text{scf}}^{-1\text{per}}$ определено формулой (6).

Рассмотрим более подробно свойства обратимости scf-матриц. Так, числовые части детерминанта и перманента (отличных от нуля: $\text{per } A \neq 0$, $\det A \neq 0$) обращаются в нуль одновременно $\epsilon[\text{per } A] = 0 \Leftrightarrow \epsilon[\det A] = 0$, что справедливо для матриц любого порядка, состоящих из четных элементов. Рассмотрим обратимый случай $\epsilon[\text{per } A_{\text{scf}}] \neq 0$, $\epsilon[\det A_{\text{scf}}] \neq 0$, тогда единственным решением scf-условий (4) могут быть варианты, когда один из сомножителей обращается в нуль, т. е. обратимые scf-матрицы диагональны или антидиагональны, и per-обратная матрица совпадает с обратной $A_{\text{scf}}^{-1\text{per}} = A_{\text{scf}}^{-1}$. В необратимом случае $\epsilon[\text{per } A_{\text{scf}}] = 0$ нормировка A_{scf} невозможна. Поэтому нужно непосредственно пользоваться scf-условиями (4) и соответствующими ненормированными формулами. Тогда матрица A_{scf} не обязательно будет диагональной или антидиагональной, и для нахождения доопределенной per-обратной матрицы $\bar{A}_{\text{scf}}^{-1\text{per}}$ в этом случае необходимо избегать деления в (6) и решать уравнение $\bar{A}_{\text{scf}}^{-1\text{per}} \cdot \text{per } A_{\text{scf}} = A_{\text{scf}}^{MT}$ с нильпотентными обеими частями. Если аналогично ввести доопределенную обратную матрицу $\bar{A}_{\text{scf}}^{-1}$ по формуле $\bar{A}_{\text{scf}}^{-1} \cdot \det A_{\text{scf}} = A_{\text{scf}}^{DT}$, то в общем случае $\bar{A}_{\text{scf}}^{-1\text{per}} \neq \bar{A}_{\text{scf}}^{-1}$. Например, пусть $A_{\text{scf}} = \begin{pmatrix} \mu\nu & \alpha\beta \\ \mu\rho & \alpha\gamma \end{pmatrix}$ — нильпотентная scf-матрица, для которой $\text{per } A_{\text{scf}} = \mu\nu\alpha\gamma + \alpha\beta\mu\rho = \mu\alpha(\gamma\nu + \beta\rho)$, $\det A_{\text{scf}} = \mu\nu\alpha\gamma - \alpha\beta\mu\rho = \mu\alpha(\gamma\nu - \beta\rho)$. Она необратима, поскольку $\epsilon[\text{per } A_{\text{scf}}] = \epsilon[\det A_{\text{scf}}] = 0$. Тогда сравним две обратные ма-

трицы $\bar{A}_{\text{scf}}^{-1\text{per}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ и $\bar{A}_{\text{scf}}^{-1} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$. Из определений имеем 2(!) различные системы уравнений для нахождения элементов x_i и y_i

$$\begin{cases} \mu\alpha(\gamma\nu + \beta\rho)x_1 = \alpha\gamma, \\ \mu\alpha(\gamma\nu + \beta\rho)x_2 = \alpha\beta, \\ \mu\alpha(\gamma\nu + \beta\rho)x_3 = \mu\rho, \\ \mu\alpha(\gamma\nu + \beta\rho)x_4 = \mu\nu, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu\alpha(\gamma\nu - \beta\rho)y_1 = \alpha\gamma, \\ \mu\alpha(\gamma\nu - \beta\rho)y_2 = -\alpha\beta, \\ \mu\alpha(\gamma\nu - \beta\rho)y_3 = -\mu\rho, \\ \mu\alpha(\gamma\nu - \beta\rho)y_4 = \mu\nu, \end{cases} \quad (8)$$

которые могут быть решены разложением по образующим Λ .

Наряду с мультипликативностью перманента $N = 2$ scf-матриц важным также является групповое поведение введенной матричной функции $\text{scf}_{\pm} A$ при умножении матриц. Если рассмотреть функцию $\text{scf}_{\pm}$ от произведения матриц A и $B = \begin{pmatrix} p_+ & p_- \\ q_+ & q_- \end{pmatrix}$, то, пользуясь определением (2), получаем $\text{scf}_{\pm}(AB) = p_{\pm}^2 \cdot \text{scf}_{\pm} A + q_{\pm}^2 \cdot \text{scf}_{\mp} A + 2\text{per} A \cdot \text{scf}_{\pm} B$, и, следовательно, $\text{scf}_{\pm}(AB) = 0 \Leftrightarrow \text{scf}_{\pm} A = 0 \wedge \text{scf}_{\pm} B = 0$. Поэтому множество 2×2 четных матриц, удовлетворяющих условию (4), $\mathcal{A}_{\text{scf}} = \bigcup \mathcal{A}_{\text{scf}}$ образует подполугруппу полной линейной полугруппы 2×2 четных матриц (поскольку $\mathcal{A}_{\text{scf}} * \mathcal{A}_{\text{scf}} \subseteq \mathcal{A}_{\text{scf}}$), которую назовем полугруппой $N = 2$ scf-матриц $SCF_{\Lambda_0}(2)$. Обратимые элементы из полугруппы $SCF_{\Lambda_0}(2)$ образуют группу $N = 2$ scf-матриц $GSCF_{\Lambda_0}(2)$. Небратимые элементы из полугруппы $SCF_{\Lambda_0}(2)$ образуют идеал $ISCF_{\Lambda_0}(2)$. Тогда в обратимом случае очевидно группа $GSCF_{\Lambda_0}(2)$ изоморфна ортогональной группе $O_{\Lambda_0}(2)$. Нетривиальным является необратимый случай $\epsilon[\text{per} A_{\text{scf}}] = 0$, когда scf-условия (2) выполняются не за счет зануления одного из сомножителей, а за счет ортогональности нильпотентных ненулевых сомножителей. Такие scf-матрицы принадлежат идеалу $ISCF_{\Lambda_0}(2)$ (см. (8)).

Аналогичные свойства (но с более сложной структурой и нетривиальными условиями) имеют $N = 4$ scf-матрицы [2], образующие полугруппу $SCF_{\Lambda_0}(4)$, которая состоит из групповой части $GSCF_{\Lambda_0}(4)$, изоморфной $O_{\Lambda_0}(4)$, и идеала $ISCF_{\Lambda_0}(4)$ [2, 3].

НЕЭВКЛИДОВА СУПЕРПЛОСКОСТЬ И SCF-МАТРИЦЫ

Рассмотрим некоторые необычные свойства дробно-линейных преобразований, к которым приводят $N = 2$ scf-матрицы. Поставим в соответствие матрице $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{\Lambda_0}(2)$ дробно-линейное преобразование суперплоскости $f: \mathbb{C}^{1|0} \rightarrow \mathbb{C}^{1|0}$ (см. например, [4, 12]) $f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Доопределим $f_A(z)$ на необратимый случай, когда $cz + d \neq 0$, но $\epsilon[cz + d] = 0$ по формуле

$$\bar{f}_A(z)(cz + d) = az + b. \quad (9)$$

Будем обозначать равенства для доопределенных величин знаком $\doteq$, а именно

$$\bar{f}_A(z) \doteq \frac{az + b}{cz + d}. \quad (10)$$

Пусть $\bar{F}$ — полугруппа всех обратимых и необратимых доопределенных преобразований $\bar{f}_A(z)$, а $L_{\Lambda_0}(2)$ — полугруппа матриц $A \in \text{Mat}_{\Lambda_0}(2)$. Поскольку для любых двух матриц A и B имеет место $\bar{f}_A \circ \bar{f}_B = \bar{f}_{AB}$, то отображение полугрупп $\varphi: L_{\Lambda_0}(2) \rightarrow \bar{F}$ есть гомоморфизм полугрупп (точнее — эпиморфизм с ненулевым ядром $a \cdot I$, $a \in \Lambda_0$ [12]). Интересно, что даже в несуперсимметричном случае произвольные (не дробно-линейные и неинфинитезимальные) голоморфные преобразования $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ в глобальном смысле не образуют группу (см. [13, с. 31]). Отметим, что доопределенные дробно-линейные преобразования $\bar{f}_A(z)$ имеют дополнительную неподвижную точку с нильпотентной координатой. Неподвижная точка z_{fix} отображения $\bar{f}_A(z)$ определяется формулой $\bar{f}_A(z_{\text{fix}}) \doteq z_{\text{fix}}$. Из (9) имеем $cz_{\text{fix}}^2 + (d - a)z_{\text{fix}} - b = 0$, откуда следует не одна, как в стандартном рассмотрении при $c \neq 0$ [14], а две (!) возможности, связанные с возможностью ненулевого индекса нильпотентности координаты на суперплоскости: 1) $\epsilon[b] \neq 0$, $\epsilon[z_{\text{fix}}] \neq 0$, тогда $z_{\text{fix}}^{(\pm)} \doteq \frac{a-d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4 \det A}}{2c}$ (стандартный случай); 2) $\epsilon[b] = 0$, $\epsilon[z_{\text{fix}}^{(0)}] = 0$, $(z_{\text{fix}}^{(0)})^2 = 0$, тогда $z_{\text{fix}}^{(0)} \doteq \frac{b}{d-a}$ (нильпотентный случай). Если выбрать в качестве матрицы A комплексную матрицу с единичным детерминантом, то $f_A(z)$ — это преобразование Мёбиуса, играющее важную роль в теории струн и римановых поверхностях [15, 16]. Выберем в качестве A введенные $N = 2$ scf-матрицы A_{scf} . Покажем, что наиболее ключевые соотношения будут иметь дуальные к стандартным, где детерминант заменяется на перманент [2]. Поскольку $N = 2$ scf-матрицы A_{scf} образуют полугруппу $SCF_{\Lambda_0}(2)$, то соответствующие дробно-линейные преобразования $\bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z)$ образуют полугруппу $\bar{F}_{\text{scf}} \subset \bar{F}$ относительно композиции, и отображение полугрупп $\varphi_{\text{scf}}: SCF_{\Lambda_0}(2) \rightarrow \bar{F}_{\text{scf}}$ есть также гомоморфизм полугрупп. Назовем рег-отображением дробно-линейное преобразование (10) с $N = 2$ scf-матрицей $A = A_{\text{scf}}$. Основным для дальнейшего рассмотрения будет тот факт, что рег-отображения (и только они) удовлетворяют следующему тождеству

$$n_1 \cdot \bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_1) + n_2 \cdot \bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_2) \doteq \frac{(n_1 + n_2)(z_1 + z_2) \cdot \text{per} A_{\text{scf}}}{2(cz_1 + d)(cz_2 + d)} + \frac{(n_1 - n_2)(z_1 - z_2) \cdot \det A_{\text{scf}}}{2(cz_1 + d)(cz_2 + d)}. \quad (11)$$

Действительно, обозначим разность между левой и правой частями в (11) за $\Delta f(z_1, z_2)$. Тогда для любой матрицы A непосредственно из (10) имеем $\Delta f(z_1, z_2) = (z_1 z_2 \cdot \text{scf} + A + \text{scf} - A)(n_1 + n_2)$, и в силу того, что в нашем случае $A = A_{\text{scf}} - N = 2 \text{ scf}$ -матрица, из scf -условий (4) $\text{scf} \pm A_{\text{scf}} = 0$ получаем $\Delta f(z_1, z_2) = 0$, и следовательно тождество (11) выполняется. Из него явно прослеживается дуальная роль перманента $\text{per} A_{\text{scf}}$ и детерминанта $\det A_{\text{scf}}$. Так, при per -отображениях разность координат преобразуется множителем, пропорциональным $\det A_{\text{scf}}$, а сумма координат преобразуется множителем, пропорциональным $\text{per} A_{\text{scf}}$.

$$\bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_1) + \bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_2) \doteq \frac{\text{per} A_{\text{scf}}}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)}(z_1 + z_2), \quad \bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_1) - \bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_2) \doteq \frac{\det A_{\text{scf}}}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)}(z_1 - z_2). \quad (12)$$

Последнее соотношение в (12) выполняется не только для scf -матриц, но и для любых матриц A (см. например, [12]). Первое соотношение в (12) говорит о появлении на суперплоскости $\mathbb{C}^{1|0}$ новой симметрии, связанной с scf -матрицами и перманентами. Если элементы A_{scf} действительны, то из (12) находим дуальные формулы

$$\text{Re } \bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z) \doteq \frac{\text{per} A_{\text{scf}}}{|cz + d|^2} \cdot \text{Re } z, \quad \text{Im } \bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z) \doteq \frac{\det A_{\text{scf}}}{|cz + d|^2} \cdot \text{Im } z, \quad (13)$$

откуда следует, что можно определить два (!) «единичных круга» на суперплоскости $\mathbb{C}^{1|0}$

$$\text{Re } \bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z) = \text{Re } z \Leftrightarrow |cz + d| = \sqrt{\text{per} A_{\text{scf}}}, \quad \text{Im } \bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z) = \text{Im } z \Leftrightarrow |cz + d| = \sqrt{\det A_{\text{scf}}}. \quad (14)$$

Кроме того, имеются такие полезные в дальнейшем дуальные ($\text{Re} \leftrightarrow \text{Im}$, «+» $\leftrightarrow$ «-») формулы

$$\frac{|\bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_1) + \bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_2)|^2}{\text{Re } \bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_1) \cdot \text{Re } \bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_2)} \doteq \frac{|z_1 + z_2|^2}{\text{Re } z_1 \cdot \text{Re } z_2}, \quad \frac{|\bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_1) - \bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_2)|^2}{\text{Im } \bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_1) \cdot \text{Im } \bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_2)} \doteq \frac{|z_1 - z_2|^2}{\text{Im } z_1 \cdot \text{Im } z_2}. \quad (15)$$

ПРАВЫЕ И ЛЕВЫЕ ДВОЙНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Пусть $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^{1|0}$ — четыре различные точки. Определим не одно (как в [12, 17]), а два двойных доопределенных правых и левых отношения

$$D^\pm(z_1, z_2, z_3, z_4) \doteq \frac{(z_1 \pm z_3)(z_2 \pm z_4)}{(z_1 \pm z_4)(z_2 \pm z_3)}. \quad (16)$$

В (16) прослеживаются такие отличия от стандартных определений [12]: 1) наличие наряду с левым двойным отношением с разностями координат также и правое двойное отношение с их суммами; 2) распространение определений (нового и известного) на нильпотентную область $\mathbb{C}^{1|0}$ с использованием доопределенного знака равенства $\doteq$ (9)–(10). Отметим, что, в частности, $D^\pm(z, 1, 0, \infty) = z$. Относительно дробно-линейных преобразований общего вида левое двойное отношение (16) инвариантно [12, 17] в силу второго соотношения в (12). Для per -отображений выполняются оба соотношения в (12), поэтому как правое, так и левое двойные отношения (16) инвариантны относительно per -отображений

$$D^\pm(\bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_1), \bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_2), \bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_3), \bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_4)) \doteq D^\pm(z_1, z_2, z_3, z_4) = r^\pm. \quad (17)$$

Рассмотрим преобразованное правое двойное отношение с $D^+(\bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_1), \bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_2), \bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_3), \bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_4))$. Для различных сумм преобразованных координат воспользуемся (12) в следующем виде $\bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_i) + \bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_j) \doteq \frac{\text{per} A_{\text{scf}}}{(cz_i + d)(cz_j + d)}(z_i + z_j)$, после чего в числителе и знаменателе (16) сократим на $\text{per} A_{\text{scf}}$ от каждой суммы и на общее выражение $(cz_1 + d)(cz_2 + d)(cz_3 + d)(cz_4 + d)$, тогда получим искомое преобразованное правое двойное отношение $D^+(z_1, z_2, z_3, z_4)$. Поэтому, если для двух четверок точек z_i и w_i левые (или правые) двойные отношения совпадают, то существует per -отображение, которое переводит одну четверку в другую $w_i = \bar{f}_{A_{\text{scf}}}(z_i)$. Следовательно, per -отображения имеют дополнительный инвариант r_+ — правое двойное отношение $D^+(z_1, z_2, z_3, z_4) = r_+$, которое зависит не от конкретного значения координат z_1, z_2, z_3, z_4 , а от их перестановок $z_{\sigma 1}, z_{\sigma 2}, z_{\sigma 3}, z_{\sigma 4}$, $\sigma \in S_4$, где S_4 — группа перестановок множества из 4 элементов. Введем правые и левые функции $p_\sigma^\pm(r_\pm)$ на правых и левых двойных отношениях соответственно по формуле $D^\pm(z_{\sigma 1}, z_{\sigma 2}, z_{\sigma 3}, z_{\sigma 4}) = p_\sigma^\pm(D^\pm(z_1, z_2, z_3, z_4))$. Тогда отображения группы перестановок $\omega^\pm: \sigma \rightarrow p_\sigma^\pm$ являются гомоморфизмами, поскольку для двух последовательных перестановок имеем $p_\pi^\pm[p_\sigma^\pm(D^\pm(z_1, z_2, z_3, z_4))] = p_\pi^\pm[D^\pm(z_{\sigma 1}, z_{\sigma 2}, z_{\sigma 3}, z_{\sigma 4})] = D^\pm(z_{\pi\sigma 1}, z_{\pi\sigma 2}, z_{\pi\sigma 3}, z_{\pi\sigma 4}) = p_{\pi\sigma}^\pm(D^\pm(z_1, z_2, z_3, z_4))$, т. е. $p_\pi^\pm p_\sigma^\pm = p_{\pi\sigma}^\pm$, что и доказывает утверждение. Важно, что образами группы перестановок S_4 при гомоморфизмах ω^+ и ω^- являются две (!) конечные группы, каждая из которых состоит из 6 элементов

$$\omega^+(S_4) = \left\{ r^+, \frac{1}{r^+}, 1 + r^+, \frac{1}{1 + r^+}, \frac{1 + r^+}{r^+}, \frac{r^+}{1 + r^+} \right\}, \quad (18)$$

$$\omega^-(S_4) = \left\{ r^-, \frac{1}{r^-}, 1 - r^-, \frac{1}{1 - r^-}, \frac{1 - r^-}{r^-}, \frac{r^-}{1 - r^-} \right\} \quad (19)$$

при $\epsilon[r^\pm] \neq 0$. Если $\epsilon[r^\pm] = 0$, то количество элементов в (18)–(19) уменьшается до четырех

$$\omega^+(S_4) = \left\{ r^+, 1 + r^+, \frac{1}{1 + r^+}, \frac{r^+}{1 + r^+} \right\}, \quad \omega^-(S_4) = \left\{ r^-, 1 - r^-, \frac{1}{1 - r^-}, \frac{r^-}{1 - r^-} \right\}. \quad (20)$$

Однако другие критические значения инвариантов r^+ и r^- не совпадают между собой. Из (18)–(19) следует, что образы отображений $\omega^\pm$ содержат по 3 элемента, если $1 \pm r^\pm = 1/r^\pm$, т. е. при различных значениях инвариантов $r_{1,2}^+ = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ и $r_{1,2}^- = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ соответственно. Если $r^- = -1$, то говорят, что точки z_1, z_2, z_3, z_4 образуют гармоническую последовательность [12]. Соответствующее значение инварианта r^+ равно $+1$, а такую последовательность точек можно назвать *per-гармонической*. При этом $\omega^+(S_4) = \omega^-(S_4) = \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$.

Отметим, что для четырех точек z_1, z_2, z_3, z_4 , лежащих на единичном круге, как правое $D^+(z_1, z_2, z_3, z_4)$ так и левое $D^-(z_1, z_2, z_3, z_4)$ двойные отношения (для левого двойного отношения см., например, [18]) действительны. На единичном круге полагаем $z_i = e^{it_i}$, $t_i \in \mathbb{R}$, тогда из определений получаем

$$D^+(e^{it_1}, e^{it_2}, e^{it_3}, e^{it_4}) = \frac{\cos(t_1 - t_3) \cos(t_2 - t_4)}{\cos(t_1 - t_4) \cos(t_2 - t_3)}, \quad D^-(e^{it_1}, e^{it_2}, e^{it_3}, e^{it_4}) = \frac{\sin(t_1 - t_3) \sin(t_2 - t_4)}{\sin(t_1 - t_4) \sin(t_2 - t_3)}. \quad (21)$$

и, следовательно, $D^\pm(e^{it_1}, e^{it_2}, e^{it_3}, e^{it_4}) \in \mathbb{R}$. Имеется также *per*-аналог формулы Лаггера [18], позволяющий выразить правое двойное отношение через “угол” ϑ между “прямыми”. Действительно, пусть $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$, тогда из (16) можно получить

$$D^\pm(m_1, m_2, +i, -i) = e^{\pm i\vartheta}, \quad (22)$$

где выражение с нижним знаком представляет собой классическую формулу Лаггера [18]. Если A — матрица, соответствующая дробно-линейному преобразованию $f_A(z)$, то для левого двойного отношения можно вывести формулу $D^-(z, f_A^{\circ 3}(z), f_A^{\circ 2}(z), f_A(z)) = \frac{\operatorname{tr}^2 A}{\det A}$, где $f_A^{\circ n}(z)$ — композиция из n преобразований. Подобная формула для правого двойного отношения (если $A = A_{\text{scf}}$) имеет вид

$$D^+(z, f_{A_{\text{scf}}}^{\circ 3}(z), f_{A_{\text{scf}}}^{\circ 2}(z), f_{A_{\text{scf}}}(z)) = z \left[\operatorname{per} A_{\text{scf}} \left(\operatorname{tr} A_{\text{scf}}^2 + \frac{1}{2} \operatorname{tr}^2 A_{\text{scf}} \right) + \frac{1}{4} \operatorname{tr}^2 A_{\text{scf}} (\operatorname{tr}^2 A_{\text{scf}} - \operatorname{tr} A_{\text{scf}}^2) \right], \quad (23)$$

где $f_{A_{\text{scf}}}^{\circ n}(z)$ — композиция n *per*-отображений. Отметим также, что имеется тесная связь между левым двойным отношением и производной Шварца [19]. Действительно, для любой функции $f(z)$ из (16) получаем

$$D^-(f(z+ta), f(z+tb), f(z+tc), f(z+td)) = D^-(a, b, c, d) \left[1 + \frac{t^2}{6} (a-b)(c-d) S_f^-(z) \right] + O(t^3), \quad (24)$$

где $a, b, c, d, t \in \Lambda_0$, и производная Шварца определяется стандартной формулой

$$S_f^-(z) = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2. \quad (25)$$

Аналогичная формула для правого двойного отношения имеет следующий вид

$$D^+(f(z+ta), f(z+tb), f(z+tc), f(z+td)) = 1 + \frac{t^2}{6} (a-b)(c-d) S_f^+(z) + \frac{t^3}{8} (a-b)(c-d)(a+b+c+d) S_f^{(3)+}(z) + O(t^4), \quad (26)$$

где функции $S_f^+(z)$ и $S_f^{(3)+}(z)$ равны $S_f^+(z) = -\frac{3}{2} \left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right)^2$, $S_f^{(3)+}(z) = -\frac{f'(z)}{f(z)} \left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right)'$. Из сравнения выражения в квадратных скобках (24) и второй строки в (26) следует, что функцию $S_f^+(z)$ можно трактовать как *per*-аналог производной Шварца $S_f^-(z)$ [4, 20].

PER-АНАЛОГ РАССТОЯНИЯ НА ГИПРЕБОЛИЧЕСКОЙ СУПЕРПЛОСКОСТИ

Пусть точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной и той же “геодезической”, определяемой лишь точками z_1, z_2 , в то время, как точки z_3, z_4 лежат на “единичном круге” (14). Тогда можно определить вместо одного [14, 19] два гиперболических расстояния: правое и левое [2, 3]

$$d^\pm(z_1, z_2) \stackrel{\text{def}}{=} \ln D^\pm(z_1, z_2, z_3, z_4). \quad (27)$$

Если точки z_1, z_2 лежат на “единичном круге” (14), то расстояния $d^\pm(z_1, z_2)$ действительны (см. (21) и [18]). Аддитивность расстояния $d^\pm(z_1, z_2)$ (27) обеспечивается мультипликативностью правого и левого двойных отношений $D^\pm(z_1, z_2, z, z') D^\pm(z_2, z_3, z, z') = D^\pm(z_1, z_3, z, z')$. Имеются и другие формулы для расстояния (левого в нашем определении) [12, 19], которые учитывают явно условие $\operatorname{Im} z \geq 0$, определяющее верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}_{im}^2$ [14, 21]. Например, из (15) следует, что выражение [12]

$$d_{im}^-(z_1, z_2) = \operatorname{Arch} \left(1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{\operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2} \right) \quad (28)$$

инвариантно относительно дробно-линейных преобразований. Однако в случае *per*-отображений мы имеем дополнительную инвариантность, что приводит к необходимости рассмотрения “правой полуплоскости” $\mathbb{H}_{re}^2$, определяемой условием $\operatorname{Re} z \geq 0$. Тогда по аналогии с (28) можно определить правое расстояние [2]

$$d_{re}^+(z_1, z_2) = \operatorname{Arch} \left(1 + \frac{|z_1 + z_2|^2}{\operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2} \right), \quad (29)$$

инвариантно относительно per -отображений вследствие (15). В терминах правого двойного отношения $D^-(z_1, z_2, z_3, z_4)$ и правого расстояния $d^+(z_1, z_2)$ (27) (или $d_{re}^+(z_1, z_2)$) можно последовательно построить геометрии гиперболической геометрии [12, 22], тригонометрии [19] на комплексной суперплоскости или в n -мерных комплексных суперпространствах [23].

Такие построения могут играть фундаментальную роль, например, в конформной теории поля [24]. Поскольку четырехточечные корреляционные функции выражаются через инвариантное (левое в нашем определении) двойное отношение, и поэтому наличие дополнительного инварианта может привести к возможным дополнительным вкладам в различные наблюдаемые величины (супер)конформных моделей [24, 25].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дуплій С. А. // *О типах $N = 2$ суперконформных преобразований*. Теор. мат. физ. 1991. Т. 86. № 1. С. 138–143.
2. Duplij S. // *On $N = 4$ super Riemann surfaces and superconformal semigroup*. J. Phys. 1991. V. A24. № 13. P. 3167–3179.
3. Дуплій С. А. // *Полугрупповые методы в суперсимметричных теориях элементарных частиц*. Докторская диссертация. Харьков. Харьковский госуниверситет, math-ph/9910045, 1999. С. 1–483.
4. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1986. 759 с.
5. Минк Х. Перманенты. М.: Мир, 1982. 213 с.
6. Hu S.-J., Kang M. C. // *Efficient generation of the ring of invariants*. J. Algebra. 1996. V. 180. P. 341–363.
7. Laubenbacher R., Swanson I. // *Permanental ideals*. Las Cruces, 1998. 13 p. (Preprint / New Mexico State Univ., math.RA/9812112).
8. Colm J. D. // *$N = 2$ super Riemann surfaces*. Nucl. Phys. 1987. V. B284. № 2. P. 349–364.
9. Schoutens K. // *$O(N)$ -extended superconformal field theory in superspace*. Nucl. Phys. 1988. V. B295. № 4. P. 634–652.
10. Березин Ф. А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: Изд-во МГУ, 1983. 208 с.
11. Nicholson V. A. // *Matrices with permanent equal to one*. Linear Algebra and Appl. 1975. V. 12. P. 185–188.
12. Бердон А. Геометрия дискретных групп. М.: Наука, 1986. 299 с.
13. Schottenloher M. // *A mathematical introduction to conformal field theory*. Lect. Notes Phys. 1997. V. M43. P. 1–142.
14. Цишанг Х., Фогт Э., Колдевай Х. Д. Поверхности и разрывные группы. М.: Наука, 1988. 684 с.
15. Farkas H., Kra I. Riemann Surfaces. Berlin. Springer-Verlag, 1980. 237 p.
16. Knizhnik V. G. Multiloop Amplitudes in the Theory of Quantum Strings and Complex Geometry. London. Harwood Academic, 1989. 78 p.
17. Siegel C. Topics in Complex Function Theory. New York. Wiley, 1971. 371 p.
18. Лелон-Ферран Ж. Основания геометрии. М.: Мир, 1989. 311 с.
19. Альфорс Л. Преобразования Мёбиуса в многомерном пространстве. М.: Мир, 1986. 110 с.
20. Duval C., Ovsienko V. // *Lorentzian worldlines and Schwarzian derivative*. Marseille, 1998. 4 p. (Preprint / Centre de Phys. Theor.; CPT-98/P.3691, math.DG/9809062).
21. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987. 735 с.
22. Пятецкий-Шапиро И. И. Геометрия классических областей и теория автоморфных функций. М.: Физматгиз, 1961. 191 с.
23. Апанасов Б. Н. Геометрия дискретных групп и многообразий. М.: Наука, 1991. 426 с.
24. Di Francesco P., Mathieu P., Sénéchal D. Conformal Field Theory. Berlin. Springer-Verlag, 1997. 890 p.
25. Ketov S. V. Conformal Field Theory. Singapore. World Sci., 1995. 486 p.

NONINVERTIBILITY AND ADDITIONAL SYMMETRIES ON HYPERBIC SUPERPLANE

S. A. Duplij

Nuclear Physics Laboratory, Department of Physics and Technology
Kharkov State University, Kharkov 310077, Ukraine

Noninvertible properties of supermatrices containing even nilpotent elements and zero divisors which appear in N -extended superconformal geometry are investigated. The duality relations between permanent and determinant and between minors and algebraic complements are found. A new formula for inverse matrix in terms of permanents and minors is proposed. Noninvertible fractional-linear transformations of the superplane $\mathbb{C}^{1|0}$ are considered in addition to the standard invertible ones, and a new symmetry is introduced for the former. The noninvertible hyperbolic geometry on the superplane is constructed, in which two invariant anharmonic ratios and correspondingly two distances exist, an analog of the Schwarzian derivative and some other formulas are found.

KEY WORDS: nilpotence, permanent, fractional-linear transformation, anharmonic ratio, hyperbolic geometry

УДК 530.145

СПИНОВАЯ ЧАСТИЦА С ИНДЕКСНЫМ БИСПИНОРОМ

В.Г.Зима, С.А.Федорук

Харьковский национальный университет им.В.Каразина, 310077 Харьков, пл. Свободы, 4
Украинская инженерно-педагогическая академия, 310003 Харьков, ул. Университетская, 16

Поступила в редакцию 20 ноября 1999 г.

Построена модель свободной спиновой частицы, для описания спина которой используется коммутирующий биспинор. Рассмотрены дискретные пространственно-временные симметрии модели. Проведено ковариантное первичное квантование. Состояния спектра модели описываются полями Баргмана-Вигнера произвольных спинов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: спиновая частица, теории со связями, квантование, дискретные симметрии, поля Баргмана-Вигнера.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Проблемы в существующих подходах к описанию спина делают актуальным поиск новых моделей спиновой частицы. Среди наиболее важных выделяются такие, в которых рассмотрение произвольных спинов единообразно в соответствии со струнной концепцией элементарных частиц. В работе [1] предложена модель спиновой частицы, для описания спина которой используются коммутирующие переменные – координаты индексного вейлевского спинора. В этом подходе описание едино для массивных и безмассовых частиц произвольного спина. Для оценки эффективности используемого метода в работах [2,3] проведено вычисление амплитуды перехода массивной спиновой частицы. В итоге получен пропагатор Вайнберга частицы произвольного спина, записанный в безиндексной форме с помощью индексного спинора. Иное применение коммутирующих вейлевских спиноров в моделях спиновой частицы реализуется в твисторном или гармоническом подходе, широко используемом при описании безмассовых частиц (см., например, [4-6] и имеющиеся там ссылки). Однако [3], обобщение твисторно-гармонического подхода на случай массивной спиновой (супер)частицы нуждается в явном или неявном использовании концепции индексного спинора.

Описание взаимодействий спиновой частицы требует создания формулировок с явной инвариантностью относительно пространственно-временных инверсий и зарядового сопряжения. Очевидно, это может быть достигнуто в модели с индексным биспинором, преобразующемся по неприводимому представлению (точнее, вместе с сопряженным – по сопредставлениям) квантовомеханической группы Пуанкаре с отражениями. Здесь предложена такая модель для свободной частицы, конечно выходящая за рамки конструкции [1] с единственным вейлевским спинором.

КЛАССИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА И СВЯЗИ МОДЕЛИ

Примем, что эволюция спиновой частицы с коммутирующим индексным биспинором определяется действием $A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L d\tau$ с лагранжианом

$$L = p\dot{x} - im(\bar{\psi}\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\psi) - \frac{e}{2}(p^2 + m^2) - \lambda(\bar{\psi}(\hat{p} + m)\psi - j), \quad (1)$$

где

$$\omega_\mu \equiv \dot{x}_\mu d\tau \equiv dx_\mu - i\bar{\psi}\gamma_\mu d\psi + id\bar{\psi}\gamma_\mu\psi. \quad (2)$$

Здесь x, p — пространственно-временные 4-векторы, $\hat{p} \equiv p^\mu \gamma_\mu$; ψ_α , $\alpha = 1, \dots, 4$ — коммутирующий биспинор, $\bar{\psi}^\alpha$ — его дираковски сопряженный, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$. Переменные e, λ — множители Лагранжа для массовой $p^2 + m^2 \approx 0$ и спиновой $\bar{\psi}(\hat{p} + m)\psi - j \approx 0$ связей. Константы $|m|$ и $|j|$ — соответственно масса и “классический спин” частицы. Знак m в общем произволен и определяет компоненты биспинора, выживающие в системе покоя (спиральность); знак j определяет знак энергии частиц до квантования. Ниже, для определенности, считаем массу m неотрицательной. Нами используются следующие соглашения: метрика $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$, алгебра матриц Дирака $(\gamma_\mu)_\alpha^\beta$ имеет вид $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\eta_{\mu\nu}$.

В кинетическом члене

$$L_{kin} = p\dot{x} - im(\bar{\psi}\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\psi) = p\dot{x} - i\bar{\psi}(\hat{p} + m)\dot{\psi} + i\dot{\bar{\psi}}(\hat{p} + m)\psi,$$

как и в спинной связи, имеется проектор $(\hat{p} + m)$, оставляющий на массовой поверхности лишь половину компонент спинора ψ . Именно, в стандартном представлении для γ -матриц, когда $\gamma_0 = \text{diag}(1_2, -1_2)$, в системе покоя, где $p^\mu = (m; 0, 0, 0)$, последние две компоненты спинора ψ исключаются из действия указанным проектором $(\hat{p} + m)$ и являются чисто калибровочными. В гамильтоновом формализме это обстоятельство отражается в наличии связей 1-го рода среди спинорных. Для остающихся в системе покоя компонент ψ кинетический член осцилляторного вида, а спинная связь ограничивает спинорный сектор конфигурационного пространства до группового многообразия $SU(2)$. Таким образом, по числу и характеру степеней свободы массивной частицы, связанных со спинорными переменными, модель согласуется моделью [1], описывающей спин посредством коммутирующего вейлевского спинора.

Спинная связь, заложенная в действие, определяет после квантования спин частицы. Нетеровскими зарядами лоренцевских преобразований $\delta x^\mu = a^{\mu\nu} x_\nu$, $\delta p^\mu = a^{\mu\nu} p_\nu$, $\delta \psi = -\frac{1}{4} a^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} \psi$, $\delta \bar{\psi} = \frac{1}{4} a^{\mu\nu} \bar{\psi} \gamma_{\mu\nu}$ для действия с лагранжианом (1) являются компоненты тензора углового момента $l_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu - \frac{1}{2} \bar{\psi} (\hat{p} + m) \gamma_{\mu\nu} \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma_{\mu\nu} (\hat{p} + m) \psi$. Квадрат $w^2 = w^\mu w_\mu = -\frac{1}{2} p^2 l^{\mu\nu} l_{\mu\nu} + l^{\mu\nu} p_\nu l_{\mu\rho} p^\rho$ классического вектора Паули-Любанского $w^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p_\nu l_{\lambda\rho}$ на массовой поверхности $p^2 + m^2 \approx 0$ равен $w^2 = m^2 [\bar{\psi} (\hat{p} + m) \psi]^2$, так что с учетом спинной связи $\bar{\psi} (\hat{p} + m) \psi - j \approx 0$ имеем $w^2 = m^2 j^2$. Отметим, что w^2/m^2 равен квадрату нетеровского заряда $q = \bar{\psi} (\hat{p} + m) \psi$ для фазовых преобразований $\delta \psi = i \frac{a}{2} \psi$, $\delta \bar{\psi} = -i \frac{a}{2} \bar{\psi}$. Более того, модель инвариантна также при локальных $\alpha(\tau)$ фазовых преобразованиях $\delta L = (q\alpha)' = j\dot{\alpha}$ для надлежащих граничных условий.

В отличие от рассмотренной в [1], построенная здесь модель спинной частицы, использующая в качестве спинных переменных не вейлевский спинор, а биспинор, обладает явной инвариантностью относительно дискретных пространственно-временных симметрий.

Пространственное отражение I_s — это преобразование

$$I_s: \quad x^\mu = (x^0, \vec{x}) \rightarrow (x^0, -\vec{x}), \quad p^\mu = (p^0, \vec{p}) \rightarrow (p^0, -\vec{p}); \quad \psi \rightarrow \eta_s \gamma_0 \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\eta}_s \bar{\psi} \gamma_0.$$

Инвариантность $\bar{\psi} \psi = \text{inv}$ соответствует $|\eta_s| = 1$. На спинорах $I_s^2 = -1$, так что $\eta_s = \pm i$.

Временное отражение в квантовой теории ассоциируется с перестановкой начального и конечного состояний, чему на классическом уровне отвечает перестановка конечных значений параметра эволюции: $\tau_i \leftrightarrow \tau_f$. Действие временной инверсии на пространственно-временные фазовые переменные и спиноры

$$I_t: \quad x^\mu = (x^0, \vec{x}) \rightarrow (-x^0, \vec{x}), \quad p^\mu = (p^0, \vec{p}) \rightarrow (p^0, -\vec{p}); \quad \psi \rightarrow \eta_t \gamma_0 \gamma_5 C^{-1} \bar{\psi}^T, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\eta}_t \psi^T C \gamma_5 \gamma_0,$$

где $\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. Здесь матрица $C^{\alpha\beta}$ — унитарная матрица зарядового сопряжения, которая вместе с обратной матрицей $C_{\alpha\beta}^{-1}$ позволяет поднимать и опускать дираковский индекс. В $d = 4$ по определению $\gamma_\mu^T = -C\gamma_\mu C^{-1}$, откуда следует антисимметричность $C^T = -C$. Здесь $|\eta_t| = 1$, так что $\bar{\psi} \psi = \text{inv}$. На спинорах $I_t^2 = -1$.

При зарядовом сопряжении

$$I_c: \quad \psi \rightarrow \eta_c C^{-1} \bar{\psi}^T, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\eta}_c \psi^T C,$$

где $|\eta_c| = 1$, исходный лагранжиан переходит в лагранжиан с $m \rightarrow -m$ и $i \rightarrow -i$, т. е. I_c меняет местами «частицы» и «античастицы»; $I_c^2 = 1$.

Каноническими переменными, описывающими движение спинной частицы, являются координаты $x^A = (x^\mu, \psi_\alpha, \bar{\psi}^\alpha)$ и сопряженные им импульсы $p_{zA} = (p_\mu, \bar{p}_{\psi^\alpha}, p_{\psi_\alpha})$, скобки Пуассона которых $\{x^\mu, p_\nu\} = \delta^\mu_\nu$, $\{\psi_\alpha, \bar{p}_{\psi^\beta}\} = \delta_\alpha^\beta$, $\{\bar{\psi}^\alpha, p_{\psi_\beta}\} = \delta^\alpha_\beta$. Импульсы для переменных e, λ в лагранжиане (1) равны нулю (первичные связи 1-го рода), что приводит к естественной интерпретации e и λ как лагранжевых множителей для массовой и спинной связей. Для переменных p^μ в (1) получаем пары первичных векторных связей 2-го рода $p_\rho{}^\mu \approx 0$ и $p_x{}^\mu - p^\mu \approx 0$. Введение скобки Дирака исключает $p_p = 0$ и отождествляет p с каноническим импульсом для x : $p_x = p$, сохраняя алгебру скобок для остальных канонических переменных.

Полный гамильтониан

$$H = \frac{e}{2} (p^2 + m^2) + \lambda [\bar{\psi} (\hat{p} + m) \psi - j] + \bar{d}_\psi \lambda_\psi + \bar{\lambda}_\psi d_\psi,$$

где $\lambda_{\psi\alpha}$, $\bar{\lambda}_{\psi^\alpha}$ — множители Лагранжа для первичных спинорных связей $\bar{d}_\psi \equiv -i\bar{p}_\psi + \bar{\psi}(\hat{p} + m) \approx 0$ и $d_\psi \equiv ip_\psi + (\hat{p} + m)\psi \approx 0$. Условия сохранения во времени этих связей и спинной связи

$$\bar{\psi}(\hat{p} + m)\psi - j \approx 0 \tag{3}$$

приводят к условиям на лагранжевы множители

$$(\hat{p} + m)(\lambda\psi + 2\lambda_\psi) = 0, \quad (\lambda\bar{\psi} + 2\bar{\lambda}_\psi)(\hat{p} + m) = 0 \quad \bar{\lambda}_\psi(\hat{p} + m)\psi = \bar{\psi}(\hat{p} + m)\lambda_\psi.$$

Последнее равенство, очевидно, является следствием первых двух. Общее решение этих условий на поверхности $p^2 + m^2 \approx 0$ дается равенствами

$$\lambda_\psi = -\frac{1}{2}\lambda\psi + (\hat{p} - m)\nu_\psi, \quad \bar{\lambda}_\psi = -\frac{1}{2}\lambda\bar{\psi} + \bar{\nu}_\psi(\hat{p} - m),$$

где $\nu_{\psi\alpha}, \bar{\nu}_{\psi}^{\alpha}$ — произвольные спинорные функции τ . В итоге, полный гамильтониан, описывающий спинную частицу (1), принимает вид

$$H = eT + \lambda S + \bar{d}_\psi(\hat{p} - m)\nu_\psi + \bar{\nu}_\psi(\hat{p} - m)d_\psi, \quad (4)$$

где

$$T \equiv \frac{1}{2}(p^2 + m^2) \approx 0, \quad (5)$$

$$S \equiv \frac{i}{2}(\bar{p}_\psi\psi - \bar{\psi}p_\psi) - j \approx 0 \quad (6)$$

— массовая и спиновая связи. Система подчинена также уже упомянутым спинорным связям

$$\bar{d}_\psi \equiv -i\bar{p}_\psi + \bar{\psi}(\hat{p} + m) \approx 0, \quad d_\psi \equiv ip_\psi + (\hat{p} + m)\psi \approx 0. \quad (7)$$

Отметим, что на поверхности спинорных связей (7) стандартная спиновая связь (6) эквивалентна заложенной в действие спиновой связи (3):

$$\bar{\psi}(\hat{p} + m)\psi - j = S + \frac{1}{2}(\bar{d}_\psi\psi + \bar{\psi}d_\psi).$$

Ненулевые скобки Пуассона связей спиновой частицы

$$\{S, \bar{d}_\psi\} = \frac{i}{2}\bar{d}_\psi, \quad \{S, d_\psi\} = -\frac{i}{2}d_\psi, \quad \{d_\psi, \bar{d}_\psi\} = -2i(\hat{p} + m). \quad (8)$$

Следовательно, массовая (5) и спиновая (6) связи — это связи 1-го рода. Матрица $(\hat{p} + m)$ в правой части коммутатора спинорных связей сингулярна на массовой поверхности (5). Ее ранг равен двум, что легко видеть в системе покоя, когда в стандартном представлении для γ -матриц $\hat{p} + m = \text{diag}(2m \cdot 1_2, 0 \cdot 1_2)$. Поэтому, спинорные связи являются смесью связей 1-го и 2-го родов: половина из них — 1-го рода, а другая половина — 2-го.

Полный гамильтониан репараметризационно-инвариантной системы — линейная комбинация связей 1-го рода. Поэтому из (4) видно, что связи

$$\bar{d}_\psi(\hat{p} - m) \approx 0, \quad (\hat{p} - m)d_\psi \approx 0 \quad (9)$$

являются связями 1-го рода, что подтверждается рассмотрением алгебры (8). Применение второго проектора $(\hat{p} + m)$ к спинорным связям (7),

$$\bar{d}_\psi(\hat{p} + m) \approx 0, \quad (\hat{p} + m)d_\psi \approx 0, \quad (10)$$

дает связи 2-го рода. Выделенные таким способом ковариантные связи 1-го и 2-го рода являются собственными векторами проекторов $(\hat{p} \pm m)$, удовлетворяющих соотношениям $(\hat{p} \pm m)(\hat{p} \mp m) = -(p^2 + m^2)$, $(\hat{p} \pm m)(\hat{p} \pm m) = -(p^2 + m^2) \pm 2m(\hat{p} \pm m)$.

Для последующего анализа удобно дополнительно спроектировать связи (9), (10) на спиноры $\bar{\psi}^\alpha$ и $\bar{\psi}_c^\alpha \equiv (\psi^T C)^\alpha$. Полученные таким образом связи (по две на каждую из проекций (9), (10))

$$g^{(\pm)} \equiv \bar{\psi}(\hat{p} \pm m)d_\psi \approx 0, \quad \bar{g}^{(\pm)} \equiv \overline{(g^{(\pm)})} = \bar{d}_\psi(\hat{p} \pm m)\psi \approx 0,$$

$$f^{(\pm)} \equiv \bar{\psi}_c(\hat{p} \pm m)d_\psi \approx 0, \quad \bar{f}^{(\pm)} \equiv \overline{(f^{(\pm)})} = \bar{d}_\psi(\hat{p} \pm m)\psi_c \approx 0$$

удовлетворяют алгебре скобок (приведены ненулевые скобки, где отмечены ненулевые на поверхности связей слагаемые)

$$\begin{aligned} \{g^{(-)}, \bar{g}^{(\pm)}\} &= \{g^{(\pm)}, \bar{g}^{(-)}\} = 4i\bar{\psi}(\hat{p} \pm m)\psi \cdot T, \quad \{g^{(+)}, \bar{g}^{(+)}\} = 4i\bar{\psi}(\hat{p} + 3m)\psi \cdot T - \underbrace{8im^2\bar{\psi}(\hat{p} + m)\psi}_{\neq 0}, \\ \{f^{(\pm)}, \bar{f}^{(\mp)}\} &= -2i[\bar{\psi}d_\psi + \bar{d}_\psi\psi - 2\bar{\psi}(\hat{p} - m)\psi] \cdot T \pm 2im(g^{(\pm)} - \bar{g}^{(\mp)}), \\ \{f^{(-)}, \bar{f}^{(-)}\} &= -2i[\bar{\psi}d_\psi + \bar{d}_\psi\psi - 2\bar{\psi}(\hat{p} + m)\psi] \cdot T, \\ \{f^{(+)}, \bar{f}^{(+)}\} &= -2i[\bar{\psi}d_\psi + \bar{d}_\psi\psi - 2\bar{\psi}(\hat{p} - 3m)\psi] \cdot T - \underbrace{8im^2\bar{\psi}(\hat{p} - m)\psi}_{\neq 0}, \\ \{g^{(\pm)}, f^{(\pm)}\} &= -2i\bar{\psi}_c d_\psi \cdot T \pm 2im \cdot f^{(\pm)}, \quad \{g^{(\pm)}, f^{(\mp)}\} = -2i\bar{\psi}_c d_\psi \cdot T, \\ \{\bar{g}^{(\pm)}, \bar{f}^{(\pm)}\} &= 2i\bar{d}_\psi \psi_c \cdot T \mp 2im \cdot \bar{f}^{(\pm)}, \quad \{\bar{g}^{(\pm)}, \bar{f}^{(\mp)}\} = 2i\bar{d}_\psi \psi_c \cdot T, \\ \{g^{(\pm)}, \bar{f}^{(\mp)}\} &= 2i[\bar{\psi}\hat{p}\psi_c - \bar{d}_\psi\psi_c] \cdot T \mp 2im \cdot \bar{f}^{(\mp)}, \quad \{g^{(-)}, \bar{f}^{(-)}\} = 2i[\bar{\psi}\hat{p}\psi_c - \bar{d}_\psi\psi_c] \cdot T, \\ \{g^{(+)}, \bar{f}^{(+)}\} &= 2i[\bar{\psi}\hat{p}\psi_c - \bar{d}_\psi\psi_c] \cdot T - \underbrace{8im^2\bar{\psi}\hat{p}\psi_c}_{\neq 0}, \\ \{f^{(\pm)}, \bar{g}^{(\mp)}\} &= 2i[\bar{\psi}_c\hat{p}\psi - \bar{\psi}_c d_\psi] \cdot T \pm 2im \cdot f^{(\pm)}, \quad \{f^{(-)}, \bar{g}^{(-)}\} = 2i[\bar{\psi}_c\hat{p}\psi - \bar{\psi}_c d_\psi] \cdot T, \\ \{f^{(+)}, \bar{g}^{(+)}\} &= 2i[\bar{\psi}_c\hat{p}\psi - \bar{\psi}_c d_\psi] \cdot T - \underbrace{8im^2\bar{\psi}_c\hat{p}\psi}_{\neq 0}. \end{aligned}$$

Ненулевые на поверхности связей слагаемые есть только в правой части скобок связей $g^{(+)}$, $\bar{g}^{(+)}$, $f^{(+)}$ и $\bar{f}^{(+)}$, которые являются связями 2-го рода. Связи $g^{(-)}$, $\bar{g}^{(-)}$, $f^{(-)}$ и $\bar{f}^{(-)}$ — связи 1-го рода.

КОВАРИАНТНОЕ ОПЕРАТОРНОЕ КВАНТОВАНИЕ

Квантование проведем по Гупте-Блейлеру, накладывая на волновую функцию все связи 1-го рода и половину находящихся в инволюции связей 2-го рода: $g^{(+)}$ или $\bar{g}^{(+)}$ и $f^{(+)}$ или $\bar{f}^{(+)}$. Но из вида скобок $\{f^{(\pm)}, \bar{f}^{(\mp)}\}$ и $\{g^{(\pm)}, \bar{f}^{(\mp)}\}$ следует, что вместе с $f^{(+)}$ надо наложить именно $g^{(+)}$. Другой возможный выбор — это связи $\bar{f}^{(+)}$ и $\bar{g}^{(+)}$. Таким образом, выделяются два возможных набора накладываемых спинорных связей — это связи 1-го рода $g^{(-)}$, $\bar{g}^{(-)}$, $f^{(-)}$, $\bar{f}^{(-)}$ и связи 2-го рода

$$\bar{g}^{(+)}, \bar{f}^{(+)} \quad (\text{антиголоморфный выбор})$$

или

$$g^{(+)}, f^{(+)} \quad (\text{голоморфный выбор}).$$

Но четыре связи $\bar{g}^{(\pm)}$, $\bar{f}^{(\pm)}$ в совокупности эквивалентны спинорной связи $\bar{d}_\psi$, тогда как $g^{(\pm)}$, $f^{(\pm)}$ — связи d_ψ . Связи $g^{(-)}$, $f^{(-)}$ эквивалентны связи $(\hat{p} + m)d_\psi$, тогда как $\bar{g}^{(-)}$, $\bar{f}^{(-)}$ связи $\bar{d}_\psi(\hat{p} - m)$. Поэтому, на волновую функцию накладываются квантовые аналоги следующих связей:

$$\bar{d}_\psi, (\hat{p} + m)d_\psi \quad (\text{антиголоморфный выбор})$$

или

$$d_\psi, \bar{d}_\psi(\hat{p} - m) \quad (\text{голоморфный выбор}).$$

Кроме этих связей, волновая функция подчинена массовой T и спиновой S связям.

Квантование будем проводить в координатном по спинорным переменным представлении, где операторы спинорных импульсов реализуются как операторы дифференцирования: $\bar{p}_\psi = -i\partial/\partial\psi$, $p_\psi = -i\partial/\partial\bar{\psi}$. Рассмотрим сначала антиголоморфный случай. Тогда

$$(p^2 + m^2)\Psi = 0, \quad (11)$$

$$(S_\psi - s)\Psi = [\frac{1}{2}(\psi\frac{\partial}{\partial\psi} - \bar{\psi}\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}}) - s]\Psi = 0, \quad (12)$$

$$\bar{D}_\psi \Psi = 0, \quad (13)$$

$$(\hat{p} - m) D_\psi \Psi = 0. \quad (14)$$

Здесь $\bar{D}_\psi = -\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} + \bar{\psi}(\hat{p} + m)$, $D_\psi = \frac{\partial}{\partial \psi} + (\hat{p} + m)\psi$ — квантовые аналоги спинорных связей (7). Константа s в уравнении (12) равняется константе j , перенормированной константами упорядочения. Решение уравнений связей ищем в виде

$$\Psi = \exp\{\bar{\psi}(\hat{p} + m)\psi\} \Phi. \quad (15)$$

Тогда уравнение (13) становится условием антиголоморфности Φ по ψ : $\frac{\partial}{\partial \psi} \Phi = 0$, а уравнение (12) — условием однородности Φ по $\bar{\psi}$:

$$(\bar{\psi} \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} + 2s) \Phi = 0.$$

Из требования однозначности и несингулярности волновой функции следует, что константа является полупелой $2s \in \mathbb{Z}$ и неположительной $s \leq 0$ в антиголоморфном случае. Таким образом,

$$\Phi = \bar{\psi}^{\alpha_1} \dots \bar{\psi}^{\alpha_{2|s|}} \phi_{\alpha_1 \dots \alpha_{2|s|}}, \quad (16)$$

где симметричный дираковский спинор $\phi_{\alpha_1 \dots \alpha_{2|s|}}$ ранга $2|s|$ зависит лишь от пространственно-временных переменных. Симметричность по спинорным индексам достигается автоматически за счет свертки с коммүтирующим спинором $\bar{\psi}$, играющим роль индексного спинора. Индексное поле (16) удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона (11) и, вследствие (14), уравнению

$$(\hat{p} - m) \frac{\partial}{\partial \psi} \Phi = 0,$$

которое для спинорного пространственно-временного поля приводит к уравнению Дирака

$$(\hat{p} - m)_\alpha^\beta \phi_{\beta \alpha_2 \dots \alpha_{2|s|}} = 0.$$

Таким образом, поле $\phi_{\alpha_1 \dots \alpha_{2|s|}}$, определяющее спектр частицы, является полем Баргмана-Вигнера массивной частицы спина $|s|$.

В голоморфном случае волновая функция физического состояния определяется уравнениями

$$\Psi(p^2 + m^2) = 0, \quad (17)$$

$$\Psi(S_\psi - s) = \Psi\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \psi} \psi - \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} \bar{\psi}\right) - s\right] = 0, \quad (18)$$

$$\Psi D_\psi = 0, \quad (19)$$

$$\Psi \bar{D}_\psi (\hat{p} - m) = 0, \quad (20)$$

где все операторы дифференцирования действуют влево. Решение уравнений (19) — волновая функция

$$\Psi = \exp\{-\bar{\psi}(\hat{p} + m)\psi\} \Phi, \quad (21)$$

где Φ — голоморфная по ψ функция, вследствие (18) однородная степени $2s$. Поэтому $s \geq 0$ и $2s \in \mathbb{Z}$ из требований несингулярности и однозначности волновой функции. Таким образом,

$$\Phi = \chi^{\alpha_1 \dots \alpha_{2s}} \psi_{\alpha_1} \dots \psi_{\alpha_{2s}}, \quad (22)$$

где $\chi^{\alpha_1 \dots \alpha_{2s}}$ — симметричный дираковский спинор, зависящий лишь от пространственно-временных переменных. Индексное поле (22) удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона и, вследствие (20), уравнению

$$\Phi \frac{\partial}{\partial \psi} (\hat{p} - m) \psi = 0,$$

которое дает уравнение Дирака

$$\chi^{\beta \alpha_2 \dots \alpha_{2s}} (\hat{p} - m)_\beta^\alpha = 0.$$

Как и в антиголоморфном случае, имеем в спектре поле Баргмана-Вигнера массивной частицы, спин которой равен s .

ВЫВОДЫ

Полученный в результате первичного операторного квантования спектр предложенной модели спиновой частицы с коммутирующим индексным биспинором в массивном случае составляют частицы произвольного фиксированного спина. Как волновую функцию частицы спектра можно взять безиндексное поле Баргмана-Вигнера, где коммутирующий биспинор играет роль индексной переменной. Использование в качестве спиновой переменной биспинора позволило достичь явной инвариантности относительно дискретных симметрий после квантования: поведение поля Баргмана-Вигнера при пространственно-временных инверсиях и зарядовом сопряжении хорошо известны.

Отметим, что описание в терминах полей Баргмана-Вигнера равносильно описанию в терминах полей Рариты-Швингера и некоторых вспомогательных полей. Так, в случае спина $3/2$ (массивное гравитино)

$$\phi_{\alpha\beta\gamma} = \psi_{\alpha\mu}(\gamma^\mu C^{-1})_{\beta\gamma} + \frac{1}{2}\psi_{\alpha\mu\nu}(\gamma^{\mu\nu} C^{-1})_{\beta\gamma},$$

где $\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$, так что из написанного тождества имеем

$$\gamma^\mu \psi_\mu = 0, \quad \gamma^\mu \psi_{\mu\nu} = \psi_\nu.$$

Уравнения Дирака для $\phi_{\alpha\beta\gamma}$ заменяются системой уравнений

$$(\hat{p} - m)\psi_\mu = 0, \quad p^\nu \psi_{\mu\nu} = m\psi_\mu, \quad p_\mu \psi_\nu - p_\nu \psi_\mu = m\psi_{\mu\nu}.$$

Таким образом, спин-тензорное вспомогательное поле $\psi_{\alpha\mu\nu}$ выражается через поле Рариты-Швингера $\psi_{\alpha\mu}$, удовлетворяющее уравнениям

$$(\hat{p} - m)\psi_\mu = 0, \quad p^\mu \psi_\mu = 0, \quad \gamma^\mu \psi_\mu = 0.$$

Построение модели с индексным биспинором, обладающей явными дискретными пространственно-временными симметриями, и нахождение ее спектра посредством первичного квантования открывает дополнительные возможности для формулировки теории со взаимодействием и позволяет надеяться на полезные приложения развитого формализма в теориях точечных и протяженных (супер)объектов, в теориях супергравитации и в M -теории.

Авторы выражают благодарность Бандосу И.А., Нурмагамбетову А.Ю., Пелетминскому С.В., Сорокину Д.П., Фомину П.И. за проявленный интерес к предложенному подходу описания спина с помощью индексного спинора. Авторы благодарят также сотрудников кафедры общей физики ФТФ Харьковского университета за помощь в компьютерной обработке материалов и доброжелательное отношение.

Работа является частью исследований в рамках темы 2.5.1/52 фонда ГКНТ Украины по программе фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зима В.Г., Федорук С.А. // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т.61. С.241-246
2. Зима В.Г., Федорук С.А. // Вісник Харківського університету. Серія фізична "Ядра, частинки, поля". 1999. N.421. С.101-113
3. Zima V.G., Fedoruk S.O. // Classical and Quantum Gravity. 1999. V.16. P.3653-3671
4. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. Т. 2. М. Мир. 1988. 572 с.
5. Зима В.Г., Федорук С.А. // ТМФ. 1995. Т.102. С.420-445
6. Bandos I.A., Zheltukhin A.A. // Classical and Quantum Gravity. 1995. V.12. P.609-626

SPINNING PARTICLE WITH INDEX BISPINOR

V.G. Zima, S.O. Fedoruk

Kharkiv National University, 4 Svoboda Sq., Kharkiv, UA - 310077, Ukraine

Ukrainian Engineering Pedagogics Academy, 16 Universitetska Str., Kharkiv, UA - 310003, Ukraine

It is proposed the model of the free spinning particle with commuting bispinor for description of the spin. The discrete space-time symmetries of the model are considered. The first covariant quantization has been carried out. The spectrum states of the model are described Bargmann-Wigner fields of arbitrary spins.

KEY WORDS: spinning particle, constrained theories, quantization, discrete symmetries, Bargmann-Wigner fields.

УДК 537.81:51.001

ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ, ПРИНЦИП ГЕРЦА И МАГНИТНАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЯМА

С.С. Зуб

Государственный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского "ХАН",
61070, Украина, г. Харьков, ул. Чкалова 17.
Поступила в редакцию 25 ноября 1999 г.

В работе рассматриваются особенности применения лагранжеев формализма для описания электромеханических систем, состоящих из постоянных магнитов и сверхпроводящих катушек. Вопрос о природе магнитной энергии взаимодействия тел решается в полном соответствии с принципом Герца о кинетическом происхождении потенциальной энергии. Впервые получено полностью аналитическое выражение для магнитной потенциальной ямы (МПЯ) на примере системы четырех диполей в однородном магнитном поле.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: лагранжев формализм, устойчивость, математическая модель, сверхпроводимость, МПЯ.

Известные методы описания статики и динамики магнитно взаимодействующих тел оказываются недостаточными при рассмотрении ряда интересных задач, например, при исследовании устойчивости в задачах магнитной левитации и проблемы существования МПЯ.

В работе [1] дано изложение модифицированного лагранжеев формализма для двух тел, одно из которых является сверхпроводящим контуром, а второе постоянным магнитом. В рамках этого формализма получена потенциальная энергия магнитного взаимодействия и дано полное решение задачи о левитации магнитного диполя в поле сверхпроводящего кольца. Ранее было показано [2, с.47-49], что МПЯ не может быть реализована в системе двух контуров. Распространение этого подхода на общий случай системы многих контуров, который, в частности, необходим для решения задачи о МПЯ остается актуальной задачей, решению которой и посвящена данная работа.

Известно, что уравнения для квазистационарных цепей могут быть рассмотрены с точки зрения лагранжеев подхода к динамике [3; 4, с.783-787]. Выбранный для исследования МПЯ класс моделей [5-8] включает в себя идеально проводящие контуры и магнитные диполи, однако именно такие модели обладают особенностями, которые плохо учитываются имеющимся вариантом лагранжеев формализма.

Прежде всего постоянство магнитного момента диполя при его моделировании токовой петлей предполагает постоянство тока в петле. В контексте электромеханической аналогии требование постоянства тока естественно описать некоторой реакцией связи. Для использования лагранжеев подхода к описанию такой системы необходимо учесть связи этого типа для исключения зависимых переменных.

Кроме того, как уже отмечалось, присутствие в системе идеально проводящих контуров приводит к цикличности соответствующей электрической координаты. Тем не менее, соответствующие циклическим координатам скорости (токи) зависят от времени и явно присутствуют в базовых соотношениях известного выше лагранжеев формализма [4, с.783-787].

Основным требованием к развиваемому ниже лагранжеев формализму является совпадение лагранжеев уравнений движения с известными уравнениями квазистационарных цепей [4 с.783-787; 9 с.278-308] в применении к рассматриваемому классу модельных тел [5-8].

Общий подход к выводу уравнений Лагранжа в независимых координатах [10, с.47-66] предполагает, во-первых, выражение кинетической энергии через независимые переменные, во-вторых, проектирование сил на пространство, ограниченное связями (соответствующие проекции Q_i называют обобщенными силами). При этом уравнения Лагранжа имеют вид [10, с.49]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i. \quad (1)$$

Рассмотрим систему n контуров, которые как и ранее будем нумеровать буквами $i, j, k, l = 1, \dots, n$ из них v контуров идеально проводящие, а $n - v$ с заданной величиной тока. Контуров первого типа будем нумеровать малыми греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, v$, а второго типа первыми малыми буквами латинского алфавита $a, b, c = (v + 1), \dots, n$.

Обозначим через q_α заряд, протекающий через фиксированное сечение идеально проводящего контура. т.е. $q_\alpha = \int I_\alpha dt$, а q_a аналогичная величина для контура с заданным током, т.е. $q_a = \int I_a dt = I_a t$.

Будем полагать, что механическое движение катушек (контуров) без учета магнитного взаимодействия, т.е. при нулевых токах, уже описывается набором независимых переменных Лагранжа X_I , где большие латинские буквы пробегает значения $I, J, K, L = 1, \dots, M$.

В выбранных переменных полная кинетическая энергия системы имеет вид:

$$T = T_{\text{мех}} + T_{\text{электр}}, \quad (2)$$

где $T_{\text{мех}}$ - кинетическая энергия механического движения катушек, зависящая от X и dX/dt , а $T_{\text{электр}}$ - электрическая составляющая энергии. Условия постоянства тока в катушках будем рассматривать как голономные связи, зависящие от времени:

$$q_a = I_a \cdot t. \quad (3)$$

По предположению $T_{\text{мех}}(X, \dot{X})$ уже выражена в независимых лагранжевых переменных, поэтому все дальнейшие преобразования будут затрагивать только $T_{\text{электр}}$. Запишем энергию $T_{\text{электр}}$ в независимых переменных X , q_α , dq_α/dt , используя связи (3):

$$T_{\text{электр}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} L_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum_{\alpha, a} L_{\alpha a} \dot{q}_\alpha I_a + \frac{1}{2} \sum_{a, b} L_{ab} I_a I_b. \quad (4)$$

В соответствии с делением контуров на два типа, матрица индуктивностей L_{ik} разбивается на 4 блока. Таким образом $L_{\alpha\beta}$ - квадратная симметричная матрица индуктивностей идеально проводящих контуров, L_{ab} - квадратная симметричная матрица индуктивностей контуров с заданным током, а $L_{\alpha a}$ - прямоугольная матрица индуктивностей, описывающая взаимодействие контуров разного типа, и соответствует правому верхнему блоку исходной матрицы индуктивностей.

Величины I_a не являются динамическими переменными, а представляют собой фиксированные числа - параметры связей (3).

Уравнения Лагранжа в форме (1) также разбиваются на две группы, так как координаты q_a исключены при помощи связей.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m. \quad (6)$$

В уравнении (5) обобщенная сила Q_α совпадает с исходной силой, действующей в α -контуре, т.к. проектирование на подпространство независимых переменных не затрагивает α -компонент. Вместе с тем в уравнениях Кирхгофа для идеально проводящих контуров следует полагать сопротивление и ЭДС равными нулю, поэтому в уравнении (5) имеем $Q_\alpha = 0$.

В уравнении (6) обобщенная сила Q_I совпадает с исходной силой, так как механические переменные не затрагиваются проектированием. Так как при нулевых токах механическая сила равна производной с обратным знаком от потенциала Π неэлектромагнитного происхождения по механической координате, то

$$Q_m = -d\Pi/dX_I.$$

Сила же электромагнитного происхождения правильно описывается членом $-dT_{\text{электр}}/dX_I$ уравнения (6) в полном соответствии с формулой для силы из теории квазистационарных цепей.

Следовательно, окончательно функцией Лагранжа нашей системы в переменных X_I , dX_I/dt , q_α и dq_α/dt имеет вид:

$$T_{\text{мех}} - \Pi + T_{\text{электр}}, \quad (7)$$

причем переменные q_α не входят явно в это выражение и поэтому являются циклическими.

Чтобы исключить переменные dq_α/dt , воспользуемся методом Рауса. Этот метод подробно и ясно изложен в [10, с.270-277], однако в нашем случае кинетическая энергия не является квадратичной формой скоростей и поэтому непосредственно воспользоваться полученными в работе соотношениями нельзя.

Заметим, что механические переменные X_I и функция $T_{\text{мех}}$ выполняют по отношению к исключению dq_α/dt пассивную роль, и поэтому для полного исключения циклических координат в нашей системе достаточно применить метод Рауса к электрической части энергии системы.

Найдем выражение для кинетической энергии в переменных Рауса p_α . Для этого выразим все $\dot{q}_\alpha$ через p_α , используя (4):

$$p_\alpha = \frac{\partial T_{\text{магн}}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_\beta L_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta + \sum_b L_{\alpha b} I_b \quad (8)$$

Будем считать, что $D = \det(L_{\alpha\beta}) \neq 0$, тогда из (8) находим:

$$\dot{q}_\alpha = \sum_\beta L_{\alpha\beta}^{-1} \left(p_\beta - \sum_b L_{\beta b} I_b \right), \quad (9)$$

где $L_{\alpha\beta}^{-1}$ - обратная матрица для матрицы $L_{\alpha\beta}$.

Тот случай, когда в системе нет сверхпроводящих контуров $v=0$, а, следовательно, в исходной матрице индуктивностей L_{ik} отсутствуют элементы типа $L_{\alpha\beta}$, будет рассмотрен позднее. Обозначим

$$T_{\text{магн}}^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{a,b} L_{ab} I_a I_b, \quad (10)$$

$$T_{\text{магн}}^{(1)} = \sum_{\alpha,a} L_{\alpha a} \dot{q}_\alpha I_a, \quad (11)$$

$$T_{\text{магн}}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} L_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta, \quad (12)$$

так что $T_{\text{магн}} = T_{\text{магн}}^{(0)} + T_{\text{магн}}^{(1)} + T_{\text{магн}}^{(2)}$.

Подставляя выражение (9) в формулы (10-12), получим выражение $T_{\text{магн}}$ в переменных Рауса:

$$T_{\text{магн}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} L_{\alpha\beta}^{-1} p_\alpha p_\beta + \frac{1}{2} \sum_{a,b} L_{ab}^* I_a I_b, \quad (13)$$

где $L_{ab}^* = \left(L_{ab} - \sum_{\alpha,\beta} L_{\alpha\beta}^{-1} L_{\alpha a} L_{\beta b} \right)$.

Вычислим функцию Рауса:

$$R = p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} L_{\alpha\beta}^{-1} p_\alpha p_\beta - \frac{1}{2} \sum_{a,b} L_{ab}^* I_a I_b - \sum_{\alpha,b} \Gamma_{\alpha b} p_\alpha I_b + \Pi - T_{\text{мех}}, \quad (14)$$

где $\Gamma_{\alpha b} = \sum_\beta L_{\alpha\beta}^{-1} L_{\beta b}$.

Согласно равенству (14), функция $(-R)$ (которая для механических координат играет роль функции Лагранжа) равна

$$T_{\text{мех}} - V, \quad (15)$$

где V - обобщенный потенциал, определяемый равенством

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} L_{\alpha\beta}^{-1} p_\alpha p_\beta - \frac{1}{2} \sum_{a,b} L_{ab}^* I_a I_b - \sum_{\alpha,b} \Gamma_{\alpha b} p_\alpha I_b + \Pi. \quad (16)$$

Рассмотрим теперь какое-либо движение исходной системы. В этом движении

$$p_\alpha = \text{const} = c_\alpha, \quad (17)$$

и изменение механических координат $X_I = X_I(t)$ может быть определено из дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial R}{\partial x_i} = 0, \quad (18)$$

в которых всюду p_{α} следует заменить на c_{α} . Эти уравнения являются уравнениями Лагранжа (с функцией Лагранжа $(R) = T_{\text{мех}} - I^*$) для некоторой вспомогательной системы с ν степенями свободы, имеющей кинетическую энергию в виде механической кинетической энергии $T_{\text{мех}}$ и обобщенный силовой потенциал

$$I^* = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} I_{\alpha\beta}^{-1} c_{\alpha} c_{\beta} - \frac{1}{2} \sum_{a, b} I_{ab}^* I_a I_b - \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha\beta} c_{\alpha} I_{\beta} + \Pi(t, X_I). \quad (19)$$

Из выражения (19) видно, что обобщенный потенциал зависит только от механических координат, так как все остальные множители – постоянные величины, либо в силу наложенных связей I_a , либо как интегралы движения ($p_{\alpha} = c_{\alpha}$). Полученную вспомогательную систему будем называть приведенной системой.

Таким образом, изменение механических координат X_I определяет движение приведенной системы с ν степенями свободы, с кинетической энергией $T_{\text{мех}}$ и обобщенным потенциалом I^* .

При соответствующих движениях исходной и приведенной системы их полные энергии равны между собой.

После определения механических координат X_I приведенной системы из уравнений (18) циклические координаты исходной системы определяются по формуле:

$$q_{\alpha} = \int \frac{\partial R}{\partial c_{\alpha}} dt + c'_{\alpha}. \quad (20)$$

Герц показал, что потенциальная энергия консервативной системы всегда может быть рассматриваема, как кинетическая энергия «скрытых движений» [10, с.281-285]. Под скрытыми движениями подразумеваются движения, приводящие к изменению только циклических координат. Концепцию о кинетическом происхождении потенциальной энергии (а следовательно, и о кинетическом происхождении сил) можно назвать принципом Герца.

В нашем случае видно, что вся электрическая часть кинетической энергии системы $T_{\text{магн}}$ перешла в потенциальную энергию приведенной системы с меньшим числом степеней свободы. Роль скрытых движений, очевидно, выполняют электрические процессы. Не вдаваясь в философский аспект этой концепции, отметим, что формально магнитное взаимодействие в нашей системе полностью соответствует принципу Герца.

В работах [2,11] по динамике электромеханических систем имеется неоднозначность интерпретации механического смысла магнитной энергии как кинетической, или потенциальной. В предложенном подходе этот спорный вопрос решается в полном соответствии с принципом Герца, а именно: для исходной системы магнитная энергия по форме является кинетической, а для приведенной – потенциальной.

Последний вывод имеет особое значение при исследовании механической устойчивости систем, так как теорема о минимуме энергии (теорема Лежен Дирихле) подразумевает именно потенциальную энергию. Полученный формализм описывает универсальный метод нахождения потенциальной энергии для систем рассматриваемого типа.

Рассмотрим, наконец, случай, когда в системе нет сверхпроводящих контуров ($\nu = 0$). В этом случае после учета связей система содержит только механические переменные. В системе уравнений (5,6) остается только последнее, которое может быть записано следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{\text{мех}}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_{\text{мех}}}{\partial q_i} = - \frac{\partial}{\partial q_i} (\Pi - T_{\text{магн}}). \quad (21)$$

Из этого уравнения Лагранжа видно, что роль кинетической энергии системы, как и в общем случае, играет механическая кинетическая энергия $T_{\text{мех}}$, а потенциальная энергия неэлектромагнитной природы приобретает добавку, равную энергии постоянных токов со знаком минус. Таким образом, функция Лагранжа системы после учета связей имеет вид:

$$L = T_{\text{мех}} - (\Pi - T_{\text{магн}}) = L_{\text{мех}} - V, \quad (22)$$

где $L_{\text{мех}}$ – функция Лагранжа механической системы при нулевых токах, а $V = -T_{\text{магн}}$ – потенциальная энергия магнитного взаимодействия.

Сравнивая (22) с (15), видим, что полученная энергия постоянных токов входит и в общее выражение (16), но оно учитывает также и не прямое взаимодействие постоянных токов через идеально проводящие контуры (см. выражение для I_{ab}^*).

При этом идеально проводящий контур является адекватной моделью сверхпроводящей катушки [11, с.19], а контур (катушка) с заданным постоянным током является адекватной моделью постоянного магнита, если рассматривается поле вне магнита, а изменением его намагниченности под действием собственных полей

изучаемой системы можно пренебречь [12, с.269]. Основной моделью постоянного магнита, рассматриваемой в нашей работе, будет магнитный диполь.

Одной из наиболее интересных задач, решенных с помощью данного лагранжеского формализма является задача о МПЯ. Несмотря на имеющиеся доказательства существования МПЯ [6,8] полностью аналитическое выражение в элементарных функциях для МПЯ до сих пор приведено не было.

Рассмотрим систему, подробно описанную в работах [6,7], потенциальная энергия которой легко находится из формулы (19). Три индуктивности (L_{11}, L_{22}, L_{33}), расположенные в начале координат представляют сверхпроводящие кольца, а четвертое кольцо (свободное) с постоянным током моделирует малый постоянный магнит.

Для получения полностью аналитического решения будем рассматривать выражения для взаимной индуктивности, которые входят в формулу для энергии, в дипольном приближении [13]. Дипольное приближение для взаимных индуктивностей будет справедливым, когда расстояния между элементами много больше их размеров. Как будет показано ниже этого всегда можно достичь соответствующим выбором параметров (B_0, Ψ_3). Что касается взаимных индуктивностей первых трех сверхпроводящих колец с совпадающими центрами, то они равны 0, так как перпендикулярны. Выражение потенциальной энергии через индуктивности и потоки (19) имеет вид:

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{(I_4 M_1)^2}{L_{11}} + \frac{(I_4 M_2)^2}{L_{22}} + \frac{(I_4 M_3 - \Psi_3 + \Phi_3)^2}{L_{33}} - I_4^2 L_{44} \right) - \mu I_4 B_0, \quad (23)$$

где I_4, L_{44} - ток и индуктивность 4-й катушки с постоянным током (магнитного диполя); B_0 - однородное магнитное поле направленное вдоль оси z ; Ψ_3 - полный поток через 3-й контур; Φ_3 - поток внешнего магнитного поля через третий контур; $\mu = \pi \nu_0^2 I_4$ - магнитный момент 4-й катушки.

В декартовой системе координат, связанной с концентрическими взаимно перпендикулярными кольцами, взаимные индуктивности сверхпроводящих колец и свободного тела (постоянного магнита) в дипольном приближении имеют вид [7]:

$$\begin{cases} M_1 = \frac{\mu_0 \pi \cdot x_{01}^2 \nu_0^2}{4} \frac{(3n_y x y + 3n_z x z + n_x (2x^2 - y^2 - z^2))}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}; \\ M_2 = \frac{\mu_0 \pi \cdot x_{02}^2 \nu_0^2}{4} \frac{(3n_x x y + 3n_z y z + n_y (2y^2 - x^2 - z^2))}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}; \\ M_3 = \frac{\mu_0 \pi \cdot x_{03}^2 \nu_0^2}{4} \frac{(3n_x x z + 3n_y y z + n_z (2z^2 - x^2 - y^2))}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \end{cases} \quad (24)$$

где x_{01} - радиус 1-ого сверхпроводящего кольца (стабилизатора); x_{02} - радиус 2-ого сверхпроводящего кольца (стабилизатора); x_{03} - радиус 3-ого сверхпроводящего кольца (базового); ν_0 - радиус токовой петли, моделирующей постоянный магнит; μ_0 - магнитная проницаемость вакуума; x, y, z - координаты магнита. Таким образом переменные x, y, z, n_x, n_y - являются полным набором обобщенных координат магнитного диполя, а $n_z = \sqrt{1 - (n_x^2 + n_y^2)}$.

Выражение потенциальной энергии в элементарных функциях через обобщенные координаты свободного тела получаем путем подстановки (24) в общее выражение (23). Дальнейшие выкладки представляют собой простые упражнения по применению стандартных функций системы Maple V (разложение в ряд Тейлора, проверка положительной определенности квадратичной формы и т.д.).

Необходимое условие минимума потенциальной энергии по обобщенным координатам соответствует обращению в нуль первой производной от потенциальной энергии системы. Очевидно, что соосному положению тел будет соответствовать такое положение свободного тела, при котором $x = y = 0$ и $n_x = n_y = 0$ в точке $z = z_0$.

$$z_0 = \frac{1}{2} (2x_{03})^{2/3} \left(\frac{\mu_0 \mu}{\Psi_3 - \Phi_3} \right)^{1/3}, \quad (25)$$

где z_0 определяется из условия обращения в нуль силы взаимодействия между свободным магнитным диполем и системой сверхпроводящих катушек. Очевидно, что выбором параметров системы можно всегда добиться справедливости дипольного приближения.

Для определения достаточного условия минимума потенциальной энергии в точке $x = y = 0$ и $n_x = n_y = 0$ и $z = z_0$ достаточно иметь разложение потенциальной энергии в данной точке в ряд по обобщенным координатам до второго порядка включительно.

Анализ коэффициентов полученной квадратичной формы дает следующие условия положительной определенности:

$$\frac{9}{32} \frac{\mu_0^2 x_{01}^4 \mu^2}{z_0^8 L_{11}} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{81}{1024} \frac{\mu_0^4 x_{01}^4 \mu^2 x_{02}^4}{z_0^{16} L_{11} L_{22}} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{81}{2048} \frac{\mu_0^4 x_{01}^4 \mu^5 x_{02}^4 B_0}{z_0^{16} L_{11} L_{22}} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{81}{4096} \frac{\mu_0^4 x_{01}^4 \mu^6 x_{02}^4 B_0^2}{z_0^{16} L_{11} L_{22}} > 0. \quad (26)$$

Причем, 1-е, 2-е и 4-е условия выполняются автоматически, а 3-е сводятся к выполнению неравенства $\mu B_0 > 0$ (достаточное условие устойчивости). Это условие впервые было получено в работе [6] для контуров кольцевой формы.

Таким образом показано, что при выполнении необходимого и достаточного условия в системе имеется минимум потенциальной энергии или МПЯ.

Полученные соотношения являются основой лагранжевого подхода к изучению задач статики и динамики систем, состоящих из сверхпроводящих катушек и постоянных магнитов.

Автор благодарен Н.А. Хижняку за полезные замечания, стимулировавшие поиск аналитического выражения для МПЯ, и Т.И. Шейко за поддержку и ценные дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.П. Демуцкий, С.С. Зуб, В.М. Рапкован, Метод Рауса и принцип Герца для электромеханических систем состоящих из постоянных магнитов и сверхпроводящих катушек и их применение при исследовании магнитной левитации // Вісник Харківського університету. Серія фізична "Ядра, частинки, поля", №438, -1998.
2. Козорез В.В. Динамические системы магнитно взаимодействующих свободных тел. -Киев: Наукова думка, 1981.
3. Максвелл Дж.К. Трактат об электричестве и магнетизме, Москва, Изд.-во Иностранной литературы, 1958.
4. Левич В.Г. Курс теоретической физики, Москва, Наука, 1969, Т.1., -910 с.
5. В.П. Демуцкий, С.С. Зуб, В.М. Рапкован, Статически устойчивые конфигурации магнитно взаимодействующих тел // Вісник Харківського університету. Серія фізична "Ядра, частинки, поля", №437, -1998. -С.89-94.
6. В.П. Демуцкий, С.С. Зуб, В.М. Рапкован, Математическое моделирование магнитной потенциальной ямы в системе сверхпроводящих катушек и постоянного магнита// Вісник Харківського університету. Серія фізична "Ядра, частинки, поля", №438, -1999. -С.43-46.
7. В.П. Демуцкий, С.С. Зуб, В.М. Рапкован, Анализ устойчивости статического равновесия свободной сверхпроводящей катушки в системе трех жестко связанных сверхпроводящих катушек// Вісник Харківського університету. Серія фізична "Ядра, частинки, поля", №443, -1999. -С.34-40.
8. С.С. Зуб, Пространственная магнитная потенциальная яма и магнитная левитация в системе магнитный диполь - сверхпроводящая сфера// Вісник Харківського університету. Серія фізична "Ядра, частинки, поля", №453, -1999. -С.48-54.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред, Москва, Изд.-во Физмат. литературы, 1959, -532 с.
10. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике, Москва, Наука, 1966, -300 с.
11. Михалевич В.С., Козорез В.В., Рапкован В.М. и др., "Магнитная потенциальная яма" – эффект стабилизации сверхпроводящих динамических систем., Киев, Наукова Думка, 1991, 336 с.
12. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм, Москва, Высшая школа, 1983, -463 с.
13. В.М. Рапкован, С.С. Зуб, Основные магнитные свойства произвольно расположенных токовых колец //Труды ХАИ, Харьков, 1997, -С.311-316.

LAGRANGIAN FORMALISM OF THE MAGNETIC SYSTEMS, HERTZ PRINCIPLE AND MAGNETIC POTENTIAL WELL

S.S. Zub

State aerospace university "KhAI",
61070, Ukraine, Kharkov, Tchkalova st.17.

In the work we consider peculiarities of Lagrangian formalism application in a description of electromechanic systems, consisting of the permanent magnets and superconductive coils. The question of the magnetic bodies interaction energy nature is decided in full accordance with Hertz principle of the kinetic origin of potential energy nature. The full analytic magnetic potential well (MPW) task decision is given for the first time on the system of four dipoles in a homogeneous magnetic field example.

KEY WORDS: Lagrangian formalism, steadiness, mathematical model, superconductivity, MPW.

УДК 537.81:51.001.57

УЧЕТ РЕЛЯТИВИЗМА ПРИ ДВИЖЕНИИ ЗАРЯДА В ПОЛЕ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО КОЛЬЦА

В.М. Рашкован, А.В. Марчук, И.А. Пономарева

Государственный аэрокосмический университет

им. Н.Е. Жуковского "ХАИ",

61070, Украина, г. Харьков, ул. Чкалова 17,

Поступила в редакцию 25 ноября 1999г.

В данной работе анализируется движение заряженной частицы в присутствии сверхпроводящего контура с током. Анализируется влияние сверхпроводимости на силу Лоренца со стороны магнитного поля. Рассматривается влияние релятивистских эффектов на векторный потенциал, а также производится анализ полученных данных и их сравнение с классическими результатами. Учет релятивизма достигается благодаря введению в рассмотрение векторного потенциала Лиенара – Вихерта для движущейся частицы.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: сверхпроводимость, векторный потенциал, сила Лоренца, магнитный поток.

Использование сверхпроводимости при исследовании динамического движения заряженных частиц существенным образом изменяет картину энергосилового взаимодействия. Так, в динамической системе заряд сверхпроводящее кольцо проявляется эффект, аналогичный эффекту "магнитная потенциальная яма", который проявляется при статическом взаимодействии двух или более сверхпроводящих колец [1].

Рассмотрим один из наиболее часто встречающихся случаев динамического движения заряда в магнитном поле сверхпроводящей системы с учетом релятивистских эффектов.

В качестве модельной постановки задачи рассмотрим сверхпроводящее кольцо и одиночный заряд, совершающий орбитальное движение вблизи него. Взаимодействие заряда и кольца осуществляется посредством поля, таким образом, возникает задача расчета магнитного поля системы с учетом действия заряда на сверхпроводящий виток.

Для решения поставленной задачи, будем исходить из уравнений Максвелла и уравнений движения заряда, записанного для релятивистского случая:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q(\vec{V} \times \text{rot} \vec{A}). \quad (1)$$

Вследствие сверхпроводимости кольца, все токи текут в приповерхностном слое кольца, и таким образом, из уравнения Максвелла следует, что:

$$\vec{E} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Следовательно, полный поток магнитного поля остается постоянным

$$\Psi = \int \vec{B} d\vec{S} = \text{const}. \quad (2)$$

Свойство «замороженности» магнитного потока оставаться постоянным является одним из основных всей теории сверхпроводимости и широко используется в современной физике сверхпроводников.

Постоянство потока приводит в нашем случае к изменению поверхностного тока кольца за счет учета движения одиночного заряда.

При расчете напряженности полей вводятся магнитный и скалярный потенциалы:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\text{grad} \phi$$

Векторный потенциал (7) удовлетворяет в квазистационарном случае уравнению Пуассона:

$$\Delta \vec{A} = -\vec{j}, \quad (3)$$

где $\vec{j}$ - объемный ток в пространстве. В нашей задаче ток течет по поверхности сверхпроводника. Определение векторного потенциала во всем объеме, а затем и напряженности магнитного поля является одной из основных задач магнитной динамики.

Поскольку кольцо считается бесконечно тонким, то объемное интегрирование сводится к интегрированию по контуру кольца. В случае постоянного тока выражение для векторного потенциала кольца получены в [3].

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4)$$

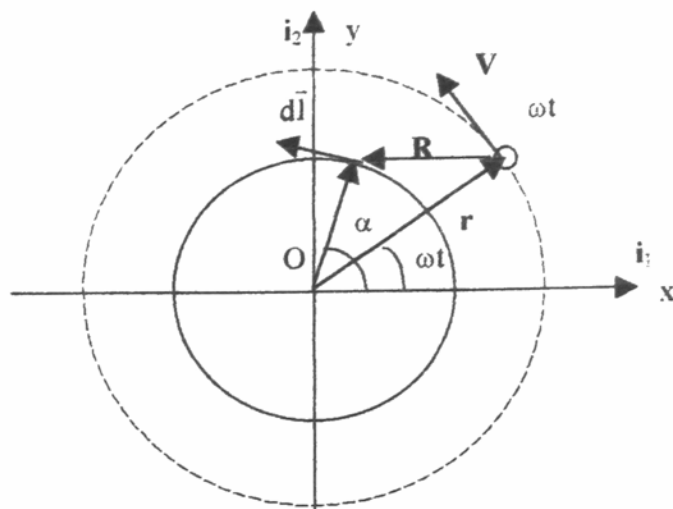


Рис.1. Модель движения заряженной частицы вблизи сверхпроводящего кольца

Рассмотрим движение заряженной частицы вблизи сверхпроводящего кольца.

Как видно из рис.1 положение заряда на круговой траектории определяется радиус-вектором

$$\vec{r} = \vec{i}_1 r \cos \omega t + \vec{i}_2 r \sin \omega t,$$

где ω -угловая частота вращения заряда.

Радиус вектора точки наблюдения кольца определяется как:

$$\vec{a} = \vec{i}_1 a \cos \alpha + \vec{i}_2 a \sin \alpha,$$

где α -полярный угол.

Согласно (2) суммарный магнитный поток остается постоянным, что приводит к изменению собственного тока кольца при движении заряженной частицы в непосредственной близости сверхпроводящего контура:

$$\Psi = \Psi_q + LI, \quad (5)$$

где Ψ_q – поток движущейся частицы, а L -собственная индуктивность контура.

Для решения конкретной задачи, которая приведена далее, нам необходимо знать потенциал электромагнитного поля, создаваемого одиночным точечным зарядом, совершающим движение по некоторой траектории $\vec{r} = \vec{r}_0(t)$. Если скорость заряда $\vec{V}(t)$, то плотность тока можно представить в виде:

$$\vec{J} = \rho \vec{V} = qV\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Тогда потенциал движущейся частицы представляется в виде векторного потенциала Лиенара - Вихерта:

$$\vec{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{V}'}{R' - \frac{\vec{V}' \cdot \vec{R}'}{c}}, \quad (6)$$

где $\vec{R}'$ -радиус вектор, проведенный из точки нахождения заряда в точку наблюдения. Все величины должны выбираться в момент времени $t' = t - \frac{R(t')}{c}$.

Поток, создаваемый частицей через поверхность контура определяется как:

$$\Psi_q = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \oint \vec{A}_q d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon c^2} \oint \frac{\vec{V} d\vec{l}}{R - \frac{\vec{R} \cdot \vec{V}}{c}}, \quad (7)$$

где R -расстояние от точки наблюдения до точки нахождения заряда.

Подставляя выражение для $\vec{r}$ и $\vec{a}$ в выражение для $\vec{R} = \vec{a} - \vec{r}$, определим радиус вектор $\vec{R}$, проведенный из точки нахождения заряда в точку наблюдения.

$$\vec{R} = (a \cos \alpha - r \cos \omega t) \vec{i}_1 + (a \sin \alpha - r \sin \omega t) \vec{i}_2.$$

Тогда, выражение для магнитного потока частицы в декартовой системе координат имеет вид:

$$\Psi_q = \frac{qa}{4\pi\epsilon c} \frac{V}{c} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\alpha - \omega t) d\alpha}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\alpha - \omega t)} - \frac{aV}{c} \sin(\alpha - \omega t)}. \quad (8)$$

Выполнив преобразования аналогичные [2] и введя соответствующие обозначения получим следующее выражение для потока магнитного поля, создаваемого частицей:

$$\Psi_q = -\frac{qp}{2\pi\epsilon c} f(k, p),$$

где

$$f(k, p) = \int_0^\pi \frac{\cos 2\theta d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} + p \sin 2\theta} \quad (9), (10)$$

$$p = \frac{a}{a+r} \frac{V}{c}, \quad k^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2}.$$

Отметим следующий факт, второе слагаемое в знаменателе соответствует вкладу релятивистского эффекта в выражение для магнитного потока, а в конечном счете в выражение для силы Лоренца, действующей на частицу. Как уже говорилось выше, сверхпроводимость изменяет силу тока в кольце при пространственном изменении положения заряженной частицы.

Согласно (5) выражение для силы тока определится как:

$$I = \frac{\Psi - \Psi_q}{L}, \quad (11)$$

Исходя из (9) и (11) получим выражение для силы тока основанное на явлении сверхпроводимости:

$$I = \frac{\Psi}{L} \left[1 + \frac{qp}{2\pi\epsilon_0 c \Psi} f(k, p) \right]. \quad (12)$$

При рассмотрении движения частицы в плоскости кольца, согласно [3], имеется только одна составляющая вектора магнитной индукции B_z , направленная вдоль оси, перпендикулярно плоскости кольца:

$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a+r} \left[K(k) + \frac{a+r}{a-r} E(k) \right], \quad (13)$$

где $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго модуля соответственно.

При стационарном движении заряженной частицы вблизи сверхпроводящего контура первое слагаемое в правой части (1) исчезает и выражение для силы Лоренца, действующей в радиальном направлении, приобретает следующий вид:

$$P = \frac{q\Psi V}{2\pi\epsilon c^2} \frac{1}{a+r} \left(K(k) + \frac{a+r}{a-r} E(k) \right) \left(1 + \frac{qp}{2\pi\epsilon c \Psi} f(k, p) \right). \quad (14)$$

Присутствие сверхпроводящего контура обуславливает наличие второго слагаемого во второй скобке.

В обычных системах второе слагаемое отсутствует, и таким образом равенства нулю силы Лоренца достичь невозможно. Кроме того, оно содержит релятивистскую часть, что говорит о возможности проявления новых эффектов.

Перейдем к безразмерным переменным в выражении (14):

$$P = p\lambda_1 \left(K(k) + \frac{1+n}{1-n} E(k) \right) \left(1 + \lambda p \int_0^\pi \frac{\cos 2\theta d\theta}{p \sin 2\theta + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \right), \quad (15)$$

где $\lambda_1 = \frac{q\Psi}{2\pi\epsilon a L}$ – параметр, имеющий размерность силы; $\lambda = \frac{q}{2\pi\epsilon c \Psi}$ – параметр, оценивающий влияние магнитного потока заряда к магнитному потоку кольца.

В работе [2] оценивается вклад функции $f(k, p)$ в выражении для силы путем разложения подынтегрального выражения в ряд по малому параметру $q = \frac{p \sin 2\theta}{\Delta}$, где $\Delta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}$. Следует

отметить следующий факт: несмотря на то, что $|p| < 1$, при некоторых углах θ величина Δ может оказаться меньше p и разложение не может иметь места. Приведем доказательство того, что учитывать все члены разложения, за исключением первых не имеет смысла.

Разложим подынтегральное выражение в ряд:

$$f(k, p) = \int_0^\pi \frac{\cos 2\theta}{\Delta} \left(1 - p \frac{\sin 2\theta}{\Delta} + p^2 \frac{\sin^2 2\theta}{\Delta^2} - p^3 \frac{\sin^3 2\theta}{\Delta^3} + \dots \right) d\theta. \quad (16)$$

Все слагаемые с нечетными степенями при p исчезают, вследствие периодичности функций синус и косинус. Интегралы от этих слагаемых по периоду равны нулю.

Рассмотрим множитель, стоящий при p^2 . $\frac{\cos 2\theta \sin^2 2\theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{(3/2)}} < M \forall k, k \neq 1, M \in \mathbb{N}$. Подынтегральная функция ограничена, и поэтому не может превышать порядок p^2 . Следовательно, при $\forall k, k \neq 1$ не следует вводить в рассмотрение последующие члены разложения, поскольку величина интеграла не превышает величины p^2 , а это в свою очередь означает, что релятивистское слагаемое $\frac{VR}{c}$ практически не вносит никакого изменения в величину магнитного потока заряда и соответственно на величину силы тока кольца. Особенно это должно проявляться при малых p . Отдельно рассмотрим случай когда $k \rightarrow 1 - 0$.

Эти случаи соответствуют приближению радиуса движения заряда к радиусу кольца, и как будет показано в дальнейшем, именно на близких к кольцу расстояниях возможно равенство нулю силы.

При $k \rightarrow 1 - 0$ все интегралы с четными степенями при p , как легко показать, приводятся к виду $\int_0^\pi \frac{1}{\cos \alpha} d\alpha$. Если понимать этот интеграл в смысле главного значения, то как известно $V.p. \int_0^\pi \frac{1}{\cos \alpha} d\alpha = 0$.

Таким образом, доказано, что главный вклад в величину $f(k, p)$ вносят только первые члены разложения, и кроме того отпадает необходимость рассмотрения релятивистского слагаемого в знаменателе при малых значениях p .

Вопрос о малости q и возможности разложения в ряд при некоторых θ решается аналогичным образом, если заметить, что при $k \rightarrow 1$, $q \rightarrow 2p \sin \theta < 1$. При всех других k неравенство очевидно.

Поэтому

$$\int_0^\pi \frac{\cos 2\theta}{\Delta} d\theta = \int_0^\pi \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta = -\frac{2}{k^2} \left[(2 - k^2) K(k) - 2E(k) \right]. \quad (17)$$

Выражение для радиальной силы Лоренца приобретает вид:

$$P = p\lambda_1 \left(K(k) + \frac{1+n}{1-n} E(k) \right) \left(1 - 2\lambda p k^{-2} \left[(2 - k^2) K(k) - 2E(k) \right] \right). \quad (18)$$

Выражение (15) в общем случае сложное для анализа, поэтому рассмотрим характерные особенности для силы в центре кольца, при приближении к кольцу изнутри и извне, а также на большом удалении от него.

При $k \rightarrow 0$, что соответствует малым орбитам внутри кольца имеем разложение для функций $E(k)$ и $K(k)$:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \dots \right); \quad E(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4 + \dots \right). \quad (19)$$

При $k \rightarrow 1$, что соответствует движению заряда в областях близких к сверхпроводящему контуру:

$$E(k) \approx 1; \quad K(k) \approx \ln \frac{4}{\sqrt{1 - k^2}}. \quad (20)$$

Используя разложения для эллиптических функций (24), (25) и выполняя соответствующие преобразования получим:

$$k \rightarrow 0 \quad P = \pi \lambda_1 p \left[1 - \left(1 - \frac{\pi}{2} \lambda p \right) \frac{k^2}{4} \right]; \quad (21)$$

$$k \rightarrow 1 \quad P = \frac{\lambda_1 p}{k'^2} \left(1 - 2 \lambda p \ln \frac{4}{k'^2} \right), \text{ где } k'^2 = 1 - k^2. \quad (22)$$

При приближении к контуру с внешней стороны получим формулы аналогичные (21) и (22).
Для удаленных орбит, т.е. при отсутствии заряда:

$$k \rightarrow 0 \quad P = -\frac{\pi}{32} \lambda_1 p \left[1 - \frac{\pi}{8} \lambda p k^2 \right] k^4; \quad (23)$$

При орбитах вблизи контура :

$$k \rightarrow 1 \quad P = \frac{\lambda_1 p}{k'^2} \left(1 - 2 \lambda p \ln \frac{4}{k'^2} \right), \quad \text{где } k'^2 = 1 - k^2. \quad (24)$$

Анализ выражений (21)–(24) убеждает в том, что имеются радиусы орбит, при которых магнитная сила обращается в нуль. Вопрос об устойчивости такого движения необходимо рассматривать дальше, однако можно говорить о выполнении, по крайней мере, необходимого условия наличия динамической устойчивости. В отсутствие сверхпроводящего контура устойчивость принципиально наблюдаться не может, этот вывод следует также из анализа выражений (21)–(24).

Графики для силы Лоренца, при варьирующихся параметрах приведены на рис.2 и рис.3.

На рис.2 сплошным линиям соответствует выражение для силы Лоренца, полученное по точной зависимости, а прерывистым выражение, полученное по асимптотическим разложениям. На рис.3 представлен двухмерный график зависимости силы от параметров задачи.

Точное выражение для силы Лоренца получено в результате численного интегрирования выражения (15), что позволяет судить о силе взаимодействия кольца и заряда. Анализ графиков при различном отношении скорости движущейся частицы к скорости света подтверждает тот факт, что происходит переход через нуль силы, а следовательно, притяжение сменяется отталкиванием. При увеличении скорости заряда графики для силы сдвигаются вверх и вправо, подтверждая тем самым изменения ее знака при релятивистских скоростях движения заряда в поле сверхпроводящих контуров.

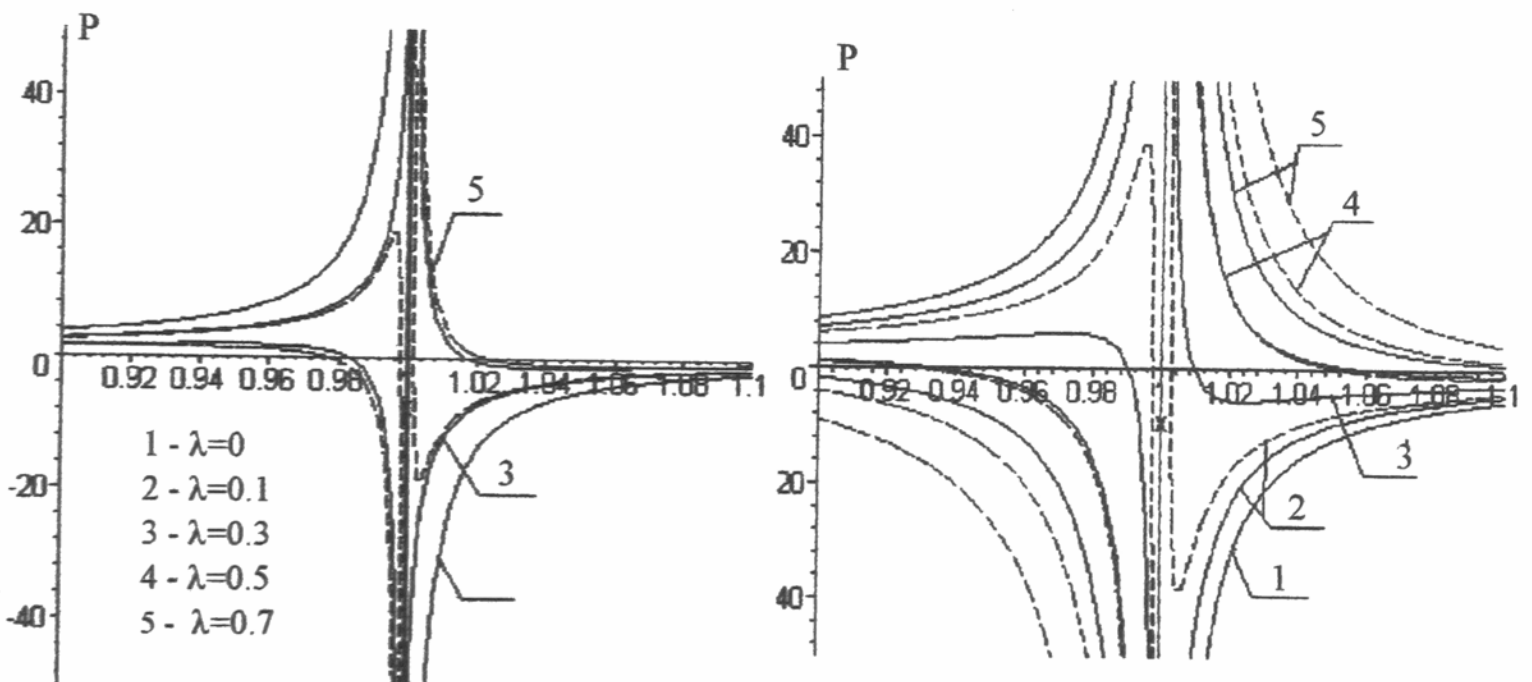


Рис.2. Графики зависимости силы Лоренца при $\beta=0.3$ и $\beta=0.5$.

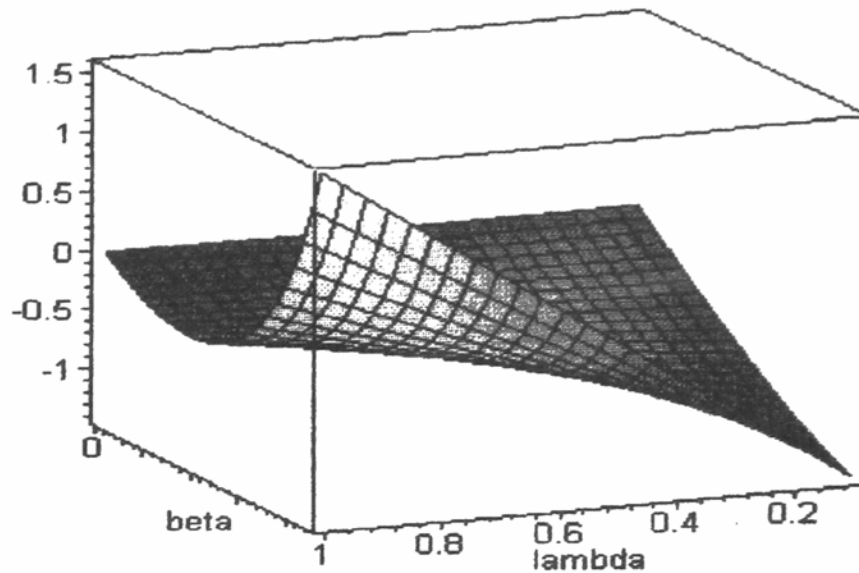


Рис.3. График зависимости силы Лоренца при $x=1.3$ от β и λ .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козорез В.В. Динамические системы магнитно взаимодействующих свободных тел. - Киев: Наукова думка, 1981.
2. "Магнитная потенциальная яма" – эффект стабилизации сверхпроводящих динамических систем / Михалевич В.С., Козорез В.В., Рашкован В.М., Хусаинов Д.Я., Чеборин О.Г.; АН Украины. Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова - Киев: Наукова думка, 1991.
3. Сборник задач по электродинамике, Батыгин В.В., Топтыгин И.Н., изд. 2-е, перераб., учебное пособие. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1970.

THE RELATIVITY CALCULATION AT THE CHARGE MOTION IN THE SUPERCONDUCTIVE RING FIELD

V.M. Rashkovan, A.V. Marchuk, I.A. Ponomaryova

State aerospace university «KhAI»,
61070, Ukraine, Kharkov, Tchkalova st.17.

This work contains the analysis of the particle movement at the superconductive circuit with current. There is the analysis of the superconductive influence on Lorenc force from magnetic field. Consider also the relativism influence on vector potential and execute the analysis of findings and their comparison with classical results. The calculation of relativism is achieved due to taking into account the Lienar – Vihert vector potential for the driving participle in the near-by of superconductive ring.

KEY WORDS: superconductivity, vector potential, Lorenc force, magnetic flux.

УДК 538.945

ДИСПЕРСИЯ ФОНОНОВ И ТЕПЛОЕМКОСТЬ МЕТАЛЛООКСИДНЫХ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ СВЕРХПРОВОДНИКОВ

И. Н. Кудрявцев

Кафедра физики, Харьковский государственный автомобильно-дорожный технический университет,
310078 г. Харьков, ул. Петровского, 25; E-mail: air@khadi.kharkov.ua
Поступила в редакцию 17 ноября 1999 г.

Проведено обобщение фононной плотности состояний металлооксидных высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) с учетом дисперсии фононных мод и характерной размерности колебаний кристаллической решетки. Параметры предложенной теоретической модели имеют простой физический смысл и выбираются из экспериментальных данных по нейтронной и инфракрасной спектроскопии. Расчеты фононной теплоемкости слоистых ВТСП $Y-Ba-Cu-O$ показали чувствительность теплоемкости к размерности базиса кристаллической решетки и дисперсии рассматриваемых фононных мод. Показано, что сверхпроводники $Y-Ba-Cu-O$ обладают характерной двумерной структурой базиса, что соответствует плоскостным продольным и поперечным (изгибным) колебаниям слоев $Cu-O$. Теоретические расчеты фононной теплоемкости по предложенной модели с выбором двумерного базиса описывают экспериментальные данные в широкой области температур $0 \leq T \leq 300$ К без использования свободных параметров, что позволяет определять вклад электронной составляющей теплоемкости в области сверхпроводящего перехода и выполнять детальный анализ свойств электронной подсистемы и возможных механизмов сверхпроводимости в металлооксидных ВТСП.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: металлооксидные ВТСП, теплоемкость, акустические и оптические фононы, дисперсия фононов, спектральная плотность состояний, размерность базиса, электронная подсистема, сверхпроводимость

Исследование динамики кристаллической решетки и фононной теплоемкости ВТСП представляет повышенный интерес для определения особенностей электрон-фононного взаимодействия и механизма высокотемпературной сверхпроводимости. Металлооксидные сверхпроводники, к примеру $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$, имеют достаточно сложную структуру кристаллической решетки типа перовскита (рис. 1), а фононный спектр указанных соединений содержит большое число колебательных мод различной интенсивности. Поэтому вычисление фононной теплоемкости рассматриваемых соединений является важной теоретической задачей.

Молярная теплоемкость фононной подсистемы ВТСП может быть представлена в виде

$$C_{ph}(T) = 3nR \int_0^\infty \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)^2 \frac{e^{\hbar\omega/k_B T} G(\omega)}{(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)^2} d\omega, \quad (1)$$

где $G(\omega)$ – нормированная на единицу плотность фононных состояний, явный вид которой зависит от используемой модели фононного спектра; n – число атомов, входящих в химическую формулу; R – универсальная газовая постоянная.

Зная функцию $G(\omega)$, можно вычислить $C_{ph}(T)$ и определить вклад электронной подсистемы $C_e(T) = C_{exp}(T) - C_{ph}(T)$ в измеряемую экспериментально теплоемкость ВТСП $C_{exp}(T)$. Как показывают численные оценки, наибольшая теплоемкость электронной подсистемы ВТСП в области сверхпроводящего перехода составляет всего несколько процентов от теплоемкости решетки. Поэтому, для детального анализа скачка электронной теплоемкости, флуктуационного вклада в теплоемкость и корректного определения параметров электронной подсистемы необходимо достаточно точное определение теплоемкости фононов (background specific heat), что предъявляет повышенные требования к выбору адекватной теоретической модели (функции $G(\omega)$).

Рассмотрим используемые в литературе подходы для построения спектральной плотности фононных состояний $G(\omega)$ металлооксидных сверхпроводников.

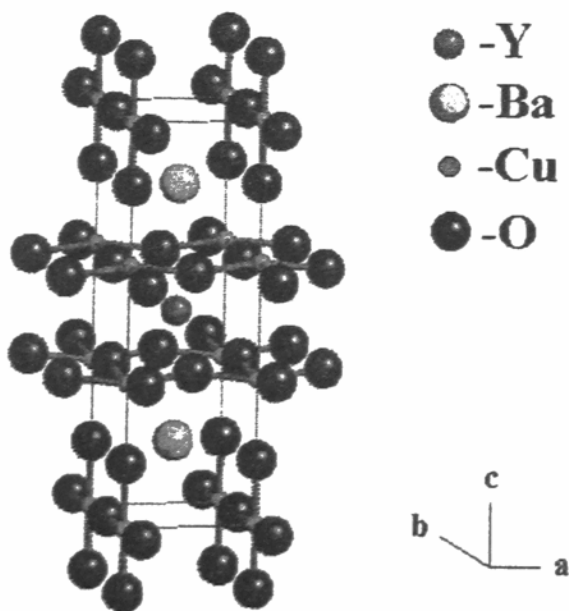


Рис. 1. Структура элементарной ячейки ВТСП $Y-Ba-Cu-O$

ИЗОТРОПНЫЙ ФОНОННЫЙ СПЕКТР БЕЗ ДИСПЕРСИИ

Модель Дебая [1] вводит в рассмотрение только акустические фононные моды без дисперсии ($\omega/k = const$) с граничной частотой ω_D и спектральной плотностью состояний $G(\omega) \sim \omega^2$ и применима для простых решеток с изотропной структурой. Расчеты фононной теплоемкости ВТСП $Y-Ba-Cu-O$ по данной модели дают завышенные значения температуры Дебая $\Theta_D = 400 \pm 30$ К (см., напр., [2,3]) и слабо согласуются с экспериментальными данными (штрихпунктирная кривая на рис. 2).

Наличие целого ряда активных оптических фононных мод, обнаруженных методами комбинационного рассеяния (КР) света [4-7] и инфракрасной (ИК) спектроскопии [8-10] для ВТСП $Y-Ba-Cu-O$, обладающих многоатомным базисом, свидетельствуют о необходимости учета оптических колебаний решетки, которые в первом приближении могут быть описаны по модели Эйнштейна [11] с постоянной частотой ω_E и спектральной плотностью фононных состояний $G(\omega) \sim \delta(\omega - \omega_E)$.

Теоретическая модель изотропного фононного спектра без дисперсии для металлооксидных ВТСП, учитывающая как акустические, так и оптические фононные моды, была предложена в работе [12] и позволила удовлетворительно описать экспериментальные данные по теплоемкости сверхпроводящих и несверхпроводящих керамических образцов $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$. Фононная плотность состояний, нормированная на единицу, выбиралась в виде

$$G(\omega) = \frac{1}{r} \frac{3\omega^2}{\omega_D^3} \chi(\omega_D - \omega) + \frac{r-1}{r} \delta(\omega - \omega_E), \tag{2}$$

где $\chi(x)$ - функция Хэвисайда, а параметр r определяет вклад оптических колебаний и соответствует числу легких атомов в базисе ВТСП.

Характерные параметры фононной подсистемы r , $\Theta_D = \hbar\omega_D/k_B$ и $\Theta_E = \hbar\omega_E/k_B$ определялись в [12] путем фитирования экспериментальных значений теплоемкости ВТСП $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ в широком интервале температур $5\text{ К} \leq T \leq 250\text{ К}$ и представлены в табл. 1.

Таблица 1

$YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$	r	$\Theta_D, \text{ К}$	$\Theta_E, \text{ К}$
$\delta \cong 0.05$	2.32	254	500
$\delta \cong 1$	2.00	254	500

Значения Θ_D и Θ_E не изменяются при переходе от сверхпроводящего образца с $\delta \cong 0.05$ к несверхпроводящему с $\delta \cong 1$ (табл. 1). Это соответствует малым изменениям параметров решетки, что подтверждается и непосредственными измерениями (см., напр., [13]).

Как видно из табл. 1, полученные значения r хорошо описываются формулой

$$r = (7-\delta)/3. \tag{3}$$

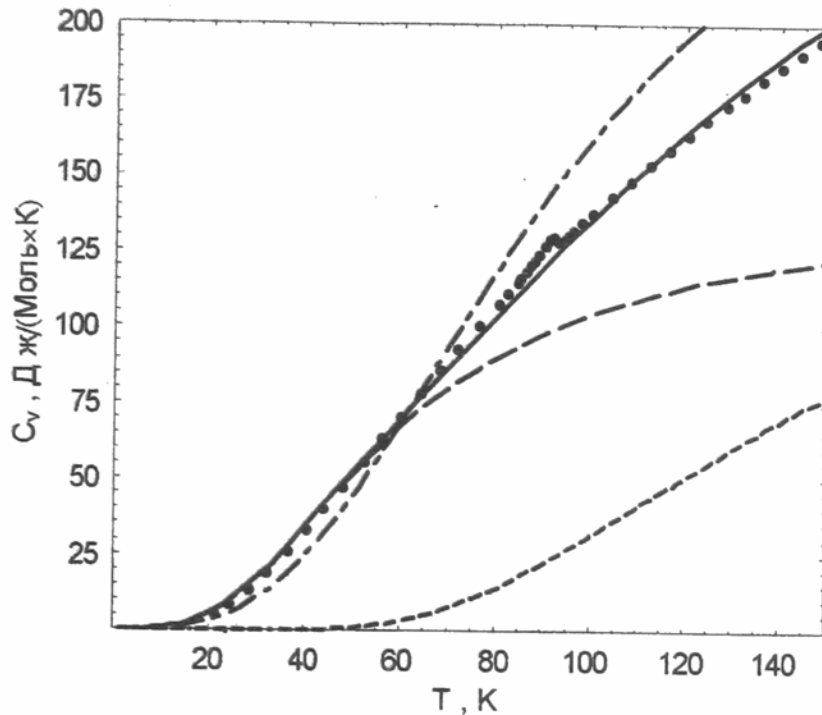
Поскольку элементарная ячейка $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ состоит из трех близких по форме кубических блоков с параметрами $a \cong b \cong c/3$ (см. рис. 1), то величина r соответствует среднему числу атомов кислорода на один структурный блок перовскита. Таким образом, все различие в наборах параметров, описывающих образцы $Y-Ba-Cu-O$ в предложенной модели (2) сводится к различию величины r , что позволяет использовать единый подход для описания теплоемкости решетки ВТСП $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ с различным содержанием кислорода.

Результаты численных расчетов фононной теплоемкости ВТСП $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ ($\delta \cong 0.1$, $T_c \cong 92\text{ К}$) с использованием модели (2), (3) и параметров Θ_D , Θ_E из табл. 1 представлены на рис. 2 (сплошная кривая) и сравниваются с соответствующими экспериментальными данными [14]. Как видно из рис. 2, вклад акустических фононов в теплоемкость доминирует в области низких температур $T \leq 70\text{ К}$ (кривая с длинным штрихом). С ростом температуры при $T \geq 90\text{ К}$ вклад оптических фононов в теплоемкость становится существенным (кривая с коротким штрихом), что свидетельствует о необходимости учета оптических фононных мод при вычислениях теплоемкости в области сверхпроводящего перехода, а также о возможной роли оптических фононов в спаривании носителей тока в купратных ВТСП.

Используемая в модели (2) температура Дебая Θ_D (см. табл. 1) хорошо согласуется с рассчитанной по оценочной формуле [15]

$$\Theta_D \cong \frac{\pi \hbar v}{k_B a_{\text{эл}}} \cong 252\text{ К},$$

где $v \cong 4.1 \cdot 10^5\text{ см/с}$ - скорость звука [16], $a_{\text{эл}} \cong 3.9 \cdot 10^{-8}\text{ см}$ - параметр решетки [13] для ВТСП $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$.



Данное значение Θ_D существенно меньше величины $\Theta_D \approx 400$ К, определяемой в простой модели Дебая (см. выше) и позволяет значительно лучше описать решеточную теплоемкость металло-оксидных ВТСП в области низких температур (ср. штрихпунктирную кривую и кривую с длинным штрихом на рис. 2).

Рис. 2. Фононная теплоемкость ВТСП $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$, рассчитанная по модели (2), (3) (сплошная кривая). Кривая с длинным (коротким) штрихом соответствует вкладу акустических (оптических) фононов. Штрихпунктирная кривая - расчет по модели Дебая для $\Theta_D = 400$ К. Точки - экспериментальные данные из работы [14].

Отметим, что оптическая частота, соответствующая температуре Эйнштейна $\Theta_E \approx 500$ К, близка к частоте КР-активной

моды высокой интенсивности [4,6] и частоте резонансного рассеяния нейтронов [17,18] в оптической области спектра: $\omega_E \approx 42$ мэВ (340 см^{-1}) для ВТСП Y-Ba-Cu-O . Данная оптическая мода соответствует колебаниям атомов кислорода в плоскостях CuO_2 (см. рис. 1), имеет A_g или B_{1g} симметрию и, как известно, проявляет аномальные свойства в области сверхпроводящего перехода (см., напр., [7,19,20]).

Исследования фононной подсистемы купратных ВТСП методом неупругого рассеяния нейтронов [17,21], экспериментально обнаруженная зависимость скорости звука от частоты [22], свидетельствуют о том, что фононный спектр изучаемых сверхпроводников обладает дисперсией.

Поэтому, приступим к изучению эффектов, связанных с наличием дисперсии у акустических и оптических фононных мод в ВТСП купратах.

УЧЕТ ДИСПЕРСИИ ФОНОНОВ

Как показали оценки в рамках феноменологического подхода [12], основной вклад в теплоемкость ВТСП $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ вносят колебания атомов меди и кислорода. Колебания тяжелых атомов иттрия и бария являются низкочастотными, имеют малую интенсивность и слабо влияют на спектральную плотность фононных состояний [18,23].

Анализ парциальных спектров колебаний атомов меди и кислорода, полученных методами нейтронной спектроскопии, показал [24], что в ВТСП купратах динамическое поведение атомов меди формируется в основном за счет взаимодействия с ближайшими атомами кислорода. Поэтому, рассмотрим колебания атомов Cu и O в предположении, что возвращающие силы определяются лишь взаимодействиями с ближайшими соседями.

Поскольку характерные температуры измерений термодинамических функций керамических металло-оксидных сверхпроводников ($T \sim 100$ К) существенно ниже их температуры плавления ($T \sim 1000$ К), то применимо гармоническое приближение [15]. Тогда закон дисперсии для малых деформаций можно записать в виде [25]:

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left[\omega_m^2 \pm \sqrt{\omega_m^4 - 4\omega_D^2 \omega_E^2 \sin^2(ka)} \right], \quad \omega_m = \sqrt{\omega_D^2 + \omega_E^2}, \quad 0 \leq k \leq \pi/(2a), \quad (4)$$

симметричном относительно предельных частот акустических $\omega_D = \sqrt{2\beta/M}$ и оптических $\omega_E = \sqrt{2\beta/m}$ фононов. Здесь a – расстояние между соседними атомами Cu – O в элементарной ячейке, β – коэффициент упругости решетки, M (m) – масса атомов меди (кислорода), ω_m – максимальная частота оптических фононов, соответствующая значению волнового числа $k = 0$. Знак “–” соответствует акустической, а знак “+” оптической ветви спектра.

Отметим, что волны с предельными частотами ω_D и ω_E являются стоячими с нулевой групповой скоростью, соответствуют значениям волнового числа $k = \pm \pi/(2a)$ и лежат на границе зоны Бриллюэна [15].

Отношение предельных частот оптических и акустических фононов $\omega_E/\omega_D = \sqrt{M/m}$, относительная ширина запрещенной зоны $(\omega_E - \omega_D)/\omega_D = \sqrt{M/m} - 1$ и относительная ширина оптической ветви $(\omega_m - \omega_E)/\omega_E = \sqrt{m/\mu} - 1$, где $\mu = mM/(m+M)$ – приведенная масса, определяются исключительно массами атомов меди и кислорода. Кроме того, предельные частоты ω_D и ω_m могут быть выражены через частоту ω_E : $\omega_D = \sqrt{m/M} \omega_E$, $\omega_m = \sqrt{m/\mu} \omega_E$. Поэтому, в случае ВТСП *Y-Ba-Cu-O* и других металлооксидных соединений, содержащих атомы *Cu* и *O*, отношение ω_E/ω_D в точности равно 2, что объясняет полученный в работе [12] из анализа экспериментальной теплоемкости результат для отношения характерных температур $\Theta_E/\Theta_D \approx 2$ (см. табл. 1). Следовательно, резонансная частота оптических фононов ω_E остается единственным свободным параметром в модели и может быть определена методами инфракрасной и нейтронной спектроскопии.

Выбирая частоту $\omega_E = 42$ мэВ (340 см^{-1}) из экспериментальных данных по резонансному рассеянию нейтронов в области энергий выше 30 мэВ, соответствующих колебаниям атомов кислорода [17,18], для дебаевской частоты (соответствующей колебаниям атомов меди) получаем значение $\omega_D = 21$ мэВ (170 см^{-1}). Отметим, что в экспериментах по измерению коэффициента отражения неполяризованного электромагнитного излучения в широкой области спектра $30 - 500 \text{ см}^{-1}$ [26], а также в КР-спектрах [5] для ВТСП *Y-Ba-Cu-O* обнаружены особенности именно на частотах ~ 170 и 340 см^{-1} . Соответствующие температуры Дебая и Эйнштейна составляют

$$\Theta_D \approx 245 \text{ К}, \quad \Theta_E \approx 490 \text{ К}. \quad (5)$$

и близки к значениям, полученным из анализа экспериментально измеренной теплоемкости *Y-Ba-Cu-O* [12].

Как показали численные расчеты, выполненные в работе [25] с использованием данных значений ω_D и ω_E , в области частот акустического спектра $\omega_D/2 \leq \omega \leq \omega_D$ имеется существенное отклонение от линейной зависимости $\omega(k)$, что свидетельствует о необходимости учета дисперсии высокочастотных акустических фононов, в особенности вблизи резонансной частоты ω_D . Зависимость $\omega(k)$ для оптической ветви спектра также имеет существенно нелинейный характер при $\omega \rightarrow \omega_E$, $\omega \rightarrow \omega_m$.

Интересно также отметить, что из расчетов групповой и фазовой скоростей [25] следует, что имеет место аномальная дисперсия оптических фононов. Это означает, что распространение фазы волны и перенос волной энергии происходят в противоположных направлениях. Отметим, что аномальная дисперсия оптических фононов в ВТСП *Y-Ba-Cu-O* наблюдалась экспериментально в работе [27].

ХАРАКТЕРНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ БАЗИСА КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ

Известно, что купратные ВТСП, в частности *Y-Ba-Cu-O* (см. рис. 1), имеют анизотропную, слоистую структуру, что приводит к существенным различиям их физических свойств в плоскости *ab* и в направлении *c*. Это свидетельствует о возможной анизотропии (квазидвумерности [28]) базиса кристаллической решетки.

Поэтому, получим выражения для плотности фононных состояний с учетом характерной размерности базиса (или характерной размерности подгруппы трансляций [28]) и определим преимущественный тип колебаний атомов меди и кислорода в изучаемых ВТСП.

Для одномерных цепочек атомов *Cu-O* (которые могут иметь три колебательные степени свободы в объемном кристалле) зона Бриллюэна представляет собой отрезок на оси *k* длиной $\pi/(2a)$. Следовательно, число состояний в интервале значений волнового вектора от *k* до *k+dk* на единицу длины одномерного (1D) базиса, определяется выражением $2a \, dk/\pi$, а плотность состояний равна $g_{1D}(k) = 2a/\pi$. Аналогично можно определить фононные плотности состояний на единицу площади двумерного (2D) базиса $g_{2D}(k) = (8a^2/\pi^2)k$ и на единицу объема трехмерного (3D) базиса $g_{3D}(k) = (24a^3/\pi^3)k^2$, нормированные на единицу (одну колебательную степень свободы) в пределах зоны Бриллюэна

$$\int_0^{\pi/2a} g_i(k) \, dk = 1, \quad i = 1D, 2D, 3D.$$

Используя связь $g(\omega)d\omega = g(k)dk$ и закон дисперсии (4), можно получить спектральные зависимости парциальных плотностей состояний с учетом размерности базиса кристаллической решетки:

$$g_{1D}^{(\pm)}(\omega) = \pm \frac{2}{\pi} Z(\omega), \quad (6)$$

$$g_{2D}^{(\pm)}(\omega) = \pm \frac{8}{\pi^2} Z(\omega) \operatorname{Arcsin} \left[\frac{\omega \sqrt{\omega_m^2 - \omega^2}}{\omega_D \omega_E} \right], \quad (7)$$

$$g_{3D}^{(\pm)}(\omega) = \pm \frac{24}{\pi^3} Z(\omega) \operatorname{Arcsin}^2 \left[\frac{\omega \sqrt{\omega_m^2 - \omega^2}}{\omega_D \omega_E} \right], \quad (8)$$

$$\text{где} \quad Z(\omega) = \frac{2\omega^2 - \omega_m^2}{\sqrt{(\omega_m^2 - \omega^2)(\omega_D^2 \omega_E^2 - \omega^2(\omega_m^2 - \omega^2))}}, \quad (9)$$

а знак “-” (“+”) соответствует акустическим (оптическим) фононам. Здесь использована нормировка

$$\int_0^{\omega_D} g_i^{(-)}(\omega) d\omega = \int_{\omega_E}^{\omega_m} g_i^{(+)}(\omega) d\omega = 1, \quad i = 1D, 2D, 3D.$$

Обобщенная плотность состояний $G_i(\omega)$, включающая как акустические, так и оптические фононные моды для базиса, содержащего r легких атомов, может быть записана в виде

$$G_i(\omega) = \frac{1}{r} g_i^{(-)}(\omega) \chi(\omega_D - \omega) + \frac{r-1}{r} g_i^{(+)}(\omega) \chi(\omega_m - \omega) \chi(\omega - \omega_E), \quad \int_0^{\infty} G_i(\omega) d\omega = 1, \quad i = 1D, 2D, 3D. \quad (10)$$

В работе [25] были выполнены численные расчеты спектральных функций $G_i(\omega)$ в зависимости от характерной размерности базиса кристаллической решетки ($i = 1D, 2D, 3D$) с использованием выражений (3) - (10) для ВТСП $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$. В результате было установлено, что плотность состояний акустических фононов с увеличением размерности базиса уменьшается на малых частотах $\omega \sim 0$ и возрастает на дебаевской частоте $\omega \sim \omega_D$. В случае оптических фононов наиболее заметно спектральная плотность состояний меняется на предельной частоте ω_m (при переходе от одномерного к трехмерному базису данная оптическая мода существенно смягчается).

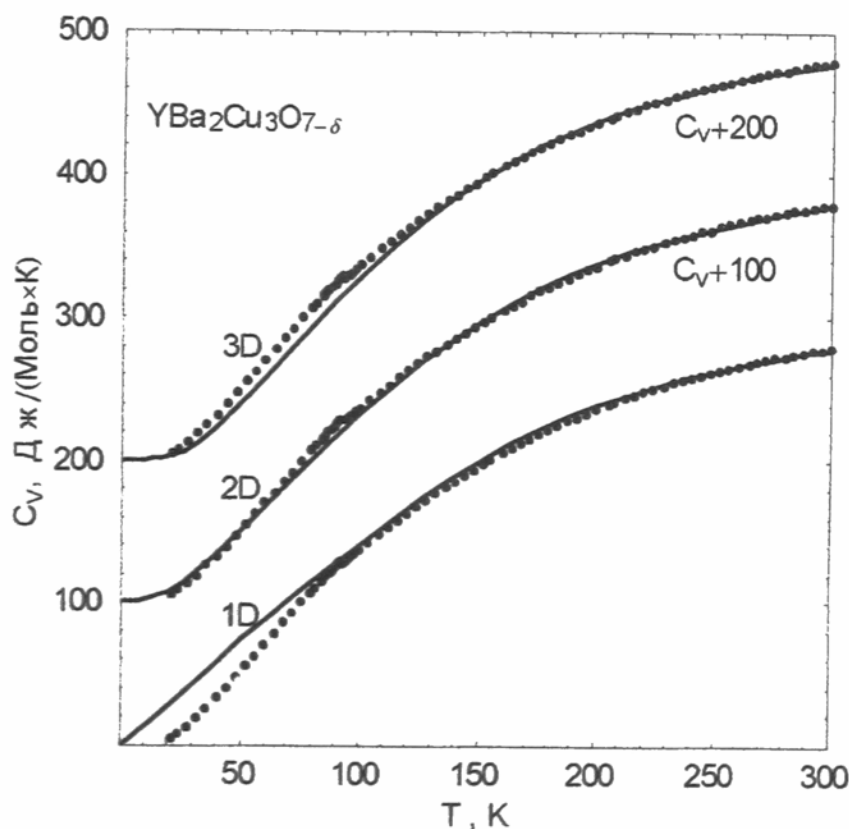


Рис. 3. Теплоемкость фононной подсистемы ВТСП $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ ($\delta \approx 0.1$, $T_c \approx 92$ K) в зависимости от характерной размерности базиса $i = 1D, 2D, 3D$. Точки - эксперимент из работы [14].

Соответствующие численные расчеты по формуле (1) фононной теплоемкости ВТСП $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ ($\delta \approx 0.1$, $T_c \approx 92$ K) с использованием модели (3) - (10) представлены на рис. 3 наряду с экспериментальными данными [14].

Как видно из рис. 3, фононная теплоемкость оказывается чувствительной к выбору характерной размерности базиса в области низких и средних температур и наилучшее согласие с экспериментом имеет место в случае двумерного (2D) базиса кристаллической решетки. В этом случае теплоемкость определяется плоскостными продольными и поперечными (изгибными) колебаниями слоев Cu-O в трехмерном кристалле ВТСП. Данный результат согласуется как с выводами работы [28] о квазидвумерном характере фононной подсистемы слоистых ВТСП купратов, так и с заключением, сделанным в работе [29] о том, что основные особенности колебаний атомов меди с частотами $\omega_D \sim 20$ мэВ определяются взаимными колебаниями атомов Cu-O с плоскостной координацией.

Отметим, что в соответствии с формулами (3) и (10) при переходе от орторомбической фазы к тетрагональной для ВТСП $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ параметр r уменьшается и возрастает вклад в фононную плотность состояний акустических колебаний решетки с характерными частотами $\omega_D \sim 20$ мэВ, что подтверждается и непосредственными измерениями методами рамановской [5] и нейтронной [30] спектроскопии.

Как уже отмечалось выше, оптические колебания в слоях $\text{Cu}-\text{O}$ с частотой 340 см^{-1} могут играть существенную роль при переходе ВТСП в сверхпроводящее состояние. Отметим, что в работе [31] обнаружена сильная корреляция между изгибными деформациями (buckling) в $\text{Cu}-\text{O}$ плоскостях и величинами критической температуры T_c и ширины сверхпроводящего перехода ΔT_c .

Использованное при выводе дисперсионного соотношения (4) и в расчетах теплоемкости ВТСП Y-Ba-Cu-O предположение о гармоническом характере колебаний с частотой $\omega_E = 340 \text{ см}^{-1}$ получило дополнительное подтверждение в работе [32], где вычислялись параметры Грюнайзена для КР-активных оптических мод с A_g симметрией. По результатам расчетов, выполненных в [32], данная оптическая мода имеет малый параметр Грюнайзена, что соответствует малой ангармоничности колебаний в $\text{Cu}-\text{O}$ плоскостях.

Используя рассчитанную фононную теплоемкость $C_{ph}(T)$ (с выбором характерного двумерного базиса решетки), можно определить вклад электронной подсистемы $C_e(T) = C_{exp}(T) - C_{ph}(T)$ в измеряемую экспериментально теплоемкость.

На рис. 4 представлены соответствующие чис-

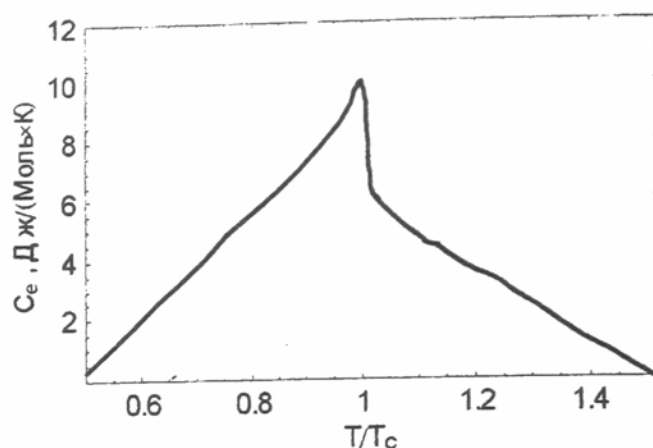


Рис. 4. Теплоемкость электронной подсистемы ВТСП $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ ($\delta \approx 0.1$, $T_c \approx 92 \text{ K}$) в области сверхпроводящего перехода как функция приведенной температуры

ленные расчеты $C_e(T)$ в области сверхпроводящего перехода для ВТСП $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ ($\delta \approx 0.1$, $T_c \approx 92 \text{ K}$). Как видно из рис. 4, имеет место четко выраженный скачок электронной теплоемкости, из анализа которого можно получить детальную информацию о величине флуктуационного вклада, параметрах электронной подсистемы, величине и возможной анизотропии энергетической щели в спектре квазиэлектронных возбуждений.

Определим также вклад в теплоемкость ВТСП Y-Ba-Cu-O эффектов, связанных с наличием дисперсии у рассматриваемых фононных мод. На рис. 5 приведена вычисленная разность ΔC фононных теплоемкостей, рассчитанных по модели (2) для изотропного спектра без дисперсии и по модели (10) (для 2D базиса) с учетом дисперсии фононов (4) с использованием параметров (3), (5). Из сравнения рис. 4 и рис. 5 видно, что вклад в теплоемкость эффектов, связанных с наличием дисперсии у фононов в области сверхпроводящего перехода ($T \sim T_c$) соизмерим с величиной скачка электронной теплоемкости.

Данный результат свидетельствует о необходимости учета дисперсии фононных мод для адекватного вычисления электронной теплоемкости купратных ВТСП.

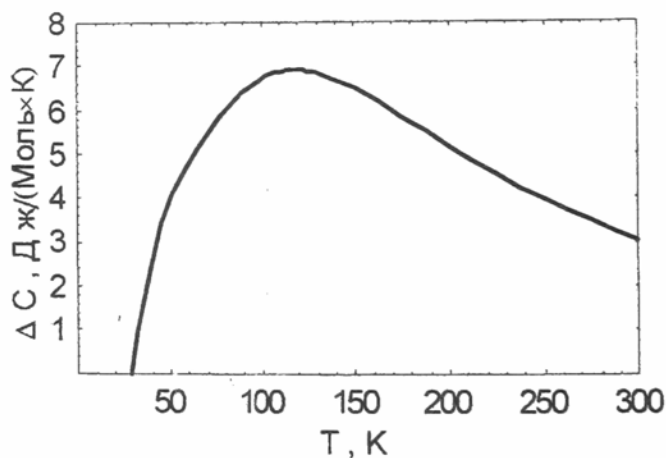


Рис. 5. Разность ΔC фононных теплоемкостей ВТСП Y-Ba-Cu-O , рассчитанных по модели (2) без дисперсии и по модели (10) с учетом дисперсии фононов (4)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теоретическая модель фононного спектра (3) - (10), предложенная в данной работе, позволяет учесть основные особенности фононной подсистемы ВТСП $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ (наличие высокочастотных оптических мод, зависимость от кислородного индекса, дисперсию фононов, характерную размерность колебаний решетки). Параметры модели имеют простой физический смысл и выбираются из экспериментальных данных по нейтронной, ИК и КР спектроскопии. Численные расчеты фононной теплоемкости слоистых ВТСП Y-Ba-Cu-O показали чувствительность теплоемкости к размерности базиса кристаллической решетки и дисперсии рассматриваемых фононных мод. Показано, что сверхпроводники Y-Ba-Cu-O обладают характерной двумерной структурой базиса, что соответствует плоскостным продольным и поперечным колебаниям слоев $\text{Cu}-\text{O}$.

Теоретические расчеты фононной теплоемкости по предложенной модели с выбором двумерного базиса описывают экспериментальные данные в широкой области температур $0 \leq T \leq 300$ К без использования свободных параметров, что позволяет определять вклад электронной составляющей теплоемкости в области сверхпроводящего перехода и выполнять детальный анализ свойств электронной подсистемы и возможных механизмов сверхпроводимости в купратных ВТСП.

Представляется интересным применение данного подхода для анализа теплоемкости и фононной подсистемы других классов металлооксидных ВТСП, а также изучение теплоемкости в области низких и сверхнизких температур.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. Debye // *Ann. Phys.*, 1912, v. 39, p. 789.
2. S.E. Stupp, D.M. Ginsberg // *Physica C*, 1989, v. 158, p. 299-310.
3. A. Junod, B. Revaz, Y. Wang, A. Erb // *Report on LT22 Conference, August 4-11, 1999, Espoo and Helsinki, Finland (Preconference CD-ROM)*.
4. M. Krantz, H.J. Rosen, R.M. Macfarlane, V.Y. Lee // *Phys. Rev. B*, 1988, v. 38, p. 4992-4995.
5. M. Cardona, C. Thomsen // *High- T_c Superconductors: Electronic Structure* / Ed. by A. Bianconi, A. Marcelli, Oxford: Pergamon, 1989, p. 79.
6. T. Staufer, R. Hackl, P. Muller // *Sol. State Com.*, 1990, v. 75, No 12, p. 975-979.
7. E. Altendorf, J. Chrzanowski, J.C. Irwin et al. // *Physica C*, 1991, v. 175, p. 47-57.
8. L. Genzel, A. Wittlin, J. Kuhl et al. // *Sol. State Com.*, 1987, v. 63, p. 843-846.
9. S. Sugai // *Phys. Rev. B*, 1987, v. 36, No 13, p. 7133-7136.
10. A.P. Litvinchuk, C. Thomsen, M. Cardona // *Infrared-active vibrations of high-temperature superconductors: experiment and theory* / Ed. by D.M. Ginsberg, Singapore: World Scientific, 1994.
11. A. Einstein // *Ann. Phys.*, 1907, v. 22, p. 180.
12. И.Н. Кудрявцев, К.Э. Немченко, В.В. Деревянко и др. // *ФНТ*, 1991, т. 17, с. 739-745.
13. Электронная структура и физико-химические свойства высокотемпературных сверхпроводников / Г.П. Швейкин, В.А. Губанов, А.А. Фотиев и др. - М.: Наука, 1990, 240 с.
14. W. Schnelle, E. Braun, H. Broicher et al. // *Physica C*, 1990, v. 168, p. 465-474.
15. Дж. Блейкмор. Физика твердого состояния. - М.: Металлургия, 1972, 488 с.
16. K. Fosheim, T. Lagreid // *IBM J. Res. Develop.*, 1989, v. 33, No 3, p. 365-371.
17. W. Reichardt, D. Ewert, E. Gering et al. // *Physica B*, 1989, v. 156&157, p. 897-901.
18. П.П. Паршин, М.Г. Землянов, О.Е. Парфенов, А.А. Чернышев // *Письма в ЖЭТФ*, 1990, т. 51, с. 380-382.
19. R.M. Macfarlane, H. Rosen, H. Seki // *Sol. State Com.*, 1987, v. 63, No 9, p. 831-834.
20. N. Pyka, W. Reichardt, L. Pintschovius et al. // *Phys. Rev. Lett.*, 1993, v. 70, No 10, p. 1457-1460.
21. W. Reichardt, N. Pyka, L. Pintschovius et al. // *Physica C*, 1989, v. 162-164, p. 464-465.
22. М.Б. Гитис, Л.А. Конопко, В.А. Чуприн, Э.М. Штайф // *СФХТ*, 1989, т. 2, N 11, с. 59-65.
23. W. Bruesch, W. Bunker // *Z. Phys. B*, 1988, v. 70, p. 1.
24. П.П. Паршин, М.Г. Землянов, А.С. Иванов и др. // *ФТТ*, 1999, т. 41, вып. 7, с. 1149-1153.
25. И.Н. Кудрявцев // *Вестник Харьковского университета, сер. физ. "Ядра, частицы, поля"*, 1999, N 453, вып. 3/7, с. 36-42; I.N. Kudryavtsev // *Report on XII Trilateral German-Russian-Ukrainian Seminar on HTS, 25-29 October 1999, Kiev, Ukraine*.
26. J. Mula, P. Manca, A.B. Kuz'menko et al. // *Report on LT22 Conference, August 4-11, 1999, Espoo and Helsinki, Finland (Preconference CD-ROM)*.
27. W. Reichardt // *J. Low Temp. Phys.*, 1996, v. 105, No 3/4, p. 807.
28. Ю.Э. Китаев, М.Ф. Лимонов, А.П. Миргородский и др. // *ФТТ*, 1994, т. 36, N 4, с. 865-952.
29. П.П. Паршин, М.Г. Землянов, П.И. Солдатов // *ЖЭТФ*, 1992, т. 101, вып. 2, с. 750-755.
30. P.P. Parshin, M.G. Zemlyanov // *Report on XII Trilateral German-Russian-Ukrainian Seminar on HTS, 25-29 October 1999, Kiev, Ukraine*.
31. J. Grybos, M. Wabia, F. Kubanek, N. Guskos // *Physica C*, 1990, v. 320, No 1&2, p. 51-64.
32. T. Hirata // *Physica B*, 1999, v. 263-264, p. 822-824.

PHONON DISPERSION AND SPECIFIC HEAT OF METALOXIDE HIGH- T_c SUPERCONDUCTORS

I. N. Kudryavtsev

*Department of Physics, Kharkov State Automobile & Highway Technical University, Ukraine;
310078 Kharkov, Petrovsky st., 25. E-mail: aip@khadi.kharkov.ua*

Phonon density of states is generalized with account for dispersion of the phonon modes and characteristic dimensionality of lattice vibrations for metaloxide HTS. The parameters of the model proposed has clear physical sense and are chosen from the experiments on neutron and far-infrared spectroscopy. The numerical calculations of phonon specific heat for the layered *Y-Ba-Cu-O* HTS demonstrate sensitivity of specific heat to the lattice basis dimensionality and dispersion of the phonon modes considered. It is shown, that *Y-Ba-Cu-O* superconductors possess a characteristic two-dimensional basis structure, that corresponds to the planar longitudinal and transverse (buckling) vibrations of *Cu-O* layers. Theoretical calculations of the phonon specific heat on the basis of model proposed with the choice of two-dimensional basis describe experimental data in wide temperature region $0 \leq T \leq 300$ K without using free parameters, that allows to determine the electronic specific heat contribution in the critical transition region and to analyse the electronic subsystem properties and possible mechanisms of superconductivity in cuprate HTS.

KEY WORDS: metaloxide HTS, specific heat, acoustic and optical phonons, phonon dispersion, spectral density of states, basis dimensionality, electronic subsystem, superconductivity.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОЛЯ ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА В НЕСОРАЗМЕРНОЙ ФАЗЕ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКА $\text{Sn}_2\text{P}_2\text{Se}_6$

С.В.Березовский, Ю.В.Серeda, П.А.Щелоковский*

*Научно-технический центр электрофизической обработки НАН Украины, Харьков, Украина
61002, г.Харьков, ул. Чернышевского, 28, а/я 8812*

тел.: (0572) 404720, факс: (0572) 475261, e-mail: ipct@pet.kharkov.ua

** Харьковский государственный университет, Украина, 61077, г.Харьков, пл.Свободы, 4*

Поступила в редакцию 25 ноября 1999 г.

Исследована нелинейная полевая модель распределения параметра порядка в несоизмерной фазе для одноосных собственных сегнетоэлектриков. Рассчитаны основные термодинамические характеристики сегнетоэлектрика $\text{Sn}_2\text{P}_2\text{Se}_6$. Показано, что по сравнению с использовавшимися ранее подходами рассматриваемая модель качественно и количественно лучше описывает имеющиеся экспериментальные данные. В частности, более корректно описывается температурная зависимость волнового вектора параметра порядка.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: фазовый переход, параметр порядка, несоизмерная фаза, собственные сегнетоэлектрики

Применяемые в настоящее время теоретические подходы к описанию фазовых превращений в системах с пространственно-неоднородными состояниями поля однокомпонентного параметра порядка (ПП), в частности, обобщающие теорию Ландау фазовых переходов, корректно описывают только «линейные» свойства модулированных состояний [1]. Они дают неплохое согласие с экспериментом при температурах, близких к точке фазового перехода из неупорядоченного состояния в несоизмерное, когда пространственное распределение ПП φ может быть качественно и количественно описано как одногармоническое. Между тем, вблизи точки фазового перехода в соизмерную фазу (СФ), например, для одноосных собственных сегнетоэлектриков (СЭ), обнаружено «аномальное» с точки зрения существующих в настоящее время представлений поведение ряда характеристик (пространственного распределения ПП, температурной зависимости волнового вектора, скачка теплоемкости, интегральной интенсивности сателлитов в дифракционных экспериментах, диэлектрической восприимчивости и т.д.) [2].

Такая ситуация обуславливает необходимость разработки новых моделей, способных правильно воспроизвести свойства несоизмерной фазы (НСФ) во всем температурном интервале ее существования, особенно вблизи перехода в СФ.

Использование при этом в качестве основы теории Ландау фазовых переходов [1] оправдано как малостью критической области, так и сложностью микроскопического анализа конденсированных сред типа собственных СЭ. Вид и свойства слагаемых термодинамического потенциала (ТП) определяются симметрией исследуемой системы. В случае наличия в системе пространственно-неоднородных фаз, в которых ПП является периодической функцией координаты, в выражении для ТП необходим учет слагаемых с градиентами ПП. Такое обобщение модели Ландау для ТП позволяет количественно описать экспериментально наблюдаемые модулированные структуры [2,3].

В данной работе рассматриваются свойства НСФ в одноосном собственном СЭ $\text{Sn}_2\text{P}_2\text{Se}_6$. Данное вещество принадлежит к семейству твердых растворов $(\text{Pb}_x\text{Sn}_{1-x})_2\text{P}_2(\text{Se}_x\text{S}_{1-x})_6$, имеющих однокомпонентный ПП (спонтанная поляризация, ориентированная вдоль некоторой оси) [2]. Сегнетоэлектрик-полупроводник $\text{Sn}_2\text{P}_2\text{Se}_6$ является весьма перспективным для использования в технике как рабочая среда в тепловых и акустических приемниках, однако при этом данное вещество теоретически исследовано пока недостаточно [2].

Равновесные распределения ПП $\varphi(x)$ в одноосных собственных СЭ, как правило, близки к синусоидальным даже вблизи точки перехода в СФ. Так, в нитрите натрия NaNO_2 отношение амплитуды третьей гармоники a_3 к амплитуде фундаментальной a_1 (т. е. первой) не превышает 0.03 [4].

Вместе с тем, как мы уже отметили выше, поведение одноосных собственных СЭ не удается адекватно описать в рамках одногармонического приближения, когда распределение ПП в НСФ аппроксимируется согласно

$$\varphi(x) = a \cdot \sin(bx) \quad (1)$$

Так, для $\text{Sn}_2\text{P}_2\text{Se}_6$ детальный термодинамический анализ показал [5], что, несмотря на относительно малый вклад высших гармоник в структуру волны модуляции [6], корректно воспроизвести ряд важнейших свойств НСФ в рамках модели (1) не удастся. Например, зависимость волнового вектора k модуляции

ПП от температуры в модели (1) имеет кривизну, противоположную наблюдаемой в эксперименте (см. рис. 10 в [5]). Кроме того, необходимость включения высших гармоник следует из сравнения теоретических расчетов ΔC_p с экспериментальными данными [5].

Предложенные в настоящее время модификации одногармонической модели (учет нескольких высших гармоник Фурье-разложения ПП, описание вклада упругих сил и др.) позволили частично улучшить описание НСФ в некоторых системах с однокомпонентным ПП (например, для NaNO_2 обзор этих результатов дан в работе [4]). Между тем, универсальность и достаточность данных подходов требует дополнительного выяснения.

В настоящей работе предпринята попытка объяснить ряд свойств НСФ в собственном СЭ $\text{Sn}_2\text{P}_2\text{Se}_6$ путём рассмотрения в качестве модельного решения вариационного уравнения эллиптическую функцию Якоби sn , что фактически позволяет «учесть» сразу все гармоники Фурье-разложения поля ПП [7]. Полученные результаты сопоставлены с выводами одногармонического приближения.

Структура данной статьи такова. В разделе 2 кратко сформулированы основные положения модели [7]. В разделе 3 изложена процедура расчетов и результаты вычислений амплитуды поля ПП, волнового вектора волны несоразмерной модуляции и теплоемкости для $\text{Sn}_2\text{P}_2\text{Se}_6$. Показано, что при использовании модели [7] ряд проблем, присущих приближению (1) и его модификациям [5], устраняется. В последнем разделе статьи изложены заключительные замечания.

SN - МОДЕЛЬ НЕСОРАЗМЕРНОЙ ФАЗЫ

В случае, когда ПП системы $\phi(x)$ является однокомпонентным и имеет одно направление модуляции (вдоль оси Ox), ТП системы можно представить в виде [2,4,8]

$$TP - TP_0 = \frac{1}{L} \int_0^L \left\{ \frac{\sigma}{4} (\phi''')^2 + \frac{\lambda}{2} (\phi\phi')^2 + \frac{\delta}{2} (\phi')^2 + \frac{\alpha}{2} \phi^2 + \frac{\beta}{4} \phi^4 + \frac{\gamma}{6} \phi^6 + \frac{c}{2} u^2 + r\phi^2 u \right\} dX \quad (2)$$

Здесь L - длина кристалла вдоль оси модуляции ПП; ϕ', ϕ'' - пространственные производные ПП; $\sigma, \lambda, \delta, \alpha, \beta, \gamma$ - материальные параметры. Предполагаем, что фазовые переходы в системе обусловлены изменением температуры T , при этом $\alpha = \alpha_T (T - T_0)$, где T_0 - некоторая константа. Остальные материальные параметры не зависят от T [2].

Последние два члена в разложении (2) описывают энергию упругих деформаций и электрострикционное взаимодействие. Здесь u - тензор деформации, c - тензор упругих модулей, r - коэффициенты электрострикции.

Необходимость учета в (2) инварианта $\sim \phi^6$ обусловлена тем, что, как показывают оценки [2], прямой (в данном случае "виртуальный") переход из неупорядоченной фазы в НСФ является переходом I рода, и $\beta < 0$.

Для существования НСФ необходимо выполнение условия $\delta < 0$ [9]. При этом T_i - температура ФП второго рода из высокосимметричной фазы в несоразмерную, T_c - температура ФП первого рода из НСФ в СФ. Их экспериментальные значения для $\text{Sn}_2\text{P}_2\text{Se}_6$: $T_i = 221 \text{ K}$, $T_c = 193 \text{ K}$ [8].

В рамках модели (2) можно описать структурные переходы в сегнетоэлектриках NaNO_2 , $\text{SC}(\text{NH}_2)_2$ [2,3,7], твердых растворах $(\text{Pb}_y\text{Sn}_{1-y})_2\text{P}_2(\text{Se}_x\text{S}_{1-x})_6$ [2], в некоторых магнетиках [10].

С помощью минимизации ТП (2) по u можно найти выражение для равновесного u . Подставляя его в (2), получим ТП без упругой части с перенормированным за счет однородных деформаций коэффициентом $\beta_{cp} = \beta - \frac{r^2}{2c}$. Неоднородная поляризация в НСФ индуцирует неоднородные деформации, в результате чего между однородными и неоднородными деформациями образуется энергетическая «щель» Δ [2] и $\beta_{icp} = \beta_{cp} + \Delta$. Здесь индекс «icp» относится к НСФ, а «cp» - к СФ.

Для выделения эффективных (физически значимых) материальных параметров и упрощения анализа выполним масштабное преобразование ПП ϕ , координаты X и материальных параметров [7]. При этом параметры ТП становятся безразмерными и, кроме того, они получают «разумные» численные значения. Данное преобразование определяется формулами

$$x = bX, \phi = C\phi(x), b^2 = -\frac{\sigma}{2\delta}, C^2 = -\delta\sqrt{\frac{2}{\sigma\gamma}}, \Phi_0 = \frac{-\delta^3}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\sigma\gamma}}, \\ g = -\lambda\sqrt{\frac{2}{\sigma\gamma}}, \gamma = 1, q = \alpha\frac{\sigma}{2\delta^2}, p_{cp,icp} = -\frac{\beta_{cp,icp}}{\delta}\sqrt{\frac{\sigma}{2\gamma}}, h = 1. \quad (3)$$

где g, γ, p, h - новые безразмерные параметры среды, x - безразмерная координата, Φ_0 - размерный множитель.

Тогда ТП системы Φ можно представить в виде [7,9,11,12]:

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{L} \cdot \int_0^L \left[(\varphi'')^2 - g(\varphi\varphi')^2 - (\varphi')^2 + q\varphi^2 + \frac{p}{2}\varphi^4 + \frac{1}{3}\varphi^6 \right] dx \quad (4)$$

Равновесные и неравновесные распределения ГП являются экстремалими ТП, т.е. должны удовлетворять вариационному уравнению $\delta\Phi = 0$, которое для функционала (4) имеет вид [1,11,12]

$$\varphi^{(IV)} + g(\varphi^2\varphi'' + \varphi\varphi'^2) + \varphi'' + q\varphi + p\varphi^3 + \varphi^5 = 0 \quad (5)$$

Распределение поля ГП в НСФ выбираем в виде [7]:

$$\varphi = a \cdot \text{sn}(bx; \kappa) \quad (6)$$

Дифференциальное уравнение (5) допускает пространственно-неоднородное частное решение (6), описывающее распределение ГП в НСФ и воспроизводящее самые важные свойства НСФ, в частности, увеличение вклада высших гармоник в волну несоразмерной модуляции при понижении температуры к T_c [7,13].

АНАЛИЗ НСФ В $\text{Sn}_2\text{P}_2\text{Se}_6$

Используем модель (6) для описания НСФ в собственном одноосном СЭ $\text{Sn}_2\text{P}_2\text{Se}_6$. Для удобства сравнения с выводами одногармонического приближения (1) будем использовать один и тот же набор параметров ТП [8].

Приведем вкратце процедуру определения параметров ТП. По аномальной части теплоемкости ΔC_p найдены коэффициенты $\beta_{cp} = -4.8 \cdot 10^8$ Дж м⁵ Кл⁻⁴, $\beta_{icp} = -3.1 \cdot 10^9$ Дж м⁵ Кл⁻⁴, $\gamma = 8.5 \cdot 10^{10}$ Дж м⁹ Кл⁻⁶. По величине постоянной Кюри-Вейсса получено $\alpha_T = 1.6 \cdot 10^6$ Дж м Кл⁻² К⁻¹. С помощью приближенных выражений для T_i , T_c найдено $\delta = -4.0 \cdot 10^{-10}$ Дж м³ Кл⁻²; $\sigma = 2.2 \cdot 10^{-27}$ Дж м⁵ Кл⁻². Анализ температурной зависимости волнового вектора дает $\eta = 1.2 \cdot 10^{-8}$ Дж м⁷ Кл⁻⁴.

При этом безразмерные материальные параметры ТП (4), согласно (3), равны

$$g = -1.241, \gamma = 1, p_{cp} = -0.137, p_{icp} = -0.088. \quad (7)$$

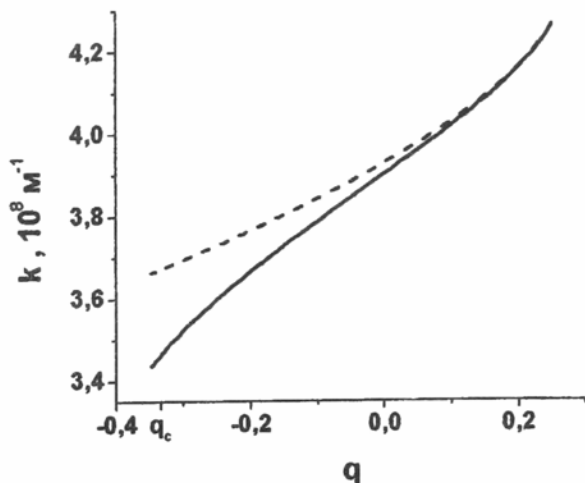


Рис.1. Волновое число волны модуляции ГП (сплошная линия - модель (6), штриховая - модель (1)).

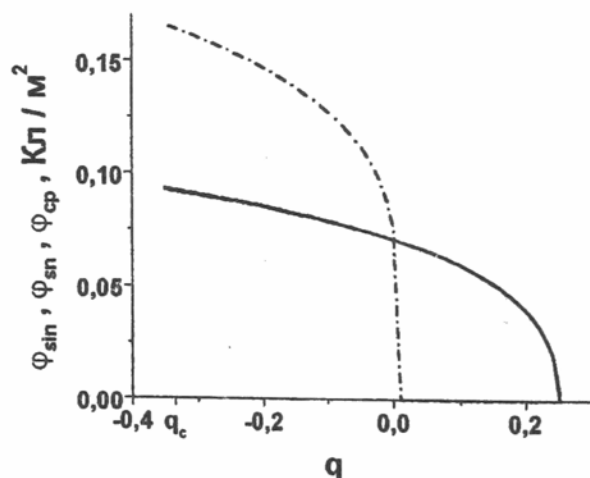


Рис.2. Амплитуда ГП (сплошная линия - модели (1) и (6), штрих-пунктирная - для СФ).

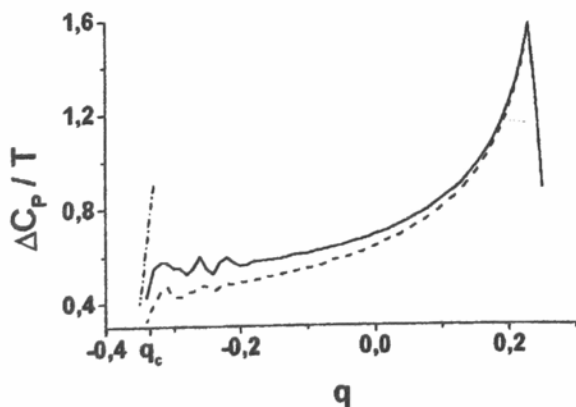


Рис.3. Отношение теплоемкости к температуре (сплошная линия - модель (6), штриховая - модель (1), штрих-пунктирная - СФ), произвольные единицы.

Равновесные значения параметров a, b, κ sn -модели (6) определялись путем численной минимизации ТП по этим параметрам. Точка перехода НСФ - СФ $q = q_c = -0.335$ определялась как точка равенства рассчитанных потенциалов для СФ и НСФ.

Наиболее показательны результаты, полученные для волнового числа (рис. 1). Вблизи T_i кривизна кривой $k(T)$ для моделей (1) и (6) совпадает. При понижении температуры поведение $k(T)$, рассчитанное в sn -модели, начинает отличаться от хода кривой $k(T)$, получаемой в модели (1), и двугармонической модели [5]. Таким образом, выбранная модель качественно правильнее описывает экспериментальные данные. Модель (1) дает отношение $k(T_i)/k(T_c)$ на 3.2% больше экспериментального [5], тогда как sn -модель - на 2.7% больше. Т.о., модель (6) не только качественно, но и количественно лучше описывает температурную зависимость волнового числа, чем модель (1).

Результаты для амплитуды ПП (рис. 2) следующие. Амплитуды в одногармонической и sn -модели отличаются менее чем на 1% во всем температурном интервале НСФ и имеют характерную форму сглаженной ступеньки. Полученное теоретически отношение амплитуд СФ и НСФ в точке T_c отличается от экспериментального [5] не более чем на 8%.

При описании теплоемкости (рис. 3) модель (6) также выглядит предпочтительнее. В частности, она лучше описывает тенденцию к росту $\Delta C_p/T$ при приближении к T_c .

Рассмотрим влияние параметров ТП на равновесный ПП (амплитуду и волновое число) и теплоемкость в СФ и НСФ.

Рассмотрим сначала влияние энергетической «щели» на НСФ. Положим в (7) $p_{icp} = p_{cp} = -0.137$. Это приводит к следующему. Амплитуды ПП в моделях (1) и (6) практически равны и больше примерно на 3%, чем в случае наличия щели. Волновой вектор при температуре T_i не меняется. Модель (1) дает отношение $k(T_i)/k(T_c)$ на 1.1% больше прежнего (т.е. полученного с учетом щели) и на 1.3% больше экспериментального, тогда как модель (6) - больше соответственно на 3.7% и 9.8%.

Варьирование материальных параметров ТП приводит для модели (6) к таким результатам.

Увеличение $|p|$ влечет за собой незначительный рост кривизны кривой волнового вектора и уменьшение отношения $k(T_i)/k(T_c)$, а также рост пика величины $\Delta C_p/T$ вблизи T_i ; на амплитуду ПП изменение $|p|$ заметно не влияет. В свою очередь, увеличение $|g|$ приводит к следующему: температурная зависимость амплитуды ПП принимает более линейный вид, отношение поляризации в СФ к амплитуде ПП в точке q_c увеличивается; в температурной зависимости волнового вектора исчезает перегиб (см. рис. 1); происходит рост пика величины $\Delta C_p/T$ в T_c , причем $\Delta C_p/T$ более чувствительна к изменениям $|g|$, чем к изменениям $|p|$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье мы провели сравнительный анализ нелинейной (6) и одногармонической (1) моделей распределения поля ПП в НСФ собственного СЭ $Sn_2P_2Se_6$. Результаты расчетов показывают, что предложенная sn -модель (6) более корректно описывает температурное поведение основных термодинамических характеристик НСФ в $Sn_2P_2Se_6$, в частности, вблизи точки фазового перехода в СФ. Так, в sn -модели (6) правильно воспроизводится ход температурной зависимости волнового вектора волны модуляции ПП.

Данное исследование является первым этапом термодинамического анализа свойств НСФ в $Sn_2P_2Se_6$. Далее требуется определить значения материальных параметров для предложенной sn -модели (6). Необходимо также детально изучить поведение диэлектрической восприимчивости. Реализации этих этапов будут посвящены дальнейшие исследования.

Авторы выражают благодарность Клепикову В.Ф. за стимулирующие обсуждения и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Толедано Ж-К., Толедано П. Теория Ландау фазовых переходов. М. Мир, 1994. 461 с.
2. Высочанский Ю.М., Сливка В.Ю. Сегнетоэлектрики семейства $Sn_2P_2S_6$. Свойства в окрестности точки Лифшица. Львов, «Закарпаття», 1994. 264 с.
3. Cummins H.Z. // Phys. Rep. 1990. V.185. P.211-409
4. Ema K., Hamano K., Levanyuk A.P. // J. Phys. Soc. Japan. 1990. V.59. P.1438-1450
5. Khoma M.M., Molnar A.A., Vysochanskii Yu.M. // Журнал фізичних досліджень. 1998. Т.2. С.524-535
6. Barsamian T.K., Khasanov S.S., Shekhtman V.Sh. // Ferroelectrics. 1993. V.138. P.63-69

7. Berezovsky S.V., Klepikov V.F., Korda V.Yu., Shlyakhov N.A. // *Int. J. Mod. Phys. B*. 1998. V.12. P.433-447
8. Высочанский Ю.М., Майор М.М., Ризак В.М., Перечинский С.И., Сливка В.Ю., Хома М.М. // *Известия АН СССР. Серия физическая*. 1990. Т.54. С.677-681
9. Ishibashi Y., Shiba H. // *J. Phys. Soc. Jpn.* 1978. V.45. P.409-413
10. Изюмов Ю.А., Сыромятников В.Н. *Фазовые переходы и симметрия кристаллов*. М. Наука, 1984. 280 с.
11. Ishibashi Y., Buchheit W. and Peterson J. // *Solid State Commun.* 1981. V.38. P.1277-1279
12. Санников Д.Г. // *ФТТ*. 1996. Т.38. С.3116-3125
13. Berezovsky S.V., Klepikov V.F., Korda V.Yu., Sereda Yu.V. // *УФЖ*. 1999. Т.44. С.655 - 660

**Thermodynamical model of the order parameter field for the incommensurate phase
in ferroelectric $\text{Sn}_2\text{P}_2\text{Se}_6$**

S.V.Berezovsky, Yu.V.Sereda, P.A.Shchelokovsky*

Scientific and Technological Center of Electrophysics, National Academy of Sciences of Ukraine

28 Chernyshevskiy Str., P.O.BOX 8812, UA - 61002 Kharkov, Ukraine

tel.: (0572) 404720, fax: (0572) 475261, e-mail: ipct@pem.kharkov.ua

** Kharkov National University, UA-61077, Kharkov, Svobody sq., 4*

The nonlinear field model of order parameter in the incommensurate phase is investigated for uniaxial proper ferroelectrics. Base thermodynamical characteristics of the $\text{Sn}_2\text{P}_2\text{Se}_6$ ferroelectric are calculated. It is shown that the model considered describes the existing experimental data qualitatively and quantitatively better in comparison with the approaches used before. In particular the temperature dependence of order parameter wave vector is described more correctly.

KEY WORDS: phase transition, order parameter, incommensurate phase, proper ferroelectrics

УДК 530.1:533.9

ABOUT MECHANISMS OF INTERACTION BETWEEN HIGH- AND LOW-FREQUENCY OSCILLATIONS EXCITED BY CHARGED BEAM IN CORRUGATED PLASMA-FILLED WAVEGUIDE

A. V. Kirichok* and S. T. Mouharov**

*Institute for Electromagnetic Research, P.O. Box 10857, Kharkov-22, Ukraine

**Kharkov State University, Department of Physics and Technology, 4 Svobody Sq., 310077 Kharkov 77, Ukraine

Received 2 November 1999 г.

The influence of plasma on electrodynamic characteristics of a periodic waveguide system, and also the arguing of physical mechanisms leading to rearrangement of high- and low-frequency oscillations in a corrugated plasma-filled waveguide are discussed. The set of equations describing the interaction between low-frequency oscillations excited by a beam in the waveguide and energy transfer to the high-frequency oscillations was obtained.

KEYWORDS: plasma electronics, hybrid systems, plasma-beam interaction.

HYBRID SYSTEMS IN PLASMA ELECTRONICS

The interest to development of electronic devices of new types with use of periodic structures and intensive electronic beams has increased per last decades. These are both powerful BWT and lasers on free electrons, and a number of other devices [1, 2, 3].

The increase of plasma density in waveguides with charged-particle beams transported in them leads, as is known, to improvement of charge and current neutralization of the last (see, for example, [4]). However, the effect of this neutralization is not so essential in the majority of practical cases due to the following reasons. At first, beam currents used for generation of oscillations are frequently far less than the turnoff critical currents. Secondly, in presence of a strong magnetic field oriented along the system and used in a set of similar devices the problem of beam stability removes a pressing at all.

The role of plasma as electrodynamic element is more important [5]. The great attention nowadays is given to study of precisely this aspect. As known, the devices of plasma electronics have a series of significant virtues permitting the improvement of experimental and industrial devices in a direction of higher energies and mastering of short-wave spectrum band without considerable losses in power [6]. However plasma devices have a number of shortages complicating their widespread use. The most essential of them is significant spreading of excitation and amplification spectra, and also rather complicated dynamics of their operational regimes. These shortages caused by the same reasons that in other conditions can be considered as virtues of plasma e.i by a variety of types of proper oscillations and by essential nonlinearity of plasma in a wide frequency band. Meanwhile the plasma electronics has not pushed aside traditional vacuum electronics, but it is a question of time, because of the requirements to microwave devices become tougher and already now we don't quite satisfied by their power and area of mastered frequencies.

On the other hand it is necessary to save the advantages of devices of traditional vacuum electronics with their high Q -factor, excellent predictability based not only on the developed theory, but, in large measure, on vast experience of their development and exploitation.

Nowadays, a serious effort is mounted to develop the hybrid electronic systems, where the role of plasma is auxiliary, but nevertheless rather considerable [7]. A waveguide, seems to be a main electrodynamic load and the density of plasma is insignificant – it poorly distorts the dispersion characteristics of the vacuum system. However in most cases the phase velocities of proper waves of the vacuum system, non-modulated in longitudinal direction, exceed the speed of light in vacuum and the direct synchronism between an electron beam and a waveguide proper wave is hampered. On the other hand the application of small-scale slow-wave structures, which proper waves (localized close to the structure) can be in a spatial-temporal synchronism with the beam, is problematic because, for example, of the sparkover effect at rf-radiation of high density.

Therefore, the use of weakly modulated periodic waveguides, where the main field energy is confined in the waveguide mode poorly deformed due to a longitudinal periodicity. The energy in this case is concentrated close to the waveguide axis and, accordingly, far from the periodic structure. The beam interacts resonantly with a side satellite of the main waveguide mode, which amplitude is noticeably less than amplitude of the main mode. These satellites can't propagate independently in the waveguide and exist only as the result of interaction of the main waveguide mode with the periodic structure. The power growth of such device and a necessity to modify their dispersion properties also were provoked application of low-density plasma in them.

In a series of experiments with relativistic and nonrelativistic beams the noticeable growth of generated power was observed for devices with rather small interaction region (up to ten periods of a goffer) and filled by low-density plasma

[7] Under these conditions the plasma waves are excited, which frequency were almost twice less frequencies of the main mode.

The mechanisms responsible for this effect were discussed in the literature but at the moment the assurance in their adequacy to experiments is absent.

The purpose of this work to consider the influence of plasma on electrodynamic characteristics of a periodic waveguide system, and also the arguing of physical mechanisms leading to rearrangement of high- and low-frequency oscillations of a corrugated plasma-filled waveguide which can be responsible for power growth in such devices for various regimes of the monoenergetic beam instabilities.

RESONANCE EXCITATION OF LOW-FREQUENCY PROPER OSCILLATIONS IN A CYLINDRICAL WAVEGUIDE

It is well known [8] that electromagnetic waves of two types can propagate in a cylindrical waveguide of constant radius R with ideally conducting walls and fully filled by strongly magnetized plasma (the induction vector of exterior magnetic field $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ is oriented along the waveguide axis OZ). In presence of electron beam, propagated through the waveguide, one can consider the motion of particles as one-dimensional (along the waveguide axis) if to imply the strong condition

$$\omega_{pe} = \left(\frac{4\pi n_{0e} e^2}{m_e} \right)^{1/2} \ll \omega_{He} = \frac{eB_0}{m_e c},$$

where, ω_{He} and ω_{pe} are electron cyclotron and plasma frequencies respectively. In addition, suppose $\omega_{be} \ll \omega_{pe}$. In a lack of a beam the dielectric permeability tensor has the following nonzero components $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 1$, $\varepsilon_{33} = \varepsilon = 1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2$, where time-dependence of all values is chosen as $\sim A(t, z) \exp(-i\omega t + ik_z z)$, $A(t, z)$ is slowly varying amplitude, ω and k_z are frequency and longitudinal wave-number.

Only a slow low-frequency wave with phase velocity v_{ph} less than the speed of light c can effectively interact (be in resonance) with a beam of charge particles injected along the waveguide axis. Equation describing the excitation of this wave by the beam looks like

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) - (k_z^2 - k^2) \varepsilon E_z = \frac{4\pi i}{\omega} (k_z^2 - k^2) j_{bz} \quad (1)$$

where $\mathbf{j}_b = (0, 0, j_{bz})$ is a current density of the electron beam. The remaining field components of the axi-symmetric E-wave (E_r, B_ϕ, E_z) are fixed by relationships

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon E_z, \quad B_\phi = \frac{\omega}{k_z c} E_r. \quad (2)$$

The expression

$$D_0 \equiv \varepsilon(\omega) - \frac{k_\perp^2}{k^2 - k_z^2} = 0 \quad (3)$$

represents the dispersion equation, which relates the frequency to the wave-number of oscillations $k = \omega/c$.

The solution of (1) has the form

$$E_z = C_1 J_0(k_\perp r) + C_2 N_0(k_\perp r) - \frac{2i\pi^2}{\omega} (k_z^2 - k^2) \int_r^R r' dr' [J_0(k_\perp r) N_0(k_\perp r') - N_0(k_\perp r) J_0(k_\perp r')] j_{bz}. \quad (4)$$

Here $J_n(x)$ and $N_n(x)$ are the Bessel and Neumann functions, R is a radius of the metal waveguide. The requirement of wave field finiteness on the waveguide axis implies the condition

$$C_2 = -\frac{2i\pi^2}{\omega} (k_z^2 - k^2) \int_r^R r' dr' J_0(k_\perp r') j_{bz}, \quad (5)$$

which fixes one of the integration constants. The remaining constant characterizes the wave amplitude. E_z vanishes at $r=R$, and eq.(4) takes the form

$$J_0(k_\perp r) C_1 = \frac{2i\pi^2}{\omega} (k_z^2 - k^2) \int_r^R r' dr' J_0(k_\perp r') N_0(k_\perp R) j_{bz}. \quad (6)$$

In a lack of a beam the value $k_{\perp 0} R \equiv \xi_{0m}$ is m -th Bessel function root: $J_0(\xi_{0m}) = 0$. Below we shall restrict our consideration to the case of first Bessel function root ξ_0 . Obviously that only oscillations with $k_{\perp 0} R = \xi_0$ and satisfying the dispersion equation (3) represent the proper waveguide oscillations which capable of propagation in the waveguide.

An electron beam of low density averaged over the waveguide cross-section has usually rather weak influence on the waveguide electrodynamic properties. An exception takes place for rather high-current relativistic beams (see, for example, [8]). However, under spatial-temporal beam-wave synchronism the effective excitation of oscillations and their amplification become possible.

By assuming that the frequency and longitudinal wave-number differences $\Delta\omega$ and Δk_z caused by the beam are small and going to the operators $\omega + \Delta\omega = \omega + i\partial/\partial t$ and $k_z + \Delta k_z = k_z - i\partial/\partial z$ one can obtain

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} - v_g \frac{\partial C_1}{\partial z} = \frac{2\pi^2 k_{\perp 0} J_0(\xi_0 R/R_0) N_0(\xi_0)}{R \partial(\omega D_0)/\partial \omega J_1(\xi_0)} I_b, \quad (7)$$

where

$$I_b = -e N_{b0} v_0 \frac{k_z}{2\pi} \int_{-\pi/k_z}^{\pi/k_z} \frac{v_z}{v_0} \exp(-ik_z z + i\omega t) dz_0. \quad (8)$$

Note that integration in (8) must be carried out over initial coordinates of beam particles taking into account $z = z(z_0, t)$. In eqs. (7)-(8) we have assumed that the beam has a tubular form of very small thickness and its density can be approximated as $N_{b0} \delta(r^2 - R_b^2)$.

The group velocity of oscillations is defined as following

$$v_g = (\partial D_0 / \partial k_z) (\partial D_0 / \partial \omega)^{-1}.$$

Obviously that the effective beam-wave interaction is possible under synchronism between the beam particle velocity v_0 and the wave phase velocity ω/k_z , e.g. when $\omega \approx k_z v_0$. Let us pass to the dimensionless variables:

$$\begin{aligned} \tau = \delta t, \quad \zeta = \frac{1}{2\pi} (k_z z - v_0 t), \quad E_- = \frac{ek_z C_1}{\gamma_0^3 m_{e0} \delta^2}, \quad A = \frac{v_z}{v_0}, \\ \delta_-^3 = \frac{2\pi^2 \Omega_b^2 \omega}{\gamma_0^3 \partial(\omega D_0)/\partial \omega} \cdot \frac{\xi_0 J_0(\xi_0 R_b/R_0) N_0(\xi_0)}{J_1(\xi_0)}, \quad \Omega_b^2 = \frac{4\pi e^2}{m_{e0}} \left(\frac{N_{b0}}{2\pi R^2} \right), \\ V_g = \frac{k_z v_g}{2\pi \delta}, \quad \gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}, \quad \beta_0 = \frac{v_0}{c}. \end{aligned}$$

In this case eq.(7) takes the form

$$\frac{\partial E_-}{\partial \tau} - V_g \frac{\partial E_-}{\partial \zeta} = -\frac{\delta_-^3}{\delta^3} \int_{-0.5}^{0.5} A \exp(-2\pi i \zeta) d\zeta_0, \quad (9)$$

This equation must be supplemented with motion equations for the particles simulating the beam, but this question will be discussed later.

Note that the conditions under which the beam has no effect on the electrodynamic properties of the waveguide and the foregoing equations are valid look like (see, for example, [8])

$$\sigma = \frac{2\beta_0^2 \gamma_0^2 \delta_-}{\omega} \ll 1 \quad (10)$$

For relativistic and sufficiently high-current beams, corresponding to $\sigma > 1$, eq. (9) takes the form describing the regime of so-called non-resonant instability

$$E_- = -i \frac{\delta_{2-}^2}{\delta^2} \int_{-0.5}^{0.5} A \exp(2\pi i \zeta) d\zeta_0, \quad (9a)$$

where the following expression is valid for the instability increment δ_{2-}

$$\delta_{2-}^2 = \frac{2\pi^2}{\gamma_0^3 |\varepsilon(\omega)|} \cdot \frac{\xi_0 J_0(\xi_0 R_b/R_0) N_0(\xi_0)}{J_1(\xi_0)}. \quad (11)$$

The distinctive feature of this regime is the weak modulation of the oscillation amplitude at the developed instability. The polarization of the wave changes too – z -component of the electric field becomes of the same order or greater than the transversal field components.

ABOUT MECHANISMS OF ENERGY TRANSFER FROM LOW-FREQUENCY BEAM-EXCITED WAVE TO HIGH-FREQUENCY PROPER OSCILLATIONS IN A CYLINDRICAL WAVEGUIDE

The low-frequency proper electromagnetic wave of finite amplitude with a frequency $\omega = k_z v_0 = (\omega_{pe}^2 - k_z^2 \beta_0^2 \gamma_0^2 c^2)^{1/2}$, excited resonantly by the beam, can be partially reflected from the waveguide end. The reflected low-frequency wave could excite the oscillations with noticeably higher frequency when scattered on the beam charge density perturbations.

This phenomenon is often used in the free electron laser [9]. Note that in the coordinate system where the beam is at rest the frequencies of the reflected low-frequency wave and scattered oscillations coincide. The longitudinal wave-numbers of these oscillations coincide too in this system of reference. The frequency of the beam charge density perturbations in this coordinate system is equal to zero and the wavelength is half as wavelengths of interacting oscillations.

The frequency of scattered oscillations in laboratory system of reference is found to be and the longitudinal wave-number is $k_{zr} = k_z \gamma_0^2 (1 + 3\beta_0^2)$. The phase velocity of scattered oscillations will be less than the speed of light but will exceed the beam velocity. The beam charge density wave, which scatters the low-frequency wave of finite amplitude, has in the laboratory coordinate system the frequency and wave-number $\bar{\omega} = \omega + \omega_r = 2k_z \beta_0 c \gamma_0^2 (1 + \beta_0^2)$, $\bar{k}_z = k_z + k_{zr} = 2k_z \gamma_0^2 (1 + \beta_0^2)$. In this case (the details of passage between different coordinate systems see in [5]).

If the frequency of oscillations scattered by the beam coincides with the frequency of proper high-frequency waveguide oscillations (the phase velocity of the last exceeds the speed of light in vacuum), then one can expect their excitation but only at the expense of wave interaction on the waveguide end.

Considering this process in details we come to recognize that the development of instability resulting in growth the amplitudes of scattered oscillations and the beam charge density perturbations is impossible. The reason is that the high-frequency press forces, caused by interacting waves, can not overpower defocusing force of the volume charge of beam perturbations.

Another possible mechanism of oscillation excitation on a frequency, coincident with the high-frequency proper wave of the system could be the interaction between the low-frequency wave of finite amplitude, resonant with the beam, and the beam charge density perturbations, which frequency and wave-number are equal and correspondingly. By the way, fluctuations in this spectrum region will be more intensive due to above-described mechanism even in a lack of conditions for onset of the instability.

Evidently that the frequency of scattered oscillations will be equal in this case and the longitudinal wave-number $\bar{k}_z + k_z = \omega_r / (\beta_0 c)$. At that, these oscillations are synchronous with the beam and are not proper waveguide oscillations. Energy transfer from the beam-scattered oscillations to the proper high-frequency wave also can take place in vicinity of the waveguide end.

In the last case three modes, taking part in the scattering, impact on the beam particles at once. The first is resonant low-frequency wave of finite amplitude, for which eqs. (9) and (9a) are valid. The second is the high-frequency beam-scattered oscillations with frequency and longitudinal wave-number $\omega_r / (\beta_0 c)$

$$E_z^{(p)}(R_b) = \frac{2\pi i}{\omega_r} \left[\frac{\omega_r^2}{v_0^2} - \frac{\omega_r^2}{c^2} \right] I_{be} G(\eta_+), \quad (12)$$

where $\eta_+ = \kappa_+ R$, $\kappa_+^2 = -(k_{zr})^2 = \epsilon(\omega_r)(-\omega_r^2/c^2 + k_{zr}^2)$,

$$G(\eta) = \frac{I_0(\eta R_b/R_0)}{I_0(\eta)} [I_0(\eta R_b/R_0) K_0(\eta) - K_0(\eta R_b/R_0) I_0(\eta)].$$

The beam current takes the form

$$I_{be} = I_{be+} = -e N_{0b} v_0 \frac{\omega_r}{2\pi v_0} \int_{-\pi v_0/\omega_r}^{\pi v_0/\omega_r} dz_0 \frac{v_z}{v_0} \exp\left(-\frac{i\omega_r}{v_0} z + i\omega t\right). \quad (13)$$

And the third mode is the field of the beam charge perturbations, on which the scattering occurs.

Note that the case of particular interest, is when the beam-resonant scattered perturbations (12) occur in turn unstable on account of interaction with high-frequency waveguide proper oscillations.

This situation takes place, as will be shown in following section, when a corrugated waveguide is used instead of smooth-wall one.

INTERACTION MECHANISMS OF LOW- AND HIGH-FREQUENCY BEAM-EXCITED PROPER OSCILLATIONS IN A CORRUGATED PLASMA-FILLED WAVEGUIDE

Consider an axial-symmetric waveguide with a variable radius $R(z) = R_0(1 + \alpha \cos k_0 z)$, where $2\pi/k_0$ is a maximum spatial waveguide period. The high-frequency proper oscillations of a corrugated waveguide, which radius is a function of longitudinal coordinate, involve beside of the main mode a number of satellites. Their longitudinal wave-numbers are

equal $k_m = k_z + mk_0$, where k_z is a wave-number of the main mode and m are integers. At small corrugation depth αR_0 , we have restricted ourselves to consideration of nearest satellites with $m = \pm 1$ with largest amplitudes.

Assuming $\alpha \ll 1$ and using the condition of vanishing of the tangential electric field component on the waveguide walls [10]

$$E_z[R(z)] = E_z[R(z)] + E_r[R(z)] \tan \theta(z) = 0, \quad (14)$$

where $\tan \theta(z) = -R_0 \alpha k_0 \sin k_0 z$.

In order to fulfill the condition of field finiteness on the waveguide axis we shall choose z -component of the main mode electric field as

$$E_z = A_0 J_0(k_{\perp} r), \quad (15)$$

where $k_{\perp}^2 = \varepsilon(\omega_r)[k_r^2 - k_{zr}^2]$.

For nonresonant satellite with $m = -1$, it can be written as

$$E_z = A_- J_0(k_{\perp} r) = A_- I_0(\kappa_- r), \quad (16)$$

where $I_0(x)$ is the modified Bessel function and

$$(k_{\pm})^2 = \varepsilon(\omega_r)[k^2 - (k_{zr} \pm k_0)^2] = -\kappa_{\pm}^2. \quad (17)$$

Satellite with $m = 1$, corresponding to perturbations with the frequency $\omega = \omega_r = k_z \beta_0 c \gamma_0^2 (3 + \beta_0^2)$ and longitudinal wave-number $\omega_r / (\beta_0 c)$ interacts resonantly with beam particles and its electric field z -component looks like

$$E_z = A_+ I_0(\kappa_+ r) + B_+ K_0(\kappa_+ r). \quad (18)$$

Here $K_0(x)$ is the MacDonald function.

It is naturally to choose the central mode A_0 in such a way that it will be close to the proper wave of corresponding smooth-wall waveguide of radius R_0 . Obviously, that in this case $k_{\perp 0} R_0 = \xi_{0,m}$, where $\xi_{0,m}$ are the roots of the equation $J_0(\xi_{0,m}) = 0$. Suppose for simplicity that is the first root of the Bessel function.

Generally speaking, $k_{\pm}$ are different from $\xi_{0,m}/R_0$ and what is more they will be complex numbers (see (17)). The amplitudes of coupled modes are proportional to α and noticeably smaller than the central mode amplitude A_0 . However, if the longitudinal wave-number of the central mode for given frequency occurs close to the boundary of Brillouin zone ($k_{zr} \rightarrow k_0/2$), then one of the side modes will differ from the central mode only by the phase velocity sign. Beside the appearance of the opacity zones, caused by originated degeneration, the equalization of the central and given side modes amplitudes is observed [10].

Below we restrict our consideration to the important case, when there are no degeneration and $k_{zr} \neq k_0/2$. Following to the approach described in the previous section, we shall write r.h.s. of eq.(15) in the form

$$J_0(\xi_0) A_0 - J_1(\xi_0) \frac{R_0 (k_r^2 - k_{zr}^2)}{2k_{\perp} \omega_r} \frac{\partial(\omega D_0)}{\partial \omega} \Big|_{\omega_r} \cdot i \left(\frac{\partial A_0}{\partial t} + v_{g0} \frac{\partial A_0}{\partial z} \right)$$

As for the central mode we assume $D_0 = 0$, the first term in this expression vanishes.

It can be shown in the same manner as for the smooth-wall waveguide that

$$B_+ = \frac{2\pi i}{\omega_r} \left(\frac{\omega_r^2}{v_0^2} - \frac{\omega_r^2}{c^2} \right) I_0(\eta_+ R_b / R_0) I_{be+}. \quad (19)$$

Expanding all functions of $R(z)$ in vicinity of $R = R_0$ we shall obtain a set of equations for three coupled modes, which coupling factors are proportional to the first or less power of the parameter α .

The set of equations describing interaction of waveguide proper high-frequency oscillations with a charged-particle beam looks as following

$$A_{-1} = q_{-10} A_0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial A_0}{\partial t} + |v_{g0}| \frac{\partial A_0}{\partial z} - i q_0 A_0 = i q_{0,-1} A_{-1} - i q_{0,1} \left[A_{+1} + \frac{2\pi i}{\omega_r} \left(\frac{\omega_r^2}{v_0^2} - \frac{\omega_r^2}{c^2} \right) \frac{K_1(\eta_+) I_0(\eta_+ R_b / R_0)}{I_1(\eta_+)} I_{be+} \right], \quad (21)$$

$$A_1 = q_{10} A_0 + \frac{2\pi i}{\omega_r} \left(\frac{\omega_r^2}{v_0^2} - \frac{\omega_r^2}{c^2} \right) \frac{K_0(\eta_+) I_0(\eta_+ R_b / R_0)}{I_0(\eta_+)} I_{be+}, \quad (22)$$

where

$$q_{\pm 10} = \frac{\alpha^2 \varepsilon(\omega) \omega}{\partial(\omega D_0) / \partial \omega} \left(1 \pm \frac{k_0 k_{zr}}{k_{zr}^2 - k_r^2} \right) \frac{\xi_0 I_1(\eta_{\pm})}{\eta_{\pm} J_1(\xi_0)} \Big|_{\omega_r}, \quad q_0 = \frac{\alpha^2 \xi_0^2 \varepsilon(\omega) \omega}{2 \partial(\omega D_0) / \partial \omega},$$

$$q_{\pm 1,0} = \frac{\alpha}{2} \left(1 \pm \frac{k_0 k_{\pm}}{k_{\pm}^2 - k_r^2} \right) \frac{\xi_0 J_1(\xi_0)}{I_0(\eta_{\pm})}.$$

Note that the derivatives in l.h.s. of eq. (21), which are proportional to α^2 , must be taken into account because of the terms in r.h.s. of eq. (21) have the same order. The wave-number $k_{\pm}$ can be found from the dispersion equation at $\omega = \omega_r$. Evidently that $k_{\pm} = \omega_r/v_0 - k_0$. As a rule $k_{\pm} < 0$ that corresponds to the high-frequency wave which phase and group velocities are opposite to the direction of beam propagation.

Taking into consideration eq. (22), the equation for the central mode of waveguide proper high-frequency oscillations (21) takes the form

$$\frac{\partial A_0}{\partial t} + |v_{g0}| \frac{\partial A_0}{\partial z} - i q A_0 = i q_{0,1} \frac{2\pi i}{\omega_r} \left(\frac{\omega_r^2}{v_0^2} - \frac{\omega_r^2}{c^2} \right) \frac{\eta_+ I_0(\eta_+ R_b/R_0)}{I_0(\eta_+) J_1(\eta_+)} I_{be+}, \quad (23)$$

where $q = q_0 + q_{0,1} q_{1,0} + q_{0,-1} q_{-1,0}$ and the beam current can be found from the expression (13). Going to the above-defined dimensionless variables we shall write eq. (23) as

$$\frac{\partial E_0}{\partial \tau} + V_{g0} \frac{\partial E_0}{\partial \zeta} - i Q E_0 = \frac{\delta_0^3}{\delta^3 q_{1,0}} \int_{-1/2\gamma_0^2(1+\beta_0^2)}^{1/2\gamma_0^2(1+\beta_0^2)} d\zeta_0 A \exp[-2\pi i \gamma_0^2 (1+3\beta_0^2) \zeta_0] \quad (24)$$

$$\delta_0^3 = q_{0,1} q_{1,0} \frac{\pi \Omega_b^2}{\gamma_0^3} k_z^2 R_0^2 \left[\frac{\eta_+ I_0(\eta_+ R_b/R_0)}{I_0(\eta_+) J_1(\eta_+)} \right], \quad (25)$$

and

$$Q = q/\delta, \quad A = 1 + \frac{2\pi\lambda}{\gamma_0^2} \frac{d\zeta}{d\tau}, \quad V_{g0} = \frac{k|v_{g0}|}{2\pi\delta}, \quad \lambda = \frac{\gamma_0 \delta}{\omega}.$$

Equations (9) and (24) must be supplemented with the motion equations for particles simulating the beam:

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{\gamma_0^2}{2\pi\lambda} \left[\frac{1+\lambda\mu}{\sqrt{1+(\gamma_0^2-1)(1+\mu\lambda)^2}} - \frac{1}{\gamma_0} \right], \quad (26)$$

$$\frac{d\mu}{d\tau} = -[E_- \exp(2\pi i \zeta) + E_+ \exp(2\pi i \gamma_0^2 (1+3\beta_0^2) \zeta) + \bar{E} \exp(4\pi i \gamma_0^2 (1+\beta_0^2) \zeta) + \text{c.c.}] \quad (27)$$

where electric field z-components of the resonant satellite E_+ and beam charge density perturbations $\bar{E}$ (in the spectrum region, where the fluctuations are most intensive) can be represented in the dimensionless form

$$E_+ = q_{1,0} E_0 + i \frac{\delta_+}{\delta^2} \int_{-1/2\gamma_0^2(1+\beta_0^2)}^{1/2\gamma_0^2(1+\beta_0^2)} d\zeta_0 A \exp[-2\pi i \gamma_0^2 (1+3\beta_0^2) \zeta_0], \quad (28)$$

$$\bar{E} = \frac{i\bar{\delta}^2}{\delta^2} \int_{-1/4\gamma_0^2(1+\beta_0^2)}^{1/4\gamma_0^2(1+\beta_0^2)} d\zeta_0 A \exp[-4\pi i \gamma_0^2 (1+\beta_0^2) \zeta_0] \quad (29)$$

and on the times characteristic for bunch defocusing in the beam space under impact of the fields (28), (29) the following expressions are valid

$$\delta_+^2 = -\frac{\pi \Omega_b^2 k_z^2 R_0^2 (3+\beta_0^2)}{\gamma_0^3} G(\eta_+), \quad (30)$$

$$\bar{\delta}^2 = -\frac{2\pi \Omega_b^2 k_z^2 R_0^2 (1+\beta_0^2)}{\gamma_0^3} G(\bar{\eta}). \quad (31)$$

It is clear that $\delta_+^2 q_+ \sim \bar{\delta}^2 q_+ \sim \delta_0^3$, $q_+ = q_{0,1} q_{1,0}$.

Thus, we have obtained the set of equations for low- (9)-(9a) and high-frequency proper oscillations (24) of a strongly magnetized plasma-filled corrugated waveguide resonantly excited by an electron beam described by eqs. (26)-(31). These equations allow the analysis of the interaction between beam-excited low-frequency oscillations and high-frequency proper oscillations of a plasma-filled corrugated waveguide.

REFERENCES

1. Swegle J A et al 1985 Phys. Fluids 28 2882-2894
2. Bugaev S P et al 1990 IEEE Trans. Plasma Sci. 18 525-536
3. Main W et al 1994 IEEE Trans. Plasma Sci. 22 566-577
4. Abramyan E A, Al'terkop B A and Kuleshov G D 1984 Intensive Electron Beams (Moscow: Energoatomizdat)
5. Electrodynamics of Plasma 1974 ed Ahiezer A I (Moscow: Nauka) p 719
6. Fainberg Ya B 1985 Fizika Plazmy (Russ.) 11 1398-1410
7. Carmel Y et al 1992 Phys. Fluids B 4(7) 2286-2292
8. Kondratenko A N and Kuklin V M 1988 Foundations of Plasma Electronics (Moscow: Energoatomizdat)
9. Kuzelev M V, Ruhadze A A 1990 Electrodynamics of Dense Electron Beams in Plasma (Moscow: Nauka)
10. Balakirev V A, Karbushev N I, Ostrovsky A O and Tkach Yu V 1993 Theory of Cherenkov Amplifiers and Generators Based on Relativistic Electron Beams (Russ.) (Kiev: Naukova Dumka) p 207

О МЕХАНИЗМАХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ВЫСОКО- И НИЗКОЧАСТОТНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ, ВОЗБУЖДАЕМЫМИ ПУЧКОМ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ГОФРИРОВАННОМ ВОЛНОВОДЕ С ПЛАЗМЕННЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

А.В. Киричок*, С. Т. Мухаров**

* Институт электромагнитных исследований, а/я 10857, Харьков-22, Украина

** Харьковский национальный университет, физико-технический факультет,
пл. Свободы 4, 310077 Харьков 77, Украина

Обсуждается влияние плазменного заполнения на электродинамические свойства периодической волноводной системы и физические механизмы, приводящие к перестройке высоко- и низкочастотных колебаний в гофрированном волноводе, заполненном плазмой. Получена система самосогласованных уравнений, описывающая взаимодействие собственных низкочастотных колебаний, возбуждаемых пучком в волноводе и перекачку энергии в высокочастотные моды.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: плазменная электроника, гибридные системы, пучково-плазменное взаимодействие.

УДК 533.951

АКСИАЛЬНАЯ И РАДИАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ГАЗОВОГО РАЗРЯДА НА НЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛНАХ

Н.А. Азаренков, А.В. Гапон, И.Б. Денисенко

Физико-технический факультет,

Харьковский национальный университет им В. Каразина,

пл. Свободы 4, Харьков 61077, Украина.

Поступила в редакцию 27 ноября 1999 г.

В работе рассмотрен стационарный газовый разряд в коаксиальной цилиндрической структуре плазма-вакуум-металл, поддерживаемый высокочастотными потенциальными несимметричными волнами. Предполагается, что плазма находится в режиме амбиполярной диффузии, а волны рассматриваются в линейном приближении. Сформулирована самосогласованная система уравнений и граничных условий для описания распространения ионизирующей потенциальной волны в газоразрядной плазме. Представлен метод решения самосогласованной системы уравнений и результаты расчета аксиальных и радиальных распределений параметров разряда. Расчеты проведены для различных азимутальных мод, давлений рабочего газа и геометрических параметров.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: газовый разряд, потенциальная несимметричная волна, самосогласованная система уравнений

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Газовый разряд на поверхностных волнах интенсивно исследуется экспериментально и теоретически в связи с многочисленными приложениями [1]-[3]. Исследуемая структура изображена на рис.1. В круглый волновод с пренебрежимо малым активным сопротивлением введена диэлектрическая трубка, в которой создана слабоионизированная плазма, вдоль которой распространяется ионизирующая волна. Нагрев плазмы в поле волны за счет электрон-атомных столкновений определяет рождение и потери заряженных частиц, что отражается на распределении их плотности, т.е. на условиях распространения волны. В результате задача является самосогласованной. В данной работе свойства плазмы описываются гидродинамически, что подразумевает локальное максвелловское распределение для электронного и ионного газов [4]. Для описания процессов рождения и ухода частиц используется уравнение непрерывности. Хотя нас будет интересовать установившееся решение, для дальнейшего необходима нестационарная форма уравнений. Считая плазму однозарядной и квазинейтральной, ограничимся только уравнением непрерывности для электронов:

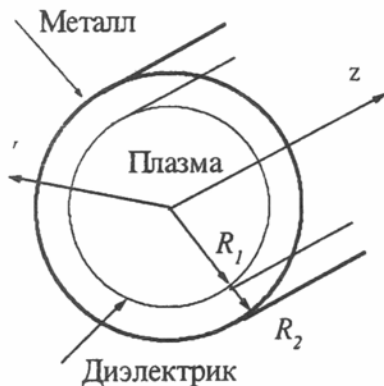


Рисунок 1. Геометрия задачи.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n\vec{u}) = \frac{\delta n}{\delta t}, \quad \frac{\delta n}{\delta t} = \nu_i n - \alpha n^2. \quad (1)$$

Здесь n - число электронов в единице объема, $\vec{u}$ - направленная скорость электронов. Источник в правой части описывает изменение числа электронов в единице объема, не связанное с переносом вещества, ν_i и α есть частота ионизации и коэффициент объемной рекомбинации. В режиме амбиполярной диффузии [4]:

$$\vec{u} = -\nabla(\gamma_1 Tn)/n, \quad (2)$$

где T - температура электронного газа, $\gamma_1 = 2/(m_i \nu_{ia})$, m_i - масса иона, ν_{ia} - частота ион-атомных столкновений. Принимая во внимание, что ν_{ia} не зависит от температуры электронов, видно, что перенос электронов определяется распределениями плотности частиц и плотности внутренней энергии электронного газа $U = 3/2 nT$. Получим уравнение непрерывности для U . Для этого воспользуемся уравнением движения электронов:

$$m \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} \right) = -en\vec{E} - \nabla p + nm \frac{\delta \vec{u}}{\delta t} \quad (3)$$

где m и e - масса и заряд электрона, $\vec{E}$ - напряженность электрического поля, $p = nT$ - давление

электронного газа, последнее слагаемое - изменение импульса за счет столкновений; и законом сохранения полной кинетической энергии K единицы объема электронного газа:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \nabla(\bar{q} + K\bar{u} + p\bar{u}) = -en\bar{u}\bar{E} + \frac{\delta K}{\delta t}, \quad (4)$$

где $K = nmu^2/2 + U$, $\bar{q} = -\gamma_2 n T \nabla T$ - плотность потока тепла, $\gamma_2 = 5/(2m_e v_{ea})$. Умножая (1) на $mu^2/2$, (3) - скалярно на $\bar{u}$ и складывая полученные выражения, получим уравнение непрерывности для плотности кинетической энергии направленного движения $nmu^2/2$. Исключая эту величину из (4), получим искомое уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla(\bar{q} + U\bar{u} + p\bar{u}) = \bar{u}\nabla p + \frac{\delta U}{\delta t}, \quad (5)$$

где $\delta U/\delta t = 3/2 (n\delta T/\delta t + T\delta n/\delta t)$ - изменение внутренней энергии за счет столкновений. Изменение температуры электронного газа $\delta T/\delta t$ связано главным образом с потерями из-за передачи энергии в ходе неупругих столкновений с атомами и ростом за счет хаотизации кинетической энергии направленного движения электронов [4]: $\delta T/\delta t = -v_i U_i - \sum v_j U_j + 2/3 v_{ea} m \langle \tilde{u}^2 \rangle$, где U_i - энергия ионизации, v_j - частота столкновений, приводящих к возбуждению уровня атома с энергией U_j , v_{ea} - частота упругих электрон-атомных столкновений, $\langle \tilde{u}^2 \rangle$ - квадрат осцилляторной скорости электрона в электрическом поле волны $\bar{E}_v$, усредненный по периоду:

$$\langle \tilde{u}^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} |\bar{E}_v|^2 \frac{1}{\omega^2 + v_{ea}^2}. \quad (6)$$

Сформулируем граничные условия для уравнений (1) и (4). Согласно [4] скорость электронов на границе переходного слоя между плазмой и диэлектрической стенкой достигает значения $u_s = \sqrt{T_s/m_i}$, а нормальные составляющие градиента температуры и плотности связаны соотношением $\nabla T/T|_s = \delta \nabla n/n$, где $\delta = (2 + \ln \sqrt{m_i/m}) m v_{ea} / m_i v_{ia}$. Отсюда легко получить граничные условия:

$$\nabla U/U|_s = -\gamma_1 (m_i T)^{-1/2}, \quad \nabla n/n|_s = (1 + \delta)^{-1} \nabla U/U. \quad (7)$$

Для упрощения модели рассматривались потенциальные волны. Тогда напряженность электрического поля волны $\bar{E}_v = -\nabla \Psi$, а потенциал Ψ удовлетворяет краевой задаче [5]:

$$\nabla(\epsilon \nabla \Psi) = 0, \quad \Psi_M = 0, \quad (8)$$

где $\epsilon = 1 - \omega_p^2 / (\omega(\omega + i v_{ea}))$ - диэлектрическая проницаемость плазмы, $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n / m$ - плазменная частота электронов, Ψ_M - значение потенциала на металлической стенке.

В приближении слабой аксиальной неоднородности представим потенциал несимметричной волны в виде $\Psi = \psi(r) \exp(ik_3(z)z + im\phi - i\omega t)$, где r - радиальная координата, $k_3(z)$ - волновое число, медленно меняющееся с аксиальной координатой z , m - азимутальное волновое число, ω - круговая частота волны. В этом случае (8) преобразуется к виду:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \epsilon \psi \frac{d\psi}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} \epsilon \psi = k_3^2 \epsilon \psi, \quad \psi_M = 0. \quad (9)$$

Волновое число k_3 является собственным значением (9) и в общем случае комплексно: $k_3 = k + ik$. Для однозначного определения $\psi(r)$ необходимо задать значение потенциала в какой-либо точке области. Зададим его на поверхности диэлектрической трубки $\psi = \psi_s$.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Уравнения (1), (5), (7), (9) составляют самосогласованную систему эволюционных уравнений. Пусть в момент времени $t = 0$ заданы начальные распределения $n^0(r, z)$, $U^0(r, z)$ и значение ψ_s в каком-либо сечении столба. Тогда если при достаточно больших t решение будет стремиться к некоторому пределу, то этот предел будет решением стационарной системы уравнений, в которой все производные по

времени равны нулю. Такой подход известен как метод установления. Далее, так как в длинных разрядах аксиальные градиенты малы по сравнению с радиальными, и пренебрегая в (1), (3) аксиальными производными, сведем задачу к нахождению $n_i(r)$, $U_i(r)$, $\psi_i(r)$, k_{zi} независимо для каждого сечения разряда z_i из начальных профилей $n_i^0(r)$, $U_i^0(r)$ и значения потенциала ψ_{Si} . При этом в некоторой окрестности сечения z_i зависимость потенциала волны от аксиальной координаты будет иметь вид произведения огибающей и осциллирующей части: $\psi(r, z) = \psi_i(r) \exp(ik_{zi}(z - z_i)) = \psi_i(r) \exp(-\kappa_i(z - z_i)) \exp(ik_i(z - z_i))$. Считая, что условия применимости геометрической оптики выполнены, найдем для аксиальной производной огибающей части $\partial\psi / \partial z = -\kappa_i \psi_i(r)$, и приближенную формулу первого порядка точности по координате, связывающую значения ψ_{Si} и ψ_{Si+1} в близких сечениях z_i и z_{i+1} :

$$\frac{\psi_{Si+1} - \psi_{Si}}{z_{i+1} - z_i} = -\kappa_i \psi_{Si}, \quad (10)$$

откуда можно получить расстояние между этими сечениями. Так, последовательно изменяя значение ψ_S и решая самосогласованную задачу для отдельных сечений, получим аксиальное распределение искомых величин.

Для поиска $n(r)$, $U(r)$, $\psi(r)$ в отдельном сечении мы использовали принцип расщепления. Фиксируя распределение плотности $n^j(r)$, полученное для момента времени t_j , решалась задача для потенциала волны, после чего пересчитывался профиль $\langle \tilde{u}^2 \rangle(r)$. Затем, считая его неизменным, находились профили $n^{j+1}(r)$, $U^{j+1}(r)$, $\psi^{j+1}(r)$ в момент времени $t_{j+1} = t_j + \tau$ (τ - временной шаг). Процесс продолжается до стабилизации профилей. Разностная схема для расчета $n(r)$ и $U(r)$ была получена следующим образом. Уравнения (1) и (5) мы привели к виду квазилинейного уравнения диффузии. Коэффициенты диффузии зависели только от температуры электронов и вели себя как степени температуры. Из квазилинейных уравнений интегро-интерполяционным методом [6] была получена двухслойная неявная схема, неизвестные интерполировались линейно. Для линеаризации при решении уравнений на данном временном слое использовался профиль температуры, посчитанный из $n(r)$ и $U(r)$ на предыдущем слое. Явно учитывались и правые части (1) и (5). Для решения задачи (9) была получена разностная схема, сохраняющая условие непрерывности нормальной составляющей электрической индукции на разрывах диэлектрической проницаемости, что позволило избежать применения нелинейных граничных условий при сшивке решений в плазме и в вакууме, и свести задачу к проблеме собственных чисел матрицы разностных уравнений. Отметим, что нас интересовало минимальное по модулю k_3 , как соответствующее главной моде волноведущей системы. Минимальное собственное число и соответствующий собственный вектор находились методом обратной итерации [7].

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Мы провели расчеты для разряда в аргоне. Частоты упругих электрон-атомных столкновений были взяты из измерений средних по сечению разряда частот в высокочастотном газовом разряде, приведенным в [8], и считались постоянными. Использовалась следующая аппроксимация, полученная на основе [8]: $\nu_{ea} a = 24,55 \cdot 10^8 (Pa)^{0,695}$, где a - радиус плазменного столба в см, P - давление аргона в Тор. При плотностях электронов порядка 10^{10} см^{-3} , полученными в расчетах, рекомбинация не влияет на потери частиц и потому не учитывалась. Из потерь тепловой энергии электрона вследствие неупругих электрон-атомных процессов учитывались ионизация и возбуждение $4s$ и $4p$ уровней. Соответствующие выражения для частот столкновений были взяты из [9]. Все приведенные кривые получены для частоты волны $\omega = 5 \times 10^9 \text{ Гц}$.

Рассмотрим, как изменяются характеристики волны и плотность плазмы в разряде на несимметричной волне на примере волновода с $R_1 = 5$, $R_2 = 7,5$ см и давлением $P = 0.05$ Тор. На рис.(2)-(4) показаны радиальные зависимости плотности электронов, потенциала волны и усредненной по периоду энергии колебаний электрона в поле волны w_e . Рассматривается волна с $m = 2$. Профиль плотности (рис.2) имеет колоколообразный вид и значения плотности на границе и на оси плазмы отличаются в несколько раз. Между ними присутствует точка плазменного резонанса, где плазменная

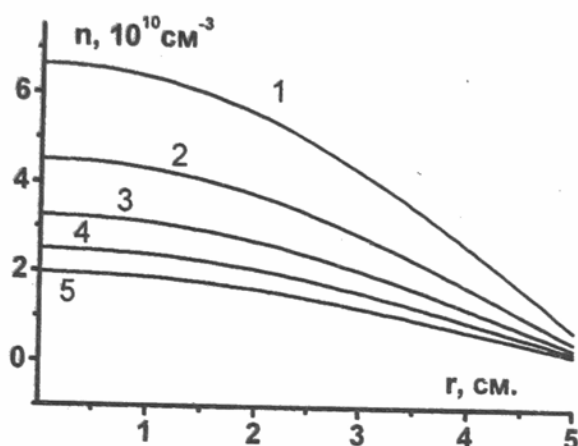


Рисунок 2.

Плотность электронов в различных сечениях разряда, соответствующего аксиальному профилю 2 на рис.5. ($m=2$, $R_1=5$ см., $R_2=7,5$ см., $P=0,05$ Тор. Общая длина разряда - 13 см.) 1- $z=12$ см., 2- $z=9$ см., 3- $z=6$ см., 4- $z=3$ см., $z=0$ см.

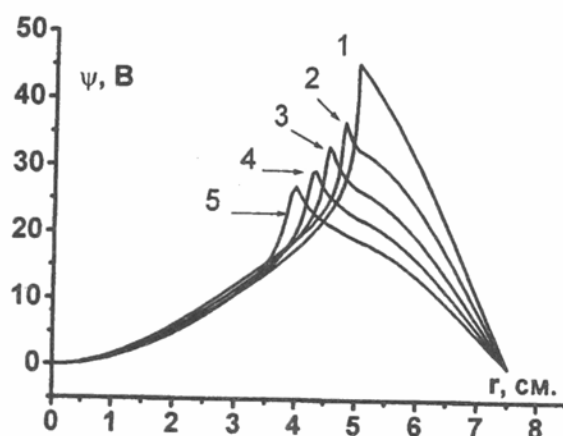


Рисунок 3.

Потенциал в различных сечениях волновода. Параметры и нумерация как на рис. 2.

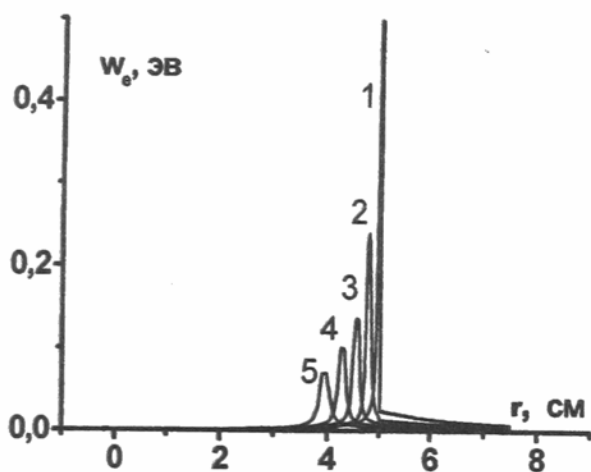


Рисунок 4.

Энергия колебаний электрона в поле волны в различных сечениях разряда. Параметры и нумерация как на рис. 2.

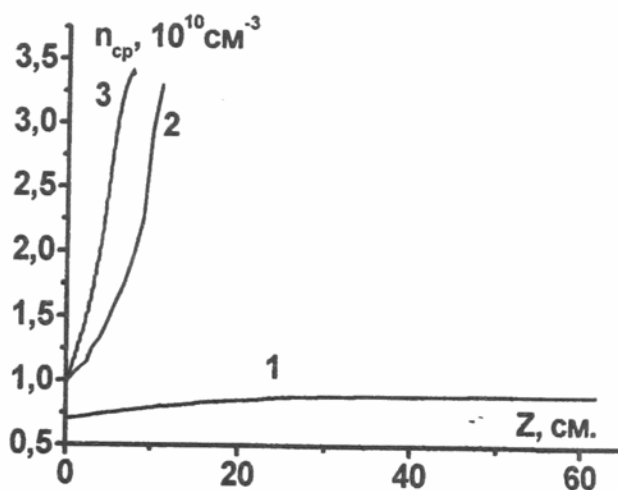


Рисунок 5.

Аксиальные распределения электронной плотности для различных мод. $R_1=5$ см., $R_2=7,5$ см., $P=0,05$ Тор. 1- $m=1$, 2- $m=2$, 3- $m=5$.

частота электронов совпадает с частотой волны, и потенциал достигает максимума по сечению. Напряженность поля и энергия w_e , определяющая ввод тепловой энергии в плазму как $1/3 v_{ea} w_e n$, имеет в резонансной точке острый максимум, т.е. основной нагрев плазмы происходит в довольно тонком слое (рис.4). Слой этот с понижением плотности вдоль оси разряда перемещается от периферии к оси и пропадает, когда плотность на оси приближается к критической (для данной частоты $n_{кр} \approx 8 \times 10^9$ см $^{-3}$). В сечениях, где плотность на краю близка к критической, поле волны слабо проникает в плазму и нагрев малоэффективен. Если плотность на оси меньше критической, то распределение потенциала принимает вид объемной волны по всему сечению волновода и при фиксированной амплитуде волны плотность источников тепла в плазме падает. Нагрев снова неэффективен. Эти два крайних сечения ограничивают длину разряда. Резюмируя, можно сказать, что плотности концов разряда лежат в пределах плотностей осевой и периферийной части, что иллюстрирует рис.2.

В ходе затухания волны вдоль разряда уменьшается w_e и ввод энергии в плазму. Уменьшается плотность, и точка резонанса смещается ближе к оси, где плотность больше. Тем самым стабилизируется ввод энергии в плазму.

Рассмотрим теперь аксиальные профили плотности. На рис.5 приведены результаты для различных мод несимметричной волны. Видно, что с ростом моды длина разряда убывает. Это согласуется с резу-

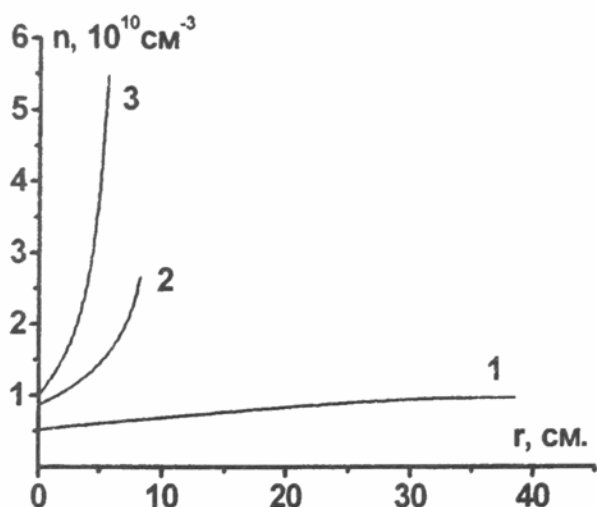


Рисунок 6.

Аксиальные распределения электронной плотности для различных мод. $R_1=5$ см., $R_2=7,5$ см., $P=0,1$ Тор. 1- $m=1$, 2- $m=2$, 3- $m=5$.

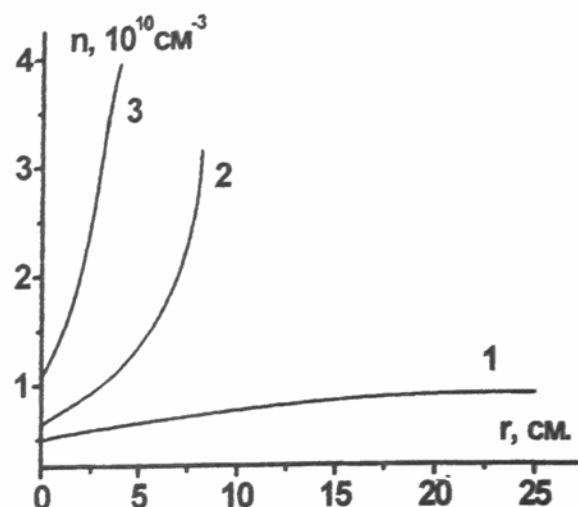


Рисунок 7.

Аксиальные распределения электронной плотности для различных мод. $R_1=3$ см., $R_2=4,5$ см., $P=0,1$ Тор. 1- $m=1$, 2- $m=2$, 3- $m=5$.

льтатами, полученными другими авторами [1] для симметричной волны и дипольной моды ($m=1$) и кроме того, вытекает из теоретических результатов, полученными в [5] для резонансного поглощения несимметричной волны в тонком слое, из которых следует, что декремент затухания для больших мод пропорционален $|m|$. Отметим, что для моды 5 волновое число в центральном сечении равно $k_3 = 1,08 + 0,09i$ см $^{-1}$, для $m=2$ $k_3 = 0,70 + 0,06i$ см $^{-1}$, а для $m=1$ $k_3 = 0,55 + 0,01i$ см $^{-1}$. Разница примерно в порядок между пространственными декрементами по сравнению с $m=1$ приводит, с одной стороны, к увеличению ввода мощности на единицу длины, что увеличивает плотность электронов, с другой – к уменьшению длины разряда. Затухание растет и с увеличением давления вследствие нарастания v_{ea} . На рис.6 показаны аксиальные профили для давления 0,1 Тор и прежних R_1 и R_2 . Заметно увеличение плотности, особенно для высших мод, и сокращение длины разряда. С уменьшением радиуса плазменного столба уменьшается разница между значениями плотности на оси и на краю разряда, что сказывается на сокращении длины (рис.6-7). Рис.7 соответствует $R_1=3$ и $R_2=4,5$ см.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Zhelyazkov I, Atanassov V. // Phys. Reports. 1995. V.255. P. 79-201.
2. Ferreira, C.M. // J.Phys:D 1981. V.14. P.1811-30.
3. C.M.Ferreira, M.Moisan. Microwave Discharges: Fundamental and Applications. N.Y., Plenum, 1993.
4. В.Е.Голант, А.П.Жилинский, И.Е.Сахаров. Основы физики плазмы. М., Атомиздат, 1977.
5. А.Н.Кондратенко. Поверхностные и объемные волны в ограниченной плазме. М., Энергоатомиздат, 1985.
6. А.А.Самарский. Теория разностных схем. М., Наука, 1989.
7. С.Ю.Еременко. Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. Харьков, "Основа", 1991.
8. Z.Zakrzewski, M.Moisan, V.M.M.Glaude, C.Beaudry, P.Leprince. // Plasma Physics, 1977, V.19, P.77-83.
9. S.Ashida, C.Lee, M.A.Lieberman. // J.Vac.Sci.Technol. A., 1995, V.13, P.2498-2507.

AXIAL AND RADIAL STRUCTURE OF CYLINDRICAL GAS DISCHARGE MAINTAINED BY ASYMMETRIC WAVE

N.A.Azarenkov, A.V.Gapon, I.B.Denisenko

Physics and Technology dpt. of Kharkov National University by V.Karazin,
Svobody sq., Kharkov 61077, Ukraine.

The stationary gas discharge in coaxial cylindrical structure plasma-vacuum-metal supported by high-frequency potential asymmetrical waves is considered. It is supposed, that the plasma is in a mode of an ambipolar diffusion, and the waves are considered in linear approach. The self-consistent set of equations and boundary conditions for the description of ionizing potential wave propagation in the discharge plasma are formulated. The method for the equation solving and results of calculation of axial and radial discharge parameters is submitted. The calculations are carried out for various azimuthal modes, pressures of working gas and geometrical parameters.

KEY WORDS: gas discharge, potential asymmetrical wave, self-consistent set of equations

УДК 533.951

КВАДРУПОЛЬНЫЕ НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В СЛАБОНЕОДНОРОДНОМ СТОЛБЕ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

Н.А. Азаренков¹, В.Ф. Клепиков², В.П. Олефир¹, А.Е. Споров²

¹Физико-технический факультет, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
310077, пл. Свободы 4, Харьков, Украина

²Научно-технический центр электрофизической обработки НАН Украины, 310002, ул. Чернышевского, 28 а/я 8812
Поступила в редакцию 26 ноября 1999 г.

В работе представлены результаты исследования дисперсионных свойств, пространственной структуры полей и энергетических характеристик непотенциальных несимметричных электромагнитных волн, распространяющихся вдоль слабонеоднородного столба магнитоактивной слабостолкновительной плазмы, расположенного в вакууме. Рассмотрены квадрупольные моды с азимутальным волновым числом $m = \pm 2$. Внешнее постоянное магнитное поле направлено вдоль оси волноводной системы. Плазма рассматривается в гидродинамическом приближении, как холодная радиально однородная среда. В приближении слабой продольной неоднородности плотности плазмы изучено влияние величины внешнего магнитного поля и радиуса столба плазмы на дисперсию, затухание и структуру поля волны. Показано, что величина внешнего магнитного поля существенно влияет на дисперсию, радиальную структуру поля и затухание волны. Полученные результаты позволяют оценить величину плотности плазмы, которая может поддерживаться в газовом разряде на квадрупольной волне.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: непотенциальная несимметричная электромагнитная волна, неоднородная плазма, дисперсионные свойства, коэффициент затухания, метод ВКБ, газовый разряд

В настоящее время продолжают интенсивные исследования газовых разрядов, которые поддерживаются волнами поверхностного типа (ВПТ). Это обусловлено перспективностью практического использования таких разрядов. Применение ВПТ, являющихся собственными волнами разрядной структуры, для поддержания разрядов позволяет использовать только одну рабочую моду и приводит к понижению затрат энергии по сравнению с нерезонансными разрядами [1].

Для теоретического моделирования разрядов на ВПТ, протекающих в длинных узких трубках, широко используется электродинамический подход [2]. Он состоит в наиболее полном учете электродинамических особенностей распространения волны в плазме. Особенности дисперсии, затухания и пространственного распределения поля волны во многом определяют параметры газового разряда, который поддерживается ВПТ. Анализ экспериментальных данных показывает, что основные свойства разрядов, поддерживаемых слабозатухающими симметричными ($m = 0$) и дипольными ($m = \pm 1$) ПВ, достаточно хорошо описываются в рамках электродинамического подхода [3].

В последнее время появились работы, указывающие на перспективность использования квадрупольных мод с азимутальными числами $m = \pm 2$, а также более высоких азимутальных мод для поддержания газового разряда [1]. Поэтому представляется актуальным исследование дисперсионных свойств, столкновительного затухания, пространственной структуры поля и энергетических характеристик квадрупольных ($m = \pm 2$) волн, распространяющихся вдоль слабонеоднородного столба плазмы, находящегося во внешнем постоянном аксиальном магнитном поле.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим высокочастотную несимметричную электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль столба плазмы радиуса R , помещенного в вакуум. Внешнее постоянное магнитное поле $\vec{B}_0$ направлено вдоль оси волноводной системы. Граница плазмы предполагается резкой [4]. Плазма рассматривается в гидродинамическом приближении как холодная слабопоглощающая среда с эффективной частотой электрон-нейтральных столкновений ν постоянной как в радиальном, так и в аксиальном направлениях. Приближение холодной плазмы справедливо для электромагнитных волн, фазовые скорости которых существенно превосходят тепловую скорость электронов [4].

Рассмотрим случай, когда в плазме возбуждается одна мода с азимутальным волновым числом m . Распределение плотности плазмы по радиусу предполагается однородным [2]. Рассмотрим длинные разряды (длина разряда гораздо больше длины волны) с малыми аксиальными градиентами плотности плазмы. В этом случае решение системы уравнений Максвелла в цилиндрической системе координат (r, ϕ, z) для компонент вектора напряженности электрического $E_{r,\phi,z}$ и магнитного $B_{r,\phi,z}$ полей волны может быть найдено используя

метод ВКБ [2,5]:

$$E_{r,\varphi,z}, B_{r,\varphi,z}(r, \varphi, z, t) = \operatorname{Re} \left\{ E_{r,\varphi,z}, B_{r,\varphi,z}(r, z) \exp(-i\omega t + im\varphi + \int_{z_0}^z k_3(z') dz') \right\}. \quad (1)$$

В рассматриваемом случае амплитуда поля, длина волны, плотность плазмы слабо изменяются на расстояниях порядка длины волны и можно получить локальное дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\frac{(Z_1 - Y_1 + e_1)(Z_2 - \varepsilon_3 Y_2 + h_2)}{(Z_1 - Y_2 + e_2)(Z_2 - \varepsilon_3 Y_1 + h_1)} = \frac{F_2}{F_1}, \quad (2)$$

где: $Z = \frac{k}{\psi} \frac{K'(\psi R)}{K(\psi R)}$, $e_s = \frac{m}{R_{PI}} \frac{k^3 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 F_s} \left[\frac{\varepsilon_3}{k_s^2} - \frac{1}{\psi^2} \right]$, $Y_s = \frac{k}{k_s} \frac{I_m'(k_s R)}{I_m(k_s R)}$, $h_s = \frac{m}{R_{PI}} \frac{\varepsilon_1}{k \varepsilon_2} F_s \left[\frac{1}{k_s^2} - \frac{1}{\psi^2} \right]$, $\psi^2 = k_3^2 - k^2$, k_3 -

аксиальное волновое число, $k = \omega / c$, $F_s = \varepsilon_3 (k_3^2 - k^2 \varepsilon_1) \varepsilon^{-1} - k_s^2$, $k_s^2 = p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - p_2}$,

$p_1 = [(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)(k_3^2 - k^2 \varepsilon_1) + k^2 \varepsilon_2^2](2\varepsilon_1)^{-1}$, $p_2 = \varepsilon_3[(k_3^2 - k^2 \varepsilon_1)^2 - k^4 \varepsilon_2^2]$, штрих означает производную по аргументу, $\varepsilon_{1,2,3}$ - компоненты тензора диэлектрической проницаемости холодной магнитоактивной плазмы [4].

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Локальное дисперсионное уравнение (2) для произвольных значений радиуса плазмы и магнитного поля допускает только численное решение. Результаты решения уравнения (2) представлены на рис. 1 - 4. В отличие от обычного дисперсионного уравнения, которое связывает частоту волны и ее длину, в рассматриваемом случае, когда частота волны фиксирована и определяется генератором, локальное дисперсионное уравнение связывает локальное значение плотности плазмы и длину волны. Зависимость безразмерной частоты волны $\tilde{\omega} = \omega \omega_{pe}^{-1}$ от безразмерного аксиального волнового числа $\tilde{k} = k_3 R$ для различных значений безразмерного радиуса плазменного столба $\sigma = \omega R c^{-1}$ для квадрупольной моды $m = -2$ представлена на рис. 1 для фиксированного значения безразмерного внешнего магнитного поля $\Omega = \omega_{ce} \omega^{-1}$, где ω_{pe} , ω_{ce} - электронные плазменная и циклотронная частоты, соответственно. Наибольшее влияние величина безразмерного радиуса плазменного столба оказывает в области малых значений $\tilde{k}$, где при малых σ дисперсия волны может стать обратной. В области больших $\tilde{k}$ влияние безразмерного радиуса плазменного столба незначительно. Для не слишком малых значений параметра σ ($\sigma > 0.5$) дисперсия волны прямая. На рис. 2 представлено влияние величины σ на дисперсионные свойства квадрупольной моды $m = 2$. Отметим, что дисперсия этой моды обратная для всех рассмотренных значений параметра σ . Аналогично моде $m = -2$ влияние σ наибольшее в области малых $\tilde{k}$.

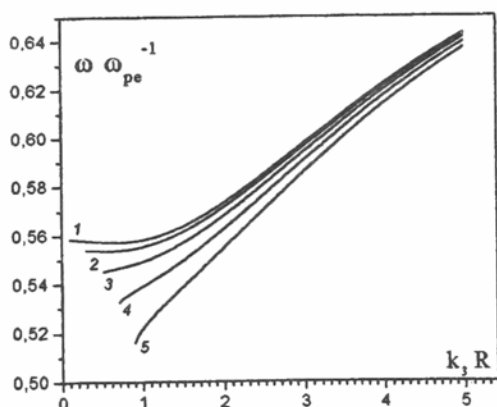


Рисунок 1. Дисперсионные свойства квадрупольной волны ($m = -2$). $\Omega = 0.6$. Цифры 1-5, отвечают значениям параметра $\sigma = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$, соответственно.

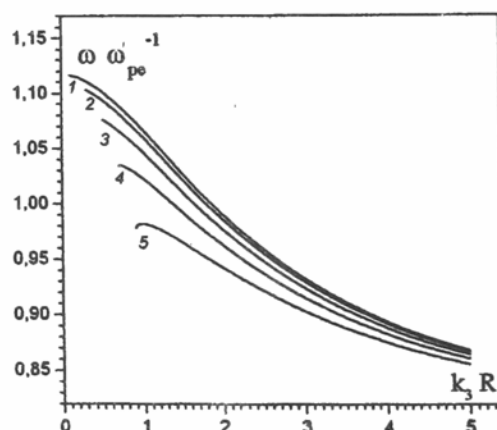


Рисунок 2. Дисперсионные свойства квадрупольной волны ($m = 2$). $\Omega = 0.6$. Цифры 1-5, отвечают значениям параметра $\sigma = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$, соответственно.

В реальных условиях диаметр плазменного столба фиксирован и определяется диаметром диэлектрической трубки, в которой протекает разряд. Управлять параметрами разряда можно с помощью внешнего магнитного поля. Влияние величины внешнего магнитного поля на дисперсионные свойства квадрупольных мод $m = \mp 2$ приведено на рис. 3, 4, соответственно. Для моды $m = -2$ в случае слабых магнитных полей ($\Omega < 0.3$) существует

область аксиальных волновых чисел $\tilde{k}$, где дисперсия волны обратная. С увеличением магнитного поля размеры этой области уменьшаются и при $\Omega \geq 0.6$ дисперсия волны становится прямой для всех $\tilde{k}$. Дисперсионные свойства моды $m = -2$ существенно изменяются при сильных магнитных полях ($\Omega > 1$). В этом случае уравнение (2) при заданной частоте генератора и плотности плазмы имеет множество решений, представляющих собой собственные волны волноводной структуры с разными аксиальными волновыми числами $\tilde{k}$. Эти волны имеют различную радиальную структуру поля и скорость распространения. Дисперсия моды $m = -2$ приобретает, так называемый, "зонный характер", связанный с осциллирующим поведением функций Бесселя, определяющих радиальную структуру поля волны [2]. Для каждой зоны существует такое критическое волновое число $\tilde{k}_{\text{ст}}$, меньше которого волна с определенной радиальной структурой поля не существует. Нумерацию зон можно провести в зависимости от величины $\tilde{k}_{\text{ст}}$. Нулевая зона соответствует минимально возможному $\tilde{k}_{\text{ст}}$. Большим значением $\tilde{k}_{\text{ст}}$ соответствует и больший номер зоны. При усилении внешнего магнитного поля дисперсионные зоны сближаются и дисперсионные кривые стремятся к предельной кривой, соответствующей бесконечному магнитному полю. Моде $m = -2$ нулевой зоны характеризуются прямой дисперсией. Для первой и более высоких зон возможны решения, соответствующие волнам с одинаковой длиной волны, но разным характером дисперсии. В этом случае дисперсия волны может быть прямой или обратной в зависимости от частоты генератора и локальной плотности плазмы. Волна, имеющая обратную дисперсию, распространяется в плазме с большей плотностью, чем волна с прямой дисперсией. Для фиксированного номера зоны безразмерная частота волны $\tilde{\omega}$ возрастает с увеличением внешнего магнитного поля. Квадрупольная мода $m = 2$ (рис. 4) характеризуется обратной дисперсией в случае слабых внешних магнитных полей ($\Omega < 1$). Аналогично квадрупольной моде $m = -2$, дисперсия моды $m = 2$ при сильных магнитных полях ($\Omega > 1$) принимает зонный характер. Однако, в этом случае волны не только высших, но и нулевой дисперсионной зоны характеризуются наличием областей как прямой, так и обратной дисперсии.

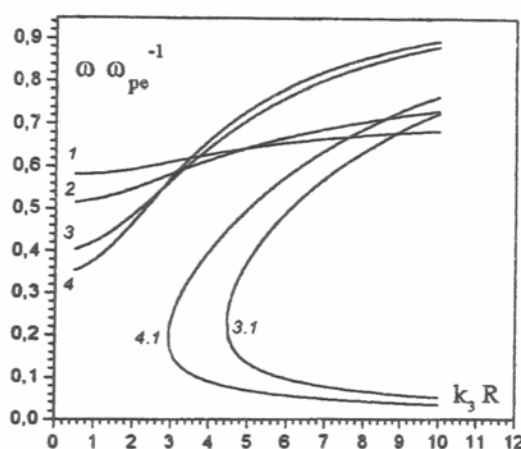


Рисунок 3. Дисперсионные свойства квадрупольной волны ($m = -2$). $\sigma = 0.5$. Цифры 1-4, отвечают значениям параметра $\Omega = 0.4, 0.8, 2.0, 3.0$, соответственно (в случае сильных магнитных полей - нулевая зона). Цифры 3.1 и 4.1 отвечают значениям $\Omega = 2.0, 3.0$ для первой зоны.

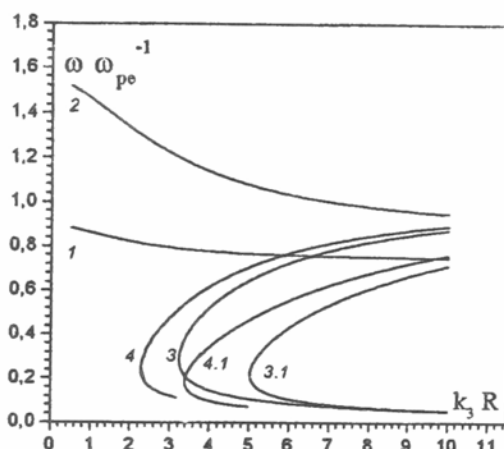


Рисунок 4. Дисперсионные свойства квадрупольной волны ($m = 2$). $\sigma = 0.5$. Цифры 1-4, отвечают значениям параметра $\Omega = 0.4, 0.8, 2.0, 3.0$, соответственно (в случае сильных магнитных полей - нулевая зона). Цифры 3.1 и 4.1 отвечают значениям $\Omega = 2.0, 3.0$ для первой зоны.

Отметим, что влияние величины внешнего магнитного поля и радиуса плазменного столба на дисперсию квадрупольных мод наибольшее в области малых аксиальными волновыми числами $\tilde{k} \sim \sigma$. В области больших аксиальных волновых чисел (при уменьшении фазовой скорости волны) влияние указанных параметров мало.

При распространении собственной волны волноводной структуры вдоль слабонеоднородного столба плазмы в направлении уменьшения плотности длина волны уменьшается. При этом изменяется радиальная структура поля волны, определяемая радиальными волновыми числами $k_{1,2}$. В случае, если радиальные волновые числа вещественны, то волна поверхностная. Когда k_1 и k_2 комплексно сопряженные волна имеет обобщенно - поверхностный характер. Если одно из радиальных волновых чисел вещественно, а другое мнимое, то волна является псевдоповерхностной. В случае мнимых $k_{1,2}$ волна является объемной [4]. В слабых магнитных полях ($\Omega < 1$) на локальной дисперсионной кривой есть точка изменения типа волны, в которой $k_1 = k_2$. Это особая точка, в которой локальное дисперсионное уравнение не справедливо. Для определения дисперсионных свойств волны в этой особой точке необходимо численно решать систему дифференциальных уравнений Максвелла. При слабых магнитных полях квадрупольная мода $m = -2$ обобщенно - поверхностная в

области малых $\tilde{k}$ и чисто поверхностная при больших $\tilde{k}$. Мода $m=2$ является поверхностной волной при больших $\tilde{k}$, а в области малых аксиальных волновых чисел может быть либо псевдоповерхностной волной при $\Omega > 0.4$, либо обобщенно - поверхностной при $\Omega < 0.4$. При сильных магнитных полях в области прямой дисперсии мода $m=-2$ может быть псевдоповерхностной в области больших $\tilde{k}$ и обобщенно - поверхностной при малых $\tilde{k}$ в нулевой зоне дисперсии. Для первой и более высоких зон волна псевдоповерхностная и может стать чисто объемной волной в области обратной дисперсии при достаточно сильных магнитных полях ($\Omega > 3$). Мода $m=2$ является псевдоповерхностной во всей области существования.

Исследования энергетических характеристик показало, что поток энергии квадрупольных мод $m=\pm 2$ в вакууме значительно превышает поток через поперечное сечение плазменного столба. Полный поток энергии квадрупольной моды $m=-2$ положителен и максимален в области малых аксиальных волновых чисел $\tilde{k}$. Для моды $m=2$ для слабых магнитных полей полный поток энергии отрицательный и становится положительным при сильных магнитных полях. Проведенный анализ позволяет сделать вывод о том, что квадрупольная мода $m=-2$ является перспективной для поддержания разряда. Коэффициент затухания волны с $m=-2$ в направлении распространения максимален в области малых $\tilde{k}$ и уменьшается с ростом внешнего магнитного поля и можно ожидать увеличения длины разряда на моде $m=-2$ при увеличении внешнего магнитного поля.

ВЫВОДЫ

Исследовано влияние величины внешнего магнитного поля и радиуса столба плазмы на дисперсию, затухание, структуру поля и энергетические характеристики квадрупольных волн, распространяющихся в слабо аксиально неоднородном столбе плазмы. Показано, что внешнее магнитное поле существенно влияет на дисперсию, радиальную структуру поля, затухание и энергетические характеристики волны. Это позволяет эффективно управлять параметрами газового разряда, поддерживаемого этими волнами. Проведенные расчеты позволяют оценить максимально величину плотности плазмы, которая может поддерживаться в разряде. Исследование энергетических характеристик и коэффициента затухания собственных волн волноводной структуры позволяет оценить перспективность использования мод $m=\pm 2$ для поддержания разряда. Мода $m=-2$ может быть использована для поддержания разряда в широком диапазоне значений радиуса плазменного столба и внешнего магнитного поля, а мода $m=2$ - только в случае сильного магнитного поля.

Эта работа частично поддержана Украинским Научно-Технологическим центром (УНТЦ, проект № 317).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Moisan M., Hubert J., Margot J. and Zakrzewski Z. *The Development and Use of Surface-Wave Sustained Discharges for Applications, in Advanced Technologies Based on Wave and Beam Generated Plasmas*, Amsterdam: Kluwer Academic Publisher, 1999, pp. 1 - 42.
2. Zhelyazkov I., Atanassov V. // *Physics Reports*, v. 255, 1995, p. 79.
3. Sola A., Gamero A., Cotrino J. and Colomer V. // *J. Appl. Phys.*, v. 64, 1988, p. 3419.
4. Кондратенко А.Н. *Поверхностные и объемные волны в ограниченной плазме*, Москва: Энергоатомиздат, 1985, 208 с.
5. Lister G.G., Robinson T.R. // *J. Phys. D, Appl. Phys.*, v. 24, №18, 1991, p. 1993.

QUADRUPOLEAR NONPOTENTIAL WAVES IN SLIGHTLY NONUNIFORM COLUMN OF MAGNETOACTIVE PLASMA

N.A. Azarenkov¹, V.F. Klepikov², V.P. Olefir¹, A.E. Sporov²

¹Physical-Technical Department, Kharkov National University, 310007, Svobody sq.4, Kharkov, Ukraine

²Scientific and Technological Center of Electrophysics, National Academy of Sciences of Ukraine
28 Chernychevskiy Str., P.O. Box 8812, UA-310002 Kharkiv, Ukraine

This paper is devoted to the investigation of the dispersion properties, spatial field structure and energy characteristics of nonpotential nonsymmetric electromagnetic waves, that propagated along slightly nonuniform column of magnetized slightly collisional plasma immersed in vacuum. The quadrupolar modes with azimuthal wave number $m=\pm 2$ are considered. The external constant magnetic field is directed along an axes of waveguide system. Plasma is considered in hydrodynamic approximation, as cold, radially uniform medium. The influence of external magnetic field value and plasma column radius on the dispersion properties, damping decrement and wave field structure are investigated in the approximation of a weak longitudinal plasma density inhomogeneity. It is shown, that the external magnetic field value essentially influences on the dispersion properties, on the wave field radial structure and on the wave damping decrement. The obtained results may be useful for estimations of plasma density value, that can be sustained in gas discharge on the quadrupolar wave.

KEY WORDS: nonpotential nonsymmetric electromagnetic wave, nonuniform plasma, dispersion properties, damping decrement, WKB approximation, gas discharge

УДК 537.52

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ АНОДНОГО СЛОЯ РАЗРЯДА В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

С.Н. Аболмасов, А.А. Бизюков, А.Е. Кашаба, К.Н. Серeda

Харьковский Государственный Университет, Физико-технический факультет, кафедра физики плазмы.
Украина, 61108, Харьков, пр. Курчатова, 31.

E-mail: biziukov@pht.univer.kharkov.ua

Поступила в редакцию 26 ноября 1999 г.

В настоящей работе приводятся результаты исследования макроскопической устойчивости анодного слоя разряда низкого давления в сильном поперечном магнитном поле в диффузионном приближении с учетом ионизационных процессов. Показано, что при инжекции первичных электронов в катодную область разряд неустойчив. Разрядный ток имеет импульсный характер и обеспечивается периодическим прохождением разрядного промежутка электронным сгустком (слоем). Количество электронов в слое определяется текущим значением падения электрического потенциала на пространственном заряде слоя, а скорость – классической подвижностью электронов поперек магнитного поля. Движущийся электронный слой является нестационарным источником электронов и ионов, уходящих на катод разрядной системы. Неустойчивость приводит к сильной модуляции параметров разряда и появлению особенностей на стационарных токовых характеристиках.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: разряд в поперечном магнитном поле, электронный слой, неустойчивость, модуляция.

В настоящее время получили широкое распространение и интенсивно исследуются плазмодинамические системы, использующие в качестве активного элемента, генерирующего и ускоряющего плазменный поток, плазменные устройства на основе электрического газового разряда в поперечном магнитном поле [1], которые обеспечивают широкие возможности получения и управления параметрами потоков заряженных частиц. Характерной особенностью таких систем является образование анодного слоя отрицательного пространственного заряда, в котором сосредоточено практически все падение напряжения на разряде и происходят основные процессы генерации и ускорения заряженных частиц [2]. К настоящему времени теоретические и экспериментальные исследования разрядных систем с поперечным магнитным полем позволили установить механизм образования анодного слоя пространственного заряда, его основные свойства, особенности генерации и ускорения заряженных частиц. Было показано, что статические характеристики такого разряда довольно хорошо описываются в рамках классической диффузионной теории [3]. Вместе с тем, в экспериментах наблюдались явления, которые не смогли найти объяснения в рамках классической диффузионной теории и требующие, для своего понимания, дальнейших, более детальных исследований: нелинейная зависимость разрядного тока от величины магнитного поля, электроны аномально большой энергии, идущие на катод вдоль магнитного поля, модуляция разрядных параметров, свидетельствующая о неустойчивости разряда [2, 4, 5].

В настоящей работе приводятся результаты исследования макроскопической устойчивости анодного слоя разряда низкого давления в сильном поперечном магнитном поле в диффузионном приближении с учетом ионизационных процессов.

МОДЕЛЬ АНОДНОГО СЛОЯ

Рассмотрим одномерную модель анодного слоя разряда, сформулированную на основе диффузионной теории в предположении классической подвижности замагниченных электронов поперёк магнитного поля и незамагниченности ионов [3]. В сильных магнитных полях и при низких давлениях газа $\tau_e \gg \tau_i \gg 1/\nu_i$, где $\tau_e = d/b_e E$,

$\tau_i = \frac{d}{\sqrt{2eU/m_i}}$ – характерные времена удержания электронов и ионов в разрядной системе, d – расстояние между электродами, b_e – поперечная подвижность электронов, E – напряжённость электрического поля, U – разность потенциалов ϕ на электродах, ν_i – частота ионизации газа. В этом приближении уравнения баланса заряженных частиц в анодном слое носят квазистационарный характер и параметры слоя легко определяются [3, 4]:

$$n_e \gg n_i, \quad d^* = \sqrt{2U_0 b_e / \nu_i} \leq d.$$

$$n_e = n_0 = \frac{\nu_i}{4\pi e b_e} = \frac{1}{4\pi e m c^2} \frac{\nu_i}{\nu} H^2,$$

где n_e, n_i – плотности электронов и ионов в разрядном промежутке, d^* – размер анодного слоя, соответствующий полной экранировке внешнего электрического поля объёмным зарядом слоя, U_0 – падение напряжения на слое, ν – частота электрон-атомных столкновений, H – напряжённость магнитного поля.

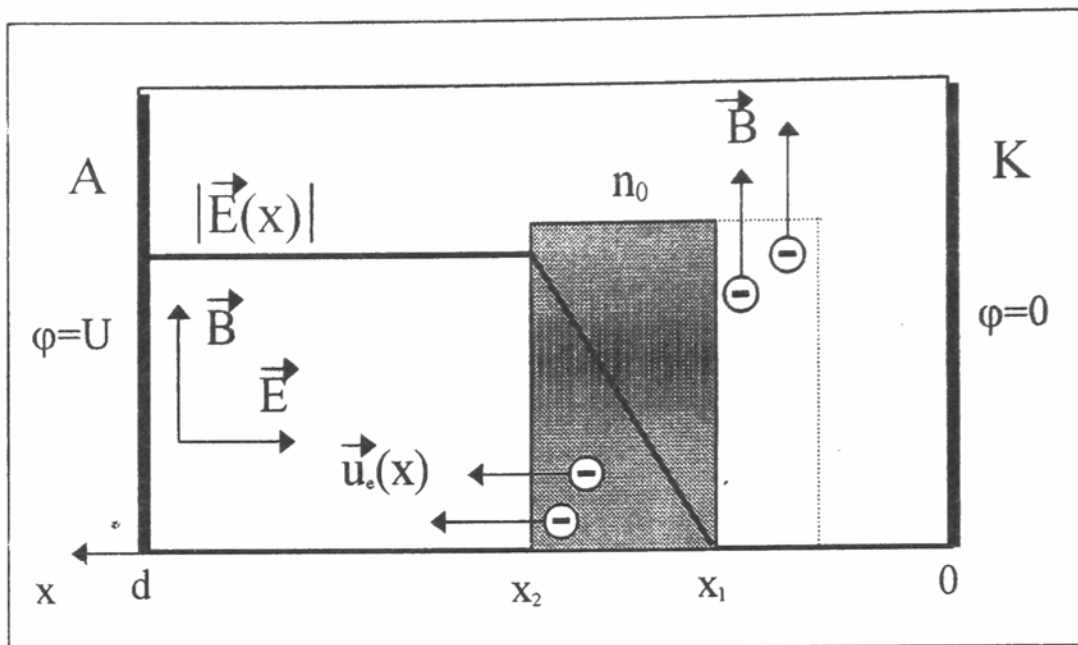


Рис. 1. Геометрия одномерной модели анодного слоя разряда

При $d \gg d^*$ слой замагниченных электронов, плотностью n_0 , формируется в катодной области за счёт ионизационной эмиссии с катода и ионизации в объеме. За начальный момент времени $t = 0$, принимается момент времени, когда плотность электронов в слое достигла значения n_0 , а размер анодного слоя – такого значения Δ_0 , что объёмный заряд слоя является достаточным, чтобы полностью экранировать внешнее электрическое поле в точке $x_1 = 0$ на низковольтной границе слоя (рис. 1). При этом ток первичных электронов с катода прекращается, слой отрывается от катода и электроны за счёт столкновений движутся к аноду со скоростью дрейфа $\vec{u}_e = -b_e \vec{E}$. По мере движения слоя в сторону анода плотность электронов поддерживается постоянной, равной n_0 , за счёт баланса между нарастанием количества электронов в слое вследствие ионизации, увеличения размера слоя Δ и ухода “лишних” электронов вдоль магнитных силовых линий на катод с низковольтной границы слоя. Электроны удерживаются лишь в области $E > 0$ при $x > x_1$, что и определяет динамику низковольтной границы слоя. Стадии образования и поглощения слоя анодом данной моделью подробно не рассматриваются.

Таким образом, через разрядную систему движется сгусток (слой) электронов, скорость которого определяется классической подвижностью электронов в магнитном поле, плотность – балансом между скоростью объёмной ионизации и скоростью поперечной диффузии, а размер – полной экранировкой внешнего электрического поля. Поглощение слоя анодом приводит к исчезновению экранировки, электрическое поле проникает к катоду, стимулирует ионизационные процессы в катодной области и процесс повторяется.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Исходя из модели, ширину анодного слоя Δ можно найти путем решения уравнения Пуассона ($d^2\phi/dx^2 = 4\pi en_0$ в области слоя и $d^2\phi/dx^2 = 0$ вне её) при соответствующих граничных условиях. При этом найдем Δ как функцию пространственной координаты x_2 :

$$\Delta(x_2) = x_2 - x_1 = \sqrt{(d - x_2)^2 + d^{*2}} - (d - x_2),$$

где $d^* = \frac{\sqrt{2eU/m_e}}{\omega_{He}} \cdot \sqrt{\frac{v}{v_i}}$ — представляет собой максимальный размер слоя ($x_2 = d$). Минимальный размер анодного слоя Δ_0 определяется условием $x_1 = 0$:

$$\Delta_0 = \Delta(x_1 = 0) = d - \sqrt{d^2 - d^{*2}} \approx d^{*2}/2d.$$

Временную зависимость $\Delta(\tau)$, где $\tau = v_i t$, можно получить путем перехода от пространственных координат к временным:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \tau} = \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \tau} = \frac{2\Delta}{1 + (d^*/\Delta)^2}.$$

Решение дифференциального уравнения $\Delta = \Delta(\tau)$ представлено на рис. 2. Видно, что размер слоя с течением времени увеличивается и достигает своего максимального значения d^* вблизи анода. Аналогично временной зависимости $\Delta(\tau)$ ведет себя и плотность ионного тока, выходящего из слоя в сторону катода:

$$j_i(\tau) = en_0 v_i \Delta(\tau).$$

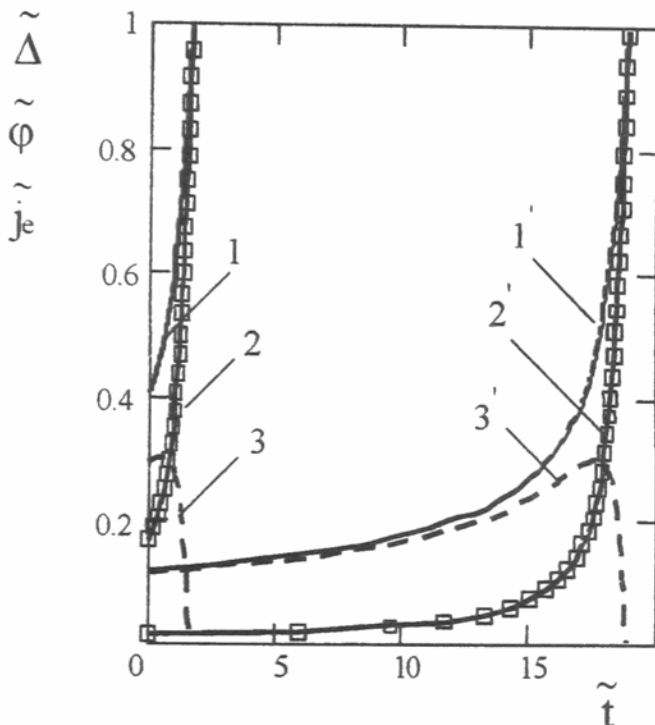


Рис. 2. Зависимость ширины электронного слоя ($\tilde{\Delta} = \Delta/d^*$), электрического потенциала высоковольтной границы слоя ($\tilde{\varphi} = \varphi(x_2)/U$) и электронного тока на катод разрядной системы ($\tilde{j}_e = j_e/en_0 v_i d^*$) от времени ($\tilde{t} = v_i t$) при разных значениях напряжения на разряде (1, 2, 3 — $U = 1\text{кВ}$, 1', 2', 3' — $U = 3\text{кВ}$ при $H = 3000\text{ Э}$).

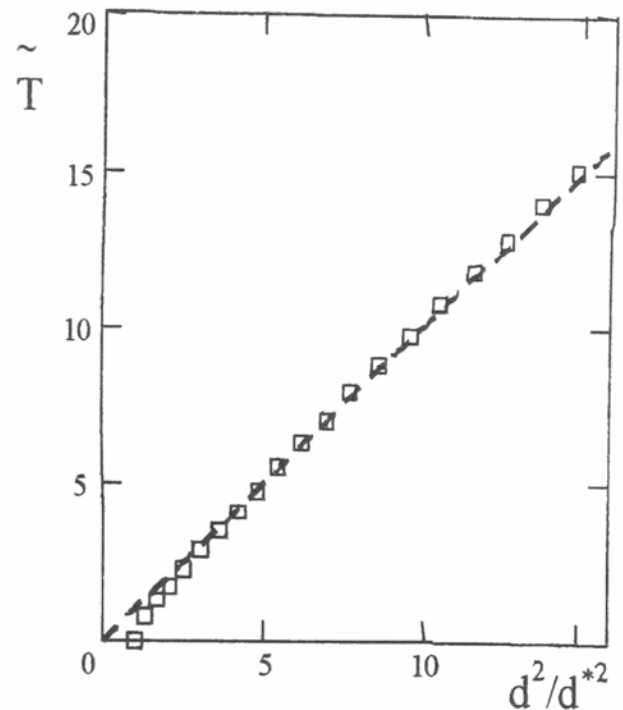


Рис. 3. Зависимость времени прохождения электронным слоем разрядной системы ($\tilde{T} = v_i T$) от эффективной длины разрядного промежутка $d^2/d^{*2} = v_i \cdot \tau_e/2$.

Обращает на себя внимание сильная модуляция ионного тока за время прохождения слоем разрядного промежутка.

Из решения уравнения Пуассона также можно получить временную эволюцию потенциала на высоковольтной границе слоя в точке x_2 :

$$\frac{\varphi(\tau)}{U} = \frac{2\pi en_0}{U} \Delta^2(\tau) = \frac{\Delta^2(\tau)}{d^{*2}}.$$

Эта зависимость определяет временную динамику максимальной энергии ионов, которые образуются в слое в результате ударной ионизации газа электронами, и модуляцию функции распределения ионов по энергиям. График зависимости $\varphi(\tau)/U$ представлен на рис. 2.

Количество электронов уходящих из движущегося через разрядный промежуток слоя можно определить как разность между количеством электронов, которые появились в единицу времени за счёт ионизации и количеством электронов, которые необходимы для поддержания экранировки внешнего электрического поля слоем:

$$j_e(\tau) = en_0 v_i \left(1 - \frac{1}{\Delta(\tau)} \frac{d\Delta(\tau)}{d\tau} \right) \Delta(\tau) = en_0 v_i \left(1 - \frac{2}{1 + (d^*/\Delta(\tau))^2} \right) \Delta(\tau).$$

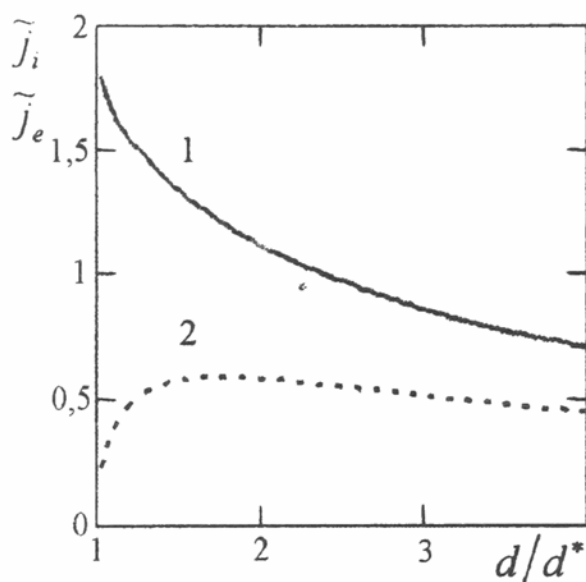


Рис. 4. Зависимости средних плотностей ионного и электронного токов на катод от эффективной длины разрядного промежутка. Токи нормированы на величину $j_0 = \frac{en_0 v_i d^*}{2} = \frac{v_i U}{4\pi d^*}$

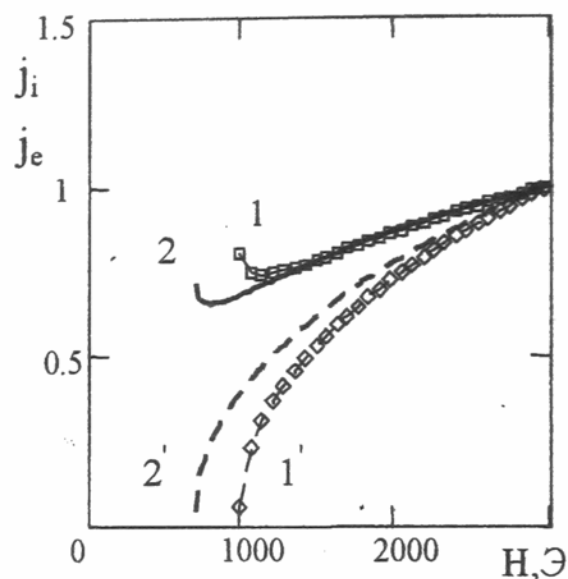


Рис. 5. Зависимость средних за период неустойчивости токов ионов и электронов на катод от напряжённости магнитного поля (1, 1' - $U = 1\text{кВ}$; 2, 2' - $U = 2\text{кВ}$). Токи нормированы на их максимальную величину при $H_i = 3000\text{ Э}$

На рис.2 показаны графики зависимостей $j_e = j_e(\tau)$, где j_e – плотность тока электронов, уходящих с низковольтной границы слоя на катод вдоль магнитных силовых линий. Максимальный выброс электронов слоем происходит вблизи анода и предшествует фазе спада плотности ионного тока. Ток электронов на катод вдоль силовых линий магнитного поля состоит из электронов, которые имеют аномально большую энергию за счёт длительного движения в поперечном направлении в сильном электрическом поле слоя.

Время прохождения слоем разрядного промежутка и период модуляции параметров разряда определяются выражением:

$$T = \int_{\Delta_0}^d \frac{dx_2}{b_e E(x_2)} = \frac{1}{4v_i} \left[2 \ln \left(\frac{\Delta}{\Delta_0} \right) + \left(\frac{d^*}{\Delta_0} \right) - 1 \right].$$

Можно показать, что при $d \gg d^*$

$$T = \frac{\tau_e}{2} = \frac{d^2}{2b_e U}.$$

Отсюда видно, что период колебаний параметров разряда определяется классической поперечной подвижностью электронов в магнитном поле (рис. 3). Электронный ток на анод будет поступать в виде отдельных импульсов с характерной длительностью $T_A = T \cdot d^*/d \ll T$.

Усреднённые за период колебаний плотности ионного и электронного токов можно представить в виде:

$$\langle j_i \rangle = \frac{en_0 v_i}{d - \Delta_0} \int_{\Delta_0}^d \Delta(x) dx = \frac{en_0 v_i}{2} \left[\Delta_0 - \frac{d^{*2}}{d - \Delta_0} \ln \left(\frac{d^*}{2d - \Delta_0} \right) \right],$$

$$\langle j_e \rangle = \frac{en_0 v_i}{d - \Delta_0} \int_{\Delta_0}^d \left(\Delta(x) - \frac{2\Delta(x)}{1 + (d^*/\Delta(x))^2} \right) dx = \frac{en_0 v_i}{2} \left[\frac{d^{*2}}{d - \Delta_0} \ln \left(\frac{2d - \Delta_0}{d^*} \right) - \Delta_0 \right].$$

Зависимости средних плотностей ионного и электронного токов от эффективной длины разрядного промежутка и от величины магнитного поля представлены на рис. 4 и рис. 5. Аналогичные нелинейные и немонотонные зависимости токовых характеристик от внешних параметров разряда получены также экспериментально [2–5].

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы относительно природы неустойчивости анодного слоя и механизма подвижности электронов в анодном слое как поперек магнитного поля, так и вдоль магнитных силовых линий:

1. Разряд низкого давления в сильном поперечном магнитном поле при $d \gg d^*$ неустойчив.
2. Разрядный ток имеет импульсный характер и обеспечивается периодическим прохождением разрядного промежутка электронным сгустком (слоем). Количество электронов в слое определяется текущим значением падения электрического потенциала на пространственном заряде слоя, а скорость – классической подвижностью электронов поперёк магнитного поля.
3. Движущийся электронный слой является нестационарным источником электронов и ионов, уходящих на катод разрядной системы. Неустойчивость приводит к сильной модуляции параметров разряда и появлению особенностей на стационарных токовых характеристиках.
4. При $d < d^*$ или инжекции первичных электронов в анодную область разряд устойчив.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов А.И. Плазменные ускорители. - В кн.: Плазменные ускорители. М. "Машиностроение", 1973, С. 5 - 15.
2. Гришин С.Д., Лесков Л.С., Козлов Н.П. Электрические ракетные двигатели. М. "Машиностроение", 1975, 272 С.
3. Кервалишвили Н.А., Жаринов А.В. // ЖТФ, 1972, XXXV, С. 2194 - 2199.
4. Бархударов Э.М., Кервалишвили Н.А., Кортхонджия В.П. // ЖТФ, XLII, С. 1904 - 1908.
5. Кервалишвили Н.А. // Физика плазмы, 1989, T.15, B.2, С. 171 - 174.

INSTABILITY OF ANODE LAYER OF DISCHARGE IN TRANSVERSAL MAGNETIC FIELD

S.N. Abolmasov, A.A. Bizyukov, A.Y. Kashaba, K.N. Sereda

Kharkov State University, Faculty of Physics and Technology, Department of Plasma Physics,
Kurchatov Ave. 31, 61108, Kharkov, Ukraine

In this paper the research results of macroscopic stability of anode layer of low pressure discharge in a strong transversal magnetic field in a diffusive approximation taking into account ionization processes are presented. It is shown that with injection of primary electrons into cathode area the discharge is unstable. The discharge current has impulse character and is provided by periodic transiting of a discharge gap by an electron bunch (layer). The amount of electrons in a layer is determined by a current value of electrostatic potential difference on a space charge of a layer, and speed – by classical mobility of electrons across magnetic field. The moving electron layer is a non-stationary source of electrons and ions, which travel on the cathode of discharge system. The instability results in strong modulation of discharge parameters and appearance of features on stationary current characteristics.

KEY WORDS: discharge in transversal magnetic field, electron layer, instability, modulation.

UDC 533.9.435

ФОРМИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ СГУСТКОВ ВОЛНАМИ БЕРНШТЕЙНА-ГРИНА-КРУСКАЛА

Ю.А.Бизюков, В.И.Муратов, В.Д.Федорченко

Харьковский национальный университет, 310077, Харьков, пл.Свободы, 4.

Поступила в редакцию 25 ноября 1999 г.

Экспериментально исследуются волны конечной амплитуды с большим числом захваченных частиц (БГК-волны). Для создания такой волны используется двухпотоковая система в однородном магнитном поле. При определенных соотношениях скоростей и токов пучков экспериментально наблюдается формирование электронных сгустков, электрический потенциал которых имеет вид узкого ($\sim 10^{-10}$ сек.) однополярного импульса. Его амплитуда оценивается по энергии ускоренных волной электронов и скорости волны.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: электронный сгусток, БГК - волны, захват пучка волной, ускорение электронов волной конечной амплитуды.

Известно, что в бесстолкновительной плазме могут распространяться нелинейные волны произвольного профиля, который определяется начальной функцией распределения захваченных частиц. Эти волны называются БГК - модой в честь Бернштейна, Грина и Крускала, которые первыми показали, что возможно существование незатухающих волн с произвольными частотами, волновыми числами, амплитудой и профилем [1].

Бакаем [2,3] построена самосогласованная теория медленно эволюционирующих БГК - волн, на основе которой можно найти, какой должна быть начальная однородная функция распределения частиц, чтобы придать нелинейной волне тот или иной профиль. Теория содержит два ограничения: число экстремальных точек профиля волны не меняется в процессе медленной эволюции и профиль волны симметричен относительно экстремальных точек при наличии резонансных частиц только одного сорта. Кроме того, профиль волны наиболее чувствителен к изменениям распределения захваченных частиц при малых амплитудах волны, поэтому начальная стадия эволюции волны наиболее благоприятна для изменения ее формы.

Существует ряд численных экспериментов, в которых изучался процесс образования БГК - волн в результате развития пучковой неустойчивости [4].

Хотя практическая реализация возбуждения БГК - волн представляет большой интерес, нам известно очень мало экспериментальных работ в этом направлении. Так, в работе [5] изучалась эволюция волн в ограниченном плазменном столбе в сильном магнитном поле, в который инжектировались два электронных пучка. Плотность первого (основного) пучка сравнима с плотностью плазмы, и он использовался для создания плазмы и усиления волн. Плотность второго (управляющего) пучка много меньше плотности плазмы, он использовался для управления профилем волны. Скорость первого пучка выбиралась так, что он работал в закритическом режиме. Пучки с закритической скоростью, теоретически и экспериментально исследованные в работах [6,7], усиливают только волны конечной амплитуды, если эта амплитуда превышает пороговое значение, выше которой происходит захват частиц пучка волной. Поэтому шумы малых амплитуд закритическим пучком не усиливаются и не создают дополнительных помех, искажающих эволюционный процесс. При выполнении указанных условий авторам [5] удалось сформировать нелинейные БГК-волны в виде положительных и отрицательных импульсов потенциала, практически не меняя средних параметров плазмы.

Целью настоящей работы является изучение возможности получения коротких электронных сгустков с помощью БГК- волн.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 1. Через металлическую трубу диаметром 9 см, расположенную в однородном магнитном поле напряженностью 400 Э, проходят взаимопроникающие электронные пучки. Электроны инжектируются пушками (1 и 2). Эмиттером электронов первого пучка является таблетка из гексаборида лантана диаметром 0,6 см, второго - плоская танталовая спираль, пронизываемая электронами первого пучка. Ускоряющее переменное напряжение с частотой 50 Гц подается на катоды пушек. Генерация волн исследуется в максимуме синусоидального напряжения. Скорости обоих

пучков превышают критическую скорость и составляют $3 \cdot 10^9$ см/сек и $3,3 \cdot 10^9$ см/сек. Суммарный ток — 40-50 мА.

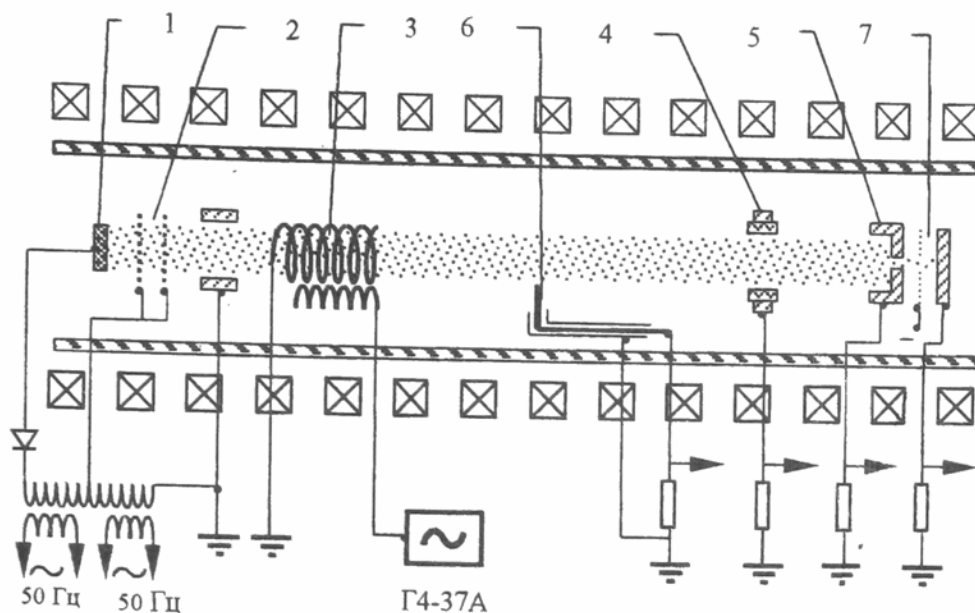


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: 1, 2 — электронные пушки; 3 — модулятор; 4 — емкостной зонд; 5 — коллектор; 6 — подвижный высокочастотный зонд; 7 — электростатический анализатор.

Форма тока и ускоряющего напряжения приведена на рис. 2. Рабочее давление в камере $2 \cdot 10^{-6}$ мм.рт.ст. Начальное возмущение создается подачей от генератора высокочастотного напряжения на модулятор (3), представляющий собой замедляющую спираль длиной 15 см, связанную с генератором через дополнительную спираль с обратной намоткой. Модулирующее напряжение на частотах 400 - 1200 МГц подается от генератора Г4-37А мощностью 1 Ватт.

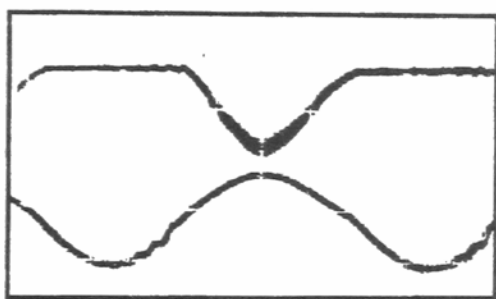


Рис. 2. Верхний луч — ток, нижний — ускоряющее напряжение.

За коллектором (5) располагался электростатический анализатор (7), с помощью которого снимались энергетические характеристики пучков. Измерение распределения амплитуд волн вдоль плазменного столба и фазовых скоростей осуществлялось подвижным высокочастотным зондом (6), который представлял собой антенну из вольфрамовой проволоки диаметром 0,02 см, нагруженную сопротивлением, равным волновому сопротивлению кабеля. Фазовая скорость синусоидальных колебаний для различных частот модуляции измерялась методом сравнения фазы опорного сигнала и сигнала с зонда. Для измерения гармонического состава сгустка использовался емкостной зонд (4), нагруженный на волновое сопротивление кабеля.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Волна конечной амплитуды создается в системе в результате развития двухпотоковой неустойчивости. Характер распределения амплитуд неустойчивых волн для двух частот модуляции (1117 МГц и 570 МГц) показан на рис. 3. По мере увеличения расстояния модулятор — зонд наблюдается медленный рост амплитуды, который сменяется быстрым лишь в конце системы. Фазовая скорость волн близка к скоростям обоих пучков и составляет $3 \cdot 10^9$ см/сек.

При определенном соотношении скоростей и токов пучков емкостной зонд фиксирует широкополосный сигнал. Исследование гармонического состава этого сигнала было проведено для разных частот модуляции. Анализатором СЧ-27 измерялись относительные амплитуды гармоник. Затем была проведена калибровка ВЧ тракта с помощью стандартных генераторов. Решая обратную задачу Фурье для частоты модуляции 925 МГц, можно определить форму потенциала сгустка, которая, как видно из рис. 4, имеет вид узкого импульса, полуширина которого составляет 10^{-10} сек.

Зная скорость сгустка, можно оценить его продольный размер, который составляет 0,3 см. Поперечный размер сгустка определяется размерами катода и равен 0,6 см. Аналогичные результаты были получены на других частотах модуляции.

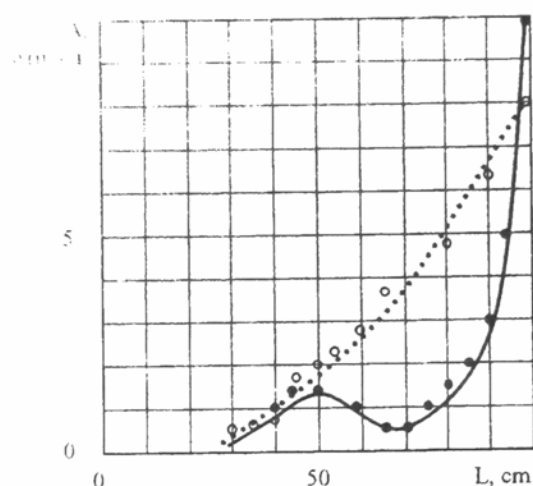


Рис. 3. Распределение амплитуд неустойчивых волн вдоль длины системы: $\circ$ – $f_M = 1117$ МГц, $\bullet$ – $f_M = 570$ МГц

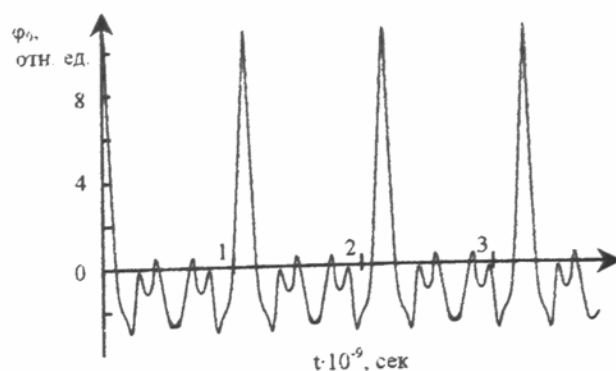


Рис. 4. Форма потенциала электронного сгустка

Измерения энергетического спектра пучков для различных частот модуляции показало, что небольшая доля электронов ускоряется волной. Электростатическим анализатором (7) измерялись скорости электронов в присутствии волны конечной амплитуды и в ее отсутствие. Разность скоростей ($\sim 3 \cdot 10^8$ см/сек) есть разность скоростей ускоренных электронов и фазовой скорости волны. Подставляя это значение в формулу

захвата $v_B = v_\phi + \sqrt{\frac{2e\phi_0}{m}}$, получаем значение высокочастотного потенциала волны, которое равно 25 В.

Таким образом, сформированные короткие электронные сгустки могут быть использованы для генерации коротковолнового излучения и в ускорительной технике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. I.B.Bernstein, J.M.Green, M.D.Kruskal. Phys.Rev., 108, 576, 1957.
2. А.С.Бакай. В кн.: Проблемы теории плазмы, "Наукова думка", 1976, с.228ю
3. А.С.Бакай. В сб.: Вопросы атомной науки и техники, Серия Физика плазмы и УТС, вып. 1(5), Харьков, 1976.
4. В.Т.Астрелин, Н.С.Бучельникова. Препринт ИЯФ, 74-93, 1974.
5. В.Д.Федорченко, Ю.П.Мазалов, А.С.Бакай. ЖЭТФ, Т. 76, вып. 1, 107-120, 1979.
6. А.С.Бакай, С.С.Кривуля, В.Д.Федорченко, В.И.Муратов. Письма в ЖЭТФ, 21, 226, 1975.
7. А.С.Бакай, С.С.Кривуля, В.Д.Федорченко, И.Н.Онищенко. ЖЭТФ, 72, 499, 1977.

FORMATION OF ELECTRON BUNCHES BY BGK-WAVES

Y.A.Bizyukov, V.I.Muratov, V.D. Fedorchenko

Kharkov National University, 310077, Kharkov, Svobody sq., 4.

Finite amplitude waves with large number of trapped particles (BGK-waves) are experimentally investigated. In order to generate such waves two-beam system under uniform magnetic field was used. At certain relations of speeds and currents of the beams formation of electron bunches, whose electrical potential has a shape of a narrow ($\sim 10^{-10}$ s) unipolar pulse, was experimentally observed. Pulse amplitude was estimated from a wave speed and energy of electrons accelerated by the wave.

KEY WORDS: electron bunch, BGK-waves, trapping a beam by a wave, acceleration of electrons by a wave with finite amplitude.

УДК 539.374+669.715

РАДИАЦИОННЫЕ ФАКТОРЫ И СВЕРХПЛАСТИЧНОСТЬ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ

В.В.Брюховецкий, В.Ф.Клепиков, Р.И.Кузнецова

Научно-технический центр электрофизической обработки НАН Украины

310002, г.Харьков, ул. Чернышевского, 28, а/я 8812

тел.: (0572) 404720, факс: (0572) 475261, e-mail: ntcefo@kharkov.com

Поступила в редакцию 9 декабря 1999 г.

Обсуждаются возможности создания сверхпластичного состояния и улучшения показателей сверхпластичности металлов и сплавов путём воздействия на их структуру ионизирующих излучений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: сверхпластичность, радиационные явления, структурное состояние, технологии металлообработки

Проблема сверхпластичности важна как в теоретическом, так и в практическом отношении. Об этом свидетельствует то значение, которое уделяется ей во многих научных центрах высокоразвитых стран. Ведутся разработки, направленные на поиск условий проявления сверхпластичности различными материалами, изучение динамики микроструктуры при сверхпластической деформации, механизмов деформации и образования пористости, работы по практическому внедрению эффекта сверхпластичности.

Большая деформационная способность металлов и сплавов в условиях проявления сверхпластичности даёт возможность использовать эффект сверхпластичности в технологических процессах формовки изделий сложной формы и при этом значительно повысить коэффициент использования металла. Кроме того, обработка в условиях сверхпластичности обеспечивает улучшение ряда эксплуатационных характеристик металла.

Успешное решение этих задач может быть осуществлено путем расширения и углубления знаний о физической природе сверхпластичности, которая к настоящему времени ещё до конца не раскрыта. Об этом свидетельствуют феноменологический характер описания закономерностей сверхпластической деформации, противоречивость представлений о разных видах сверхпластичности, что связано с недостаточным пониманием причин эффекта. Решение проблемы сверхпластичности позволит глубже понять разнообразие физических процессов, происходящих в металлах и сплавах в условиях внешней нагрузки, радиационного воздействия, даст возможность научно обоснованно управлять этим эффектом и с большей эффективностью использовать его на практике.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Проблема сверхпластичности является частью общей проблемы высокотемпературной деформации и разрушения твердых тел, пластичности и хрупкости. Она находится в тесной связи с проблемами радиационного материаловедения.

Как известно [1], конструкционные материалы атомных энергетических установок находятся в более сложных условиях, чем в традиционных установках, так как нейтронное облучение ускоряет процессы ползучести, усиливает временную зависимость прочности, изменяет деформационную способность при повышенных температурах, смещает интервал хладноломкости, вызывает порообразование и радиационное растрескивание.

В [2] показано, что облучение нейтронами вызывает в уране появление пористости, которая концентрируется по границам зерен. Эти поры возникают вследствие объединения избыточных вакансий, в большом числе создаваемых облучением. При больших дозах облучения из этих пор развиваются межзеренные трещины и газовые пузыри. В то же время известно [3], что при облучении нейтронами наблюдается проявление сверхпластичности. Эти результаты показывают, что дефекты, создаваемые при облучении нейтронами, могут формировать пористую структуру материала, способную к сверхпластическому течению.

Известно, что, хотя при сверхпластическом течении действуют различные деформационные процессы — дислокационное скольжение, диффузионный крип и зернограницное проскальзывание, — именно, последнее является главным деформационным процессом сверхпластического течения, дающего наибольший вклад в сверхпластическую деформацию.

Ранее проведенными исследованиями [4,5], показано, что протекание зернограницного проскальзывания, его интенсивность и величина вклада в общую деформацию тесно связана с процессами порообразования и

участия зернограничной пористости в протекании сверхпластической деформации. Было показано [6], что определённый уровень пористости, составляющий 1-7%, обеспечивает сверхпластическое течение, если выполнены температурно-скоростные условия деформирования

Проявление сверхпластичности и связь температурно-скоростных условий её проявления с уровнем и морфологией зернограничной пористости можно проследить по результатам, представленным на рис. 1 и 2 для электролитических фольг никеля.

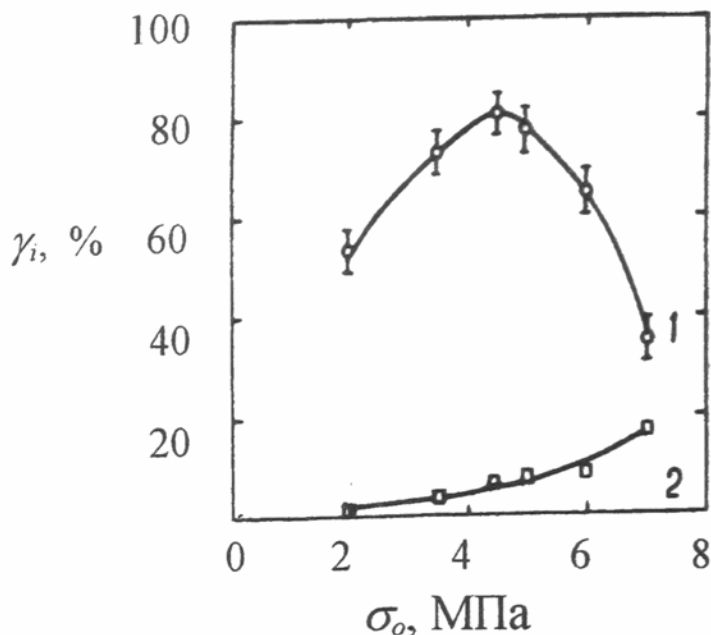
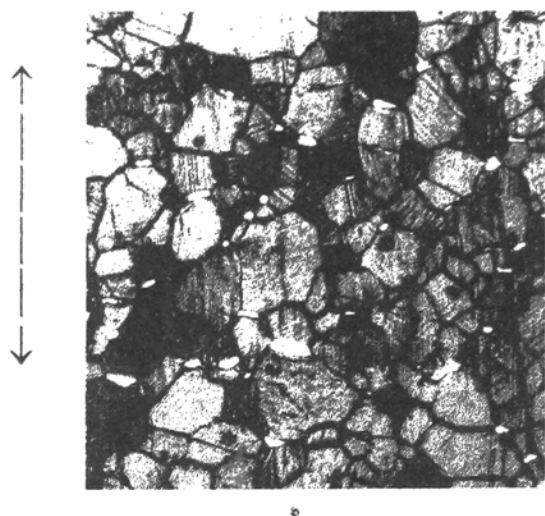


Рис. 1. Микроструктура фольги никеля, деформированной в оптимальных условиях сверхпластичности ($T = 1200\text{ }^{\circ}\text{C}$, $\sigma = 4,5\text{ МПа}$). Направление растяжения указано стрелкой.

Рис. 2. Зависимость вкладов зернограничного проскальзывания и пористости в общую деформацию γ_i от напряжения σ для электролитических фольг никеля. $T = 1200\text{ }^{\circ}\text{C}$, $\varepsilon_o = 4,5\%$, 1 — γ_{zn} , 2 — γ_n .

Особенностью этих плёнок является то, что они однокристалльны по толщине, т.е. представляют собой двумерные поликристаллы, у которых зернограничные поры являются сквозными. На рис. 1 представлена микроструктура такой плёнки никеля, деформированной в условиях оптимального сверхпластического течения. На ней видны сквозные поры, которые являются зернограничными. Они появляются на самом раннем этапе деформирования и, прежде всего, образуются на границах, перпендикулярных направлению растяжения, при активном участии проскальзывания по границам зерен. Поры достаточно однородно заполняют рабочую поверхность образца. Их размеры соизмеримы с размером зерна, а их форма в процессе деформации сильно изменяется при относительно небольшом изменении формы прилегающих зерен. Именно эта пористость обеспечивает интенсивное зернограничное проскальзывание в оптимальных условиях сверхпластичности, позёрренный массоперенос, что и приводит к максимальному при этих условиях вкладу зернограничного проскальзывания в общую деформацию.

На рис. 2 даны зависимости вкладов в общую деформацию зернограничного проскальзывания и зернограничной пористости, развивающейся в разных условиях деформирования для фольг никеля, от напряжения при оптимальной для сверхпластического течения температуре $T = 1200\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Вклад зернограничного проскальзывания находили по смещению рисок по границам зерен в направлении растяжения x . Среднее смещение $\bar{x}$ определяли по 150 измерениям и использовали для вычисления деформации ε_{zn} , обусловленной зернограничным проскальзыванием, по формуле

$$\varepsilon_{zn} = \bar{x} \cdot \bar{n} \quad (1)$$

где $\bar{n}$ — среднее число границ зерен на единицу длины риски.

Вклад зернограничного проскальзывания в общую деформацию γ_{zn} определяли из соотношения

$$\gamma_{zn} = \frac{\varepsilon_{zn}}{\varepsilon_o} \quad (2)$$

где ε_o — общая деформация.

Относительная пористость $\Pi = \Delta\P/\Pi_o$ определялась с помощью микрофотометра МФ-4 по потоку света I , проходящему через раскрывшиеся поры площадью $\Delta\P$.

$$\frac{\Delta\P}{\Pi_o} = \frac{I}{I_o} \quad (3)$$

где I_o — полный поток света, падающий на образец площадью P_o . Эти же измерения дают возможность оценить вклад пористости в удлинение. Если ΔP — пористость всего образца площадью P_o , длиной L_o и шириной B_o , то удлинение, связанное с раскрытием пор, ΔL_n , есть

$$\Delta L_n = \frac{\Delta P}{B_o} = \frac{(\Delta P / P_o) \cdot P_o}{B_o} = P \cdot L_o, \quad (4)$$

т.е. относительное удлинение за счет раскрытия пор

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta L_n}{L_o} = P \quad (5)$$

численно равно относительной пористости образца.

Вклад пористости в общую деформацию γ_n определяли из соотношения

$$\gamma_n = \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_o} \quad (6)$$

Из рис. 2 видно, что максимальный вклад зернограницного проскальзывания в общую деформацию γ_{zn} , составляющий 80%, достигается при напряжении 4,5 МПа, которое является оптимальным для сверхпластического течения для фольг никеля при $T = 1200$ °С. При этом вклад в общую деформацию за счёт раскрытия пор γ_n равен 6%, т.е. составляет величину, отражающую и относительный объем пористости в деформированном образце.

Полученные результаты и анализ приведенных литературных данных показывает, что пористость, которая возникает при облучении нейтронами, и та, которая обеспечивает сверхпластическое течение, имеют сходные черты — она является зернограницной, а это значит, что её создание путём воздействия ионизирующих излучений на материалы может быть технологическим приемом создания сверхпластичного состояния облучённых материалов.

Следующий вопрос, который будет обсужден здесь, исходит из того, что сверхпластичность и её показатели очень чувствительны к микроструктуре материала — размеру зерна, дефектной структуре. Общеизвестно, что сверхпластичность наиболее ярко проявляется в холоднодеформированных металлах и сплавах, которые имеют высокую дефектную структуру, и существенно снижается в отожженных материалах при снятии искажений решетки. Чувствительность скорости сверхпластической деформации к размеру зерна легко проследить по результатам рис. 3, взятым из работы [7]. Из рис. 3 следует, что для сплава Sn-5%Bi с уменьшением размера зерна на 1 порядок скорость сверхпластической деформации возрастает на 3 порядка. Подобные качественные закономерности можно проследить и на основании исследования сверхпластичности различных материалов с разным размером зерна [8].

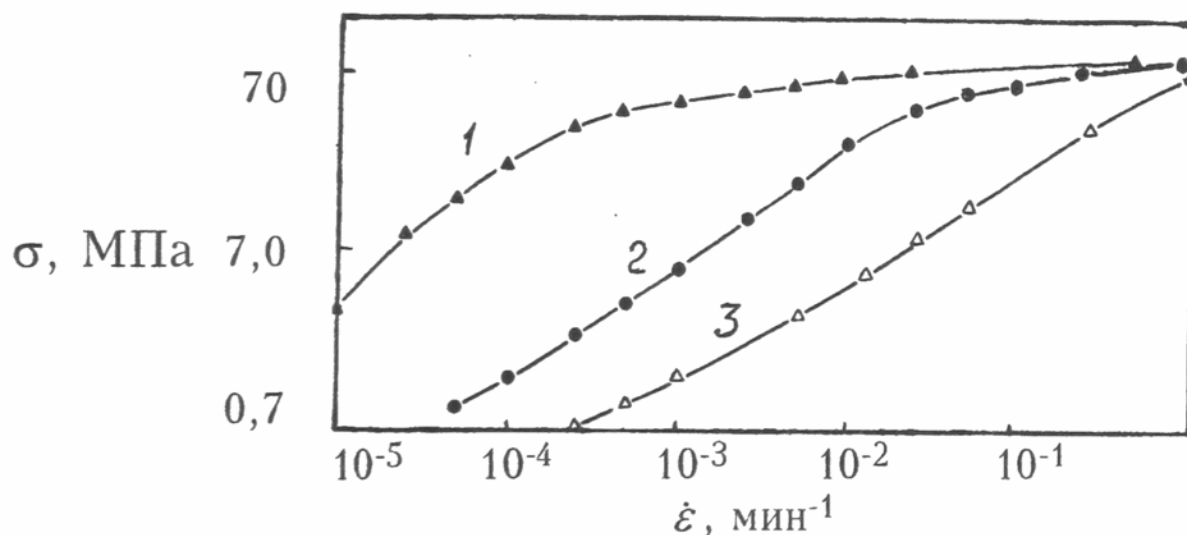


Рис. 3. Зависимость напряжения σ от скорости деформации $\dot{\varepsilon}$ на установившейся стадии течения для сплава Sn-5%Bi с разным размером зерна $\bar{L}$. 1 — $\bar{L} = 16$ мкм; 2 — $\bar{L} = 3,5$ мкм; 3 — $\bar{L} = 1,6$ мкм.

Таким образом, измельчение зеренной структуры и повышение дефектности кристаллической решетки наряду с созданием зернограницной пористости в металлах и сплавах могут быть реальными путями к созданию сверхпластичного состояния.

Ещё одним фактором, существенно влияющим на создание сверхпластического состояния является протекание фазовых превращений в ходе деформирования. Такое влияние было показано ещё в работе [9] при фазовом переходе α — γ железа.

Если обратиться к результатам, представленным в [1], то отчётливо видно, что при воздействии облучения на материалы в них происходят изменения микроструктуры и фазового состава, которые определяются степенью дефектности кристаллической решетки и эволюцией дефектной структуры в процессе облучения. Среди структурно-фазовых изменений, которые влияют на механические свойства материалов при облучении, и в то же время являются факторами, существенно влияющими на показатели сверхпластичности, можно выделить такие процессы как генерация неравновесной концентрации точечных дефектов, образование дефектных зон, эволюция дислокационной структуры и динамическая рекристаллизация, сегрегация примесей на границах, локальные изменения химического состава, распад твердого раствора, фазовые превращения, зарождение пор и эволюция пористой структуры. Из сказанного следует, что радиационное воздействие на материалы может быть важным фактором для создания сверхпластичного состояния и улучшения показателей сверхпластичности. Особенно перспективными представляются воздействие ионизирующих излучений на материалы непосредственно во время сверхпластического деформирования. Это может открыть путь к понижению температуры оптимального сверхпластического течения и, возможно, к увеличению скорости сверхпластической деформации, что представляет значительный практический интерес для технологий металлообработки, которые используют эффект сверхпластичности. Развитие исследований в этом направлении важно также для прогнозирования радиационной стойкости материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Физика радиационных явлений и радиационное материаловедение. / Под редакцией А.М.Паршина, И.М.Неклюдова, Н.В.Камышанченко. — 1998, Москва-С.Петербург-Белгород. — 378 с.
2. Конобеевский С. Т. Действие облучения на материалы. — М.: Атомиздат; 1967. — 404 с.
3. Roberts A.C., Cottrell A.H. Creep of alpha uranium during irradiation with neutrons // Phil. Mag. — 1956. — v.1, N8. — P. 711-717.
4. Кузнецова Р.И. Роль зернограницной пористости в сверхпластичности // ФММ. — 1978. — Т.45, вып.3. — С. 641 - 646.
5. Пойда В.П., Кузнецова Р.И., Шапран А.С. Роль зернограницного проскальзывания в пластической деформации пористых поликристаллов. Сверхпластичность // Вопросы атомной науки и техники. Серия "Физика радиационных повреждений и радиационное материаловедение". — 1985. — Вып.3 (36). — С. 47 - 50.
6. Кузнецова Р.И. Уровень зернограницной пористости при сверхпластическом течении // Докл. АН СССР. - 1982. - Т.263. - С. 92 - 96.
7. Alden T.H. The origin of superplasticity in the Sn-5%Bi alloy // Acta Metall. — 1967. — v.15, N3. — P. 469-480.
8. Новиков И.И., Портной В.К. Сверхпластичность сплавов с ультрамелким зерном. — М.: Металлургия, 1981. — 168 с.
9. Sauveur A. What is Steel — Another Answer // Iron Age. — 1924. — v.113. — P. 581-583.

RADIATION FACTORS AND SUPERPLASTICITY OF METALS AND ALLOYS

V.V. Bryukhovetsky, V.F.Klepikov, R.I.Kuznetsova

Scientific and Technological Center of Electrophysics, National Academy of Science of Ukraine

28 Chernyshevskiy Str., P.O.BOX 8812, UA - 310002 Kharkiv, Ukraine

tel.: (0572) 404720 fax: (0572) 475261, e-mail: ntcefo@kharkov.com

The possibilities of the creation of superplastic state and the improvement of characteristics of superplastic materials and alloys by influencing their structure with ionizing radiations are discussed.

KEY WORDS: Superplasticity, radiation phenomena, state of structure, technologies of metal treatment.

УДК 539.122

АЛЬБЕДО РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ГЕТЕРОГЕННОГО МАТЕРИАЛА ТИПА "ПОГЛОТИТЕЛЬ ВНУТРИ РАССЕИВАТЕЛЯ"

А.И. Кирдин, В.Т. Лазурик

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина. Физико-технический факультет.
61108, Харьков, пр. Курчатова, 31. E-mail: kirdin@ftf.univer.kipt.kharkov.ua

Поступила в редакцию 26 ноября 1999 г.

Исследовано интегральное альbedo потока рентгеновских квантов от гетерогенного материала, состоящего из непрерывной и дискретной фаз, при нормальном падении излучения. Значения альbedo материала получены методом Монте-Карло. Анализ зависимостей альbedo выполнен в приближении однократного рассеяния для эквивалентной гомогенной среды. Выявлены основные факторы, определяющие альbedo материалов со сферическими включениями поглотителя различного размера. Показано, что зависимость эффективного линейного коэффициента ослабления гетерогенного материала от энергии определяет особенности его альbedo. Предложено аналитическое описание альbedo.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: рентгеновское излучение, гетерогенный материал, рассеиватель, поглотитель, альbedo потока, метод Монте-Карло, эквивалентная гомогенная среда, аналитическое описание

Исследование альbedo гетерогенных материалов актуально в связи с широким использованием их в качестве конструкционных в ядерной энергетике, аэрокосмических аппаратах, средствах защиты от излучений и для разработки неразрушающих методов их анализа и контроля.

ОБЪЕКТ И МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Свойство вещества как рассеивателя рентгеновского излучения удобно характеризовать величиной относительной вероятности рассеяния квантов с определенной энергией μ/μ_0 (μ^* и μ - линейные коэффициенты рассеяния и ослабления материала, соответственно). Эту вероятность в дальнейшем мы будем называть *фактором рассеяния*. Фактор рассеяния возрастает от нуля до единицы с увеличением энергии квантов. Условно выделим область энергий, в которой $\mu/\mu_0 < 0,2$ и вещество является эффективным поглотителем, и область энергий, в которой $\mu/\mu_0 > 0,8$ и вещество является эффективным рассеивателем излучения. Таким образом, при фиксированной энергии излучения одни материалы будут эффективными рассеивателями, другие поглотителями, а третьи менее выражено проявлять оба эти качества.

Рассмотрим модельный гетерогенный материал, состоящий из двух однородных фаз: непрерывной матрицы с рассеивающими и поглощающими свойствами и хаотично распределенных в ней сферических включений поглотителя. Примерно так устроены тяжелые бетоны, свинцовая резина, полиэтилен со свинцом. В вычислительном эксперименте (далее "эксперименте") на плоский слой материала мишени падал по нормали однородный моноэнергетический поток рентгеновских квантов и регистрировали альbedo потока частиц. Методика имитации и модель гетерогенной среды описаны в [1]. Последующий анализ зависимостей альbedo выполнен в приближении однократного рассеяния для эквивалентной гомогенной среды [2].

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 1 приведены полученные методом Монте-Карло зависимости интегрального альbedo потока квантов от фактора рассеяния для модельного материала с матрицей из углерода, как обладающего свойством хорошего рассеивателя вещества плотностью 100 кг/м³ и поглощающими включениями из железа, олова, свинца диаметром d . Случай $d=0$ является предельным для материала с мелкодисперсными включениями и соответствует гомогенной смеси веществ матрицы и включений. Энергия излучения составляла 50 и 100 кэВ. В "эксперименте" при взаимодействии с веществом включений кванты поглощались (сечение рассеяния для вещества включений полагалось равным нулю). Материалы с различным значением фактора рассеяния получали, варьируя объемную долю включений v . На рисунке точки, соответствующие зависимостям альbedo для материалов с одинаковым веществом дискретной фазы при одинаковой энергии подающего излучения, соединены плавными кривыми.

Из приведенных данных следует, что зависимость альbedo материалов от фактора рассеяния является возрастающей функцией, и, несмотря на то, что рассеиватель для всех рассмотренных материалов один и тот же, альbedo этих материалов существенно отличаются. Поскольку обычно преобладающим процессом рассеяния квантов, дающим основной вклад в альbedo, является неупругое рассеяние на электронах атомов и рассеянные кванты имеют энергию меньше исходной, причина такого отличия значений альbedo заключается в неодинаковой зависимости от энергии линейного коэффициента ослабления этих материалов для рассеянных квантов.

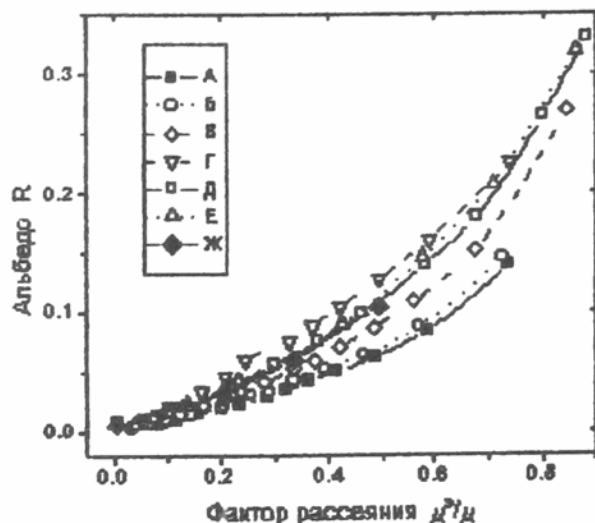
Зависимость линейного коэффициента ослабления материала μ от энергии в диапазоне энергий от начальной энергии E_0 до энергии E_π неупруго рассеянных на угол $\theta = \pi$ квантов удобно характеризовать

величиной μ_b/μ , которую мы будем называть *энергетическим фактором ослабления* для вещества или материала. Малые значения этого фактора, например, $\mu_b/\mu < 0,5$; свидетельствуют о сильной зависимости линейного коэффициента ослабления от энергии. Если диапазон энергий рассеянных квантов (E_b, E) не содержит край фотопоглощения, то обычно энергетический фактор ослабления принимает значения в диапазоне от нуля до единицы. Значения μ_b/μ близкие к единице свидетельствуют о вырождении энергетической зависимости линейного коэффициента ослабления.

Они характерны для веществ с малым атомным номером при таких энергиях квантов, когда рассеяние превалирует над другими типами взаимодействия.

Рис. 1. Зависимость интегрального альbedo потока фотонов от фактора рассеяния μ_b/μ для материалов с углеродной матрицей и поглощающими включениями.

А - C(Sn, $d=0, \mu_s=0$)-100; Б - C(Fe, $d=0, \mu_s=0$)-100;
В - C(Pb, $d=0, \mu_s=0$)-50; Г - C(Pb, $d=0, \mu_s=0$)-100;
Д - C(Sn, $d=0, \mu_s=0, \mu'_s=\mu_s$)-100;
Е - C(Sn, $d=0, \mu_s=0, \mu'_s=\mu_s$)-50; Ж - C(Sn, $\mu_s d=10, \mu_s=0$)-50
Обозначения: "Вещество матрицы (Вещество включения, особенности имитации) - Энергия квантов [кэВ]".
Индекс "в" означает, что соответствующие величины относятся к веществу включений, "м" - к веществу матрицы.



При рассмотрении свойств гетерогенной среды естественно стремление сохранить подход и, по возможности, формульную схему описания свойства, применяемый для гомогенной среды. Такой подход получил название принцип эквивалентной гомогенности или модель эквивалентной гомогенной среды. Необходимые условия осуществления этого принципа [3]: существует и имеет физический смысл характерный размер длины осреднения свойства гетерогенной среды, который существенно меньше расстояния между границами среды, но существенно больше характерного размера неоднородности.

При описании альbedo в приближении однократного рассеяния можно выделить следующие длины осреднения свойств: для описания среды как поглотителя - это длины свободного пробега (д.с.п.) первичных и рассеянных квантов $1/\mu$ и $1/\mu'$; для среды как рассеивателя - это характерная длина $1/\mu^s$. Поскольку для рассматриваемых материалов $\mu^s < \mu < \mu' < \mu_b$, условие применимости модели эквивалентной гомогенной среды для альbedo таково:

$$\mu^s h \ll 1, \quad \mu H > 1, \quad (1)$$

где h - характерный размер (средняя хорда) включения, H - толщина мишени.

Для мишеней из разных веществ выполнен анализ вклада различных процессов взаимодействия квантов в интегральное альbedo определены значения характерной энергии падающих квантов $E_1(Z)$, $E_2(Z)$, при которых вклад в альbedo некоторых процессов рассеяния становится несущественным. Здесь Z - атомный номер вещества. Так, при энергии падающих квантов $E > E_1(Z)$ значение функции некогерентного рассеяния, входящей сомножителем в угловое распределение некогерентно рассеянных квантов наряду с дифференциальным сечением рассеяния Клейна - Нишины - Тамма, для $\theta = \pi/2$ равно 0,9 и с увеличением угла рассеяния θ продолжает возрастать до единицы. Близость ее к единице дает возможность пренебречь связью электрона с атомом для вклада некогерентного рассеяния в альbedo и рассматривать его как комптоновское. При $E > E_2(Z)$ можно пренебречь вкладом когерентного рассеяния в альbedo, т.к. в этом случае сечение когерентного рассеяния составляет менее 10% полного сечения рассеяния.

Значения характерной энергии для нормального падения излучения на мишень приведены в таблице.

Таблица. Значения характерной энергии для ряда элементов

Элемент (Z)	C(6)	Al(13)	Fe(26)	Sn(50)	Pb(82)
$E_1(Z)$, кэВ	13	22	35	54	75
$E_2(Z)$, кэВ	25	20	60	100	150

Таким образом, если $E > E_2(Z)$, при описании альbedo можно не учитывать особенности угловых распределений рассеянных квантов для различных веществ мишени (зависимость от Z).

Когда условие (1) выполнено, можно воспользоваться для описания альbedo гетерогенного материала приближением однократного рассеяния для гомогенного материала в таком виде [2]:

$$R^1(\infty) = \mu^s / \mu \cdot I_b(\infty), \quad \mu^s = (1 - \nu) \mu_m^s; \quad (2)$$

$$\mu_m^s \cdot I_b(\infty) = \mu_m^{coh} \cdot I_b^{coh}(\infty) + \mu_m^{inc} \cdot I_b^{inc}(\infty), \quad E < E_1(Z_m);$$

$$\mu_m^s \cdot I_b(\infty) = \mu_m^{coh} \cdot I_b^{coh}(\infty) + \mu_m^{KN} \cdot I_b^{KN}(\infty), \quad E_1(Z_m) \leq E \leq E_2(Z_m);$$

$$\mu_m^s \cdot I_b(\infty) = \mu_m^{KN} \cdot I_b^{KN}(\infty), \quad E > E_2(Z_m).$$

Воспользуемся для обозначения физического процесса рассеяния индексом $i = \text{coh}, \text{inc}, \text{KN}$ (когерентное, некогерентное, комптоновское соответственно). Тогда выход рассеянного излучения в заднюю, относительно направления налетающего кванта, полусферу дается выражением:

$$I_b^i(\infty) = 2\pi \int_{-1}^0 (dN_m^i / d\cos\theta) / [1 - (\mu'/\mu) \cos\theta] d\cos\theta. \quad (3)$$

Здесь $dN_m^i / d\cos\theta$ - угловое распределение рассеянных квантов в элементарном акте, его в настоящее время можно считать достаточно изученным [4]; μ' - линейный коэффициент ослабления материала для рассеянного кванта. Угловые распределения квантов для соответствующих процессов рассеяния нормированы следующим образом:

$$2\pi \int_{-1}^1 (dN_m^i / d\cos\theta) d\cos\theta = 1. \quad (4)$$

Как видно из (2), в приближении однократного рассеяния альбе́до материала представлено в виде двух сомножителей, один из которых есть фактор рассеяния μ'/μ , а другой выражается в виде интеграла произведения углового распределения квантов в элементарном акте соответствующего процесса рассеяния и множителя, учитывающего ослабление рассеянного кванта, для выхода в заднюю, по отношению к направлению движения первичного кванта, полусферу (3).

Анализ альбе́до мелкодисперсных материалов с поглощающими включениями показывает, что для него очень существенна зависимость от энергетического фактора ослабления. Эта зависимость изменяется от состава материала в широких пределах. Когда диаметр включений не мал, по сравнению с д.с.п. падающих квантов в веществе включения, воспользуемся эффективными значениями величин в модели эквивалентной гомогенности. В этом случае [5]:

$$\mu = \mu_m - 1/d \cdot \ln \{1 - 1.5\mu_0 d [1 - G(\mu_0 d)]\}, \quad (5)$$

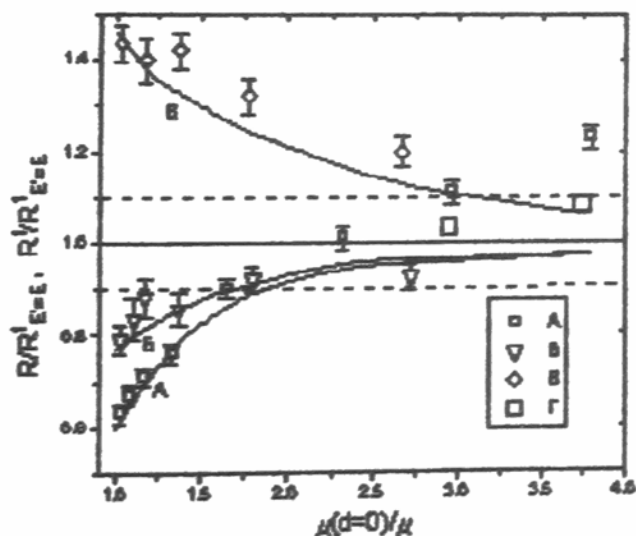
$$G(\mu_0 d) = 2/(\mu_0 d)^2 \cdot [1 - (1 + \mu_0 d) \exp(-\mu_0 d)], \quad \mu_0 = \mu_s - \mu_m.$$

Для гомогенной смеси имеем [6]:

$$\mu = (1 - v)\mu_m + v\mu_s. \quad (6)$$

Линейный коэффициент ослабления гетерогенных материалов при $\mu_m < \mu_s$ меньше, чем для гомогенных, поэтому для них выход рассеянных назад квантов согласно (3) выше и альбе́до больше.

На рис. 2 приведены зависимости величины, равной отношению "экспериментальных" альбе́до к рассчитанным в приближении однократного рассеяния при неизменности энергии квантов ($E'=E$) теоретическим $R(\infty)/R_{E=E}^1(\infty)$ от переменной, равной отношению линейных коэффициентов однородного и гетерогенного материалов с одинаковым составом $\mu(d=0)/\mu$. Вследствие вырождения энергетической зависимости линейного коэффициента ослабления материала, отношение теоретических альбе́до $R^1(\infty)/R_{E=E}^1(\infty)$, представленное на рисунке линиями, приближается к единице с увеличением размера включений. Зависимости $R(\infty)/R_{E=E}^1(\infty)$ имеют сходную тенденцию группировки значений, но на рисунке располагаются выше вследствие существенной добавки процессов перерассеяния в "экспериментальные" значения альбе́до.



Зависимости $R(\infty)/R_{E=E}^1(\infty)$ имеют сходную тенденцию группировки значений, но на рисунке располагаются выше вследствие существенной добавки процессов перерассеяния в "экспериментальные" значения альбе́до.

Рис. 2. Отношение "экспериментальных" и теоретических интегральных альбе́до потока фотонов к теоретическим, рассчитанным в приближении однократного рассеяния при условии неизменности энергии квантов при рассеянии, для гетерогенных материалов с различным диаметром сферических включений поглотителя.

А - C(Sn, $\mu_s=0$)-100; Б - C(Pb, $\mu_s=0$)-50;

В - C(Pb, $\mu_s=0$)-100;

Г - C(Sn, $\mu_s=0$, только однократное рассеяние)-100;

Точки - результат имитации $R(\infty)/R_{E=E}^1(\infty)$.

Линии - теоретическая зависимость $R^1(\infty)/R_{E=E}^1(\infty)$.

Таким образом, для гетерогенных материалов типа "поглотитель в рассеивателе" с увеличением размера включений постепенно вырождается зависимость эффективного линейного коэффициента ослабления от энергии излучения, см. выражение (5). Вследствие этого эффекта, если размер включений сравним с д.с.п. квантов в веществе включений, различие значений альбе́до двухфазных гетерогенных материалов с разным веществом поглотителя существенно меньше, чем для гомогенных смесей такого

же элементного состава. Применительно к данным рис.1 альbedo таких материалов будут приближаться к зависимостям Д и Е для мелкодисперсных материалов, соответствующих случаю вырождения. Проведенный "эксперимент" для гетерогенного материала с углеродной матрицей и поглощающими включениями олова диаметром 10 д.с.п. при энергии квантов 50 кэВ действительно показал, что значения альbedo материала близки к зависимостям, соответствующим случаю вырождения (см. данные Ж на рис.1). Различные значения фактора рассеяния для гетерогенного материала получали варьируя плотность вещества матрицы и объемную долю включений, которая оставалась небольшой ($v \leq 0,1$).

Вырождение зависимости эффективного линейного коэффициента ослабления от энергии излучения для материала с крупными, по сравнению с пробегом квантов в веществе, включениями приводит к независимости альbedo от вещества включений поглотителя, т.к. $\mu'/\mu \rightarrow 1$ и $\mu''/\mu \rightarrow \text{Const}$ в (5). Это позволяет сформулировать теорему смеси для альbedo гетерогенного материала, содержащего несколько фаз поглотителей. Интегральное альbedo потока фотонов n -фазного материала, состоящего из одной непрерывной фазы и $(n-1)$ дискретных фаз поглотителей при выполнении условия $\mu_{ni}d_i \gg 1$, где μ_{ni} - линейный коэффициент ослабления вещества и d_i - диаметр включений i -фазы для всех дискретных фаз может быть вычислено согласно (2) при значении v , равном суммарной объемной доле всех дискретных фаз материала, каждая из которых занимает часть объема v_i :

$$v = \sum_{i=1}^{n-1} v_i. \quad (7)$$

Линейный коэффициент ослабления многофазного материала с крупными включениями ($\mu_{ni}d_i \gg 1$) можно вычислить из соотношения:

$$\mu = \mu_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle 1/d_i \cdot \ln \{1 - 1,5v_i[1 - G(\mu_0 d)]\} \rangle. \quad (8)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для мелкодисперсных материалов, состоящих из рассеивающей матрицы и дискретных включений поглотителя альbedo является возрастающей функцией фактора рассеяния, поведение которой в значительной мере определяется зависимостью линейного коэффициента ослабления материала от энергии квантов. Для материалов с крупнодисперсными включениями поглотителя, вследствие вырождения энергетической зависимости эффективного линейного коэффициента ослабления материала, альbedo перестает зависеть от вещества поглотителя, что позволяет сформулировать теорему смеси для альbedo многофазного материала. Приближение однократного рассеяния в модели эквивалентной гомогенной среды дает верную качественную характеристику зависимостей альbedo от параметров материала и энергии излучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кирдин А.И., Лазурик В.Т. Альbedo рентгеновского излучения от квазипериодических материалов// Проблемы ядерн. физики и космич. лучей. Респ. межвед. науч.-техн. сборник. Харьков: Вища школа. -1988. -Вып. 29. -С. 78-80.
2. Кирдин А.И. Альbedo рентгеновского излучения от композиционных материалов// Автореферат диссертации на соиск.уч. степ. канд. физ.-мат. наук. - Харьков, 1991. -16 с.
3. Кристенсен Р. Введение в механику композитов// М.: Мир. -1982. -334 с.
4. Дэйвисон III. Взаимодействие гамма-излучения с веществом// В кн. "Альфа-, бета-, гамма-спектроскопия", п/р. Зигбана К.М. М.: Атомиздат. - 1969. - Вып.1. - С. 58-95.
5. Жданова В.М., Костенко В.И., Кривошук И.В. и др. Сопоставление экспериментальных и теоретических значений эффективных коэффициентов ослабления излучения в монодисперсных поглотителях// Атомная энергия. - 1985. -Т.59. -Вып.4. -С. 292-293.
6. Хиславский А.Г. Рентгеноспектральные экспрессные методы анализа полимерных материалов//С-Пб.: Химия. - 1976. -152с.

X-RAY ALBEDO OF HETEROGENEOUS MATERIAL "ABSORBER IN SCATTERER" TYPE

A.I. Kirdin, V.T. Larurik

Kharkov National University, Physycal-Technical Department, 31 Kurchatov ave., Kharkov, 61108, Ukraine

At normal incidence of X-ray flux the integral albedo of heterogeneous material with permanent and discrete phases was studied. Albedo values were obtained by Monte-Carlo method. It was done analysis of albedo dependences by the one-scattering approximation for equivalent homogeneous media. Main factors were found to determine albedo of materials with differ size spheric conclusions of absorber. It is shown the effective linear attenuation coefficient dependence on X-ray energy determines main albedo particularities. The albedo analytical description is proposed.

KEY WORDS: X-ray, heterogeneous material, scatterer, absorber, flux albedo, Monte-Carlo method, equivalent homogeneous media, analytical description

АЛЬБЕДО РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ГЕТЕРОГЕННОГО МАТЕРИАЛА ТИПА "РАССЕИВАТЕЛЬ ВНУТРИ ПОГЛОТИТЕЛЯ"

А.И. Кирдин, В.Т. Лазурик

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина. Физико-технический факультет.
61108, Харьков, пр. Курчатова, 31. E-mail: kirdin@ftf.univer.kipt.kharkov.ua

Поступила в редакцию 26 ноября 1999 г.

Исследовано интегральное альbedo потока рентгеновских квантов от гетерогенного материала, состоящего из непрерывной матрицы и хаотично расположенных в ней включений, когда рассеянием излучения в матрице можно пренебречь. Обнаружен эффект корреляции между пространственными точками рассеяния и поглощения в материале. Эффект проявляется в уменьшении рассеянного компонента рентгеновского излучения в гетерогенном материале по сравнению с гомогенным материалом такого же химического состава. На основе результатов анализа данных, полученных моделированием методом Монте-Карло процессов переноса излучения в гетерогенной среде предложено феноменологическое описание альbedo.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: метод Монте-Карло, рентгеновское излучение, альbedo потока, гетерогенный материал, эффект корреляции, феноменологическое описание

Современные композиционные материалы широко применяемые в технике, подверженной воздействию излучений, в качестве конструкционных или защитных часто имеют гетерогенную структуру. Знание альbedo фотонного излучения композиционных материалов требуется, в частности, для расчета уровня фона рассеянного излучения в помещениях с гетерогенной защитой, для анализа структуры и состава материала с помощью рассеянного излучения.

ОБЪЕКТ И МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

При анализе альbedo модельного двухфазного композиционного материала, состоящего из непрерывной фазы и хаотично расположенных в ней частиц дискретной фазы, целесообразно разделить эти два компонента структуры материала и изучить их альбедные свойства в отдельности. При исследовании альbedo совокупности частиц дискретной фазы композита, желательно рассмотреть специфический гетерогенный материал аналогичный взвеси частиц пыли в воздухе. Рассмотрим модельный гетерогенный материал, в котором шары одинакового диаметра из однородного вещества (включения) хаотично распределены в пространстве, заполненном другим однородным веществом (матрица). В соответствии с принятой нами для гетерогенных материалов терминологией, будем называть такой модельный материал "включения в вакууме", если можно пренебречь взаимодействием излучения с непрерывной фазой; "включения в поглощающей матрице", если можно пренебречь рассеянием излучения в матрице и "модельный композит", если рассеянием в матрице пренебречь нельзя.

В настоящей работе рассматривали альbedo материалов, в которых рассеивателем излучения является совокупность частиц дискретной фазы гетерогенного материала. Изучение процессов взаимодействия рентгеновского излучения с гетерогенным материалом осуществляли методом Монте-Карло. Методика имитации и модель гетерогенной среды описаны в [1]. В имитации учтены процессы когерентного и некогерентного рассеяния квантов на связанных электронах атомов, фотоэлектрическое поглощение с последующей возможной флуоресценцией.

ЭФФЕКТ КОРРЕЛЯЦИИ МЕЖДУ РАССЕЯНИЕМ И ПОГЛОЩЕНИЕМ

Для гетерогенных материалов рассматриваемого типа имеет место соотношение между линейными коэффициентами веществ матрицы (μ_m), включений (μ_v) и материала в целом (μ): $\mu_m < \mu < \mu_v$, т.е. средняя вероятность взаимодействия кванта в материале меньше, чем во включении. Вследствие этого, попавший во включение и провзаимодействовавший в нем квант имеет повышенные шансы испытать новое взаимодействие в том же включении. Это приводит к дополнительному поглощению рассеянных во включении квантов. Таким образом, в гетерогенном материале существует корреляция между точками рассеяния и поглощения. Наиболее ярко этот эффект проявляется в отсутствии матрицы, т.е. в материале "включения в вакууме". В вычислительном эксперименте (далее "эксперименте") на плоский слой материала мишени падал по нормали однородный моноэнергетический поток рентгеновских квантов с энергией 100 кэВ. Регистрировали коэффициент пропускания первичного излучения K_0 и полный K , интегральное альbedo R и фактор накопления B потока частиц. Вещество включений - алюминий обеспечивало высокую вероятность рассеяния ($\mu_v/\mu_m = 0,9$). μ_v - линейный коэффициент рассеяния для вещества включений. Толщина мишени (H) составляла 5 длин свободного пробега (д.с.п.), объемная доля хаотично расположенных в мишени включений $v = 0,1$. Диаметр включений (d) для различных мишеней изменяли

от максимального значения, реализующего всю толщину слоя в виде одного шара, в сторону уменьшения в целое число раз n .

Таблица 1. Зависимость от размеров включений значений коэффициентов пропускания, факторов накопления и альbedo потока фотонов для гетерогенного материала "включения в вакууме"

n	$\mu_s d$	K_0	K	B	R	B^*	R^*
1	28,8	0,740	0,756	1,02	0,061	1,18	0,106
2	14,4	0,575	0,604	1,05	0,071	1,36	0,144
5	5,76	0,283	0,335	1,18	0,109	1,80	0,200
10	2,88	0,124	0,194	1,6	0,147	2,6	0,219
100	0,288	0,0135	0,049	3,6	0,206	5,0	0,219
∞	0	0,00687	0,040	5,8	0,219	5,8	0,219

Результаты имитации, приведенные в таблице 1, позволяют сделать вывод, что гетерогенные материалы характеризуются большими коэффициентами пропускания и меньшим выходом рассеянного излучения, чем однородный материал. Разница в коэффициентах пропускания первичного излучения гетерогенной и однородной мишенью свидетельствует, в первую очередь, о неодинаковом числе актов взаимодействия для падающих квантов. Сравним гетерогенный и однородный материалы, в которых число актов взаимодействия первичного излучения одинаково. В таблице приведены альbedo R^* и фактор накопления B^* для гомогенных мишеней эквивалентной толщины H^* , которую определяли из равенства коэффициента пропускания первичного излучения гетерогенной и однородной мишеней:

$$K_0 = \exp(-\mu H) = \exp(-\mu_s H^*). \tag{1}$$

Как следует из сравнения данных при одинаковой вероятности взаимодействия первичного излучения, значения альbedo и факторов накопления для гетерогенных материалов остаются меньше, чем для однородных и расхождение увеличивается для более крупных включений. Это подтверждает наличие корреляции между рассеянием и поглощением излучения в частицах дискретной фазы гетерогенного материала.

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ АЛЬБЕДО

Наиболее просто учесть эффект корреляции между рассеянием и поглощением в гетерогенном материале "включения в вакууме" можно в предположении, что зависимость выхода рассеянного излучения от вещества включения, энергии квантов, толщины слоя в д.с.п. первичных квантов (μH) такая же, как и для однородной среды, а зависимость от размера включений можно выделить в отдельный множитель. В этом случае интегральное альbedo совокупности монодисперсных сферических включений в вакууме описывается выражением [2]:

$$R(\mu_s d, \mu H) = P_b(\mu_s d) \cdot R_s(\mu H), \tag{2}$$

где $R_s(\mu H)$ - альbedo однородного слоя вещества включения эквивалентной толщины, $P_b(\mu_s d)$ - коэффициент, учитывающий корреляцию между рассеянием и поглощением для выхода назад из включения диаметром d .

Значения коэффициентов $P_b(\mu_s d)$ определяли в "экспериментах", полагая для материалов "включения в вакууме" плотность вещества матрицы равную нулю. Вещество включений - алюминий, железо, золото. Энергия налетающих квантов $E = 50; 100; 300$ кэВ. Толщина мишеней - 3 д.с.п. Флуоресцентное излучение не учитывали. Результаты для мишеней из алюминия приведены на рис.1.

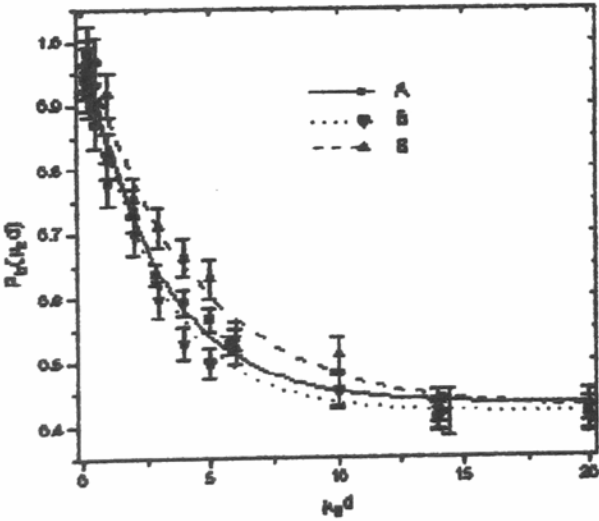


Рис. 1. Зависимость коэффициентов $P_b(\mu_s d)$ от диаметра сферических включений из алюминия при различной энергии налетающих квантов
А) $E = 100$ кэВ; Б) $E = 50$ кэВ; В) $E = 300$ кэВ.
Точки - результаты имитации, кривые - аппроксимация результатов.

Исследования показали, что зависимости коэффициентов $P_b(\mu_s d)$ от диаметра включений, полученные в "экспериментах", слабо меняются от вещества включений и энергии первичного излучения. Они практически нечувствительны к изменению толщины мишени, если она составляет более 1 д.с.п. Это согласуется с тем, что для большинства материалов альbedo формируется в слое толщиной примерно равном д.с.п. налетающих квантов [3]. Полученные в "экспериментах" для разных веществ включений и энергий излучения зависимости $P_b(\mu_s d)$ были аппроксимированы гладкой функцией с двумя варьируемыми параметрами (C_1 и C_2):

$$f(x) = (1 - C_2) \exp(-C_1 x) + C_2. \tag{2}$$

Значения параметров, полученные для различных мишеней и энергий квантов приведены в таблице 2.

Таблица 2. Значения подгоночных параметров для аппроксимации зависимостей коэффициентов $P_b(\mu, d)$, соответствующих различным условиям "эксперимента"

Вещество	Энергия, кэВ	C_1	C_2	число точек	χ^2
Алюминий	50	$0,323 \pm 0,023$	$0,426 \pm 0,014$	11	1,093
Алюминий	100	$0,368 \pm 0,031$	$0,420 \pm 0,014$	14	0,861
Алюминий	300	$0,231 \pm 0,022$	$0,424 \pm 0,020$	11	1,065
Железо	50	$0,441 \pm 0,067$	$0,386 \pm 0,016$	6	0,640
Железо	100	$0,541 \pm 0,129$	$0,428 \pm 0,041$	8	0,599
Железо	300	$0,363 \pm 0,078$	$0,438 \pm 0,041$	6	0,304
Золото	50	$0,389 \pm 0,060$	$0,414 \pm 0,032$	6	0,725
Золото	100	$0,330 \pm 0,090$	$0,412 \pm 0,055$	9	0,623
Золото	300	$0,488 \pm 0,105$	$0,422 \pm 0,035$	6	2,294

Аналитическая зависимость вида (2) для $P_b(\mu, d)$ описывает весь полученный набор результатов с погрешностью около 15% при значениях параметров $C_1 = 0,312 \pm 0,039$; $C_2 = 0,416 \pm 0,021$.

Чтобы от материала "включения в вакууме" перейти к материалу "включения в поглощающей матрице", воспользуемся представлением альbedo в приближении однократного рассеяния в модели эквивалентной гомогенной среды [4]. В этом случае альbedo материала представимо в виде двух сомножителей, один из которых есть относительная вероятность рассеяния в материале (фактор рассеяния) μ^s/μ , а другой выражается в виде интеграла произведения углового распределения квантов в элементарном акте соответствующего процесса рассеяния и множителя, учитывающего ослабление рассеянного кванта, для выхода в заднюю, по отношению к направлению движения первичного кванта полусферу. Оба материала имеют одинаковый линейный коэффициент рассеяния μ^s и различные линейные коэффициенты ослабления μ . Кроме того, для корректного учета эффекта корреляции в материале с матрицей, размер включения в д.с.п. следует вычислять относительно разности линейных коэффициентов ослабления веществ включений и матрицы. Поэтому для альbedo материала "включения в поглощающей матрице" получим:

$$R(\mu_0 d, \mu H) = (1 - \mu_w/\mu) P_b(\mu_0 d) \cdot R_s(\mu H), \quad \mu_0 = \mu_s - \mu_w. \quad (3)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В гетерогенном материале обнаружен эффект корреляции между точками рассеяния и поглощения, что приводит к дополнительному поглощению рассеянных во включении квантов. Наиболее ярко эффект проявляется в материале "включения в вакууме" для включений с характерным размером существенно превышающим д.с.п. первичных квантов в веществе включений. Предложено простое феноменологическое описание альbedo потока квантов в гетерогенном материале с включениями рассеивателя. Получены аппроксимационные зависимости коэффициента, учитывающего эффект корреляции между рассеянием и поглощением для альbedo дискретной фазы модельного композита.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кирдин А.И., Лазурик В.Т. Альbedo рентгеновского излучения от квазипериодических материалов// Проблемы ядерн. физики и космич. лучей. Респ. межвед. науч.-техн. сборник. Харьков: Вища школа. -1988. -Вып. 29. -С. 78-80.
2. Кирдин А.И., Лазурик В.Т. Рассеянный компонент потока при облучении гамма-квантами гетерогенных сред// Атомная энергия. - 1987. - Т. 62. - Вып. 2. - С. 132-133
3. Булатов Б.П., Андрианов Н.Ф. Обратное рассеянное гамма-излучение в радиационной технике//М.: Атомиздат. - 1971. -240 с.
4. Кирдин А.И., Лазурик В.Т. Альbedo рентгеновского излучения от материалов с поглощающими включениями// Проблемы ядерн. физики и космич. лучей. Респ. межвед. науч.-техн. сборник. Харьков: Вища школа. -1989. -Вып. 32. -С. 42-48.

X-RAY ALBEDO OF HETEROGENEOUS MATERIAL "SCATTERER IN ABSORBER" TYPE

A.I.Kirdin, V.T. Larurik

Kharkov National University, Physycal-Technical Department, 31 Kurchatov ave., Kharkov, 61108, Ukraine

X-ray flux integral albedo of heterogeneous material with permanent matrix and spheric inclusions chaotic placed in matrix was studied in case negligibel scattering in matrix. It was found scattering and absorption space points correlation effect in the material. Due to the effect X-ray scattered component decreased in heterogeneous material about homogeneous one with the same matter composition. The data were obtained by Monte-Carlo modelling method of irradiation transport in heterogeneous medium. Based on data analysis the albedo phenomenological description is proposed.

KEY WORDS: Monte-Carlo method, X-ray, flux albedo, heterogeneous material, correlation effect, phenomenological description

УДК 534.6.08

АКУСТИЧЕСКАЯ УСТАНОВКА ДЛЯ КАЛИБРОВКИ ИЗМЕРЕНИЙ СКОРОСТИ ПОТОКОВ ЖИДКОСТИ ДОПЛЕРОВСКИМИ МЕТОДАМИ

Е.А.Баранник, С.А.Гирнык, Н.Г.Стервиедов, В.В.Товстяк

Харьковский национальный университет, физико-технический факультет, 310108, г. Харьков, пр. Курчатова, 31

E-mail: girnyk@pht.univer.kharkov.ua

Поступила в редакцию 26 ноября 1999 г.

Разработана акустическая установка для калибровки измерений скорости потоков жидкостей и изучения доплеровских спектров акустических сигналов, состоящая из основного и вспомогательных резервуаров, устройства позиционирования датчиков и аппаратуры контроля и регистрации.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: эффект доплера, ультразвук, калибровка измерений скорости потоков.

Количественное определение объемного потока крови в кровеносных сосудах позволяет делать клинические заключения о кровоснабжении интересующих областей тканей. Оценка потоков проводится с использованием ультразвуковых доплеровских методов измерения характеристик потоков. Используются ультразвуковые преобразователи с различной частотой излучения для диагностики кровеносных сосудов с отличающимися внутренними диаметрами и глубиной залегания. Калибровка измерений скоростей потоков доплеровскими методами для получения высоких метрологических характеристик проводится на аппаратуре, обеспечивающей стабильность параметров модельных потоков и точность определения взаимного расположения осей трубок и пучков акустических волн.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Схематически установка для калибровки измерений скорости потоков жидкости доплеровскими методами показан на рис. 1 и включает в себя акустическую ванну 1 с контролируемой температурой среды, насос 2, устройство позиционирования 3, ультразвуковой датчик 4, систему регуляции скорости потока жидкости 5. Стрелками на рисунке показано направление потока жидкости в трубке.

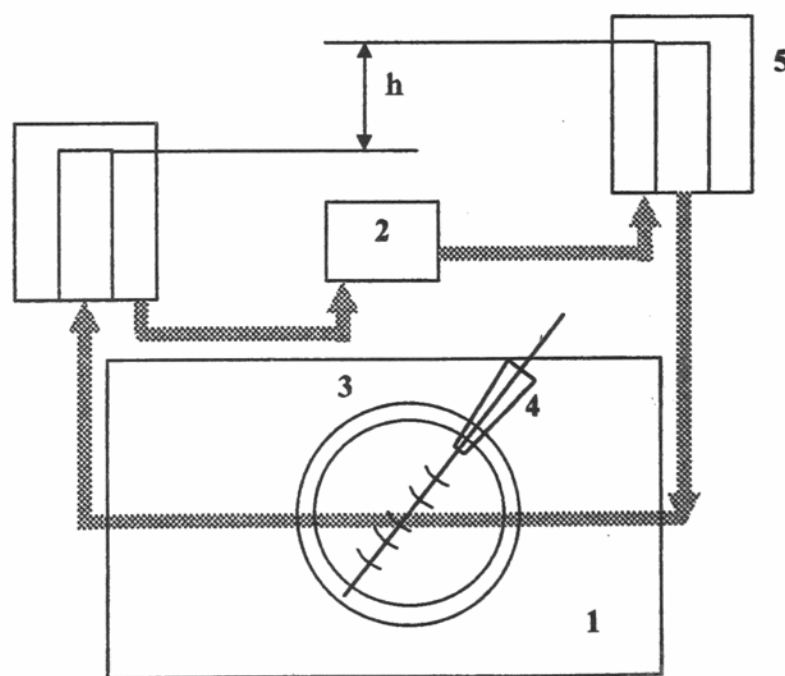


Рис.1. Схема установки для калибровки измерений скоростей потоков

Скорость движения жидкости при установившемся в системе стационарном ламинарном потоке описывается законом Пуазейля [2]:

$$v(r) = \frac{\Delta P}{4 \cdot \eta \cdot L} (R^2 - r^2), \quad (1)$$

где η – динамическая вязкость жидкости, R_0 – внутренний радиус трубки, L – полная длина диализной трубки, r – расстояние от оси трубки до линии тока. Расход жидкости Q ($\text{м}^3/\text{с}$), протекающей в единицу времени через поперечное сечение трубки, можно определить интегрированием скорости потока по сечению трубки:

$$Q = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{R_0} r \cdot v \cdot dr. \quad (2)$$

После подстановки (1) в (2) получаем:

$$Q = \frac{\pi \cdot R_0^4 \cdot \Delta P}{8 \cdot \eta \cdot l} = \pi \cdot \frac{D^4 \cdot \Delta P}{128 \cdot \eta \cdot l}. \quad (3)$$

Аналогичным образом, средняя по сечению трубки скорость движения жидкости определяется выражением:

$$\bar{v} = \frac{1}{2} \cdot v(0) = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} = \frac{D^2 \cdot \Delta P}{32 \cdot \eta \cdot l} \quad (4)$$

При использовании в качестве рабочей жидкости воды, динамическая вязкость которой $\eta = 1,002 \text{ мПа} \cdot \text{с}$, и трубки с внутренним диаметром $D = 6 \text{ мм}$ и общей длиной $l = 1,9 \text{ м}$, увеличение разности уровней h между верхним и нижним резервуарами на 1 см приведет к возрастанию расхода воды на 100 мл/мин , что приведет согласно (4) к изменению средней скорости потока на $0,059 \text{ м/с}$ и максимальной по сечению (вдоль оси трубки) скорости на $0,118 \text{ м/с}$. Для трубки диаметром 12 мм эти величины составят соответственно $0,237 \text{ м/с}$ и $0,474 \text{ м/с}$.

Приведенные выше выражения, связывающие расход жидкости со скоростью движения $v(0)$ на оси трубки, а также величину $v(0)$ со средней скоростью движения $\bar{v}$ справедливы только для установившегося ламинарного течения с пуазейлевским профилем скорости. Для всех пуазейлевских течений существует [2] такое критическое значение $R'_{\text{кр}}$ числа Рейнольдса:

$$R = \frac{v(0) \cdot \rho \cdot D}{2 \cdot \eta} = \frac{\bar{v} \cdot \rho \cdot D}{\pi \cdot D \cdot \eta} = \frac{4 \cdot Q \cdot \rho}{\pi \cdot D \cdot \eta}, \quad (5)$$

определяющего границу устойчивости ламинарного течения по отношению к возмущениям конечной интенсивности. Возмущения течения в системе, показанной на рис.1, непрерывно происходят в верхнем резервуаре у входа в трубку. При $R > R'_{\text{кр}}$ такие возмущения затухают на некотором расстоянии L , сколь бы сильны они не были. При $R < R'_{\text{кр}}$ движение станет турбулентным на всем протяжении трубки, причем для этого достаточны тем более слабые возмущения, чем больше R . Для трубки кругового сечения незатухающая турбулентность может наблюдаться уже при $R \approx 1800$. В это же время при тщательном устранении возмущений у входа в трубку удастся поддерживать ламинарное течение вплоть до $R \approx 10^5$.

Фактически при выходе жидкости из верхнего резервуара распределение скорости по сечению трубки близко к поршневому

$$v(0) = \bar{v} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} \quad (6)$$

с достаточно тонкой турбулизированой пристеночной областью. По мере увеличения расстояния от резервуара профиль скорости приближается к пуазейлевскому. На расстояниях, превышающих величину

$$L = 0,073 \cdot \frac{Q \cdot \rho}{\eta} \quad (7)$$

в прямой трубке устанавливается полностью сформировавшийся ламинарный поток, поэтому измерение величин $\bar{v}$ и $v(0)$ ламинарного пуазейлевского потока следует проводить так, чтобы расстояние от резервуара до точки пересечения ультразвукового пучка волн с осью трубки было больше L при всех величинах расхода жидкости. Во избежание влияния фиксаторов трубки на характеристики потока фиксация трубки должна производиться без изменения формы ее сечения.

Калибровка системы на поршневое течение, характерное для артериального кровотока в непосредственной близости от выхода из сердца, может быть проведена вблизи от входа в трубку.

Фактическая величина расхода жидкости (имитатора крови) при заданном L определяется измерением времени заполнения нижнего резервуара известным объемом жидкости при пережатой посредством зажима сливной трубки нижнего резервуара. Согласно (3) величина расхода жидкости определяется ее динамической вязкостью, которая в свою очередь, зависит от температуры. Поддержание

температуры в пределах $\pm 0.6\%$ обеспечивает точность измерений расхода при характерных его значениях порядка 500 мл/мин в пределах 0.7%.

Для приближения отражающей способности жидкости (вода, физиологический раствор, смесь воды и глицерина) к характеристикам крови, в нее вводят мелкие твердые, взвешенные в воде частицы, в частности порошок метилметакрилата с размерами частиц 20-80 мкм. Относительная поправка к эффективной вязкости получаемой таким образом суспензии $\Delta\eta/\eta = 0.25\phi$, $\phi = 4\pi^2 N/(3V)$ определяется отношением суммарного объема $4\pi^2 N/(3V)$ к полному объему суспензии V . Величина ϕ равна, очевидно $\phi = V_0/V = (m_0/\rho_0)/V$ где m – масса жидкости, m_0 и ρ_0 – соответственно масса порошка и плотность материала частиц.

Величина ρ_0 , как правило, больше ρ , поэтому в процессе калибровки и измерений происходит постепенное осаждение порошка суспензии в резервуарах и трубке. Для обеспечения точности калибровки расхода жидкости в пределах 1% с учетом температурной погрешности необходимо выполнение неравенства $\Delta\eta/\eta = 2.5(m_0/\rho_0) \leq 3 \cdot 10^{-3}$, определяющего верхнюю границу массы m_0 используемого порошка.

Система позиционирования 3 ультразвукового преобразователя 4 на рис.1 должна давать возможность плавного изменения угла θ между осью пучка волн и потоком жидкости посредством перемещения преобразователя по направляющей. Наибольшая ошибка измерения частоты (и скорости) доплеровского сдвига имеет место для углов θ , близких к 90°

$$\frac{\Delta V}{V} = \operatorname{tg} \theta \cdot d\theta, \quad (8)$$

поэтому достаточной является регулировка угла θ в пределах $(40^\circ - 90^\circ) \pm 0.2^\circ$, что позволяет для углов $\theta < 75^\circ$ измерять скорость с точностью 1.3%. Для получения сигнала максимальной мощности изменение угла сканирования α в плоскости, перпендикулярной оси трубки достаточно производить в пределах $\alpha \leq \arcsin(2D/l_0)$, где l_0 – расстояние от преобразователя до трубки, D – диаметр трубки.

Для имитации кровеносных сосудов и с целью согласования акустических импедансов воды и материала имитатора крови использовались диализные трубки диаметром 4 – 18 мм, что позволяет минимизировать потерю акустической энергии при прохождении границ раздела жидкость-стенка трубки.

Система регуляции скорости потока жидкости в трубке, состоящая из верхнего и нижнего резервуаров, и насоса поддерживает постоянную разность уровней жидкости между резервуарами с возможностью регулировки перепада давлений $\Delta p = \rho gh$ путем изменения положения одного из резервуаров по высоте. Это обеспечивает автоматическую поддержку величины расхода жидкости в трубках. В зависимости от диаметра трубок и перепада уровней жидкости в резервуарах ее скорость регулируется в диапазоне от 0 до 5 м/с, обеспечивая точность не хуже 1%. Излишек жидкости из внутренних емкостей верхнего и нижнего резервуаров удаляется в сливную емкость.

Для контроля и регистрации скорости потока жидкости в трубках и ее уровня в резервуарах изготовлены датчики регистрации уровня жидкости, которые рассчитаны на контроль разности в уровнях жидкости до 500 мм с погрешностью не более 0.5 мм и контрольный датчик опорного уровня жидкости с погрешностью не более 0.1 мм. Скорость потока рассчитывается компьютером на основе данных емкостного датчика с поправкой на температуру жидкости и калибровкой по контактному датчику опорного уровня. Интерфейсный блок для их связи с компьютером выполнен на базе 8 – канального 12 – битного АЦП AD7858L и процессора PIC16F84. Связь с компьютером выполнена в стандарте RS-232. Кроме этого стенд оборудован датчиками контроля температуры жидкости в трубках с точностью измерения 0.1 градуса и системой термостатирования жидкости для исключения влияния вязкости среды на скорость потока жидкости. Для измерения доплеровских спектров потоков разработаны ультразвуковые датчики с рабочими частотами 3.5 и 5.0 МГц.

Изготовленная установка оборудована прецизионным механическим поворотным узлом для контроля положения угла θ между осью пучка волн ультразвукового преобразователя и осью трубки и вспомогательным устройством для точной ориентации положения оси трубки относительно оси пучка волн ультразвукового преобразователя. Точность установления угла оси пучка и трубки не хуже 0.1 градуса. Кроме того предусмотрена возможность наклона оси пучка в плоскости перпендикулярной плоскости трубки для проведения двумерных измерений скорости. Диапазон изменения угла наклона луча θ относительно оси трубки в плоскости ее расположения составляет 0 – 80 градусов. Микрометрическая система регулировки позволяет устанавливать точку пересечения ультразвукового луча относительно оси трубок с точностью не хуже 0.1 мм в двух перпендикулярных направлениях. Для устранения погрешности в пространственном положении оси трубки, в местах ввода трубки в акустическую ванну предусмотрены фиксаторы, обеспечивающие натяжение трубки и исключаящие ее

провисание. Совмещение осей пучка волн и трубки проводили юстировкой преобразователя до получения максимума отраженного сигнала от стальной проволоки диаметром 0.1 мм, протянутой по оси трубки.

МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ СКОРОСТИ ПОТОКА

При непрерывном режиме излучения спектр доплеровского сигнала, полученный при зондировании пуазейлевского потока жидкости, имеет вид [3] для $\omega \leq \omega_0$

$$S(\omega) = S_0 I_0 \left\{ \frac{2R^2}{b^2} \cdot \frac{l_D^2}{l_D^2 + l_0^2} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \right\} \exp \left\{ - \frac{2R^2}{b^2} \cdot \frac{l_D^2}{l_D^2 + l_0^2} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \right\} \quad (9)$$

$$\omega_0 = \frac{4\pi v(0)}{\lambda} \cos \theta, \quad (10)$$

где I_0 – цилиндрическая функция Бесселя мнимого аргумента, b – эффективный радиус преобразователя, l_D – длина зоны Френеля. Наибольшее падение величины $S(\omega)$ по мере удаления от максимальной частоты ω_0 доплеровского спектра обусловлено экспоненциальным множителем, поэтому среднюю частоту доплеровского сдвига можно определить интегрированием экспоненциальной функции:

$$\bar{\omega} = \int_0^{\omega_0} e^{-\beta \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right)} d\omega = \frac{1 - e^{-\beta}}{\beta} \omega_0. \quad (11)$$

Из этого выражения следует, что средняя скорость движения жидкости по сечению трубки

$$\bar{v}_\omega = \frac{1 - e^{-\beta}}{\beta} v(0) \equiv kv(0) = 2k\bar{v} \quad (12)$$

отличается от истинного значения (4) в $2k$ раз.

На практике ультразвуковые преобразователи с различной частотой излучения используются для диагностики кровеносных сосудов с отличающимися внутренними диаметрами и глубиной залегания. Высокочастотным ультразвуком зондируют, как правило, мелкие кровеносные сосуды с диаметром $0 < D < 2R_1$. Наиболее важно обеспечить точность измерения на верхнем пределе этого диапазона, поэтому из (12) находим:

$$v(0) = 2\bar{v} = \frac{1}{k(R_1)} \bar{v}_\omega = \frac{\beta(R_1)}{1 - e^{-\beta(R_1)}} \bar{v}_\omega. \quad (13)$$

При зондировании крупных сосудов $2R_1 < D < 2R_{\max}$ низкочастотным ультразвуком для вычисления параметров кровотока можно пользоваться формулами:

$$v(0) = 2\bar{v} = \frac{1}{k \left(\frac{R_1 + R_{\max}}{2} \right)} \bar{v}_\omega = \frac{\beta \left(\frac{R_1 + R_{\max}}{2} \right)}{1 - e^{-\beta \left(\frac{R_1 + R_{\max}}{2} \right)}} \bar{v}_\omega. \quad (14)$$

Существенный недостаток изложенной выше методики определения величины скорости заключается в необходимости иметь различные пересчетные коэффициенты k для различных диапазонов частот и диаметров сосудов. Относительная точность измерения скорости согласно (14) равна:

$$\frac{\Delta v(0)}{v(0)} = \frac{\Delta \bar{v}}{\bar{v}} = \frac{4\Delta R}{R_1 + R_{\max}} \left| \frac{e^{-\beta \left(\frac{R_1 + R_{\max}}{2} \right)}}{k \left(\frac{R_1 + R_{\max}}{2} \right)} - 1 \right| \quad (15)$$

и сильно зависит от конкретных значений величин b , $(R_1 + R_{\max})/b$, и $\Delta R/(R_1 + R_{\max})$.

Иной способ вычисления скорости заключается в определении спектрального максимума, однозначно связанного с $v(0)$. Такой способ может приводить, однако, к большому разбросу получаемых значений из-за случайного характера доплеровского сигнала. Более удачным, поэтому является общепринятый способ оценки максимальной скорости движения в потоке по максимальной частоте в доплеровском спектре, точность которого также не зависит от диаметра зондируемого сосуда. Быстрое спадание спектра мощности доплеровского сигнала для пуазейлевских потоков [3]:

$$S(\omega) = S_1 \exp \left\{ -\frac{4l_d}{b^2} \operatorname{ctg}^2 \theta \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\} \quad (16)$$

при $\omega > \omega_0$ указывает на хорошее спектральное разрешение величины $\square_0$, поскольку ширина спектра в этой области частот определяется шириной спектра о линии тока со скоростью $v(0)$. Выражение (9) показывает, что в отсутствии фокусировки "односторонняя" ширина спектра отнесенная к частоте ω_0 имеет вид:

$$\sigma = \frac{b}{2\sqrt{2}l_d} \operatorname{tg} \theta = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\pi b} \operatorname{tg} \theta. \quad (17)$$

Связанную с этим дополнительную погрешность измерения скорости $\Delta v(0)/v(0)$, пропорциональную σ , следует рассматривать как дифракционную добавку к (8), обусловленную размытием края спектра. При $\lambda = 0.43$ мм, что соответствует частоте 3.5 МГц, $b = 8$ мм и $\theta = 75^\circ$ значение величины (17) составляет 2.3 %. Использование фокусирующего преобразователя дает еще большее размытие

$$\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\lambda^2}{\pi^2 b^2} + \frac{b^2}{F^2}} \operatorname{tg} \delta, \quad (18)$$

которое при фокусном расстоянии $F = 90$ мм составляет 11.9 %, поэтому использование фокусирующего преобразователя в доплеровских измерениях нецелесообразно.

Данная работа выполнена при поддержке УНТЦ (проект # 865).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Paul M. Embree, William D.O'Brien. Volumetric Blood Flow via Time-Domain Correlation/ IEEE Trans.Ultrason., Ferroelec., and Freq. Contr. 1990,V.57,№3, p. 176-189.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Теоретическая физика: Т.В. Гидродинамика. - М.: Наука. 1986. -736с.
3. Баранник Е.А. Влияние дифракционной расходимости и ширины пучков волн на спектр доплеровского сигнала/ Акуст. Журн.,1992, Т.38, №2,с.237-244.
4. Фиш П. Доплеровские методы// Применение ультразвука в медицине/ Под ред. Хилла К. - М.: Мир. 1989, с.395-432.
5. H.A. Christman, D.R.Smith, B.L.Wealer, W.R.Betten. Real-time DSP system for ultrasonic blood flow measurement.

THE ACOUSTIC SETUP FOR CALIBRATION OF SPEED FLOW MEASUREMENTS OF LIQUID BY DOPPLER METHODS

E.A.Barannik, S.A.Girnyk, N.G.Stervodov, V.V.Tovstiyak

The Kharkiv National university, physical-technical department, 310108, Kharkiv, Kurchatov av., 31
E-mail: girnyk@pht.univer.kharkov.ua

The acoustic experimental setup for calibration of measurements of speed of flows of liquids and study doppler spectra of acoustic signals consisting from basic and auxiliary tanks, device of positioning of gauges both equipment of the control and registration.

KEY WORDS: doppler effect, ultrasound, calibration of speed flow measurements.

УДК 621.039:539.074.22

СИСТЕМА РЕГИСТРАЦИИ ИНФОРМАЦИИ С ИМПУЛЬСНОЙ КАМЕРЫ ДЕЛЕНИЯ

Р.В. Палагута, М.Ю. Силкин, Н.Г. Стервиедов, С.Н. Стервиедов

Харьковский национальный университет, 310077, Харьков, пл. Свободы, 4.

E-mail: sterv@phf.univer.kharkov.ua

Поступила в редакцию 10 декабря 1999 г.

Описана система регистрации информации с импульсной ионизационной камерой деления на основе микроконтроллера PIC16F84. Микроконтроллер обеспечивает системе функции интенсиметра с адаптивным алгоритмом измерения средней частоты счёта нейтронов, автономную цифровую индикацию результатов измерения, связь по последовательному каналу RS-232C с компьютером информационно-измерительного комплекса. Разработанная система регистрации предназначена для обеспечения работы импульсной камеры деления КНТ-31 или аналогичной в составе системы управления и защиты реакторов Курской атомной электростанции.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: камера деления, тепловые нейтроны, система управления и защиты, интенсиметр, средняя частота счёта

Камеры деления являются эффективными детекторами тепловых нейтронов. Благодаря таким преимуществам, как малая инерционность в широком диапазоне контролируемых плотностей потока нейтронов, достигающая десяти порядков, низкая чувствительность к интенсивному γ -излучению, относительно простой и достаточно точный расчет параметров, высокая допустимая рабочая температура (400°C для камеры КНТ-31) и другим, определили широкое их использование в системах управления и защиты (СУЗ) ядерных реакторов [1]. Основное назначение нейтронных камер в СУЗ реакторной техники – измерение и контроль уровня мощности и распределения энерговыделения в активной зоне реакторов по плотности потока тепловых нейтронов утечки. Широкая номенклатура камер с различным составом и площадью радиаторов позволяет использовать их во всех режимах работы реакторов в качестве пусковых, рабочих и камер контроля равномерности выделения энергии в объеме активной зоны.

Как и все устройства, предназначенные для измерения ионизирующих излучений, прибор на основе камеры деления представляет собой сочетание детектора, преобразующего информацию о параметрах излучения в параметры электрических сигналов, и электронно-измерительной схемы, осуществляющей обработку этих сигналов и представление полученных данных [2]. В то время как информационные возможности аппаратуры – диапазон измеряемых параметров, достигаемая точность измерения – определяется характеристиками используемых детекторов, эксплуатационные и сервисные возможности – форма представления данных, габаритные размеры, масса, удобство в обслуживании – зависят от электронной части.

В детектировании нейтронов в последние годы качественных изменений не произошло [3]. В тоже время динамичное развитие электронных средств, особенно технологии изготовления микросхем и массовый выпуск микропроцессоров оказало революционизирующее влияние на ядерное приборостроение.

Цель настоящей работы – создание современной "интеллектуальной" измерительной схемы для импульсной камеры деления и предназначенной для работы в СУЗ ядерного реактора.

СТРУКТУРНАЯ СХЕМА СИСТЕМЫ РЕГИСТРАЦИИ

Структурная схема системы регистрации приведена на рис.1. В прибор входит: выносной каскад предварительного усилителя (ВКУУ), расположенный непосредственно у камеры деления (КД);

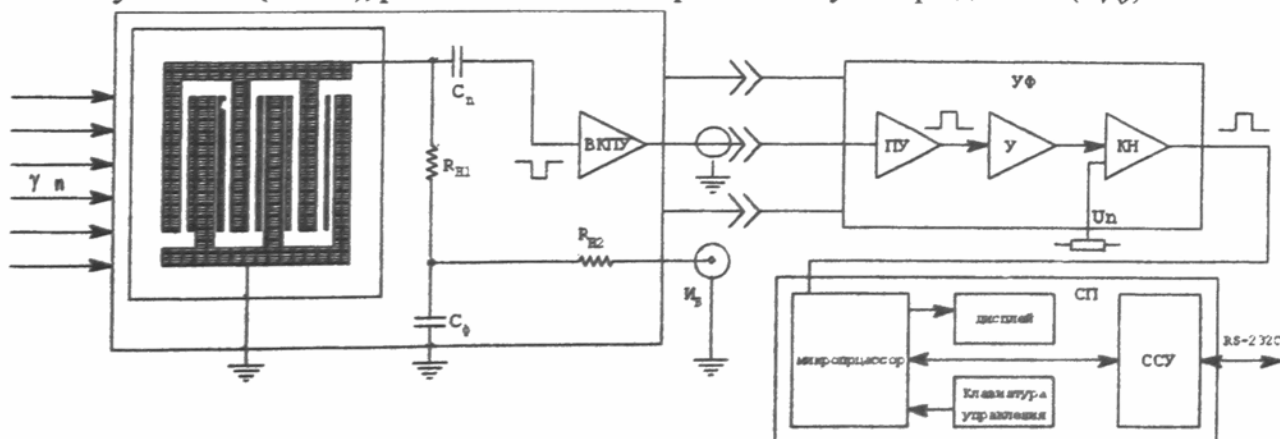


Рис. 1. Структурная схема микроконтроллерного интенсиметра

основной усилитель - формирователь (УФ), состоящий из базовой части предварительного усилителя (ПУ), усилителя (У) и компаратора напряжения (КН); сигнальный процессор (СП), состоящий из непосредственно микропроцессора, клавиатуры управления, цифрового дисплея и схемы согласования уровней (ССУ).

С камеры деления, при регистрации нейтронов из смешанного поля n -, γ - излучения на выносной каскад поступают импульсы длительностью порядка 100 нс. Эти импульсы передаются по коаксиальному кабелю на основной усилитель - формирователь, где дополнительно усиливаются быстрым усилителем и, при превышении импульсом заданного порога регистрации U_n , формируются компаратором напряжения в сигнал уровня транзисторно - транзисторной логики и стандартной длительности. Этот стандартный импульс поступает на сигнальный процессор. В последнем происходит обработка информации по одному из алгоритмов, задаваемом с клавиатуры управления. Основной адаптивный алгоритм измерения производит измерение средней частоты счета нейтронов с постоянной статистической точностью (с переменным временем интегрирования), автоматически переключает диапазон измерения средней частоты, выводит значения средней частоты, ее периода изменения на цифровой дисплей, а также через схему согласования уровней производит обмен данными с центральным компьютером.

ПРИНЦИПАЛЬНЫЕ СХЕМЫ СИСТЕМЫ РЕГИСТРАЦИИ

Принципиальная схема усилителя - формирователя с выносным каскадом приведена на рис.2. Выносной

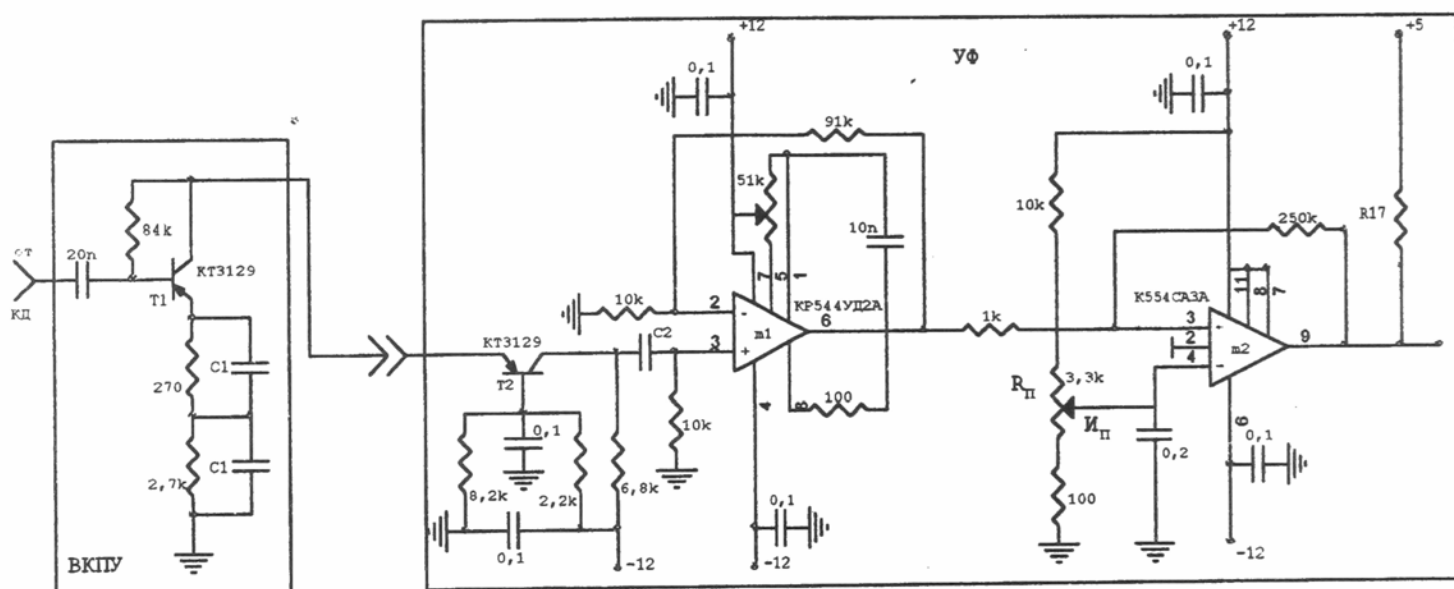


Рис.2. Принципиальная схема усилителя - формирователя

каскад выполнен на быстром малошумящем транзисторе Т1 типа КТ3129А по схеме с общим эмитором, в качестве нагрузки которого используется каскад с общей базой на транзисторе Т2 того же типа. Такое построение позволило с минимальными погрешностями передать быстрый сигнал отрицательной полярности из камеры деления по длинному кабелю ($l=200m$) к основному усилителю. Этот сигнал дополнительно усиливается быстрым операционным усилителем М1 типа КР544УД2 и подается на коммутатор напряжения на микросхеме М2 типа КР554СА3. На компараторе сигнал сравнивается с установленным пороговым напряжением U_n , снимаемым с резистора R_n и в случае превышения этого порога на выходе усилителя - формирователя появляется импульс ТТЛ - уровня. Этот импульс подается на сигнальный процессор, принципиальная схема которого приведена на рис.3.

Входной сигнал для сигнального процессора подается через предварительный делитель частоты на счетчике М1 (К1533ИЕ5), выходы которого подключены к входам мультиплексора М2 (К1533КП7). В зависимости от управляющего кода на адресных входах А мультиплексора на выход Q микросхемы проходит сигнал с частотой $f/2$, $f/4$, $f/8$ или $f/16$, где f - частота входного сигнала. С выхода Q информация подается на RA2 вход процессора М4 (PIC16F84). Микросхемы М5 (К154ИД1), М3 (К1533ИД10), транзисторные ключи и диоды обеспечивают динамическую индикацию результатов измерения и динамический опрос клавиатуры управления.

В процессоре программно реализованы два алгоритма измерения средней частоты счета n : измерение числа событий за заданное время экспозиции T и измерение заданного числа событий N . Первый алгоритм применяется когда возможные изменения n не велики (стационарный случай). В этом случае время экспозиции T выбирается из соображений обеспечения требуемой статистической погрешности $\sigma = 1/\sqrt{N}$. Счетчик организован в процессоре имеет модуль счета, обеспечивающий набор N событий, а так же мертвое время τ_m , обеспечивающее выполнение условия $\delta = n\tau_m \leq \sigma$, где δ - относительное число просчетов, т.е. погрешность измерений,

связанная с просчётами, не должна превышать заданной статистической погрешности. Если δ приближается к верхней границе $\delta = \sigma$, то процессор выдаёт команду на переключение входного делителя.

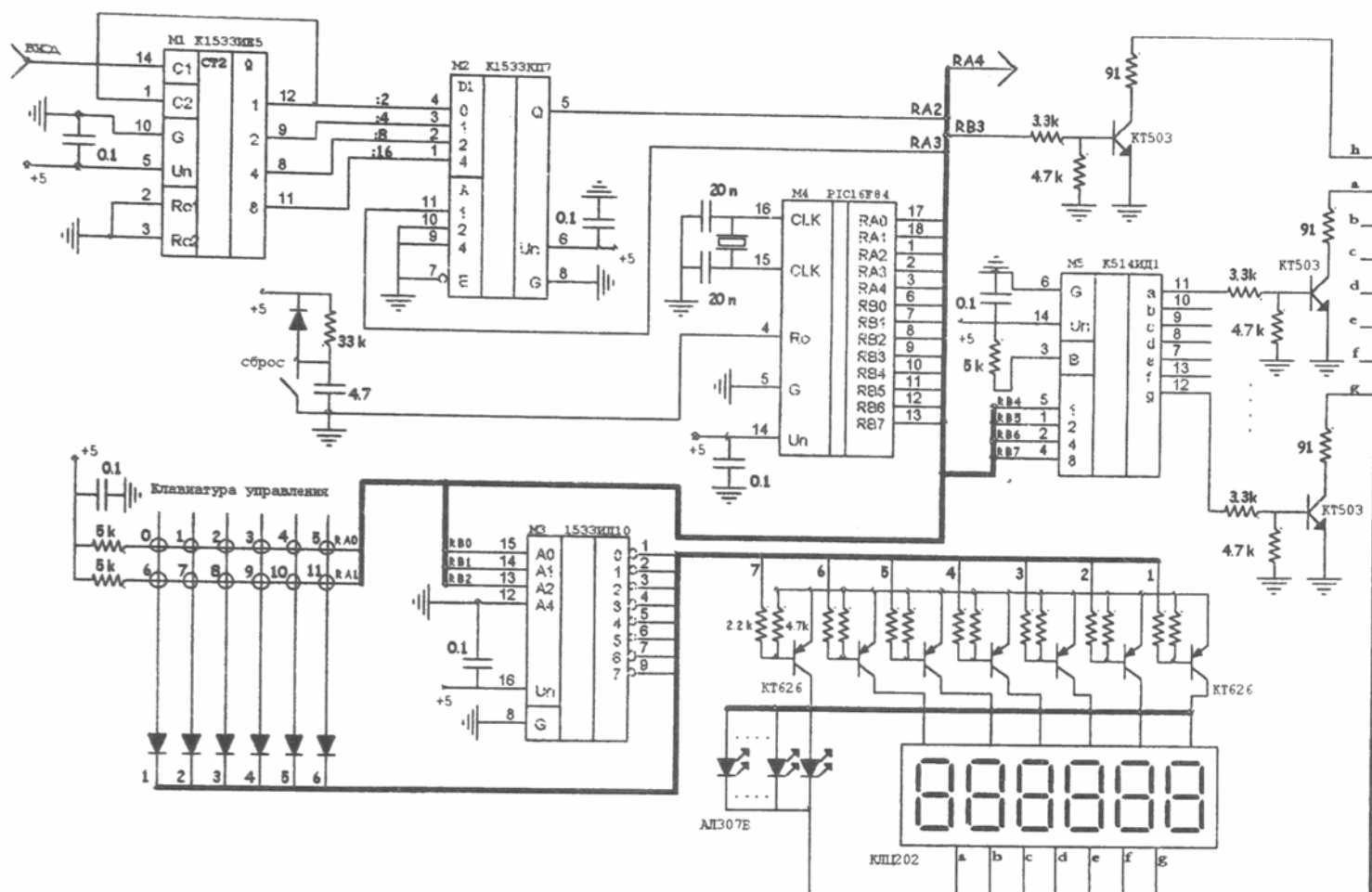


Рис.3. Принципиальная схема сигнального процессора

Второй алгоритм применим, если определяющим в измерениях является заданная статистическая погрешность σ , а интенсивность входящих событий n меняется в больших пределах. В этом случае процессором насчитывается заданное число событий N , измеряется время набора событий T и вычисляется делением N на T средняя частота счета.

Могут применяться и другие измерительные алгоритмы, смена которых производится перепрограммированием микропроцессора без изменения аппаратной части всего сигнального процессора.

Время экспозиции T , заданное число событий N , пороговая средняя частота счета для переключения предварительного делителя, параметры индикации и передачи информации задаются с клавиатуры управления в режиме автономного программирования.

Передача информации в компьютер следующего иерархического уровня производится по шине RA4 процессора. Схемы согласования электрических уровней ТТЛ $\leftrightarrow$ RS-232C на рисунке не показаны, так как представляют собой стандартный набор интерфейсных микросхем.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Для СУЗ ядерных реакторов разработана система регистрации информации с импульсной камерой деления. Система построена на базе микроконтроллера PIC16F84 и обеспечивает функции интенсиметра с аддитивным алгоритмом измерения средней частоты счёта событий в диапазоне $1 \div 1 \cdot 10^7$ имп./с, что позволяет совместно с камерой деления типа КНТ - 31 перекрыть весь диапазон измеряемых потоков нейтронов вне активной зоны. Схема испытана при работе с детектором КНТ - 31 - импульсной камерой деления с твердым радиатором из уранового покрытия (^{235}U обогащенного до 90%), площадью покрытия 500 см^2 , чувствительностью к тепловым нейтронам $0,25 \text{ имп./(нейтрон/см}^2\text{)}$, конструктивной ёмкостью 100 пикофарад и газом - наполнителем 98%Ag + 2%N₂. Камера деления может быть удалена от головной части предварительного усилителя. При этом общая ёмкость камеры и подсоединяющего ее коаксиального кабеля не должна превышать 1000 пф. Расстояние между головным каскадом и базовой частью прибора может составлять 100 – 200 метров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дмитриев А.Б., Мальшев Е.Н. Нейтронные ионизационные камеры для реакторной техники - М.: Атомиздат, 1975, - 96с.
2. Горн Л.С., Хазанов Б.И. Современные приборы для измерения ионизирующих излучений - М.: Энергоатомиздат, 1989. - 232с.
3. Чуляев С.В., Грудский М.Я., Артемьев В.А. Вторично эмиссионные детекторы ионизирующих излучений - М.: Энергоатомиздат, 1995. - 223с.

THE INFORMATION REGISTRATION SYSTEM OF THE IMPULSE DIVIDING CHAMBER**R.V. Palaguta, M.Ju. Silkin, N.G. Styervoyedov, S.N. Styervoyedov***Kharkov National University, 310077, Kharkov, Svobody sq., 4.**E-mail: sterv@pht.univer.kharkov.ua*

The information registration system of the impulse ionization divide chamber based on the microcontroller PIC16F84 was described. The microcontroller provides the ratemeter functions of the system with adaptive algorithm of neutron average count frequency measuring, autonomous digital indication of measuring results, connection by means of RS-232 channel with computer of the informational measuring complex. The elaborated registration system is intended for operation providing of the impulse dividing chamber KNT-31 or similar in the structure of the controlling and protection system of the reactor at the Kursk atomic power station.

KEY WORDS : dividing chamber, thermal neutrons, controlling and protection system, ratemeter, average count frequency

УДК 539.16.04:577.37

МОДЕЛЬ ВЫСОКОВОЛЬТНОЙ ТРАНСФОРМАТОРНОЙ УСКОРЯЮЩЕЙ УСТАНОВКИ

Г.А. Кривоносов, Н.В. Найденов, Н.А. Хижняк

Институт плазменной электроники и новых методов ускорения, 310108, Харьков, ул. Академическая, 1;
Акционерное общество закрытого типа научно-производственная компания «ЭЛТЕКС», 310140,
Харьков, пр. Гагарина, 98, E-mail: eletex@online.kharkov.ua
Поступила в редакцию 11 октября 1999 г.

Рассматривается модель технического решения высоковольтной трансформаторной ускоряющей установки для ускорения заряженных частиц. Высоковольтная трансформаторная ускоряющая установка содержит ускоряющую трубку, источник заряженных частиц, потенциальный экран, делитель напряжения и осесимметричные магнитопровода в количестве равном $n \geq 2$, расположенные вдоль общей оси симметрии. Для уменьшения массогабаритных показателей и увеличения КПД установка снабжена выпрямителями, каждый подключен к n -ной высоковольтной обмотке и соединенными между собой последовательно. Первичная обмотка размещена на первом магнитопроводе, а вторичная на n -ом. Высоковольтные и промежуточные обмотки размещены на каждом магнитопроводе, причём на втором и последующих до $n-1$ магнитопроводах размещено по две промежуточные обмотки. Рассматриваются варианты уменьшения массогабаритных параметров установки.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: высоковольтный источник, ускоряющая трубка, осесимметричные магнитопровода, выпрямитель, источник частиц, делитель напряжения.

Высоковольтные трансформаторные ускоряющие установки находят широкое применение не только для научных исследований, но и для практических целей: в технологических электронно-лучевых и лазерных установках и для радиационно-химической обработки металлов. Возникает необходимость иметь подобные установки в транспортируемом исполнении. При решении этой задачи определяющим является достижение низких массогабаритных показателей.

В [1] описана установка, в которой магнитопровода снабжены первичной, вторичной и высоковольтной обмотками. Высоковольтные и вторичные обмотки расположены симметрично относительно оси магнитопровода. Выпрямительный блок состоит из выпрямительных мостов, образующих колонны вдоль оси магнитопровода. Конструктивный недостаток такого устройства выражается в отсутствии источника электропитания аппаратуры (источника заряженных частиц, фокусирующего устройства и др.), расположенной на высоком потенциале. Поэтому массогабаритные показатели всей установки, сочетающей как высоковольтную трансформаторную часть, так и ускоряющую часть, велики. Высоковольтная трансформаторная ускоряющая установка [2] содержит осесимметричные магнитопровода, охваченные первичной, вторичной высоковольтной обмотками. При этом высоковольтные обмотки выполнены секционированными. Наличие электрической изоляции между отдельными секциями высоковольтной обмотки и отдельными элементами магнитопровода оказывает значительное влияние на степень рассеяния магнитного потока в магнитопроводе. С увеличением напряжения на потенциальном экране возрастает необходимость в увеличении изоляции магнитопровода, что приводит к увеличению промежутка между отдельными частями магнитопровода и, как следствие – к увеличению массогабаритных показателей. Кроме того, в случае использования данного устройства как ускорителя заряженных частиц, необходимо устанавливать автономный источник питания на высоком потенциале, либо подключать разделительный трансформатор. В том и другом случаях значительно увеличивается массогабаритный показатель установки. Наиболее близкое техническое решение поставленной задачи описано в [3]. Магнитопровод выполнен в виде магниторазделённых элементарных магнитопроводов, на каждом из них размещены высоковольтные и промежуточные обмотки, а электрическая изоляция расположена на промежуточных обмотках. Такое техническое решение позволяет в значительной степени уменьшить вес изоляции и габаритные размеры высоковольтной части установки. При питании установки от источника тока промышленной частоты, на выходе ускорительной трубки пучок модулируется частотой 50 Гц, такое обстоятельство отрицательно сказывается на качестве конечного результата.

В настоящей работе рассматриваются факторы, влияющие на массогабаритные характеристики, и приводятся рекомендации уменьшающие их.

ОПИСАНИЕ УСТРОЙСТВА

Высоковольтная трансформаторная ускоряющая установка состоит из $n \geq 2$ элементарных магнитопроводов (7) рис. 1, каждый из которых выполнен в виде тороида. Первый магнитопровод охвачен первичной (8), высоковольтной (6) и промежуточной (12) обмотками. Последний магнитопровод охвачен вторичной (4), высоковольтной и промежуточной обмотками. Промежуточные

магнітопровода охопачены високовольтною і двома проміжочними обмотками. Причём проміжочні обмотки розположені поверх остальных обмоток, і вони соединены между собой попарно. Проміжочна обмотка першого магнітопровода соединена с проміжочною обмоткою другого магнітопровода, а втора проміжочна обмотка другого магнітопровода соединена с проміжочною обмоткою третього магнітопровода і т.д. Вторична обмотка (4) трансформірует електричну енергію для питания приборов (2,3), розположених під високим потенціалом, закритих потенціальним екраном (1). Високовольтні обмотки питают выпрямительные блоки (5) со сглаживающими фильтрами, и блоки соединены между собой последовательно. Механическую нагрузку несут изоляторы (11), равномерно расположенные друг против друга на магнітопроводе. По оси находится ускорительная трубка (10) вместе с делителем напряжения (на рис. 1 делитель не показан). На первичную обмотку (8) подаётся переменное електричне напруга от преобразователя (9).

РАБОТА УСТРОЙСТВА

При подаче переменного напруга на первичную обмотку (8) от преобразователя (9) в високовольтною (6) и проміжочною (12) обмотках, охопачающих первый магнітопровод (7), индуцируется переменная ЭДС. Сформированное переменное высокое напруга выпрямляется вып-

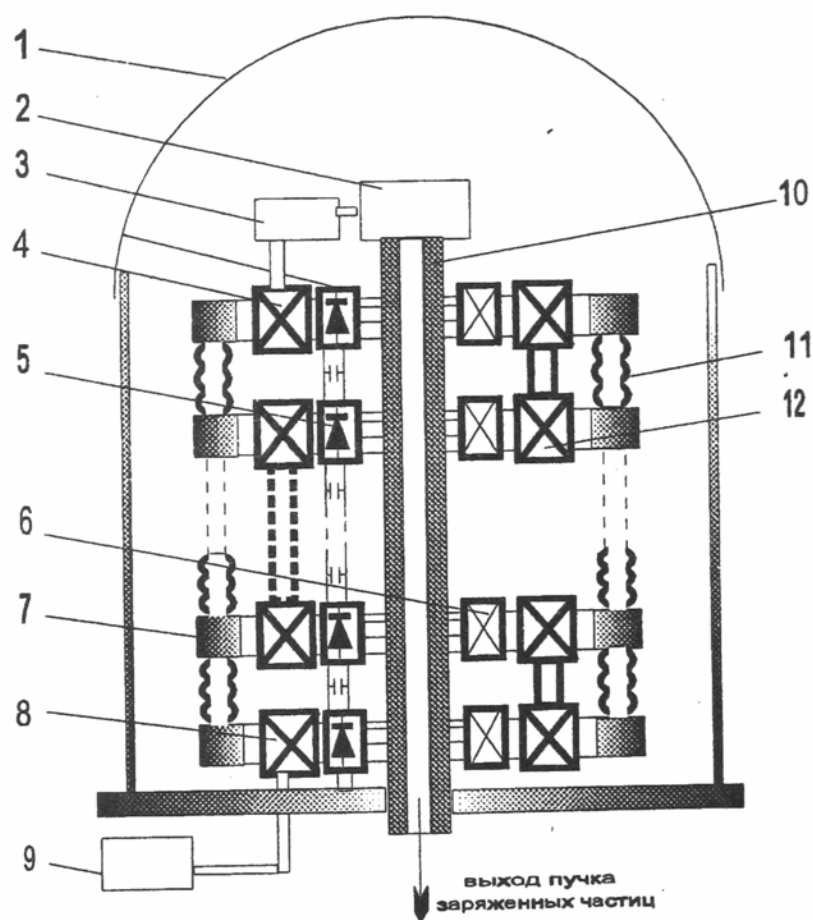


Рис. 1. Блок-схема высоковольтной трансформаторной ускоряющей установки. 1 – потенціальний екран, 2 и 3 – апаратура управління пучком, 4 – вторична обмотка, 5 – випрямительний блок з фільтром, 6 – високовольтна обмотка, 7 – магнітопровод, 8 – первична обмотка, 9 – преобразователь напруга, 10 – ускорительная трубка, 11 – упоры из изолятора, 12 – проміжочні обмотки.

рямительным блоком (5), фіксує підвищений потенціал на вищерозположеному випрямительному блоку і второму магнітопроводе. Установившийся переменный ток в паре проміжочных обмоток первого и второго магнітопроводов образует во втором магнітопроводе магнітний потік, який в свою чергу і викликає переменное ЭДС, в охопачающих его обмотках. Индуцированный переменный ток в последующей паре проміжочных обмоток создаёт переменный магнітний потік в третьем магнітопроводе, а он в свою очередь наводит ЭДС как в последующей паре проміжочных обмоток, так и в високовольтною обмотке, а выпрямительные блоки фіксируют очередной уровень высокого потенціала. Подобным образом в последующих магнітопроводах протекают процессы аналогичные рассмотренным в предыдущем магнітопроводе, а роль первичной обмотки в данном случае выполняет одна из проміжочных обмоток. Процесс передачи електрической энергии продолжается до последнего магнітопровода, в котором переменный магнітний потік индуцирует во вторичной обмотке (4) переменную ЭДС. Напруга постоянного електрического тока,

зафиксированное выпрямительными блоками, подаётся на потенциальный экран (1), на входы ускорительной трубки и делителя напряжения. Делитель напряжения осуществляет равномерное распределение электрического потенциала вдоль колонны магнитопроводов и ускорительной трубки, а также служит для утекания токов проводимости. Электрическая изоляция между магнитопроводами осуществляется межобмоточной изоляцией промежуточных обмоток и изоляцией упоров (11), выполняющих также роль несущей конструкции. Такая конструкция изоляции элементов, находящихся на высоком потенциале, даёт возможность исключить в значительной степени массу изолирующих материалов всей установки, а передаваемая электрическая мощность по промежуточным обмоткам достаточна для работы источника заряженных частиц в заданном режиме. Особое значение в характеристике массогабаритных параметров следует уделить преобразователю электрической энергии (9). Действительно, при питании первичной обмотки устройства электрическим током промышленной частоты (или частотой тока до 400 Гц) при заданной мощности установки, то при расчёте количества витков возможно коэффициент трансформации выбирать достаточно большим (около 20). В этом случае, как кажется на первый взгляд, можно в значительной степени уменьшить количество элементарных магнитопроводов. Однако в этом случае для магнитопровода берётся материал с малым значением магнитной проницаемости. С увеличением частоты электрического тока для питания установки, как показали предварительные расчёты, массогабаритные показатели уменьшаются, в результате увеличения магнитной индукции в магнитопроводе. Оптимальные показатели достигаются при частотах в 5 – 9 кГц. При последующем увеличении частоты питающего тока необходимо применять для магнитопровода не трансформаторное железо, а пермалой или феррит. В этом случае возникают трудности технологического плана – возникает сложность выполнить магнитопровод достаточных размеров, обеспечивающие электрическую прочность всего устройства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авторское свидетельство СССР № 1504676, кл. Н 01 F 31/08, 1989.
2. Авторское свидетельство СССР № 470246, , кл. Н 05 Н 5/00, 1976
3. Патент на изобретение РФ, № 2077759 от 20. 04. 97 Бюл. № 11

MODEL HIGH-VOLTAGE TRANSFORMER ACCELERATING INSTALLATION

G.A. Krivonosov, N.A. Khizhaik

The Institute of plasma electronics and new methods of acceleration, 310108, Kharkov, str. Akademicheskaya, 1.

The model of the technical decision of high-voltage transformer of accelerating installation for charged particles acceleration is considered. The high-voltage transformer of accelerating installation contains accelerating tube, source charged particles source, potential screen, voltage divider and axial magnetic conductors in amount equal $n \geq 2$, placed along a common axis of symmetry. For reduction of mass and size parameters and increase of efficiency the installation is supplied with rectifiers, each of which is connected to n - th high-voltage winding and is connected themselves consistently. The primary winding is placed on the first magnetic conductors, and secondary one on the n - conductor. The high-voltage and intermediate windings are placed on each magnetic conductors. On second and subsequent magnetic conductors up to $(n - 1)$ one two intermediate windings are placed. The variants of reduction of mass and size parameters of the unit are considered.

KEY WORDS: a high-voltage source, accelerating tube, axial magnetic conductors, rectifier, particles source, voltage divider.

ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ЛАБОРАТОРИЯ ПРИКЛАДНОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ
И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

ПРЕДЛАГАЕТ

Экспресс-проектирование и изготовление электронных приборов, информационно-измерительных систем, управляющих устройств, средств сопряжения научного, учебного, технологического оборудования с компьютерами любых платформ и программного обеспечения к ним.

НОВИНКА!

Компьютеризированные учебные приборы и лабораторные работы для средних школ и высших учебных заведений.

Сервисное сопровождение всех разработок.

Контактный телефон: (0572) 35-28-34

E-mail: nickst@ftf.univer.kipt.kharkov.ua

Збірник наукових робіт

«Вісник Харківського університету», № 463

серія фізична «Ядра, частинки, поля», 1999, вип.4 /8/

Підписано до друку 25.12.1999

Формат 60 × 84 1/8

Умов. друк. арк. 9,96

Облік.-вид. арк. 9,26

Тираж 300. 4-00

310077, Харків, пл. Свободи, 4, Харківський державний університет
Видавничий центр ХДУ. Різо ХДУ

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

До редакції подається рукопис обсягом не менше 3 сторінок українською, російською або англійською мовами в двох примірниках з направленням установи і експертним висновком. Рукописи, які подаються до редакції, мають точно відповідати таким вимогам.

Текст друкується на білих аркушах формату А4 через один інтервал з високою якістю друку, придатною для фотокопіювання (рекомендується лазерний принтер). Застосовується редактор MS Word, шрифт Times New Roman (Cyr), розмір шрифту 10 pt., вирівнювання тексту по ширині. Поля справа і зліва по 2 см, зверху 3 см, знизу 2 см. Сторінки нумеруються послідовно на зворотному боці аркуша олівцем. Математичні та хімічні символи, рівняння і формули вводяться до тексту статті за допомогою комп'ютерної техніки. Рисунки в повністю придатному до репродукції вигляді вставляються до тексту в межах площі сторінки, вказаної вище. Рисунки виготовляються з використанням комп'ютерної техніки або виконуються тушшю на білому папері з друкованими цифрами і літерами на осях. Усі написи на рисунках та осях друкуються шрифтом не меншим за 8 pt. Підписи під рисунками друкуються шрифтом 9 pt. Формули, таблиці й рисунки нумеруються послідовно арабськими цифрами, наприклад: (1); Табл. 1; Рис. 1.

Послідовність розміщення матеріалу.

На першій сторінці зверху пропускаються два рядки; на третьому рядку в лівому верхньому куті друкується УДК (курсив, 9 pt.). Потім після пропуску одного рядка розміщується назва статті (прямий напівжирний шрифт, 12 pt., всі літери прописні, вирівнювання по центру). Після пропуску одного рядка друкуються ініціали та прізвища авторів (прямий напівжирний шрифт, 12 pt., вирівнювання по центру). У наступному рядку друкуються повні назви й адреси організацій авторів (шрифт курсив, 9 pt., вирівнювання по центру). Адреса електронної пошти друкується за бажанням авторів. Якщо організацій декілька, то для визначення авторів та організацій слід застосовувати виноски зірочкою або цифрами. У наступному рядку друкується дата надходження статті до редакції: число – цифрами, місяць – прописом, рік – цифрами (шрифт прямий, 9 pt., вирівнювання по центру).

Після пропуску одного рядка друкується реферат статті, 5-10 рядків, з коротким викладенням методичних підходів, запропонованих в роботі, та основних результатів. Слово “реферат” не друкується. Для тексту реферату застосовується прямий шрифт розміром 9 pt. У наступному рядку друкується 5-8 ключових слів (шрифт 9 pt.). Заголовок “**КЛЮЧОВІ СЛОВА:**” друкується прописом на тому ж рядку, що й ключові слова і виділяється напівжирним шрифтом. Текст реферату і ключові слова мають ширину на 1 см меншу, ніж основний текст (по 0,5 см з кожного боку).

Далі після пропуску одного рядка друкується основний текст статті. Абзаци починаються з червоного рядка (0,75 см). Рекомендується розбиття статті на такі розділи: вступ (назва цього розділу не друкується), **МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ** (обов'язково для експериментальних робіт), **РЕЗУЛЬТАТИ Й ОБГОВОРЕННЯ**, **ВИСНОВКИ**. Для теоретичних робіт передбачається більш вільне розташування матеріалу, наприклад, замість розділу **МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ** рекомендуються розділи **ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ**, **МОДЕЛЬ** та ін. Розділи не нумеруються, в назвах розділів усі літери прописні й виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. При необхідності розділи поділяються на підрозділи. Назви підрозділів друкується з великої літери і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. Після кожного розділу або підрозділу йде один пустий рядок.

У кінці тексту статті після пропуску одного рядка, якщо потрібно, наводиться назва фонду, який фінансував роботу, і номер гранту.

Використані в роботі літературні джерела нумеруються в порядку цитування в тексті, номер посилання друкується в квадратних дужках. Не допускаються посилання на неопубліковані роботи. Список літератури (шрифт 9 pt.) розміщується одразу за основним текстом статті й виділяється як розділ **СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**.

Після списку літератури до статті додається реферат англійською мовою. Після пропуску одного рядка дається назва статті прописом, шрифт прямий 10 pt., напівжирний, вирівнювання по центру. У наступному рядку — ініціали та прізвища авторів, шрифт прямий 10 pt., напівжирний, вирівнювання по центру. У наступному рядку друкується повна назва організації та її адреса (курсив 9 pt., вирівнювання по центру). Після пропуску одного рядка вміщується текст реферату (шрифт прямий 9 pt., вирівнювання по ширині, без червоного рядка). У наступному рядку після слів “**KEY WORDS:**” (прописом, шрифт прямий напівжирний, 9 pt.) вміщуються ключові слова (шрифт прямий 9 pt., вирівнювання по ширині).

Один примірник рукопису має бути підписаний на зворотному боці аркуша усіма авторами. Рукописи, оформлені не у відповідності до наведених правил, не розглядатимуться.