УДК 517.53

А. Э. ЕРЕМЕНКО, М. Л. СОДИН, Д. Ф. ШИА

О МИНИМУМЕ МОДУЛЯ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПИКОВ ПОЙА

Для трансцендентной целой функции f положим

$$L(r, f) = \inf\{|f(z)| : |z| = r\}, \quad M(r, f) = \sup\{|f(z)| : |z| = r\}.$$

Б. Чельберг показал, что классическое неравенство Вимана — Валирона

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln L(r, f)}{\ln M(r, f)} \geqslant \cos \pi\lambda \tag{0.1}$$

выполняется, если нижний порядок λ функции f не превышает единицы [см., например, [1, гл. V, теорема 3.4]]. Различным усилениям и обобщениям этого неравенства посвящены многочисленные исследования. В этой работе доказывается некоторое уточнение оценки (0.1), а также опровергается несколько гипотез, связанных с этой оценкой.

1. Основные результаты. Приведем некоторые определения.

Последовательность $r_k \to \infty$ называется последовательностью пиков Пойа [первого рода] порядка μ для неограниченно возрастающей положительной функции $S(r)$, если найдется такая последовательность $\eta_k \to 0$, что

$$S(r) \leqslant (1+\eta_k) S(r_k) \left(\frac{r}{r_k}\right)^{\mu}; \qquad \eta_k r_k \leqslant r \leqslant \eta_k^{-1} r_k. \qquad (1.1)$$

Известно [2], что такая последовательность существует, если $\lambda_* \leqslant \mu \leqslant \rho^*$, где

$$\lambda_* = \lambda_*(S) = \inf\left\{\mu : \liminf_{r,\, t\to\infty} \frac{S(tr)}{S(r)\, t^{\mu}} < \infty\right\};$$

$$\rho^* = \rho^*(S) = \sup\left\{\mu : \limsup_{r,\, t\to\infty} \frac{S(tr)}{S(r)\, t^{\mu}} > 0\right\}.$$

Если $T(r, f)$ — неванлинновская характеристика целой функции f, то $\lambda_*(T) = \lambda_*(\ln M)$, $\rho^*(T) = \rho^*(\ln M)$, далее эти числа обозначаем через λ_* и ρ^*.

Последовательность r_k называется последовательностью сильных (strong) пиков Пойа порядка μ для целой функции f, если (1.1) выполняется с $S(r) = N(r, f)$, где $N(r, f)$ — функция Неванлинны числа нулей целой функции f, причем

$$\ln M(r, f) \leqslant CN(r_k, f) \left(\frac{r}{r_k}\right)^{\mu}; \qquad \eta_k r_k \leqslant r \leqslant \eta_k^{-1} r_k. \qquad (1.2)$$

(Здесь и далее через C обозначаем различные положительные постоянные). Такая последовательность всегда существует [3], если μ — нецелое число и $\lambda_* \leqslant \mu \leqslant \rho^*$.

Теорема 1. *Пусть (r_k) — произвольная последовательность сильных пиков Пойа порядка $\mu < 1$ для целой функции f. Тогда найдется такая последовательность $r_k' \sim r_k$, что*

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\ln L(r_k', f)}{\ln M(r_k', f)} \geqslant \cos \pi\mu. \qquad (1.3)$$

Мы приведем два доказательства теоремы 1. Первое из них основано на переходе от функции f к предельной субгармонической функции в смысле В. С. Азарина [4] и доказательстве для нее «неасимптотической формы» теоремы 1 [теорема 1 а]. В близкой ситуации такой метод применялся Дж. Андерсоном и А. Бернстейном. Второй способ доказательства теоремы 1 основан на традиционных приемах.

В беседе с одним из авторов А. Эдрей поставил вопрос о том, выполняется ли оценка (1.3), если (r_k) — последовательность пиков Пойа порядка μ для $T(r, f)$. В этом случае А. Эдрей показал*, что для каждого $\alpha > \mu$ найдутся постоянная $C = C(\alpha, \mu)$ и последовательность (r'_k), $r_k \leqslant r'_k \leqslant Cr_k$ такие, что

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\ln L(r'_k, f)}{\ln M(r'_k, f)} \geqslant \cos \pi\alpha.$$

При $\mu \leqslant 1/2$ ответ на вопрос А. Эдрея утвердительный в силу теоремы 1. В самом деле, в этом случае можно показать, что сильные пики Пойа совпадают с пиками Пойа для $T(r, f)$. При $1/2 < \mu < 1$ ответ на вопрос А. Эдрея отрицательный.

Пример 1. Для каждого μ, $1/2 < \mu < 1$, существует целая функция f, у которой $\lambda_* = \rho^* = \mu$, последовательности пиков Пойа для $T(r, f)$ и для $\ln M(r, f)$ совпадают, причем для любой такой последовательности (r_k) выполняется

$$\limsup_{k\to\infty} \sup\left\{\frac{\ln L(r, f)}{\ln M(r, f)} : \sigma^{-1} r_k \leqslant r \leqslant \sigma r_k\right\} \leqslant -q(\sigma), \tag{1.4}$$

где $q(\sigma) \to +\infty$ при $\sigma \to 1$.

Д. Дрейсин и А. Вейцман [5, № 2.37] предложили выяснить, выполняется ли соотношение (0.1) в окрестности пиков Пойа порядка λ для функции $\ln M(r, f)$. Отрицательный ответ на этот вопрос дает

Пример 2. Для каждого μ, $0 < \mu < 1$ существует целая функция f, у которой $\lambda_* = \rho^* = \mu$, причем на любой последовательности пиков Пойа (r_k) для $\ln M(r, f)$ выполняется (1.4).

2. Неасимптотическая форма теоремы 1. Для субгармонической функции u положим

$$A(r, u) = \inf\{u(z) : |z| = r\}; \quad B(r, u) = \max\{u(z) : |z| = r\};$$

$$N(r, u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta,$$

через ν обозначим риссовскую меру функции u, $\nu(t) = \nu(\{z : |z| \leqslant t\})$. Если $u(0) = 0$, то $N(r, u) = \int_0^r \frac{\nu(t)}{t}\, dt$.

Теорема 1а. *Пусть u — субгармоническая в $\mathbf{C}$ функция порядка, меньшего единицы. Если $u(0) = 0$ и*

$$\max\left\{\frac{N(r, u)}{r^\mu},\ 0 < r < \infty\right\} = N(1, u) = 1 \tag{2.1}$$

---

* *Edrei A.* A local form of the Phragmen — Lindelof indicator. — Mathematika, 1970, 17, p. 149 — 172.

для некоторого $\mu < 1$, *то*

$$\frac{A(1, u)}{B(1, u)} \geqslant \cos \pi\mu. \tag{2.2}$$

Доказательство. Не уменьшая общности, считаем, что $B(1, u) = u(1)$. Функция u допускает представление

$$u(z) = \int\limits_C \ln\left|1 - \frac{z}{\xi}\right| d\nu(\xi). \tag{2.3}$$

Положим

$$v(z) = \int\limits_0^\infty \ln\left|1 + \frac{z}{t}\right| d\nu(t), \tag{2.4}$$

тогда

$$v(-r) \leqslant A(r, u) \leqslant B(r, u) \leqslant v(r). \tag{2.5}$$

Рассмотрим функцию

$$v^*(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\theta}^{\theta} v(re^{i\varphi})\, d\varphi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

гармоническую в верхней полуплоскости и непрерывную в ее замыкании. Имеем $v^*(r) = 0$, $v^*(-r) = N(r, u) \leqslant r^\mu$, $0 < r < \infty$. По теореме Фрагмена — Линделефа

$$v^*(re^{i\theta}) \leqslant r^\mu \frac{\sin \mu\theta}{\sin \pi\mu} \equiv r^\mu H(\theta),\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant r < \infty. \tag{2.6}$$

Обозначим $v^*_\theta(re^{i\theta}) = \frac{\partial}{\partial\theta} v(re^{i\theta})$. Имеем $v^*(1) = H(0) = 0$, $v^*(-1) = H(\pi) = 1$. Поэтому в силу (2.5), (2.6)

$$B(1, u) \leqslant v(1) = \pi v^*_\theta(1) \leqslant \pi H'(+0) = \frac{\pi\mu}{\sin \pi\mu}; \tag{2.7}$$

$$A(1, u) \geqslant v(-1) = \pi v^*_\theta(-1) \geqslant \pi H'(\pi - 0) = \pi\mu \operatorname{ctg} \pi\mu, \tag{2.8}$$

откуда получаем (2.2), если $\mu \leqslant 1/2$.

Если $1/2 < \mu < 1$, то положим $2w(z) = v(i\sqrt{z}) + v(-i\sqrt{z})$. Далее, пусть $A(1, u) = u(e^{i\varphi})$. Тогда в силу (2.3), (2.4)

$$A(1, u) + B(1, u) \geqslant u(e^{i\varphi}) + u(e^{-i\varphi}) =$$

$$= \int\limits_C \ln\left|1 - \frac{e^{2i\varphi}}{\zeta^2}\right| d\nu(\zeta) \geqslant \int\limits_0^\infty \ln\left|1 - \frac{1}{t^2}\right| d\nu(t) =$$

$$= v(1) + v(-1) = 2w(-1); \tag{2.9}$$

$$\frac{N(r, w)}{r^{\mu/2}} = \frac{N(r^{1/2}, u)}{r^{\mu/2}} \leqslant N(1, w) = 1. \tag{2.10}$$

В силу (2.10) неравенства (2.7), (2.8) выполняются с заменой u на w и μ на $\mu/2$. Теперь из (2.9), (2.8), (2.7) следует

$$A(1, u) + B(1, u) \geqslant 2w(-1) \geqslant \pi\mu \operatorname{ctg} \frac{\pi\mu}{2} =$$

$$= 2\cos^2 \frac{\pi\mu}{2} \frac{\pi\mu}{\sin \pi\mu} \geqslant 2\cos^2 \frac{\pi\mu}{2} B(1, u) = (1 + \cos \pi\mu) B(1, u),$$

и теорема 1а доказана.

Для вывода теоремы 1 из теоремы 1а используются некоторые свойства линейной меры.

3. Линейная мера Карлесона и ее свойства. Пусть E — ограниченное множество в $\boldsymbol{C}$. Рассмотрим покрытия множества E счетными наборами кругов радиусов r_ν и положим $l(E) = \inf \sum_\nu r_\nu$, где inf берется по всем таким покрытиям. Линейная мера l обладает такими свойствами: a) монотонность: $A \subset B \Rightarrow l(A) \leqslant l(B)$; b) σ-полуаддитивность: $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow l(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} l(A_n)$.

Скажем, что последовательность функций u_n сходится к функции u по линейной мере ($u_n \Rightarrow u$), если для каждого $\varepsilon > 0$ выполняется $l(|u_n - u| \geqslant \varepsilon) \to 0$, $n \to \infty$.

Справедливы аналоги классических теорем Ф. Рисса и Егорова.

Лемма 1. *Пусть $u_n \Rightarrow u$. Тогда найдется такая последовательность (n_k), что* a) *$u_{n_k} \to u$ вне некоторого множества нулевой линейной меры;* b) *для каждого $\delta > 0$ найдется такое множество Q_δ, что $l(Q_\delta) < \delta$ и $u_{n_k} \rightrightarrows u$ равномерно вне Q_δ.*

Доказательство. Повторяем обычные рассуждения. Пусть $\varepsilon_n \to 0$. Построим последовательность (n_k) индуктивно, выбирая $n_k > n_{k-1}$ так, чтобы $l(|u_{n_k} - u| \geqslant \varepsilon_k) < 2^{-k}$. Покажем, что эта последовательность искомая. Пусть

$$R_i = \bigcup_{k=i}^{\infty} (|u_{n_k} - u| \geqslant \varepsilon_k); \quad Q = \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i.$$

В силу σ-полуаддитивности $l(R_i) \leqslant \sum_{k=i}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-i+1}$. Поскольку $R_1 \supset R_2 \supset \ldots \supset R_i \supset \ldots$, то в силу монотонности $l(Q) = 0$. Если $z \notin Q$, то найдется такой номер j, что $z \notin R_j$, т. е.

$$\forall\, k \geqslant j \;\; |u_{n_k}(z) - u(z)| < \varepsilon_k, \tag{3.1}$$

следовательно, $u_{n_k}(z) \to u(z)$, $k \to \infty$.

Чтобы получить b, выберем $i > \log_2 \frac{1}{\delta} + 1$ и положим $Q_\delta = R_i$. В силу (3.1) $u_{n_k} \rightrightarrows u$ равномерно по $z \notin Q_\delta$, а $l(Q_\delta) = l(R_i) \leqslant 2^{-i+1} = \delta$. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1. Предполагаем, что $\mu>0$. Случай $\mu=0$ требует более простых, но отдельных рассуждений. Не уменьшая общности, считаем, что $f(0)=1$. Рассмотрим последовательность субгармонических функций $u_n(z)=\ln|f(r_nz)|/N(r_n, f)$. В силу (1.2) выполняется

$$B(r, u_n)\leqslant Cr^{\mu},\ \eta_n\leqslant r<\frac{1}{\eta_n},\ n\to\infty. \tag{4.1}$$

Кроме того, $u_n(0)=0$. По теореме В. С. Азарина [4]* семейство (u_n) предкомпактно, т. е. найдутся субгармоническая функция u и последовательность (n_k) такие, что

$$u_{n_k}\xrightarrow[D']{} u,\ k\to\infty, \tag{4.2}$$

в топологии пространства обобщенных функций Шварца $D'(R^2)$.

По другой теореме В. С. Азарина [4, теорема 4.4.1] из (4.2) следует, что на каждом компакте $E\subset R^2$ выполняется $u_n\rightrightarrows u$. Используя лемму 1, получаем

$$A(r, u)=\lim_{k\to\infty}A(r, u_{n_k});\quad B(r, u)=\lim_{k\to\infty}B(r, u_{n_k}), \tag{4.3}$$

для почти всех $r\in(0, \infty)$, при этом нужно еще раз проредить последовательность (n_k).

Покажем, что любая предельная функция u удовлетворяет условиям теоремы 1 а. Зафиксируем $r\in(0, \infty)$. Имеем

$$N(r, u)=\lim_{k\to\infty}N(r, u_{n_k})\leqslant r^{\mu},\ N(1, u)=1.$$

В силу (4.1) и (4.3) выполняется $B(r, u)\leqslant Cr^{\mu}$, а в силу «принципа повышения»

$$u(0)\geqslant\limsup_{k\to\infty}u_{n_k}(0)=0.$$

Поэтому $u(0)=0$.

Пусть теорема 1 неверна. Тогда в силу (4.3) найдется $\sigma>1$ такое, что при всех $r\in(\sigma^{-1}, \sigma)$ выполняется $A(r, u)/B(r, u)\leqslant$ $\leqslant\cos\pi\mu-\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Это противоречит теореме 1 а. Теорема 1 доказана.

Замечание. Можно показать, что равенство в (2.2) влечет

$$u(re^{i\theta})\equiv\frac{\pi\mu}{\sin\pi\mu}\cos\mu(\theta+\alpha)r^{\mu},\ -\pi-\alpha\leqslant\theta\leqslant\pi-\alpha.$$

Это ведет к известному описанию функций, для которых в $\cos\pi\lambda$ теореме достигается равенство.

5. Второе доказательство теоремы 1. Докажем несколько более точное утверждение.

Теорема 1 b. *Пусть f — целая функция и пусть (r_k) — последовательность сильных пиков Пойа порядка $\mu<1$. Тогда для* *любой последовательности* $\sigma_k \to 1+0$ *такой, что* $(\sigma_k - 1) r_k \to \infty$ *существует множество*

$$I_k \subset \left[\frac{r_k}{\sigma_k}, r_k\sigma_k\right], \quad |I_k| \sim r_k\left(\sigma_k - \frac{1}{\sigma_k}\right), \quad k \to \infty, \tag{5.1}$$

для которого справедливо

$$\liminf_{k\to\infty,\ r\in I_k} \frac{\ln L(r, f)}{\ln M(r, f)} \geqslant \cos \pi\mu. \tag{5.2}$$

Доказательство. Воспользовавшись известным представлением [1, гл. V, лемма 3.1] и (1.2) запишем при $|z| < 2r_k$

$$\ln|f(z)| = \sum_{|z_n| < r_k/(2\eta_k)} \ln\left|1 - \frac{z}{z_n}\right| + o(N(r_k)). \tag{5.3}$$

где η_k — числа из определения сильных пиков Пойа, а $\{z_n\}$ — нули целой функции f. Здесь и далее до конца доказательства символы o, O применяются при $k \to \infty$.

Выберем последовательности

$$\tau_k = 1 + \alpha_k \to 1 + 0, \ \sigma_k = 1 + \beta_k \to 1 + 0, \ k \to \infty,$$

так, чтобы выполнялось

$$\eta_k \leqslant \beta_k < \alpha_k < 1; \tag{5.4}$$

$$\alpha_k^{3/2}/\beta_k \to \infty, \ k \to \infty; \tag{5.5}$$

$$\alpha_k^{1/2} \ln \beta_k \to 0, \ k \to \infty. \tag{5.6}$$

Пусть $n(r) = n(r, f)$ — количество нулей функции f в круге $\{z : |z| \leqslant r\}$. Покажем, что

$$\mu - \delta_k < \frac{n(tr_k)}{N(r_k)} < \mu + \delta_k, \quad \frac{1}{\tau_k} < t < \tau_k, \tag{5.7}$$

где

$$\delta_k = O(\alpha_k^{1/2}). \tag{5.8}$$

Докажем, например, правую часть оценки (5.7). Имеем при $\tau_k r_k \leqslant r \leqslant r_k/\eta_k$:

$$n(\tau_k r_k) \ln \frac{r}{\tau_k r_k} \leqslant \int_{\tau_k r_k}^{r} \frac{n(t)}{t} dt = N(r) - N(\tau_k r_k) \leqslant$$

$$\leqslant \eta_k N(r_k)\left(\frac{r}{r_k}\right)^{\mu} + N(r_k)\left\{\left(\frac{r}{r_k}\right)^{\mu} - 1\right\}.$$

Полагая здесь $r = r_k(1 + \alpha_k^{1/2})$ и используя (5.6), получаем

$$\frac{n(\tau_k r_k)}{N(r_k)} \leqslant \frac{\eta_k (1+\alpha_k^{1/2})^{\mu} + (1+\alpha_k^{1/2})^{\mu} - 1}{\ln(1+\alpha_k^{1/2}) - \ln(1+\alpha_k)} \leqslant \mu + O(\alpha_k^{1/2}).$$

Левая часть 5.7 доказывается аналогично.

Покажем, что при $r \in [r_k/\sigma_k,\ r_k\sigma_k] \setminus E_k = I_k$, $|E_k| = o\left(r_k\left(\sigma_k - \frac{1}{\sigma_k}\right)\right)$ выполняется

$$\liminf_{r \in I_k,\ k \to \infty} \frac{\ln L(r, f)}{N(r, f)} \geqslant \pi\mu \operatorname{ctg} \pi\mu. \tag{5.9}$$

Оценим $\ln L(r, f)$ снизу. Положим $\sum_k = \sum \ln\left|1 - \frac{r}{|z_n|}\right|$, где суммирование ведется по нулям z_n: $r_k/\tau_k \leqslant |z_n| \leqslant r_k\tau_k$. В силу равенства (5.3), интегрируя по частям, получаем

$$\ln L(r, f) \geqslant \sum_{|z_n| < r_k/(2\eta_k)} \ln\left|1 - \frac{r}{|z_n|}\right| + o(N(r_k)) =$$

$$= \left(\int_0^{r_k/\tau_k} + \int_{r_k\tau_k}^{r_k/(2\eta_k)}\right) \ln\left|1 - \frac{r}{t}\right| dn(t) + \sum\nolimits_k + o(N(r_k)) =$$

$$= \left(\int_0^{r_k/\tau_k} + \int_{r_k\tau_k}^{r_k/(2\eta_k)}\right) \frac{r}{r-t}\, dN(t) + n\left(\frac{r_k}{2\eta_k}\right) \ln\left(1 - \frac{r}{r_k/(2\eta_k)}\right) +$$

$$+ n\left(\frac{r_k}{\tau_k}\right) \ln\left(\frac{r}{r_k/\tau_k} - 1\right) - n(r_k\tau_k) \ln\left(1 - \frac{r}{r_k\tau_k}\right) + \sum\nolimits_k + o(N(r_k)). \tag{5.10}$$

Оценим снизу вклад от вставок. В силу оценок (5.5), (5.7), (5.8)

$$n\left(\frac{r_k}{\tau_k}\right) \ln\left(\frac{r}{r_k/\tau_k} - 1\right) - n(r_k\tau_k) \ln\left(1 - \frac{r}{r_k\tau_k}\right) \geqslant$$

$$\geqslant N(r_k)\left\{(\mu - \delta_k) \ln\left(\frac{\tau_k}{\sigma_k} - 1\right) - (\mu + \delta_k) \ln\left(1 - \frac{\sigma_k}{\tau_k}\right)\right\} =$$

$$= N(r_k)\left\{\mu \ln \frac{\tau_k}{\sigma_k} - \delta_k \ln \frac{(\tau_k - \sigma_k)^2}{\tau_k\sigma_k}\right\} = N(r_k)\{o(1) - 2\delta_k \ln(\alpha_k - \beta_k)\} =$$

$$= -N(r_k)\{2\delta_k \ln\alpha_k + o(1)\} = o(N(r_k)). \tag{5.11}$$

В силу (1.1) с $S(r) = N(r)$ получаем

$$n\left(\frac{r}{2\eta_k}\right) \ln\left(1 - \frac{r}{r_k/(2\eta_k)}\right) \geqslant -(1 + o(1))\, n\left(\frac{r}{2\eta_k}\right) \frac{r}{r_k/(2\eta_k)} \geqslant$$

$$\geqslant -(1 + o(1)) \frac{N(r_k/\eta_k)}{\ln 2} \frac{r}{r_k/(2\eta_k)} \geqslant$$

$$\geqslant -C\eta_k^{1-\mu} N(r_k) = o(N(r_k)). \tag{5.12}$$

Объединим выражения (5.10) — (5.12) и еще раз проинтегрируем по частям:

$$\ln L(r) \geqslant \left(\int_0^{r_k/\tau_k} + \int_{r_k\tau_k}^{r_k/(2\eta_k)} \right) \frac{r}{r-t}\, dN(t) + \sum\nolimits_k + o(N(r_k)) \geqslant -\left(\int_0^{r_k/\tau_k} + \int_{r_k\tau_k}^{r_k/(2\eta_k)} \right) \frac{rN(t)}{(r-t)^2}\, dt + \frac{r}{r - r_k/\tau_k} N\left(\frac{r_k}{\tau_k}\right) + \frac{r}{r_k\tau_k - r} N(r_k\tau_k) - \frac{r}{r_k/(2\eta_k) - r} N\left(\frac{r_k}{2\eta_k}\right) + \sum\nolimits_k + o(N(r_k)). \qquad (5.13)$$

Далее, в силу (1.1) с $S(r) = N(r)$ выполняется

$$\int_0^{r_k\eta_k} \frac{rN(t)}{(r-t)^2}\, dt = o(N(r_k)); \qquad (5.14)$$

$$\frac{r\, N(r_k/(2\eta_k))}{r_k/(2\eta_k) - r} \leqslant C\eta_k^{1-\mu} N(r_k) = o(N(r_k)). \qquad (5.15)$$

Кроме того, из выражения (5.5) следует, что $\sigma_k = 1 + o(\alpha_k)$, поэтому

$$\frac{r}{r - r_k/\tau_k} \geqslant \frac{\sigma_k}{\sigma_k - \tau_k^{-1}} = \frac{\tau_k}{\alpha_k} + o(1); \qquad (5.16)$$

$$\frac{r}{r_k\tau_k - r} \geqslant \frac{\sigma_k^{-1}}{\tau_k - \sigma_k^{-1}} = \frac{1}{\alpha_k} + o(1). \qquad (5.17)$$

Объединяя (5.13) — (5.17), запишем

$$\ln L(r) \geqslant -\left(\int_{r_k\eta_k}^{r_k/\tau_k} + \int_{r_k\tau_k}^{r_k/(2\eta_k)} \right) \frac{rN(t)}{(r-t)^2}\, dt + \frac{\tau_k N(r_k/\tau_k) + N(r_k\tau_k)}{\tau_k - 1} + \sum\nolimits_k + o(N(r_k)). \qquad (5.18)$$

Пусть $\gamma = r/r_k \in [\sigma_k^{-1}, \sigma_k]$, $\gamma \sim 1$, $k \to \infty$. Используя положительность ядра $r/(r-t)^2$, оценку (1.1) с $S(r) = N(r)$ получаем

$$\left(\int_{r_k\eta_k}^{r_k/\tau_k} + \int_{r_k\tau_k}^{r_k/(2\eta_k)} \right) \frac{rN(t)}{(r-t)^2}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant (1+\eta_k) N(r_k) \left(\int\limits_{r_k\eta_k}^{r_k/\tau_k} + \int\limits_{r_k\tau_k}^{r_k/(2\eta_k)} \right) \frac{r}{(r-t)^2} \left(\frac{t}{r_k}\right)^{\mu} dt =$$

$$= \left\{ (1+\eta_k)\gamma^{\mu} \left(\int\limits_0^{1/(\tau_k\gamma)} + \int\limits_{r_k/\gamma}^{\infty} \right) \frac{\xi^{\mu} d\xi}{(\xi-1)^2} + o(1) \right\} N(r_k). \qquad (5.19)$$

Далее,

$$\left(\int\limits_0^{1/(\tau_k\gamma)} + \int\limits_{\tau_k/\gamma}^{\infty} \right) \frac{\xi^{\mu}\, d\xi}{(\xi-1)^2} = \frac{\xi^{\mu}}{1-\xi} \Bigg|_{\tau_k/\gamma}^{1/(\tau_k\gamma)} -$$

$$- \mu \left(\int\limits_0^{1/(\tau_k\gamma)} + \int\limits_{\tau_k/\gamma}^{\infty} \right) \frac{\xi^{\mu-1}\, d\xi}{1-\xi}; \qquad (5.20)$$

$$\frac{\xi^{\mu}}{1-\xi} \Bigg|_{\tau_k/\gamma}^{1/(\tau_k\gamma)} = \frac{\tau_k^{\mu}}{\tau_k-1} + \frac{\tau_k^{-\mu}}{1-\tau_k^{-1}} + S_k, \qquad (5.21)$$

причем в силу (5.5), полагая $\gamma = 1+\varepsilon_k$, $|\varepsilon_k| = O(\beta_k)$, имеем

$$|S_k| = \left| \frac{\tau_k^{-\mu}\gamma^{-\mu}}{1-\tau_k^{-1}\gamma^{-1}} - \frac{\tau_k^{\mu}\gamma^{-\mu}}{1-\tau_k\gamma^{-1}} - \frac{\tau_k^{\mu}}{\tau_k-1} - \frac{\tau_k^{-\mu}}{1-\tau_k^{-1}} \right| =$$

$$= \left| \frac{1-\mu\alpha_k}{\alpha_k+\varepsilon_k} + \frac{1+\mu\alpha_k}{\alpha_k-\varepsilon_k} - \frac{1-\mu\alpha_k}{\alpha_k} - \frac{1+\mu\alpha_k}{\alpha_k} + o(1) \right| =$$

$$= \left| \frac{2\alpha_k}{\alpha_k^2-\varepsilon_k^2} - \frac{2}{\alpha_k} + o(1) \right| \leqslant \frac{4\varepsilon_k^2}{\alpha_k^3} = O\left(\frac{\beta_k^2}{\alpha_k^3}\right) = o(1). \qquad (5.22)$$

Кроме того,

$$\left(\int\limits_0^{1/(\tau_k\gamma)} + \int\limits_{\tau_k/\gamma}^{\infty} \right) \frac{\xi^{\mu-1}\, d\xi}{1-\xi} = \text{v. p.} \int\limits_0^{\infty} \frac{\xi^{\mu-1}\, d\xi}{1-\xi} + o(1) =$$

$$= \pi\mu \operatorname{ctg} \pi\mu + o(1). \qquad (5.23)$$

Объединяя (5.19) — (5.23), получаем

$$\left(\int\limits_{r_k\eta_k}^{r_k/\tau_k} + \int\limits_{r_k\tau_k}^{r_k/(2\eta_k)} \right) \frac{rN(t)}{(r-t)^2} dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(-\pi\mu \operatorname{ctg} \pi\mu + \frac{\tau_k^{\mu} + \tau_k^{1-\mu}}{\alpha_k} + o(1)\right) N(r_k). \qquad (5.24)$$

Далее,

$$N(r_k\tau_k) \geqslant N(r_k) + n(r_k)\ln\tau_k;$$
$$N(r_k/\tau_k) \geqslant N(r_k) - n(r_k)\ln\tau_k,$$

поэтому

$$\frac{\tau_k N(r_k/\tau_k) + N(r_k\tau_k)}{\alpha_k} - N(r_k)\frac{\tau_k^{\mu}+\tau_k^{1-\mu}}{\alpha_k} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\alpha_k}\{N(r_k)(\tau_k + 1 - \tau_k^{\mu} - \tau_k^{1-\mu})\} - n(r_k)\ln\tau_k =$$

$$= \frac{1}{\alpha_k}N(r_k)(\tau_k^{\mu}-1)(\tau_k^{1-\mu}-1) - n(r_k)\ln\tau_k = o(N(r_k)). \qquad (5.25)$$

Теперь оценим снизу сумму $\sum_k$. С помощью известной оценки Бутру — Валирона — Картана (см., например, [6, с. 136]) получаем

$$\sum_k \geqslant \left(n(r_k\tau_k) - n\left(\frac{r_k}{\tau_k}\right)\right)\ln\frac{q_k}{2e(1+\sqrt{q_k/2})},$$

при $r \notin E_k$, $|E_k| \leqslant q_k\tau_k r_k$. Положим в этой оценке $q_k = \beta_k\alpha_k$. Тогда в силу (5.5)

$$\tau_k q_k = O(\beta_k^2/\alpha_k) = o(\beta_k) = o\left(\sigma_k - \frac{1}{\sigma_k}\right).$$

Используя (5.7), (5.8), (5.6), запишем

$$\sum_k \geqslant -CN(r_k)\delta_k\ln\frac{\beta_k^2}{\alpha_k} = o(N(r_k)), \; r \notin E_k. \qquad (5.26)$$

Объединяя оценки (5.18), (5.25), получаем (5.9).

Теперь из (5.3), дважды проинтегрировав по частям и воспользовавшись 1.1 с $S(r) = N(r)$, имеем

$$\ln M(r) \leqslant \int\limits_0^{r_k/(2\eta_k)} \frac{rN(t)}{(r+t)^2}\,dt + o(N(r_k)) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\pi\mu}{\sin\pi\mu} + o(1)\right)N(r_k), \; r \in [r_k/\sigma_k, r_k\sigma_k]. \qquad (5.27)$$

Из (5.9) и (5.27) следует утверждение теоремы при $\mu \leqslant 1/2$. Случай $1/2 < \mu < 1$ рассматривается так же, как при доказательстве теоремы 1 первым способом. Теорема 1 b доказана.

6. Примеры. В этом разделе будут построены примеры целых функций, показывающие, что в условиях теоремы 1 сильные пики Пойа нельзя заменить ни на пики Пойа для $\ln M(r, f)$, ни на пики Пойа для $T(r, f)$ при ($\mu > 1/2$). Эти примеры основаны на общей идее, которую сперва опишем.

Рассмотрим класс «периодических» субгармонических функций, то есть функций, удовлетворяющих условию $u(Rz) = R^{\rho}u(z)$, $z \in C$, $\rho > 0$, с некоторым $R > 1$. Число R назовем периодом. Через $V(r) = V(r, u)$ обозначим либо характеристику

$$T(r, u) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta})\,d\theta,$$

либо $B(r, u)$. Число $\tau \in [1, R)$ назовем предельным пиком Пойа для $V(r)$, если

$$\max_{0<r<\infty} \frac{V(\tau r)}{r^\rho} = V(\tau). \tag{6.1}$$

Множество всех предельных пиков Пойа обозначим через $P(V)$. Нетрудно заметить, что $P(V)$ содержится в множестве

$$\{r = e^x : 0 < x < \ln R,\ d \ln V(e^x)/dx = \rho\},$$

поэтому если функция V вещественно аналитична и $V(r) \not\equiv cr^\rho$, то множество $P(V)$ состоит лишь из конечного числа точек.

Сначала построим субгармоническую функцию $u(z)$, у которой множество $P(V)$ конечно и при всех $\tau \in P(V)$ выполняется

$$A(\tau, u) = -\infty. \tag{6.2}$$

Затем, воспользовавшись теоремой В. С. Азарина об аппроксимации субгармонических функций*, найдем такую целую функцию f порядка ρ, что выполняется

$$\ln|f(z)| = u(z) + o(|z|^\rho),\ z \to \infty,\ z \notin C_0, \tag{6.3}$$

где C_0 — некоторое множество нулевой относительной линейной меры. Из (6.3) и «периодичности» функции u сразу следует, что

$$\ln M(r, f) \sim B(r, u),\ T(r, f) \sim T(r, u),\ r \to \infty.$$

Пики Пойа для $\ln M(r, f)$ и $T(r, f)$ легко находятся. Действительно, в силу «периодичности» $V(r, u)$ у нее существуют лишь пики Пойа порядка ρ, причем это те и только те последовательности $r_n \to \infty$, $n \to \infty$, для которых найдется такая последовательность (r_n'), что $r_n' \sim r_n, n \to \infty$, и $(r_n') \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} \{R^k P(V)\}$. Здесь tE означает гомотетию множества E относительно начала координат с коэффициентом t. Заметим, что если $V_1(r) \sim V_2(r)$, $r \to \infty$, то пики Пойа этих функций совпадают. Далее, в силу (6.2) и «периодичности» функции u для любой последовательности пиков Пойа (r_n) для $V(r, u)$ выполняется

$$\limsup_{n\to\infty} \sup \left\{\frac{A(r, u)}{B(r, u)} : \sigma^{-1} r_n \leqslant r \leqslant \sigma r_n\right\} \leqslant -q(\sigma), \tag{6.4}$$

где $q(\sigma) \to +\infty$ при $\sigma \to 1$. Теперь в силу (6.3) и (6.4) на каждой последовательности (r_n) пиков Пойа для $V(r, \ln|f|)$ выполняется (1.4).

Таким образом остается построить «периодические» субгармонические функции со свойством (6.2).

Пример 1. Зафиксируем ρ, $1/2 < \rho < 1$. Пусть

$$\frac{1}{2} < \mu < \lambda_1 < \rho = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) < \lambda_2 < 1,\quad \lambda_2 - \lambda_1 < \lambda_1^2 - \mu^2.$$

* Азарин В. С. О лучах вполне регулярного роста целой функции.— Мат. сб. 1969, 79 № 4, с. 463—476.

Через $[t]$ обозначаем целую часть числа t. Определим непрерывную функцию ρ с периодом 4 следующим образом: $\rho(t)=\lambda_1$, если $[t]\equiv 0 \pmod 4$; $\rho(t)=\lambda_2$, если $[t]\equiv 2 \pmod 4)$; $\rho(t)$ — линейная функция, если $[t]\equiv 1$ или $[t]\equiv 3 \pmod 4$. Положим

$$\varphi(t)=\int_0^t \rho(\tau)\,d\tau, \quad -\infty<t<\infty.$$

Тогда $\varphi''(t)=\min(\varphi''(t-0), \quad \varphi''(t+0))\geqslant \lambda_1-\lambda_2>\mu^2-\lambda_1^2$, $\varphi'(t)\geqslant\lambda_1$, $\varphi(t)=\rho t+O(1)$, $t\to\infty$. Далее,

$$\varphi(t+4)-\varphi(t)=\int_0^4 \rho(\tau)\,d\tau=4\rho. \tag{6.5}$$

Определим теперь функцию $g(x+iy)=e^{\varphi(x)}\cos\mu y$ в полосе $\{-\infty<x<\infty, \ |y|<\pi/(2\mu)\}$. Она положительна в этой полосе и субгармонична (в самом деле,

$$\triangle g=(\varphi''(x)+\varphi'^2(x)-\mu^2)g\geqslant(\mu^2-\lambda_1^2+\lambda_1-\mu^2)g\geqslant 0).$$

Положим

$$u(re^{i\theta})=\begin{cases} g(\ln r+i\theta), & |\theta|<\pi/(2\mu);\\ 0, & \pi/(2\mu)\leqslant|\theta|\leqslant\pi.\end{cases}$$

В силу (6.5) это «периодическая» субгармоническая функция с периодом $R=e^4$. Непосредственно проверяется, что $P(B)=P(T)=\{e^{7/2}\}$. Проще всего это заметить на графике функции $\rho(t)$.

Пусть $G(z,\xi)$ — функция Грина для угла $\pi/(2\mu)<\arg z<2\pi-\pi/(2\mu)$. Рассмотрим потенциал

$$u_0(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} G(z, e^{4k+1/2})e^{4k\rho}. \tag{6.6}$$

(Ряд сходится, так как $G(z,\xi)=O(|\xi|^{-\mu/(2\mu-1)})$, $|\xi|\to\infty$, и $\mu/(2\mu-1)>1>\rho$). Функция u_0 супергармоническая внутри рассматриваемого угла и «периодическая» там с периодом e^4. Покажем теперь, что число $\varepsilon>0$ можно выбрать настолько малым, чтобы функция

$$w(z)=\begin{cases} u(z), & |\arg z|\leqslant\pi/(2\mu);\\ -\varepsilon u_0(z), & \pi/(2\mu)<|\arg z|\leqslant\pi\end{cases}$$

была субгармонической в плоскости. Для этого нам понадобится известная лемма* о субгармонических функциях.

Лемма 2. *Пусть D_1, D_2 — непересекающиеся жордановы области, $\partial D_1\cap\partial D_2\supset l$, где l — либо интервал, либо дуга окружно-*

---

* Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции.— М.: Наука, 1979.— 321 с.

сти. Пусть v_1, v_2 — гармонические знакопостоянные функции в D_1, D_2, соответственно, имеющие нулевые предельные значения на l. Тогда на l существуют не обращающиеся в нуль производные по внешним нормалям $\frac{\partial v_i}{\partial n}$, $i = 1, 2$. Далее, если $\frac{\partial v_1}{\partial n}(z) + \frac{\partial v_2}{\partial n}(z) \leqslant 0$ при $z \in l$, то функция $u(z) = v_i(z)$, $z \in D_i$, продолженная нулем на l, субгармонична в области $D_1 \cup D_2 \cup l$.

Пользуясь этой леммой, выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы функция w была субгармонической в окрестности отрезков $\{\arg z = \pm\pi/(2\mu),\ 1 \leqslant |z| \leqslant e^4\}$. В силу «периодичности» функции w эта функция субгармоническая в $\boldsymbol{C} \setminus \{0\}$. Наконец, по теореме об устранимых особенностях функция w субгармонична в $\boldsymbol{C}$. Выполнение свойства (6.2) следует из построения.

Пример 2. Зафиксируем ρ, $0 < \rho < 1$. Положим

$$B(r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{k\rho} \ln\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^k r\right), \quad r > 0.$$

Легко видеть, что ряд сходится равномерно на каждом компакте к вещественно аналитической функции на $(0, \infty)$, и что $B(r) \not\equiv cr^{\rho}$. (Например, потому, что $B'(+0) \neq \infty$). Кроме того, $B(r)$ удовлетворяет условию «периодичности» с периодом $R = 3/2$. Поэтому, как было отмечено выше, у функции B лишь конечное множество предельных пиков Пойа $P(B) = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$. Положим

$$v(z) = \begin{cases} \ln|1+z|, & |1+z| \geqslant 1; \\ \varepsilon \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left|\dfrac{z + r_k}{z + r_k - zr_k}\right|, & |1+z| < 1. \end{cases}$$

В силу леммы 2 число $\varepsilon > 0$ можно выбрать настолько малым, что функция v будет субгармонической в $\boldsymbol{C}$. Рассмотрим функцию

$$u(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{k\rho} v\left(\left(\frac{2}{3}\right)^k z\right).$$

Ряд сходится равномерно на компактах, поэтому $u(z)$ — периодическая субгармоническая функция с периодом $R = 3/2$. Далее $B(r, u) = B(r)$, $0 < r < \infty$, и из построения непосредственно следует, что выполняется (6.2).

Список литературы

1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М.: Наука, 1970.—592 с.
2. *Drasin D., Shea D. F.* Pólya peaks and the oscillation of positive functions.— Proc. of the American Mathem Soc., 1972, 34, № 2, p. 403 — 411.
3. *Miles J., Shea D. F.* On the growth of meromorphic functions having at least one deficient value.— Duke Mathem J., 1976, 43, № 1, p. 171 — 186

4. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка.— Мат. сб. 1979, 108, № 2, с. 147—167.

5. *Clunie J., Hayman W. K.* New problems.— In: Symposium on complex analysis, Canterbury, 1973.— Cambridge: Cambridge University Press, 1974.— 178 p.

6. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М.: Гостехтеориздат, 1956.— 630 с.

Поступила в редколлегию 02.10.84.