К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ОТКЛОНЕНИЯМИ АРГУМЕНТА

Н. А. Кулеско

Рассматривается применение теории линейных интегральных уравнений Фредгольма к решению и исследованию устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с периодической правой частью и распределенными запаздываниями аргумента. Используется общее представление решения — обобщение теоремы Флоке, данное в работах [1—3]. Некоторые используемые приемы близки к приемам работ [4; 5], но применяются для более общего класса уравнений. Выводится приближенный критерий устойчивости решений, указываются способы построения частных решений. В статье повторяются некоторые результаты работ [6, 7], полученные иным способом. Сведение к интегральным уравнениям Фредгольма разных классов линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом может оказаться полезным и для исследования других вопросов.

1. Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dY(t)}{dt}=\int\limits_0^\tau [d\mathrm{H}(s)]\,Y(t-s)+\mu\int\limits_0^\tau [d_s\Xi(t,\ s)]\,Y(t-s)+ \\ +F(t)\,(\tau=\mathrm{const}>0,\ -\infty<t<\infty). \tag{1.1}$$

Здесь $Y(t)$ — n-мерный вектор, $\mathrm{H}(s)$ $n\times n$ матрица, не зависящая от t, $\Xi(t,\ s)$ периодическая по t $n\times n$ матрица с периодом 2π.

Введем нормы вектора $Y=\begin{pmatrix} y_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ y_n\end{pmatrix}$ и матрицы $\mathrm{H}=\|\eta_{ml}\|$ по формулам

$$|Y|=\max_m|y_m|,\quad |\mathrm{H}|=\max_m\sum_{l=1}^n|\eta_{ml}|\,(m=1,\ \ldots,\ n). \tag{1.2}$$

Предполагается, что матрицы в (1.1) удовлетворяют условиям

$$|\overset{\tau}{\underset{s=0}{V}}\mathrm{H}(s)|<\infty,\quad \max_t|\overset{\tau}{\underset{s=0}{V}}\Xi(t,\ s)|<\infty,$$

$$\max_t|\overset{\tau}{\underset{s=0}{V}}\Xi(t+s,\ s)|<\infty. \tag{1.3}$$

Параметр μ может принимать комплексные значения. Неоднородная часть $F(t)$ представляется в виде

$$F(t) = e^{\alpha t} C(t), \quad \alpha = \text{const}, \tag{1.4}$$

где $C(t)$ — периодический вектор периода 2π, разложимый в равномерно сходящийся ряд Фурье.

Рассмотрим систему (1.1) при $\mu = 0$, $\alpha = 0$.

$$\frac{dY(t)}{dt} = \int_0^\tau [d\mathrm{H}(s)]\, Y(t-s) + C(t). \tag{1.5}$$

Будем искать ее периодическое решение $Y_0(t)$ периода 2π. Для этого представим вектор $C(t)$ в виде ряда Фурье.

$$C(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} C_r e^{irt}, \quad C_r = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C(s)\, e^{-irs}\, ds. \tag{1.6}$$

Если выполняется условие отсутствия резонанса

$$\det\left[irE - \int_0^\tau e^{-irs}\, d\mathrm{H}(s)\right] \neq 0 \quad (r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{1.7}$$

то периодическое решение существует и имеет вид

$$Y_0(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[irE - \int_0^\tau e^{-irs}\, d\mathrm{H}(s)\right]^{-1} C_r e^{irt}. \tag{1.8}$$

Здесь и далее E — единичная матрица. (Сходимость ряда (1.8) будет доказана в пункте 2).

$$Y_0(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[irE - \int_0^\tau e^{-irs}\, d\mathrm{H}(s)\right]^{-1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C(s)\, e^{-irs}\, ds\, e^{irt} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[irE - \int_0^\tau e^{-iru}\, d\mathrm{H}(u)\right]^{-1} e^{ir(t-s)}\, C(s)\, ds. \tag{1.9}$$

Если ввести обозначение

$$K(t) \equiv \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[irE - \int_0^\tau e^{-irs}\, d\mathrm{H}(s)\right]^{-1} e^{irt}, \tag{1.10}$$

то из (1.9) следует, что

$$Y_0(t) = \int_0^{2\pi} K(t-s)\, C(s)\, ds. \tag{1.11}$$

Далее будет показано, что матрица $K(t)$ ограничена, непрерывна за исключением точек $t = 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$, где она имеет разрывы I рода.

Одновременно с (1.1) будем рассматривать соответствующую однородную систему уравнений

$$\frac{dY(t)}{dt} = \int_0^\tau [d\mathrm{H}(s)]\, Y(t-s) + \mu \int_0^\tau [d_s\Xi(t, s)]\, Y(t-s). \qquad (1.12)$$

Из работ [1—3] следует, что однородная система дифференциальных уравнений (1.12) имеет решения вида

$$Y_j(t) = e^{p_j t} X_j(t), \qquad (1.13)$$

где $X_j(t)$ — периодический вектор периода 2π. Числа p_j будем называть характеристическими показателями. Они определяют устойчивость решений. Именно, при $\mathrm{Re}\, p_j < 0$ решения асимптотически устойчивы. Будем искать частное решение системы (1.12) в виде

$$Y(t) = e^{pt} X(t), \quad X(t + 2\pi) \equiv X(t). \qquad (1.14)$$

Уравнения для $X(t)$ принимают вид

$$\frac{dX(t)}{dt} = -pX(t) + \int_0^\tau e^{-ps} [d\mathrm{H}(s)]\, Y(t-s) + \mu \int_0^\tau e^{-ps} [d_s\Xi(t, s)]\, Y(t-s) \qquad (1.15)$$

Член, содержащий множитель μ в (1.15), является периодическим по t с периодом 2π. Применяя формулы (1.5), (1.11) к системе (1.15), где

$$C(t) = \mu \int_0^\tau e^{-ps} [d_s\Xi(t, s)]\, Y(t-s), \qquad (1.16)$$

получим систему интегральных уравнений

$$X(t) = \mu \int_0^{2\pi}\int_0^\tau K(t-s, p)\, e^{-pu} [d_u\Xi(s, u)]\, X(s-u)\, ds. \qquad (1.17)$$

Однородная часть системы (1.15) имеет вид

$$-pX(t) + \int_0^\tau e^{-ps} [d\mathrm{H}(s)]\, X(t-s), \qquad (1.18)$$

поэтому матрица $K(t, p)$

$$K(t, p) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[(p + ir)E - \int_0^\tau e^{-(p+ir)u}\, d\mathrm{H}(u)\right]^{-1} e^{irt}. \qquad (1.19)$$

Делая замену $s - u$ на s, приходим к системе интегральных уравнений Фредгольма для $X(t)$

$$X(t) = \mu \int_0^{2\pi} \Pi(t, s, p)\, X(s)\, ds, \qquad (1.20)$$

где

$$\Pi(t, s, p) = \int_0^\tau K(t-s-u, p)\, e^{-pu}\, d_u\, \Xi(s+u, u). \qquad (1.21)$$

2. Рассмотрим уравнение

$$D(p) \equiv \det\left(pE - \int_0^\tau e^{-pu}\, d\mathrm{H}(u)\right) = 0. \tag{2.1}$$

Его корни обозначим через $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \ldots$. Очевидно, что их можно перенумеровать так, что

$$\operatorname{Re}\rho_1 \geqslant \operatorname{Re}\rho_2 \geqslant \operatorname{Re}\rho_3 \geqslant \cdots \tag{2.2}$$

При этом имеем

$$\operatorname{Re}\rho_j \to -\infty \ (j \to \infty). \tag{2.3}$$

Условие (1.7) обозначает, что корни $\rho_1, \rho_2, \ldots$ не совпадают с точками $p = ir\,(r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Пусть

$$p \neq p_{jr},\ p_{jr} = \rho_j - ir \ (j = 1, 2, \ldots, r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{2.4}$$

В этом случае все члены ряда (1.19) ограничены. Исследуем сходимость этого ряда. Заметим, что

$$|e^{-pu}| \leqslant \max\{e^{-\operatorname{Re} pu}, 1\}\ 0 \leqslant u \leqslant \tau. \tag{2.5}$$

Поэтому всегда можно выбрать число R так, чтобы при $|r| > R$ выполнялось условие

$$|p + ir| \geqslant 2|A(p + ir)|,\ A(p) \equiv \int_0^\tau e^{-pu}\, d\mathrm{H}(u). \tag{2.6}$$

Разлагая в ряд обратную матрицу, получим

$$\begin{gathered}[(p + ir)E - A(p + ir)]^{-1} = (p + ir)^{-1}E + \\ + (p + ir)^{-2}A(p + ir) + (p + ir)^{-3}A^2(p + ir) + \cdots\end{gathered} \tag{2.7}$$

Из неравенства (2.6) следует, что

$$\left|\sum_{l=2}^{\infty} (p + ir)^{-l}A^{l-1}(p + ir)\right| \leqslant 2|A(p + ir)|\,|p + ir|^{-2}. \tag{2.8}$$

Отсюда получаем, что двойной ряд

$$\sum_{r=-\infty,\ r\neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm R}^{\infty}\ \sum_{l=2}^{\infty} (p + ir)^{-l}A^{l-1}(p + ir)\, e^{irt} \tag{2.9}$$

сходится равномерно при всех вещественных t.

Сходимость ряда (1.19) определяется сходимостью ряда

$$\sum_{r=-\infty,\ r\neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm R}^{\infty} E(p + ir)^{-1}e^{irt}, \tag{2.10}$$

который сходится по признаку Дирихле. Разрывы матрицы $K(t, p)$ совпадают с разрывами суммы ряда

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{r=-\infty,\ r\neq 0}^{\infty} -ir^{-1}Ee^{irt} = \frac{1}{2\pi}\sum_{r=1}^{\infty} E\,\frac{\sin rt}{r} = \frac{\pi - t}{2\pi}E;\ t \in (0, 2\pi). \tag{2.11}$$

Отсюда следует, что матрица $K(t, p)$ имеет разрыв только при $t=0$ и

$$K(+0, p) - K(-0, p) = E. \tag{2.12}$$

При выполнении условий (2.4) норма матрицы $K(t, p)$ ограничена при всех t.

$$\max_t |K(t, p)| \leqslant \chi_1(p) < \infty, \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{2.13}$$

$K(t)$ в (1.10) обладает аналогичными свойствами, так как совпадает с $K(t, 0)$.

Из условия (1.3) и неравенства (2.5) следует, что интеграл (1.21), определяющий интегральное ядро $\Pi(t, s, p)$, сходится равномерно при $s \in [0, 2\pi]$. Это оправдывает возможность перестановки порядка интегрирования в (1.17) и позволяет перейти от (1.17) к (1.20). Если $p \neq p_{jr}$ ($j = 1, 2, \ldots, r = 0, \pm 1, \ldots$), то ядро ограничено при t, $s \in [0, 2\pi]$. Оно может иметь разрывы I рода.

3. Систему интегральных уравнений (1.20) применим к исследованию устойчивости решений однородной системы (1.12). Закрепим параметр $p \neq p_{jr}$ (2.4). Имеется не более чем счетное число собственных значений $\mu_1(p)$, $\mu_2(p)$, ... таких, что существует нетривиальное решение системы (1.20). При этом $\mu_k(p) \to \infty$ при $k \to \infty$. При закрепленном μ в (1.12) характеристические показатели в (1.14) можно находить из уравнений

$$\mu = \mu_k(p) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3.1}$$

Проще составить знаменатель Фредгольма [8] $D(\mu, p)$ системы интегральных уравнений (1.20). Трансцендентное уравнение

$$D(\mu, p) = 0, \tag{3.2}$$

разрешенное относительно p, имеет корнями характеристические показатели $p_j + ir$ ($r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Это следует из следующих свойств:

$$\begin{aligned} K(t, p+i) &\equiv e^{-it} K(t, p), \\ \Pi(t, s, p+i) &\equiv e^{i(s-t)} \Pi(t, s, p), \end{aligned} \tag{3.3}$$

которые получаются при непосредственном рассмотрении (1.19) и (1.21).

Пусть Δ — область комплексной плоскости. Если при всех $p \in \Delta$ собственные числа $\mu_k(p)$ не принадлежат некоторому множеству M, то очевидно, что при $\mu \in M$ соответствующие характеристические показатели $p_j(\mu) \overline{\in} \Delta$.

Возьмем в качестве области Δ правую полуплоскость $\operatorname{Re} p > 0$. Если выполнено неравенство

$$2\pi |\mu| \sup_{t, s, p} |\Pi(t, s, p)| < 1; \quad t, s \in [0, 2\pi], \quad \operatorname{Re} p > 0, \tag{3.4}$$

то из простого обобщения теоремы 1 [8, стр. 21] следует, что система (1.20) имеет только тривиальное решение $X(t) \equiv 0$. Из работ [1—3] следует, что при

$$|\mu| < \frac{1}{2\pi} [\sup |\Pi(t, s, p)|]^{-1}; \quad t, s \in [0, 2\pi], \quad \operatorname{Re} p > 0 \tag{3.5}$$

решения однородной системы (1.12) будут асимптотически устойчивы.

Пример. Рассматривается уравнение

$$\frac{dy(t)}{dt} = -ay(t) + \mu\cos t y(t-\tau) + \mu\sin t y(t-\tau-\pi), \tag{3.6}$$

где $a > 0$, $\tau \geqslant 0$, $\operatorname{Im}\mu = 0$.

Для этого уравнения имеем при $t \in (0, 2\pi)$ из (1.19)

$$K(t, p) = \frac{1}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\frac{e^{irt}}{ir + a + p} = \frac{e^{-(a+p)t}}{1 + e^{-2\pi(a+p)}}. \tag{3.7}$$

Оценивая $\Pi(t, s, p)$, находим при $\operatorname{Re} p \geqslant 0$

$$\begin{aligned}|\Pi(t, s, p)| &= |K(t-s-\tau, p)e^{-p\tau}\cos(s+\tau) + \\ &+ K(t-s-\tau-\pi, p)e^{-p(\pi+\tau)}\sin(s+\tau+\pi)| \leqslant \\ &\leqslant [|K(t-s-\tau, p)|^2 + |K(t-s-\tau-\pi, p)|^2]^{\frac{1}{2}} \leqslant \\ &\leqslant (1-e^{-2\pi a})^{-1}(1+e^{-2\pi a})^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Условие устойчивости (3.5) принимает вид

$$|\mu| < \frac{1}{2\pi}(1-e^{-2\pi a})(1+e^{-2\pi a})^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.9}$$

Аналогично можно показать, что условие

$$|y(t)| < Ce^{bt} \quad (C = \text{const},\ b > 0) \tag{3.10}$$

выполнено при

$$|\mu| < \frac{1}{2\pi}(1-e^{-2(a+b)\pi})(1+e^{-2(a+b)\pi})^{-\frac{1}{2}}e^{-b\tau}. \tag{3.11}$$

4. Рассмотрим теперь неоднородную систему (1.1) с правой частью вида (1.4). Частное решение системы (1.1) ищем в форме

$$Y(t) = e^{\alpha t}Z(t), \quad Z(t+2\pi) \equiv Z(t). \tag{4.1}$$

Для отыскания $Z(t)$ получаем систему интегральных уравнений

$$Z(t) = \mu\int_0^{2\pi}\Pi(t, s, \alpha)Z(s)\,ds + \Phi(t), \tag{4.2}$$

где

$$\Phi(t) = \int_0^{2\pi}K(t-s, \alpha)C(s)\,ds. \tag{4.3}$$

Здесь используются обозначения пункта 1 с заменой p на α. Если $C(t)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье вида (1.6), то $\Phi(t)$ представима в виде

$$\Phi(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[(\alpha + ir)E - \int_0^{\tau}e^{-(\alpha+ir)u}\,dH(u)\right]^{-1}C_r e^{irt}. \tag{4.4}$$

Если $\alpha \neq p_j$, (2.4), то предполагая, что $\Phi(t)$ имеет непрерывную производную, можно найти соответствующую вектор-функцию $C(t)$.

Применение альтернативы Фредгольма [9, стр. 87] позволяет получить ряд результатов для системы (1.1). Например, справедлива теорема.

Теорема 1. *Если однородная система линейных дифференциальных уравнений (1.12) с периодической правой частью и распределенными запаздываниями аргумента не имеет периодического решения, то соответствующая неоднородная система (1.1) дифференциальных уравнений с периодической вектор-функцией $F(t)$ $(F(t+2\pi) \equiv F(t)$ имеет единственное периодическое решение.*

Доказательство. По условию теоремы система интегральных уравнений (1.17) при $p = 0$ не имеет нетривиального решения, т. е. μ не является собственным значением, поэтому уравнение (4.2) при $\alpha = 0$ имеет единственное периодическое решение $Z(t)$ при любой непрерывной $\Phi(t)$. Теорема доказана. Очевидна справедливость и обратной теоремы.

Введем резольвенту $R(t, s, \mu, p)$ для системы уравнений (1.20). Очевидно, что

$$R(t+2\pi, s, \mu, p) = R(t, s+2\pi, \mu, p) = R(t, s, \mu, p), \tag{4.5}$$

$$R(t, s, \mu, p+i) \equiv e^{i(s-t)} R(t, s, \mu, p). \tag{4.6}$$

Если μ не является собственным значением системы (1.20) при $p = \alpha$, то решение неоднородной системы интегральных уравнений (4.2) имеет вид

$$Z(t) = \Phi(t) + \mu \int_0^{2\pi} R(t, s, \mu, \alpha)\Phi(s)\,ds. \tag{4.7}$$

Отсюда следует, что при ограниченности $\Phi(t)$ решение $Z(t)$ ограничено, точнее

$$\max_t |Z(t)| < L \max_t |\Phi(t)|, \quad t \in [0, 2\pi], \tag{4.8}$$

где

$$L = 1 + |\mu| \max_t \int_0^{2\pi} |R(t, s, \mu, \alpha)|\,ds. \tag{4.9}$$

Теорема 1 и неравенство (4.8) дают доказательство теоремы 4 Халаная [6, стр. 398].

Аналогично теореме 1 можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть однородная система (1.12) линейных дифференциальных уравнений с периодической правой частью и распределенными запаздываниями не имеет решений вида*

$$Y(t) = e^{\alpha t} X(t), \quad X(t+2\pi) \equiv X(t) \not\equiv 0. \tag{4.10}$$

Это условие необходимо и достаточно для того, чтобы неоднородная система (1.1) при $F(t)$, имеющем вид (1.4), имела единственное решение вида (4.1).

Если параметр μ_0 не является собственным значением системы интегральных уравнений (1.20) при $p = \alpha$, то очевидно, что при $\mu = \mu_0$ число α не является характеристическим показателем однородной системы (1.12). Отсюда, в частности, следует теорема 11 [6, стр. 404]. Действительно, система (1.1) при $F(t)$ вида (1.4), где $C(t) \not\equiv 0$, имеет решение вида (4.1) при любом α ($\operatorname{Re}\alpha \geqslant 0$); это означает, что все характеристические показатели p_j (1.12) лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$. В этом случае собственные числа оператора сдвига решения на период 2π $\lambda_j = \exp\{2\pi p_j\}$ удовлетворяют условию $|\lambda_j| < 1$. Отсюда следует равномерная асимптотическая устойчивость тривиального решения однородной системы (1.12).

5. Введем в рассмотрение сопряженную к (4.2) систему интегральных уравнений

$$U(t) = \mu \int_0^{2\pi} U(s) \prod (s, t, \alpha)\, ds. \tag{5.1}$$

Из работы [8, стр. 66] имеем следующий результат. Пусть при $p = \alpha$ система интегральных уравнений (1.20) имеет собственное значение μ_0, т. е. при $\mu = \mu_0$ имеются ненулевые $X_j(t) \not\equiv 0$ решения ($j = 1, \ldots, \gamma$). При $\mu = \mu_0$ сопряженная система интегральных уравнений (5.1) также имеет ненулевые решения $U_j(t) \not\equiv 0$ ($j = 1, \ldots, \gamma$). Для того, чтобы неоднородная система (4.2) интегральных уравнений имела решение, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_0^{2\pi} U_j(t)\, \Phi(t)\, dt = 0 \quad (j = 1, \ldots, \gamma). \tag{5.2}$$

Отсюда следует

Теорема 3. *Пусть однородная система линейных дифференциальных уравнений (1.12) с периодической правой частью и распределенными запаздываниями имеет при* $\mu = \mu_0$ *решения вида (4.10). Для того чтобы неоднородная система (1.1) с* $F(t)$ *вида (1.4) имела решение вида (4.10), необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} U_j(t) K(t - s, \alpha)\, C(s)\, ds\, dt = 0 \quad (j = 1, \ldots, \gamma). \tag{5.3}$$

Здесь $U_j(t)$ ($j = 1, \ldots, \gamma$) — полный набор линейно-независимых вектор-функций, соответствующих собственному значению μ_0 системы интегральных уравнений (5.1), сопряженной к системе (1.20) (при $p = \alpha$). Матрица $K(t, p)$ определена в (1.19).

Халанай [7] доказал следующее утверждение. Для того чтобы система

$$\dot{x}(t) = \int_{-\tau}^{0} x(t + s)\, d_s \eta(t, s) + f(t), \tag{5.4}$$

где $\eta(t, s)$ — периодическая с периодом 2π по t матрица, а $f(t)$ — периодический вектор периода 2π, имела решение периода 2π, необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\int_0^{2\pi} f(\alpha)\, y_k(\alpha)\, d\alpha = 0 \tag{5.5}$$

для всех периодических решений периода 2π системы

$$y(\alpha) + \int_{-\tau}^{0} \eta(\alpha - \gamma, \gamma)\, y(\alpha - \gamma)\, d\gamma = \mathrm{const}. \tag{5.6}$$

Теорема 3 и приведенная теорема Халаная тесно связаны. Именно, при $\alpha = 0$

$$\int_0^{2\pi} U_j(t) K(t-s)\, dt \tag{5.7}$$

должен удовлетворять сопряженному уравнению, построенному Халанаем. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{X}(t) = AX(t) + B(t) X(t-\tau) + F(t), \tag{5.8}$$

где

$$B(t+2\pi) \equiv B(t), \quad F(t+2\pi) \equiv F(t). \tag{5.9}$$

Согласно теореме Халаная, для того, чтобы эта система имела периодическое решение периода 2π, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^{2\pi} Y(t) F(t)\, dt = 0 \tag{5.10}$$

для всех линейно-независимых периодических решений системы

$$\dot{Y}(t) = -Y(t) A - Y(t+\tau) B(t+\tau). \tag{5.11}$$

Покажем, что для системы (5.8) с условиями (5.9) условия (5.3) и (5.10) эквивалентны. Для этого запишем систему интегральных уравнений, которой удовлетворяют периодические $X(t+2\pi) \equiv X(t)$ решения системы (5.8).

$$X(t) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ikE - A)^{-1} B(s+\tau) X(s) e^{ik(t-s-\tau)}\, ds +$$
$$+ \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ikE - A)^{-1} F(s) e^{ik(t-s)}\, ds. \tag{5.12}$$

Сопряженная система по Фредгольму имеет вид

$$U(t) = \int_0^{2\pi} U(s) \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ikE - A)^{-1} e^{ik(t-s-\tau)}\, ds \cdot B(t+\tau). \tag{5.13}$$

Для того, чтобы система (5.12) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^{2\pi} U(t) \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ikE - A)^{-1} F(s) e^{ik(t-s)}\, ds\, dt = 0 \tag{5.14}$$

Рассмотрим

$$N(s)=\int_0^{2\pi}U(t)\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(ikE-A)^{-1}e^{ik(t-s)}\,dt=$$

$$=\int_0^{s}U(t)\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(iKE-A)^{-1}e^{ik(t-s)}\,dt+$$

$$+\int_s^{2\pi}U(t)\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(ikE-A)^{-1}e^{ik(t-s)}\,dt=$$

$$=\int_0^{s}U(t)(E-e^{2\pi A})^{-1}e^{At}e^{-As}\cdot e^{2\pi A}\,dt+$$

$$+\int_s^{2\pi}U(t)(E-e^{2\pi A})^{-1}e^{At}e^{-As}\,dt=\int_0^{2\pi}U(t)(E-e^{2\pi A})^{-1}e^{At}\,dt\cdot e^{-As}-$$

$$-\int_0^{s}U(t)(E-e^{2\pi A})^{-1}e^{At}(E-e^{2\pi A})\,dt\cdot e^{-As}=$$

$$=\int_0^{2\pi}U(t)(E-e^{2\pi A})^{-1}e^{At}\,dt\cdot e^{-As}-\int_0^{s}U(t)e^{At}\,dt\cdot e^{-As} \tag{5.15}$$

$$\dot N(s)=-\int_0^{2\pi}U(s)(E-e^{2\pi A})^{-1}e^{At}\,dt\cdot e^{-As}\cdot A+$$

$$+\int_0^{s}U(t)e^{At}\,dt\cdot e^{-As}\cdot A-U(s)=-N(s)A-$$

$$-\int_0^{2\pi}U(t)\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(ikE-A)^{-1}e^{ik(s-t-\tau)}\,dt\cdot B(s+\tau)=$$

$$=-N(s)\cdot A-N(s+\tau)\cdot B(s+\tau). \tag{5.16}$$

Следовательно, условия (5.3) и (5.10) эквивалентны, и теорема 3 — новое доказательство приведенной теоремы Халаная.

6. Следует отметить, что изложенный выше способ не позволяет непосредственно найти всю совокупность частных решений типа Флоке системы (1.12), так как частные решения находим в виде (1.13). В действительности же, как показано в [10, стр. 108], частное решение имеет вид

$$Y(t)=e^{p_j t}[X_{0j}(t)+tX_{1j}(t)+\cdots+t^{\nu_j}X_{\nu_j j}(t)], \tag{6.1}$$

где $X_{qj}(t)$ являются периодическими вектор-функциями с периодом 2π, ν_j — конечные числа. Подставляя выражение вида

$$Y(t)=e^{pt}[X_0(t)+tX_1(t)+\cdots+t^{\nu}X_{\nu}(t)] \tag{6.2}$$

$$X_k(t+2\pi)\equiv X_k(t),\ (k=0,\ 1,\ \ldots,\ \nu)$$

в систему (1.12), находим системы линейных дифференциальных уравнений для отыскания периодических вектор-функций

$$\frac{dX_\nu(t)}{dt} = -pX_\nu(t) + \int_0^\tau e^{-pu}[d\mathrm{H}(u)]X_\nu(t-u) + \\ + \mu\int_0^\tau e^{-pu}[d_u\Xi(t, u)]X_\nu(t-u), \tag{6.3}$$

$$\frac{dX_q(t)}{dt} = -pX_q(t) + \int_0^\tau e^{-pu}[d\mathrm{H}(u)]X_q(t-u) + \\ + \mu\int_0^\tau e^{-pu}[d_u\Xi(t, u)]X_q(t-u) - (q+1)X_{q+1}(t) + \\ + \int_0^\tau e^{-pu}[d\mathrm{H}(u) + \mu d_u\Xi(t, u)]\sum_{l=1}^{\nu} C_l^{\nu-q}(-u)^{\nu-q}X_l(t-u). \tag{6.4}$$

$$(q = \nu - 1, \ldots, 0)$$

Для определения $X_\nu(t)$ получим систему интегральных уравнений

$$X_\nu(t) = \mu\int_0^{2\pi}\prod(t, s, p)X_\nu(s)\,ds, \tag{6.5}$$

где $\Pi(t, s, p)$ определено в (1.21). Если для некоторых p, μ эта система имеет нетривиальное решение $X_\nu(t) \not\equiv 0$, то μ является собственным значением. Рассматривая систему интегральных уравнений для $X_{\nu-1}(t)$, устанавливаем следующее: для того чтобы она имела решение, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} U_j(t)K(t-s, p)\Big\{X_\nu(s) + \int_0^\tau e^{-pu}[d\mathrm{H}(u) + \\ + \mu d_u\Xi(s, u)]uX_\nu(s-u)\Big\}\,ds\,dt = 0, \tag{6.6}$$

где $U_j(t)$ — нетривиальные решения системы (5.1)

Пусть выполнены условия существования $X_\nu(t), X_{\nu-1}(t), \ldots, X_{q+1}(t)$. Тогда для существования $X_q(t)$ необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} U_j(t)K(t-s, p)\Big\{(q+1)X_{q+1}(s) - \int_0^\tau e^{-pu}(-u)^{\nu-q}[d\mathrm{H}(u) + \\ + \mu d_u\Xi(s, u)]\sum_{l=q+1}^{\nu} C_l^{\nu-q}X_l(s-u)\Big\}\,ds\,dt = 0. \tag{6.7}$$

7. Все выводы данной статьи (кроме устойчивости) остаются теми же, если рассматривать систему дифференциальных уравнений одновременно с распределенными опережениями и запаздываниями вида

$$\frac{dY(t)}{dt} = \int_{-\tau}^{\tau}[d\mathrm{H}(s)]Y(t-s) + \mu\int_{-\tau}^{\tau}[d_s\Xi(t, s)]Y(t-s) + F(t), \tag{7.1}$$

Сопряженная система в этом случае содержит также одновременно опережения и запаздывания. Ядро $\Pi(t, s, p)$ (1.21) обладает теми же свойствами, что и ранее, хотя корни уравнения (2.1) в этом случае уже не лежат в одной полуплоскости.

В заключение приношу благодарность Анатолию Дмитриевичу Мышкису за ценные советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Stokes. A Floquet theory for functional differential equations. Proc. o the Nat. Ac. of Sc., № 8, vol. 48 (1962).

2. С. Н. Шиманов. К теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздываниями времени. «Прикл. матем. и мех.» т. 27, вып. 3 (1963).

3. К. Г. Валеев. Исследование устойчивости решений линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента методом Хилла. «Прикл. матем. и мех.», т. 26, вып. 4 (1962).

4. Е. Н. Розенвассер. О вынужденных колебаниях и устойчивости квазигармонических систем. «Прикл. матем. и мех.», т. 25, вып. 2 (1961).

5. Е. Н. Розенвассер. Теория линейной системы со стационарным запаздыванием и периодически изменяющимся параметром. «Автом. и телемех.», № 7, (1964).

6. А. Халанай. Некоторые вопросы качественной теории систем с запаздыванием. «Тр. междунар. симпозиума по линейным колебаниям», т. 2, Качественные методы. Изд-во АН УССР, К., 1963.

7. А. Халанай. Периодические решения линейных систем с запаздыванием. Revue de mathématiques pures et appliquées. Tome VI, № 1, (1961).

8. У. В. Ловитт. Линейные интегральные уравнения. Гостехиздат, М., 1957.

9. Ф. Трикоми. Интегральные уравнения. Изд-во иностр. лит., М., 1960.

10. К. Г. Валеев. Линейные дифференциальные уравнения с синусоидальными коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента. «Тр. междунар. симпозиума по нелинейным колебаниям», т. 2, Качественные методы. Изд-во АН УССР, К., 1963.

Поступила 9 февраля 1966 г.