

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	4
ВВЕДЕННЯ ДО КУРСУ «ТЕОРІЯ ПОЛЯ»	5
§ 1. Функція Лагранжа для зарядженої частинки в електромагнітному полі. Чотиривимірний векторний потенціал електромагнітного поля.....	9
§ 2. Рівняння руху для зарядженої частинки в електромагнітному полі. Сила Лоренца	17
§ 3. Перша пара рівнянь Максвелла	22
§ 4. Градієнтна інваріантність потенціалів. Умова калібровки потенціалів	25
§ 5. Релятивістськи-коваріантне рівняння руху заряду в електромагнітному полі. Тензор електромагнітного поля	30
§ 6. Чотиривимірний вектор імпульсу зарядженої частинки в електромагнітному полі.....	37
§ 7. Властивості перетворення Лоренца стосовно векторних і тензорних величин з теорії електромагнітного поля	41
§ 8. Перетворення Лоренца для електромагнітного поля.....	45
§ 9. Інваріанти електромагнітного поля.....	51
§ 10. Густина зарядів. Чотиривимірний вектор густини струму.....	56
§ 11. Закон збереження заряду. Рівняння неперервності.....	61
§ 12. Функціонал дії для електромагнітного поля	65
§ 13. Друга пара рівнянь Максвелла	70
§ 14. Самоузгоджена система рівнянь мікроскопічної електродинаміки (теорії поля)	80
§ 15. Закон збереження енергії в мікроскопічній електродинаміці	83
§ 16. Електростатика	89
§ 17. Магнітостатика	96
Додаток А. Векторний аналіз.....	100
Додаток В. Тензорний аналіз	108
Додаток С. Спеціальна теорія відносності	116
Додаток D. Релятивістська механіка	121
ПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ	126
ЛІТЕРАТУРА.....	131

ПЕРЕДМОВА

Електродинаміка як розділ теоретичної фізики є одним з базових курсів, що читаються на радіофізичному факультеті, який становить основу професійної підготовки радіофізиків. Курс ґрунтується на таких загальнонаукових дисциплінах, як вища математика, фізика, теоретична механіка, і структурно складається з двох частин: «Теорія поля» і «Макроскопічна електродинаміка».

Даний навчальний посібник, що представляє собою конспект лекцій, пропонується використовувати при вивченні першої частини курсу електродинаміки «Теорія поля». Для полегшення розуміння матеріалу в додатках коротко наведено допоміжну інформацію з курсів векторного і тензорного аналізу, а також необхідні висновки теоретичної механіки і спеціальної теорії відносності.

ВВЕДЕННЯ ДО КУРСУ «ТЕОРІЯ ПОЛЯ»

Фізичний об'єкт досліджень в теорії поля (мікроскопічній електродинаміці)

Фізичним об'єктом досліджень в мікроскопічній електродинаміці є фізична система, що складається з матеріальних тіл і електромагнітних полів. Аналог таких систем досліджується в теоретичній механіці. Відмінність від теоретичної механіки полягає в тому, що в електродинаміці кожне тіло крім маси m має ще і електричний заряд e . При цьому передбачається, що заряд і маса – незалежні характеристики тіла.

Наявність заряду призводить до появи електромагнітного поля, яке визначає взаємодію заряду з іншими електричними зарядами.

Методи дослідження об'єктів мікроскопічної електродинаміки

Існують два методи дослідження фізичних систем – теоретичний і експериментальний.

Перевагою експериментального методу є отримання повної реальної фізичної інформації, що містить як загальні закономірності, так і частинні особливості, деталі.

Призначення теоретичного методу полягає у виявленні головних закономірностей при абстрагуванні від незначних деталей. Для цього треба спростити характеристики системи, не втративши основні механізми взаємодії.

Теоретична модель реального фізичного об'єкта, що використовується в мікроскопічній електродинаміці. Область застосовності даної теорії

В рамках досліджуваної моделі розмірами і формою тіл можна знехтувати, тому будемо використовувати таку теоретичну модель – фізичну систему, яку утворено матеріальними точками, що мають маси і заряди.

Електродинаміка вивчає еволюцію фізичної системи заряджених матеріальних точок, які рухаються, і їх взаємодію з електромагнітним полем, що також входить у фізичну систему.

Обмеження теорії, які пов'язані з прийнятими припущеннями:

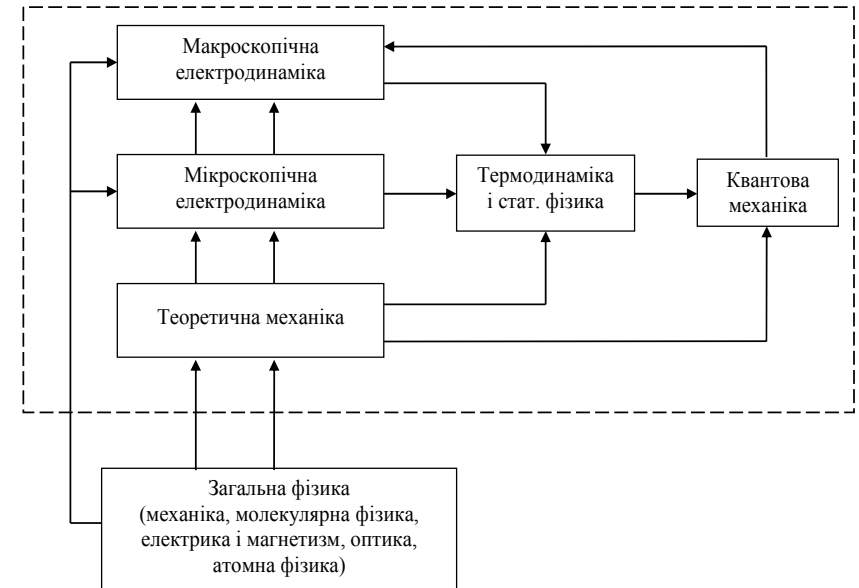
- оскільки ми моделюємо реальні об'єкти матеріальними точками, то теорія поля не дозволяє досліджувати процеси, що відбуваються всередині тіл;
- через те, що реальними розмірами тіл ми нехтуємо, то випадок нескінченно малих відстаней між тілами з розгляду виключається, тобто розглядаються тіла, віддалені один від одного на скінченні відстані.

Ці обмеження і визначають область застосовності теорії.

Фундаментальна проблема природознавства, що розв'язується в електродинаміці

Фундаментальною проблемою природознавства є вивчення процесу зміни системи у часі, тобто еволюції системи. Специфіка електродинамічних систем полягає в наявності елемента системи, який розповсюджується зі швидкістю світла – електромагнітного поля. Це обумовлює необхідність урахування релятивістських ефектів.

Місце мікроскопічної електродинаміки в курсі теоретичної фізики



Фундаментальні положення теоретичної фізики, на яких базується побудова теорії поля

Ознакою досконалості науки є мінімальна кількість постулатів, на яких вона базується.

В основі теорії поля лежать три постулати – два загальнофізичні:

- 1) постулати спеціальної теорії відносності Ейнштейна (СТВ), а саме, принцип відносності та інваріантності швидкості світла (Додаток С);
 - 2) принцип найменшої дії за Гамільтоном (ПНД) (Додаток D);
- і спеціальний постулат електромагнетизму:
- 3) визначення сили Лоренца

$$\vec{F}_L = e\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}(\vec{r}, t)],$$

яка складається з сили Кулона та сили Ампера. Особливістю електродинаміки є те, що з'явилась сила, яка залежить від вектора швидкості $\vec{v}$ і не може бути визначена в теоретичній механіці.

Роль релятивістської механіки в побудові теорії поля

При побудові теорії поля релятивістська механіка є:

- джерелом наукових припущень;
- засобом перевірки математичних співвідношень.

§ 1. Функція Лагранжа для зарядженої частинки в електромагнітному полі. Чотиривимірний векторний потенціал електромагнітного поля

1.1. Фізичні об'єкти мікроскопічної електродинаміки. Властивість адитивності функціонала дії

Механіка вивчає рух матеріальних тіл, що мають масу m_i , положення яких у даний момент часу характеризується радіус-вектором $\vec{r}_i$.

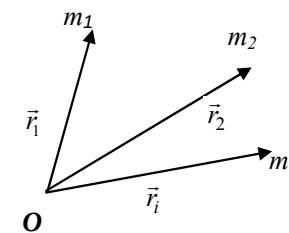


Рис. 1

Кожному тілу (частинці, матеріальній точці), якому притаманна маса m_i , ставиться у відповідність функціонал дії S_{m_i} . Частинки є незалежними об'єктами. Функціонал дії системи частинок дорівнює сумі функціоналів дії всіх незалежних частинок, тобто функціонал дії має властивість адитивності

$$S = \sum_{(i)} S_{m_i}.$$

В електродинаміці (теорії поля) об'єктом дослідження виступає матеріальна точка, яка окрім маси m_i має ще і заряд e_i . Заряд не залежить від маси і є рівноправною характеристикою матеріальної точки.

1.2. Функціонал дії для зарядженої частинки в електромагнітному полі. Чотиривимірний векторний потенціал електромагнітного поля

Аксіоматика електродинаміки вводиться на основі постулатів релятивістської механіки – понятті про інерціальну систему відліку, постулаті відносності, законі руху, фізичних уявленнях про простір і час, а також принципі найменшої дії (див. Додатки С, D).

Припустимо, що S – функціонал дії для зарядженої частинки. Властивості частинки, яка має масу і заряд, еквівалентні властивостям двох сумішених частинок з масою m_0 і зарядом e .

Виходячи з адитивності функціонала дії,

$$S = S_m + S_{mf}, \quad (1.1)$$

де S_m – функціонал дії частинки, що має лише масу, а S_{mf} – функціонал дії частинки, яка має заряд.

З релятивістської механіки відомо, що функціонал дії вільної релятивістської частинки визначається відповідно до (D.11):

$$S_m = -m_0 c \int_a^b \sqrt{-dx_\mu^2}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (1.2)$$

Тут функціонал дії записано в чотиривимірному просторі, де $x_1 = x$; $x_2 = y$; $x_3 = z$; $x_4 = ict = \tau$; під знаком інтеграла стоїть елементарний інтервал (C.8)

$$ds = \sqrt{-dx_\mu^2} = \sqrt{-dx_\mu dx_\mu} = \sqrt{-d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}. \quad (1.3)$$

Функціонал дії частинки, що має лише масу, визначається таким чином:

$$S_m = \int_{t_a}^{t_b} L dt = \int_a^b \alpha ds; \quad \alpha = -m_0 c, \quad (1.4)$$

де L – функція Лагранжа.

Функціонал дії зарядженої частинки S_{mf} будемо будувати аналогічно тому, як побудовано S_m . Крім того, в міркуваннях будемо спиратися на той факт, що функціонал дії повинен бути інваріантним відносно перетворень Лоренца.

1) $S_m \sim m_0$, $m_0 = \text{inv}$. Тому $S_{mf} \sim e$, $e = \text{inv}$.

2) $S_m \sim \int_a^b [ds]$. Через це будемо вважати, що $S_{mf} \sim \int_a^b \{?\}$, де $\{?\}$ –

аналог $[ds]$.

3) Підінтегральний вираз $[ds]$ є інваріантом відносно перетворень Лоренца, тому підінтегральний вираз $\{?\}$ також повинен бути інваріантним відносно перетворень Лоренца.

4) $[ds]$ є справжнім скаляром (не змінює знак при інверсії системи координат), тому $\{?\}$ – теж справжній скаляр.

5) $[ds] \sim \sqrt{-dx_\mu^2} \sim (dx_\mu)^1$. Через це $\{?\} \sim (dx_\mu)^1$.

Для того, щоб умови 3–5 були виконані, під інтегралом в S_{mf} повинен стояти вираз, який є інваріантом відносно перетворень Лоренца і при цьому пропорційним $(dx_\mu)^1$. Оскільки скалярний добуток двох векторів інваріантний відносно перетворень Лоренца, оберемо підінтегральний вираз у вигляді скалярного добутку $A_\mu dx_\mu$. Вектор A_μ повинен характеризувати електромагнітне поле, що діє на заряд, явний вигляд цього вектора поки не відомий. Представимо вектор A_μ у чотиривимірному просторі таким чином:

$$A_\mu = (A_1, A_2, A_3, i\varphi) = (\vec{A}, i\varphi), \quad (1.5)$$

де $\vec{A}$ – тривимірний вектор. Назвемо

A_μ – чотиривимірним потенціалом електромагнітного поля,

$\vec{A}$ – векторним потенціалом,

φ – скалярним потенціалом.

У загальному випадку векторний і скалярний потенціали є функціями координат і часу: $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$, $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$.

Отже, функціонал дії має вигляд (з точністю до коефіцієнта)

$$S_{mf} \sim e \int_a^b A_\mu dx_\mu. \quad (1.6)$$

Остаточно представимо функціонал дії таким чином:

$$S_{mf} = \frac{e}{c} \int_a^b A_\mu dx_\mu. \quad (1.7)$$

В (1.7) вектор A_μ підлягає подальшому визначенню, а коефіцієнт $\frac{1}{c}$ введено для забезпечення розмірності.

Таким чином, функціонал дії зарядженої частинки в електромагнітному полі має вигляд:

$$S = S_m + S_{mf} = -m_0 c \int_a^b \sqrt{-dx_\mu^2} + \frac{e}{c} \int_a^b A_\mu dx_\mu. \quad (1.8)$$

1.3. Функція Лагранжа для зарядженої частинки в електромагнітному полі

Отримаємо вираз для функції Лагранжа для зарядженої частинки в електромагнітному полі. З теоретичної механіки відомо, що відповідно до (D.2)

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L dt. \quad (1.9)$$

Тому для визначення L ми повинні у виразі для функціонала дії перейти до інтеграла за часом, тоді підінтегральний вираз дасть нам шукану функцію Лагранжа.

$$\begin{aligned} S &= -m_0 c \int_a^b \sqrt{-dx_\mu^2} + \frac{e}{c} \int_a^b A_\mu dx_\mu = \\ &= \int_a^b [-m_0 c \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} + \\ &+ \frac{e}{c} (A_x dx + A_y dy + A_z dz + i\varphi \cdot icdt)] = \\ &= \int_{t_a}^{t_b} dt [-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2} + \frac{e}{c} \vec{A} \frac{d\vec{r}}{dt} - e\varphi]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Тут скалярний добуток $A_\mu dx_\mu = A_x dx + A_y dy + A_z dz + i\varphi \cdot icdt$;
 $A_x dx + A_y dy + A_z dz = \vec{A} \cdot d\vec{r}$; $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ – вектор швидкості.

Таким чином, функціонал дії зарядженої частинки в електромагнітному полі

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt [-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\varphi]. \quad (1.11)$$

Порівнюючи (1.11) з (1.9), отримуємо, що функція Лагранжа зарядженої частинки в електромагнітному полі дорівнює

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\varphi = L_m + L_{mf}. \quad (1.12)$$

Тут частина L_m обумовлена наявністю у частинки маси, а L_{mf} виникає внаслідок наявності у частинки заряду. За відсутності заряду ($e \equiv 0$) $L_{mf} \equiv 0$ і $L = L_m$.

1.4. Узагальнений вектор імпульсу для зарядженої частинки в електромагнітному полі. Фізичний зміст тривимірного векторного потенціалу електромагнітного поля

У релятивістській механіці імпульс визначається таким чином (див. (D.5)):

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \nabla_v L, \quad (e \equiv 0), \quad (1.13)$$

де $\dot{q}$ – узагальнена швидкість, ∇_v – градієнт функції Лагранжа за швидкістю.

Збережемо визначення для імпульсу і в електродинаміці, підставляючи замість L вираз для функції Лагранжа зарядженої частинки в електромагнітному полі.

$$\vec{P} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \nabla_v L = \nabla_v (L_m + L_{mf}). \quad (1.14)$$

У релятивістській механіці отримано вираз для тривимірного релятивістського механічного імпульсу (D.12):

$$\vec{P} = \nabla_v L_m = \nabla_v (-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2}) = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \nabla_v L_{mf} &= \nabla_v \left(\frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\varphi \right) = \\ &= \nabla_v \left(\frac{e}{c} A_x v_x + \frac{e}{c} A_y v_y + \frac{e}{c} A_z v_z \right) - \nabla_v (e\varphi) = \frac{e}{c} \vec{A}. \end{aligned}$$

$\nabla_v (e\varphi) = 0$, тому що $e = \text{const}$, φ не залежить від швидкості.

Тоді узагальнений імпульс зарядженої частинки в електромагнітному полі

$$\vec{P} = \vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}. \quad (1.16)$$

Якщо $e = 0$, то узагальнений імпульс дорівнює механічному:

$$\vec{P} = \vec{P} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \quad (1.17)$$

Фізичний зміст векторного потенціалу: векторний потенціал з точністю до множника є додатком до механічного імпульсу за рахунок наявності заряду і електромагнітного поля.

1.5. Енергія зарядженої частинки в електромагнітному полі. Фізичний зміст скалярного потенціалу електромагнітного поля

У релятивістській механіці ($e \equiv 0$) енергія визначається співвідношенням (D.7)

$$\mathcal{E} = \vec{P} \cdot \vec{v} - L \quad (L = L_m). \quad (1.18)$$

За аналогією:

$$\mathcal{E} = \vec{P} \cdot \vec{v} - L \quad (L = L_m + L_{mf}). \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left(\vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{v} - (-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\varphi) = \\ &= \frac{m_0 \vec{v} \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} + m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2} - \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} + e\varphi = \\ &= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2} + e\varphi = \\ &= \frac{m_0 v^2 + m_0 c^2 (1 - v^2 / c^2)}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + e\varphi = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + e\varphi. \end{aligned}$$

Таким чином, енергія зарядженої частинки в електромагнітному полі визначається формулою

$$\mathcal{E} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + e\varphi. \quad (1.20)$$

При цьому перший доданок залежить тільки від швидкості, тому це кінетична енергія частинки. Другий доданок представляє собою потенціальну енергію.

Звідси витікає фізичний зміст скалярного потенціалу – це з точністю до множника додаток до енергії за рахунок електромагнітного поля. $U = e\varphi$ – потенціальна енергія.

1.6. Гамільтоніан для зарядженої частинки в електромагнітному полі

За визначенням функція Гамільтона – це повна енергія, яку виражено через узагальнені координати і узагальнені імпульси

$$H = H(q, p, t) = \mathcal{E}. \quad (1.21)$$

Для отримання виразу для функції Гамільтона зарядженої частинки в електромагнітному полі необхідно представити повну енергію $\mathcal{E}$ через узагальнений імпульс.

Із формули для повної енергії витікає

$$H - e\varphi = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow \left(\frac{H - e\varphi}{c} \right)^2 = \frac{m_0^2 c^2}{1 - v^2/c^2}.$$

Використовуючи вираз для узагальненого імпульсу, одержуємо

$$\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

З допоміжного співвідношення

$$\begin{aligned} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + m_0^2 c^2 &= \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)^2 + m_0^2 c^2 = \\ &= \frac{m_0^2 v^2 + m_0^2 c^2 (1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2} = \frac{m_0^2 c^2}{1 - v^2/c^2} = \left(\frac{H - e\varphi}{c} \right)^2 \end{aligned}$$

маємо

$$\left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + m_0^2 c^2 = \left(\frac{H - e\varphi}{c} \right)^2,$$

звідси автоматично отримуємо вираз для функції Гамільтона зарядженої частинки в електромагнітному полі

$$H = c \sqrt{\left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + m_0^2 c^2} + e\varphi, \quad (1.22)$$

тут перший доданок відповідає кінетичній енергії, а другий – потенціальній.

За відсутності заряду ($e \equiv 0$) і електромагнітного поля отриманий вираз для функції Гамільтона переходить у відомий з релятивістської механіки

$$H = c \sqrt{P^2 + m_0^2 c^2}. \quad (1.23)$$

§ 2. Рівняння руху для зарядженої частинки в електромагнітному полі. Сила Лоренца

2.1. Виведення рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі на основі релятивістського рівняння руху

З релятивістської механіки відомо, що для будь-якої фізичної системи рівняння руху має вигляд (D.4)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}, \quad (2.1)$$

функція Лагранжа L конкретизує фізичну систему. Якщо підставити в загальне рівняння руху функцію Лагранжа для зарядженої частинки

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\varphi, \quad (2.2)$$

то отримаємо рівняння руху для зарядженої частинки в електромагнітному полі, що характеризується скалярним і векторним потенціалами.

Раніше було одержано (див. (1.15))

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \nabla_v L = \vec{p} = \vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}, \quad \vec{P} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2.3)$$

тут $\vec{p}$ – узагальнений імпульс зарядженої частинки в електромагнітному полі, $\vec{P}$ – тривимірний релятивістський імпульс.

Нагадаємо, що $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}(t), t)$, $\varphi = \varphi(\vec{r}(t), t)$.

Продиференціюємо за часом вираз (2.3)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} \vec{P} = \frac{d}{dt} \left(\vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) = \frac{d}{dt} \vec{P} + \frac{e}{c} \frac{d}{dt} \vec{A}(\vec{r}(t), t). \quad (2.4)$$

Для зручності розглянемо окремо похідну за часом від $\vec{A}(\vec{r}(t), t)$, скориставшись виразом для повної похідної складної функції декількох змінних.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{A}(\vec{r}(t), t) &= \frac{d}{dt} \vec{A}(x(t), y(t), z(t), t) = \\ &= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{A}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Таким чином, остаточно запишемо

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{A}. \quad (2.6)$$

Тоді ліва частина рівняння руху (2.1) має вигляд

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \frac{d}{dt} \vec{P} + \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c} (\vec{v} \nabla) \vec{A}. \quad (2.7)$$

Визначимо праву частину рівняння руху (2.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q} &\equiv \nabla L = \nabla (-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\varphi) = \\ &= \nabla (-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}) + \frac{e}{c} \nabla (\vec{A} \cdot \vec{v}) - e \nabla \varphi. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Вираз $(-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2})$ не залежить від координат, тому перший доданок дорівнює нулю. Скориставшись відомою векторною тотожністю (А.32) для градієнта скалярного добутку, отримаємо

$$\nabla (\vec{A} \cdot \vec{v}) = [\vec{A}, \text{rot } \vec{v}] + [\vec{v}, \text{rot } \vec{A}] + (\vec{A} \nabla) \vec{v} + (\vec{v} \nabla) \vec{A}. \quad (2.9)$$

Оскільки швидкість не залежить від координат, то перший і третій доданки у цьому виразі дорівнюють нулю. Тому

$$\nabla L = \frac{e}{c} [\vec{v}, \text{rot } \vec{A}] + \frac{e}{c} (\vec{v} \nabla) \vec{A} - e \nabla \varphi. \quad (2.10)$$

Підставляємо отримані вирази в рівняння руху

$$\frac{d}{dt} \vec{P} + \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c} (\vec{v} \nabla) \vec{A} = \frac{e}{c} [\vec{v}, \text{rot } \vec{A}] + \frac{e}{c} (\vec{v} \nabla) \vec{A} - e \nabla \varphi \quad (2.11)$$

і одержуємо остаточно вигляд рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = e \left(-\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \frac{e}{c} [\vec{v}, \text{rot } \vec{A}]. \quad (2.12)$$

Тут $\vec{P}$ – тривимірний механічний імпульс. Права частина рівняння пропорційна до заряду. Якщо заряд дорівнює нулю, то отримане рівняння переходить в рівняння руху вільної частинки

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = 0. \quad (2.13)$$

Якщо заряд відрізняється від нуля, то маємо другий закон Ньютона

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{F}. \quad (2.14)$$

2.2. Постулат сили Лоренца. Напруженості електричного і магнітного полів. Зв'язок векторного і скалярного потенціалів із силовими характеристиками електромагнітного поля

З експерименту відомо, що на заряджену частинку в електромагнітному полі діє сила Лоренца, яка є сумою сили Кулона і сили Ампера

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= e \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}(\vec{r}, t)] = \vec{F}_K + \vec{F}_A, \\ \vec{F}_K &= e \vec{E}, \quad \vec{F}_A = \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Сила Кулона паралельна до напруженості електричного поля $\vec{E}$ і не залежить від швидкості руху частинки.

Напруженість електричного поля – силова характеристика електричного поля. Вона дорівнює силі, яка діє з боку електричного поля на одиничний додатний заряд:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_K}{e}. \quad (2.16)$$

Сила Ампера направлена перпендикулярно векторам швидкості та напруженості магнітного поля $\vec{H}$ і залежить від швидкості, таким чином, маємо якісно нову природу сил. Напруженість магнітного поля – силова характеристика магнітного поля. Вона дорівнює множинику при швидкості (більш точно, при $\vec{v}/c$) в силі Ампера, яка діє з боку магнітного поля на одиничний додатний заряд.

Якщо

$$\vec{E} \neq 0, \quad \vec{H} = 0, \text{ то маємо електричне поле;}$$

$$\vec{E} = 0, \quad \vec{H} \neq 0 \text{ – магнітне поле;}$$

$$\vec{E} \neq 0, \quad \vec{H} \neq 0 \text{ – електромагнітне поле.}$$

З релятивістської механіки (виходячи з принципу найменшої дії) отримано рівняння руху для зарядженої частинки в електромагнітному полі

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = e \left[-\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] + \frac{e}{c} [\vec{v}, \text{rot } \vec{A}]. \quad (2.17)$$

У правій частині цього рівняння стоїть сила, що діє на заряджену частинку в електромагнітному полі. За визначенням це повинна бути сила Лоренца (2.15). Маємо рівняння руху для зарядженої частинки в електромагнітному полі у вигляді

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = e \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}(\vec{r}, t)]. \quad (2.18)$$

Через те, що похідна за часом від імпульсу є сила, то, порівнюючи праві частини рівнянь руху (2.17) і (2.18), можна встановити однозначний зв'язок між

силовими характеристиками (напруженостями) електромагнітного поля і потенціалами:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \quad (2.19)$$

2.3. Змінення кінетичної енергії зарядженої частинки в електромагнітному полі. Робота електромагнітного поля зі змінення кінетичної енергії

У § 1 отримано вираз для повної енергії зарядженої частинки в електромагнітному полі (1.20)

$$\mathcal{E} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + e\varphi,$$

де перший доданок представляє собою кінетичну енергію. Нас цікавить $\frac{d\mathcal{E}_k}{dt}$.

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \right) = \frac{m_0 c^2 \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-2 \frac{v}{c^2} \right) \frac{dv}{dt}}{(1 - v^2 / c^2)^{3/2}} = \quad (2.20)$$

$$= \frac{m_0 \frac{d\vec{v}}{dt}}{(1 - v^2 / c^2)^{3/2}} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

Використовуючи вираз для $\frac{d\vec{P}}{dt}$ з рівняння руху, отримуємо

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \vec{v} \cdot e \vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} [\vec{v}, \vec{H}]. \quad (2.21)$$

Другий доданок в цьому виразі дорівнює нулю в силу властивості змішаного добутку векторів. Таким чином, остаточно маємо

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \vec{v} \cdot e \vec{E} = \vec{v} \cdot \vec{F}_K. \quad (2.22)$$

Змінення кінетичної енергії з часом є робота, яку чинить поле над частинкою за одиницю часу. Вона дорівнює добутку швидкості заряду на силу, з якою на заряд діє електричне поле. Магнітне поле не чинить роботу над зарядом, що рухається, оскільки сила Ампера перпендикулярна швидкості.

2.4. Поняття ізотропії часу

Рівняння механіки інваріантні відносно зміни знака у часу, тобто відносно заміни майбутнього минулим. Таким чином, у механіці обидва напрямки часу еквівалентні. Тому, якщо відповідно до рівнянь механіки можливий будь-який рух, то можливий і зворотний рух, тобто такий рух, при якому система проходить ті ж стани, але у зворотному порядку.

Це справедливо і в теорії поля. При русі в зворотному порядку $t \rightarrow -t$; $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$; $\vec{p} \rightarrow -\vec{p} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt}$, при цьому рівняння руху не змінюється, якщо замінити $\vec{E} \rightarrow \vec{E}$; $\vec{H} \rightarrow -\vec{H}$. Крім того, відповідно до (2.19) повинна виконуватися умова $\varphi \rightarrow \varphi$; $\vec{A} \rightarrow -\vec{A}$.

Таким чином, якщо в електромагнітному полі можливий будь-який рух, то можливий і зворотний рух в полі з $\vec{H} \rightarrow -\vec{H}$.

§ 3. Перша пара рівнянь Максвелла

3.1. Перша пара рівнянь Максвелла в диференціальній формі

Будемо виходити із співвідношень (2.19)

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{H} = \text{rot} \vec{A}.$$

Задача полягає в представленні векторного і скалярного потенціалів $\vec{A}, \varphi$ через напруженості електричного і магнітного поля $\vec{E}, \vec{H}$. Для цього застосуємо операцію rot до виразу для $\vec{E}$

$$\text{rot} \vec{E} = -\text{rot grad} \varphi - \frac{1}{c} \text{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (3.1)$$

Відповідно до відомої векторної тотожності (A.24) $\text{rot grad} \varphi = 0$, а оператор rot і диференціювання за часом можна поміняти місцями. Зважаючи на те, що $\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$, маємо

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Аналогічно подіємо оператором div на вираз для $\vec{H}$

$$\text{div} \vec{H} = \text{div rot} \vec{A}. \quad (3.2)$$

Як відомо з векторного аналізу (A.25), $\text{div rot} \vec{A} = 0$.

Таким чином, отримуємо першу пару рівнянь Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \\ \text{div} \vec{H} &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Рівняння Максвелла, які були вперше сформульовані в 1860 році, є основними рівняннями електродинаміки.

3.2. Перша пара рівнянь Максвелла в інтегральній формі, їх фізичний зміст

Отримаємо інтегральне формулювання рівнянь Максвелла. Для цього проінтегруємо обидві частини першого рівняння (3.3) за довільною поверхнею S

$$\int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (3.4)$$

Застосуємо до лівої частини цього виразу теорему Стокса (A.38)

$$\int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = \oint_L \vec{E} d\vec{l}, \quad (3.5)$$

де інтеграл справа береться за замкненим контуром L , на який спирається поверхня S . В правій частині (3.4) поміняємо місцями інтегрування і дифе-

ренціювання за часом. Отримуємо інтегральне формулювання першого рівняння Максвелла

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{H} d\vec{S}. \quad (3.6)$$

Інтеграл від вектора за поверхнею називається потоком вектора через цю поверхню, а похідна за часом від цього інтеграла – змінням потоку вектора. Інтеграл від вектора за замкненим контуром називається циркуляцією вектора, а циркуляція вектора напруженості електричного поля – електрорушійною силою, або ЕРС.

Таким чином, фізичний зміст першого рівняння Максвелла можна сформулювати так: електрорушійна сила в деякому контурі дорівнює взятому із зворотним знаком змінню потоку вектора напруженості магнітного поля через поверхню, на яку спирається цей контур. Це відомий закон Фарадея, або закон електромагнітної індукції.

Отримаємо інтегральне формулювання другого рівняння (3.3). Для цього проінтегруємо це рівняння за довільним об'ємом V . Згідно з теоремою Остроградського–Гаусса (А.37) інтеграл за об'ємом від дивергенції вектора дорівнює потоку цього вектора через замкнену поверхню S , яка обмежує цей об'єм V .

$$\int_V \operatorname{div} \vec{H} dV = \oint_S \vec{H} d\vec{S}.$$

Одержуємо інтегральне формулювання другого рівняння Максвелла:

$$\oint_S \vec{H} d\vec{S} = 0. \quad (3.7)$$

Фізичний зміст другого рівняння Максвелла: потік вектора напруженості магнітного поля через довільну замкнену поверхню дорівнює нулю. Це виражає закон неперервності силових ліній магнітного поля, тобто факт відсутності в природі магнітних зарядів.

Таким чином, інтегральне формулювання першої пари рівнянь Максвелла має вигляд:

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{E} d\vec{l} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{H} d\vec{S}; \\ \oint_S \vec{H} d\vec{S} &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.3. Перша пара рівнянь Максвелла – незамкнена система рівнянь

Два рівняння Максвелла не визначають повністю властивості поля. Вони визначають лише зміння поля з часом.

Спроекуємо перше рівняння Максвелла на осі декартової системи координат, а в другому рівнянні розпишемо явно оператор дивергенції

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \vec{E})_x &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}; \\ (\operatorname{rot} \vec{E})_y &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t}; \\ (\operatorname{rot} \vec{E})_z &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Маємо 4 рівняння і 6 невідомих компонент поля. Очевидно, що система двох перших рівнянь Максвелла є незамкненою.

§ 4. Градієнтна інваріантність потенціалів. Умова калібровки потенціалів

4.1. Визначення напруженостей електромагнітного поля через потенціали

Випишемо визначення $\vec{E}$ і $\vec{H}$ через потенціали (2.19):

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \\ \vec{H} &= \operatorname{rot} \vec{A}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Згідно з цими співвідношеннями напруженості поля визначені однозначно. Виникає питання, наскільки однозначно визначені потенціали. Виявляється, що тому ж самому полю можуть відповідати різні потенціали, тобто є певна свобода у виборі потенціалів $\vec{A}$ і φ .

Введемо векторний і скалярний потенціали у вигляді

$$\begin{aligned}\vec{A}' &= \vec{A} + \text{grad } f(\vec{r}, t); \\ \varphi' &= \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t}.\end{aligned}\quad (4.2)$$

Тут $f(\vec{r}, t)$ – довільна функція. Підставимо $\vec{A}'$ і φ' у співвідношення (4.1) та отримаємо $\vec{E}'$ і $\vec{H}'$:

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= -\text{grad } \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}' = -\text{grad}(\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \text{grad } f) = \\ &= -\text{grad } \varphi + \frac{1}{c} \text{grad} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \frac{1}{c} \text{grad} \frac{\partial f}{\partial t} = \vec{E}; \\ \vec{H}' &= \text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A} + \text{rot grad } f(\vec{r}, t) = \vec{H}.\end{aligned}$$

Нами враховано векторну тотожність (A.24) $\text{rot grad } f(\vec{r}, t) = 0$. Зауважимо, що функція $f(\vec{r}, t)$ повинна бути двічі диференційовною.

Якщо використати чотиривимірний вектор потенціалу $A_\mu = (\vec{A}, i\varphi)$, то рівняння (4.2) в чотиривимірному просторі запишуться у вигляді

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x_\mu}. \quad (4.3)$$

Тут $\frac{\partial f}{\partial x_\mu}$ – градієнт за чотирма координатами (x, y, z, ict) .

4.2. Градієнтна інваріантність потенціалів

Перетворення потенціалів вигляду (4.2) не змінює поле:

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \vec{E}; \\ \vec{H}' &= \vec{H}.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Тому потенціали визначені неоднозначно – векторний потенціал визначено з точністю до градієнта довільної функції, а скалярний – з точністю до похідної за часом від тієї ж функції.

Зокрема, до векторного потенціалу можна додати будь-який сталий вектор, а до скалярного – будь-яку сталу. Це видно і безпосередньо з того, що до визначень $\vec{E}$ і $\vec{H}$ входять лише похідні від $\vec{A}$ і φ , і тому додавання до останніх сталих не впливає на напруженості поля.

Фізичний зміст мають лише ті величини, що інваріантні відносно перетворення потенціалів (4.2), тому всі рівняння повинні бути інваріантними відносно цього перетворення. Ця інваріантність називається калібровочною або градієнтною.

4.3. Лоренцівська калибровка, кулонівська калибровка потенціалів

Пов'яжемо потенціали між собою і отримаємо умову калибровки для потенціалів електромагнітного поля. Для цього застосуємо оператор div до першого з рівнянь (4.2) і $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ – до другого:

$$\begin{aligned}\text{div } \vec{A}' &= \text{div } \vec{A} + \text{div grad } f(\vec{r}, t); \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(\vec{r}, t)}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Складемо отримані вирази з урахуванням векторної тотожності (A.23) $\text{div grad } f = \Delta f$

$$\text{div } \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Оберемо функцію f таким чином, щоб виконувалось рівняння

$$\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Це рівняння називається хвильовим рівнянням. Тоді

$$\text{div } \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Оскільки поле на нескінченності повинно дорівнювати нулю (тобто остання рівність повинна виконуватись у всіх точках, у тому числі і на нескінченності), прирівняємо до нуля обидві його частини. Таким чином, отримуємо умову калібровки Лоренца для потенціалів:

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (4.5)$$

Можна дібрати функцію f так, щоб

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (4.6)$$

Це умова калібровки Кулона.

Під терміном «калібровка» ми розуміємо вибір функції f .

Перевіримо виконання умови градієнтної інваріантності для деяких фізичних величин, зокрема, для енергії та імпульсу зарядженої частинки в електромагнітному полі.

Узагальнений імпульс зарядженої частинки в електромагнітному полі визначається співвідношенням (1.16)

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}; \quad \vec{P} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

де $\vec{P}$ – тривимірний релятивістський імпульс (1.15). Енергія зарядженої частинки в електромагнітному полі відповідно до (1.20)

$$\mathcal{E} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\varphi.$$

Підставимо формули (4.2) для $\vec{A}'$ і φ' у вирази для імпульсу і енергії.

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{P}}' &= \vec{P} + \frac{e}{c} \left(\vec{A} + \operatorname{grad} f \right), \\ \mathcal{E}' &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e \left(\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.4. Зв'язок градієнтної інваріантності потенціалів з принципом найменшої дії за Гамільтоном

Розглянемо точки просторово-часового континуума a і b . Нехай ці точки фіксовані, тобто $\delta x_\mu(a) = 0$ і $\delta x_\mu(b) = 0$. Перехід з точки a до точки b здійснюється відповідно до ПНД (D.3) так, щоб $\delta S = 0$. Для зарядженої частинки в електромагнітному полі функціонал дії має вигляд (1.8)

$$S = S_m + S_{mf} = \int_a^b \left\{ -m_0 c \sqrt{-dx_\mu^2} + \frac{e}{c} A_\mu dx_\mu \right\}.$$

Покажемо, що для принципу найменшої дії виконується умова градієнтної інваріантності, тобто він інваріантний відносно перетворення потенціалів

$$(4.2), (4.3). \text{ Для цього отримаємо } S', \text{ підставивши вираз } A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \text{ у}$$

співвідношення для S .

$$S' = \int_a^b \left\{ -m_0 c \sqrt{-dx_\mu^2} + \frac{e}{c} A_\mu dx_\mu \right\} + \frac{e}{c} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_\mu} dx_\mu.$$

Перший інтеграл дорівнює функціоналу дії S . Для другого доданку справедливо

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial f}{\partial x_4} dx_4 \right) = \int_a^b df(x_\nu).$$

Тоді

$$S' = S + \frac{e}{c} \int_a^b df(x_\nu) = S + \frac{e}{c} [f(x_\nu)]_a^b = S + \text{const}.$$

Знайдемо варіацію S' :

$$\delta S' = \delta S + \delta(\text{const}) = 0.$$

Таким чином, $\delta S' = 0$ за умови $\delta x_\mu(a) = 0$ і $\delta x_\mu(b) = 0$, тобто принцип найменшої дії виявляється інваріантним відносно перетворення потенціалів (4.2), (4.3).

§ 5. Релятивістськи-коваріантне рівняння руху заряду в електромагнітному полі. Тензор електромагнітного поля

5.1. Необхідність отримання рівняння руху в коваріантній формі

Рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі має вигляд (2.18)

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = e\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}(\vec{r}, t)]; \quad \vec{P} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Це рівняння справедливе для тривимірних векторів. Для переходу від однієї інерціальної системи координат до іншої використовуються перетворення Лоренца, які отримані в чотиривимірному просторі. Отже, для використання перетворень Лоренца необхідно мати рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі також в чотиривимірному просторі, тобто рівняння руху в коваріантній формі.

5.2. Формулювання задачі в загальному вигляді для отримання рівняння руху в коваріантній формі. Специфіка електромагнітного випадку

Розглянемо точки просторово-часового континуума a і b . Припустимо, що ці точки фіксовані, тобто $\delta x_\mu(a) = 0$ і $\delta x_\mu(b) = 0$. Перехід з точки a до точки b здійснюється згідно з ПНД так, щоб $\delta S = 0$. Для зарядженої частинки в електромагнітному полі функціонал дії має вигляд (1.8)

$$S = S_m + S_{mf} = \int_a^b \left\{ -m_0 c \sqrt{-dx_\mu^2} + \frac{e}{c} A_\mu dx_\mu \right\}.$$

5.3. Варіація функціонала дії для зарядженої частинки в електромагнітному полі

Знайдемо варіацію функціонала дії δS .

$$\delta S = \int_a^b \left\{ -m_0 c \delta \sqrt{-dx_\mu^2} + \frac{e}{c} \delta(A_\mu dx_\mu) \right\}.$$

$$\delta \sqrt{-dx_\mu^2} = \frac{(-2)dx_\mu \cdot \delta dx_\mu}{2\sqrt{-dx_\mu^2}} = -\frac{dx_\mu \cdot \delta dx_\mu}{ds} = -u_\mu d\delta x_\mu.$$

Тут ураховано, що $ds = \sqrt{-dx_\mu^2}$; $u_\mu = \frac{dx_\mu}{ds}$ – чотиривимірний вектор швидкості.

$$\delta(A_\mu dx_\mu) = \delta A_\mu \cdot dx_\mu + A_\mu \cdot \delta dx_\mu = \delta A_\mu \cdot dx_\mu + A_\mu \cdot d\delta x_\mu.$$

В останніх двох співвідношеннях використано $\delta dx_\mu = d\delta x_\mu$.

Тоді варіація функціонала дії дорівнює

$$\delta S = \int_a^b \left\{ m_0 c u_\mu d\delta x_\mu + \frac{e}{c} A_\mu d\delta x_\mu + \frac{e}{c} \delta A_\mu dx_\mu \right\}.$$

Проінтегрувавши за частинами перші два доданки, одержуємо

$$\delta S = m_0 c u_\mu \delta x_\mu \Big|_a^b + \frac{e}{c} A_\mu \delta x_\mu \Big|_a^b - \int_a^b m_0 c du_\mu \delta x_\mu -$$

$$- \int_a^b \frac{e}{c} dA_\mu \delta x_\mu + \int_a^b \frac{e}{c} \delta A_\mu dx_\mu.$$

Розпишемо

$$dA_\mu \delta x_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} dx_\nu \delta x_\mu$$

$$\delta A_\mu dx_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \delta x_\nu dx_\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \delta x_\mu dx_\nu.$$

В останньому співвідношенні в силу того, що індекси $\mu, \nu \in$ «німими», здійснено заміну $\mu \leftrightarrow \nu$.

Запишемо варіацію функціонала дії, розділивши та домноживши підинтегральний вираз на ds .

$$\delta S = (m_0 c u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu) \delta x_\mu \Big|_a^b + \int_a^b \left\{ -m_0 c \frac{du_\mu}{ds} + \frac{e}{c} \left(-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \cdot \frac{dx_\nu}{ds} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \cdot \frac{dx_\nu}{ds} \right) \right\} ds \delta x_\mu.$$

З урахуванням того, що $u_\nu = \frac{dx_\nu}{ds}$, одержуємо остаточний вираз для варіації функціонала дії зарядженої частинки в електромагнітному полі

$$\delta S = (m_0 c u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu) \delta x_\mu \Big|_a^b + \int_a^b \left\{ -m_0 c \frac{du_\mu}{ds} + \frac{e}{c} \left(-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right) u_\nu \right\} ds \delta x_\mu. \quad (5.1)$$

5.4. Рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі в релятивістськи-коваріантній формі

Згідно з ПНД варіація функціонала дії повинна дорівнювати нулю за умови, що початкова і кінцева точки a і b фіксовані, тобто $\delta S = 0$ при $\delta x_\mu(a) = 0$ і $\delta x_\mu(b) = 0$.

Тоді

$$(m_0 c u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu) \delta x_\mu \Big|_a^b = 0.$$

Залишається

$$\int_a^b \left\{ -m_0 c \frac{du_\mu}{ds} + \frac{e}{c} \left(-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right) u_\nu \right\} ds \delta x_\mu = 0.$$

Оскільки точки a і b довільні, отже, нулю дорівнює підінтегральний вираз.

Таким чином, отримуємо рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі в релятивістськи-коваріантній формі

$$m_0 c \frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c} \left(-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right) u_\nu, \quad (5.2)$$

де $\frac{du_\mu}{ds}$ і u_ν – 4-вектори, а $\left(-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right)$ – 4-тензор другого рангу. До

цього рівняння можна застосовувати перетворення Лоренца.

5.5. Тензор електромагнітного поля, його загальні властивості. Визначення елементів цього тензора через складові (проекції) векторів напруженості електричного і магнітного поля

Введемо тензор електромагнітного поля

$$F_{\mu\nu} = -\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}. \quad (5.3)$$

Це тензор другого рангу в чотиривимірному просторі, який характеризується $4^2 = 16$ компонентами

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix}.$$

Тоді рівняння (5.2) запишеться у вигляді

$$m_0 c \frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u_\nu. \quad (5.4)$$

Знайдемо $F_{\nu\mu}$:

$$F_{\nu\mu} = -\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = -F_{\mu\nu},$$

тобто тензор електромагнітного поля є антисиметричним, отже, його діагональні елементи дорівнюють нулю (див. Додаток В)

$$F_{\nu\nu} = F_{\mu\mu} = 0,$$

і він має вигляд

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ -F_{12} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ -F_{13} & -F_{23} & 0 & F_{34} \\ -F_{14} & -F_{24} & -F_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для визначення явного вигляду компонент тензора електромагнітного поля необхідно знайти 6 його компонент $F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{23}, F_{24}, F_{34}$. Виразимо компоненти тензора через проекції векторів напруженості електричного і магнітного поля. Для цього розпишемо вирази для напруженостей поля через потенціали в декартовій системі координат (див. (A.14), (A.16)).

$$\begin{aligned} \vec{H} = \text{rot } \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{x}_0 \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{z}_0 \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right); \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \\ &= \vec{x}_0 \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) + \vec{y}_0 \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} \right) + \vec{z}_0 \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Нагадаємо також, що при визначенні $F_{\mu\nu}$ індекси відповідають таким координатам: $1 \rightarrow x; 2 \rightarrow y; 3 \rightarrow z; 4 \rightarrow ict$, а 4-вектор потенціалу має вигляд $A_\mu = (\vec{A}, i\varphi) = (A_x, A_y, A_z, i\varphi)$. Тоді з урахуванням (5.5), (5.6) маємо

$$F_{12} = -\frac{\partial A_1}{\partial x_2} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x} = H_z;$$

$$F_{13} = -\frac{\partial A_1}{\partial x_3} + \frac{\partial A_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial x} = -H_y;$$

$$F_{14} = -\frac{\partial A_1}{\partial x_4} + \frac{\partial A_4}{\partial x_1} = -\frac{\partial A_x}{\partial(ict)} + \frac{\partial(i\varphi)}{\partial x} = -i \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) = -iE_x.$$

Аналогічно

$$F_{23} = H_x; \quad F_{24} = -iE_y; \quad F_{34} = -iE_z.$$

Остаточно тензор електромагнітного поля дорівнює

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

5.6. Чотири скалярні рівняння, що містить в собі релятивістськи-коваріантне рівняння руху

У рівнянні руху зарядженої частинки в електромагнітному полі, яке записане в релятивістськи-коваріантній формі (5.4), індекс μ набуває значень $\mu = 1, 2, 3, 4$, а за індексом ν , що повторюється, відбувається підсумовування від 1 до 4. Таким чином, векторне рівняння (5.4) містить 4 скалярні рівняння, які відповідають чотирьом можливим значенням μ . Отримаємо ці рівняння.

Нехай $\mu = 1$.

$$m_0 c \frac{du_1}{ds} = \frac{e}{c} F_{1\nu} u_\nu = \frac{e}{c} (F_{11} u_1 + F_{12} u_2 + F_{13} u_3 + F_{14} u_4). \quad (5.8)$$

Тут $u_\mu = \frac{dx_\mu}{ds}$ – компоненти чотиривимірного вектора швидкості. З ура-

хуванням того, що $x_1 \rightarrow x; x_2 \rightarrow y; x_3 \rightarrow z; x_4 \rightarrow ict$ і

$ds = c dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$, ці компоненти мають такі значення:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_x}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}; & u_2 &= \frac{v_y}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}; \\ u_3 &= \frac{v_z}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}; & u_4 &= \frac{i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Підставляючи ці значення, а також відповідні значення компонент тензора електромагнітного поля (5.7) у (5.8), отримаємо такі вирази:

$$\frac{d\left(\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)}{dt} = eE_x + \frac{e}{c}(v_y H_z - v_z H_y).$$

Вираз, що диференціюється за часом, є проекція тривимірного релятивістського механічного імпульсу на вісь OX , а $(v_y H_z - v_z H_y) = [\vec{v}, \vec{H}]_x$. Остаточно маємо, що при $\mu = 1$ рівнянню (5.4) відповідає скалярне рівняння, яке є проекцією на вісь OX тривимірного рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі

$$\frac{dP_x}{dt} = eE_x + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}]_x.$$

Розмірковуючи аналогічно, приходимо до висновку, що при $\mu = 2$ і $\mu = 3$ маємо проекції цього рівняння на осі OY і OZ

$$\begin{aligned} \frac{dP_y}{dt} &= eE_y + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}]_y; \\ \frac{dP_z}{dt} &= eE_z + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}]_z. \end{aligned}$$

Таким чином, при $\mu = 1, 2, 3$ рівняння руху в релятивістськи-коваріантній формі (5.4) дає проекції на осі координат тривимірного рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі. Якщо ці рівняння домножити на відповідні орти і скласти, то отримаємо векторне рівняння руху (2.18)

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}].$$

Розглянемо $\mu = 4$.

$$m_0 c \frac{du_4}{ds} = \frac{e}{c} F_{4\nu} u_\nu = \frac{e}{c} (F_{41} u_1 + F_{42} u_2 + F_{43} u_3 + F_{44} u_4).$$

Після підстановки компонент 4-вектора швидкості і відповідних значень компонент тензора електромагнітного поля одержимо

$$\frac{d\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)}{dt} = e(v_x E_x + v_y E_y + v_z E_z).$$

Величина зліва, що диференціюється, є кінетична енергія. Таким чином, при $\mu = 4$ маємо отриману нами раніше формулу змінення кінетичної енергії (2.22)

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \vec{v} \cdot e\vec{E} = \vec{v} \cdot \vec{F}_K,$$

згідно з якою змінення кінетичної енергії дорівнює скалярному добутку сили Кулона на вектор швидкості.

§ 6. Чотиривимірний вектор імпульсу зарядженої частинки в електромагнітному полі

6.1. Формулювання задачі з відшукування 4-вектора імпульсу в загальному випадку

Нехай є дві світові точки a і b . Точка a фіксована ($\delta x_\mu(a) = 0$), а точка b вільна ($\delta x_\mu(b) \neq 0$). Перехід системи з точки a до точки b відбувається по справжній траєкторії, тобто виконується рівняння руху (5.4)

$$m_0 c \frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u_\nu.$$

Знайдемо варіацію функціонала дії S як функцію координат (при русі по справжній траєкторії).

З релятивістської механіки відомо, що

$$\delta S = \mathcal{P}_\mu \delta x_\mu(b), \quad (6.1)$$

де $\mathcal{P}_\mu$ – чотиривимірний узагальнений імпульс.

Специфіка електродинаміки полягає у відповідному записі функціонала дії.

6.2. 4-вектор імпульсу зарядженої частинки в електромагнітному полі, його складові

При визначенні варіації функціонала дії раніше було отримано вираз (5.1)

$$\delta S = (m_0 c u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu) \delta x_\mu(b) - (m_0 c u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu) \delta x_\mu(a) + \int_a^b \left\{ -m_0 c \frac{du_\mu}{ds} + \frac{e}{c} \left(-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right) u_\nu \right\} ds \delta x_\mu.$$

Оскільки точка a фіксована, тобто $\delta x_\mu(a) = 0$, то другий доданок дорівнює нулю. Нулю також дорівнює і підінтегральний вираз, тому що рух здійснюється по справжній траєкторії, тобто виконується рівняння руху.

Тоді варіація функціонала дії дорівнює

$$\delta S = (m_0 c u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu) \delta x_\mu(b). \quad (6.2)$$

Порівнюючи формули (6.2) і (6.1), отримуємо вирази для чотиривимірного вектора імпульсу зарядженої частинки в електромагнітному полі

$$\mathcal{P}_\mu = m_0 c u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (6.3)$$

Визначимо тепер компоненти 4-вектора імпульсу. Для цього скористаємось виразами для компонент 4-вектора швидкості (5.9)

$$u_1 = \frac{v_x}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}; u_2 = \frac{v_y}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}; \\ u_3 = \frac{v_z}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}; u_4 = \frac{i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

і 4-вектора потенціалу $A_\mu = (\vec{A}, i\varphi) = (A_x, A_y, A_z, i\varphi)$.

Нехай $\mu = 1$.

$$\mathcal{P}_1 = m_0 c u_1 + \frac{e}{c} A_1 = m_0 c \frac{v_x}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{e}{c} A_x = P_x + \frac{e}{c} A_x. \quad (6.4)$$

Аналогічно при $\mu = 2$ і $\mu = 3$ маємо

$$\mathcal{P}_2 = P_y + \frac{e}{c} A_y; \quad (6.5)$$

$$\mathcal{P}_3 = P_z + \frac{e}{c} A_z. \quad (6.6)$$

Якщо співвідношення (6.4), (6.5) і (6.6) домножити на орти декартової системи координат і скласти, то одержимо вираз для узагальненого імпульсу (2.3)

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}.$$

Розглянемо $\mu = 4$.

$$\mathcal{P}_4 = m_0 c u_4 + \frac{e}{c} A_4 = m_0 c \frac{i}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{e}{c} i\varphi = \\ = \frac{i}{c} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + e\varphi \right) = \frac{i}{c} (\mathcal{E}_k + U) = i \frac{\mathcal{E}}{c},$$

де $\mathcal{E}_k, U$ – кінетична і потенціальна енергія, а $\mathcal{E}$ – повна енергія частинки в електромагнітному полі.

Таким чином, чотиривимірний вектор імпульсу зарядженої частинки в електромагнітному полі має такі компоненти:

$$\mu = 1, 2, 3, \quad \vec{\mathcal{P}} = \vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}; \quad (6.7)$$

$$\mu = 4, \quad \mathcal{P}_4 = i \frac{\mathcal{E}}{c}. \quad (6.8)$$

6.3. Рівняння Гамільтона–Якобі в релятивістськи-коваріантній формі

Отримаємо рівняння Гамільтона–Якобі. Для цього розпишемо варіацію функціонала дії як функцію координат ($S = S(x_\mu)$)

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial x_\mu} \delta x_\mu(b). \quad (6.9)$$

Порівнявши цей вираз з (6.1), маємо

$$\mathcal{P}_\mu = \frac{\partial S}{\partial x_\mu}. \quad (6.10)$$

Зрівняємо варіацію функціонала дії, записану у вигляді (6.9) та (6.2), і одержимо

$$m_0 c u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu = \frac{\partial S}{\partial x_\mu}.$$

Перепишемо цей вираз у вигляді

$$\frac{\partial S}{\partial x_\mu} - \frac{e}{c} A_\mu = m_0 c u_\mu$$

і піднесемо обидві частини рівності в квадрат. Урахуємо при цьому, що

$$u_\mu^2 = \frac{dx_\mu^2}{dS^2} = -\frac{dx_\mu^2}{dx_\mu^2} = -1,$$

так як $dS = \sqrt{-dx_\mu^2}$. Таким чином, отримуємо рівняння Гамільтона–Якобі в релятивістськи-коваріантній формі

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_\mu} - \frac{e}{c} A_\mu \right)^2 = -m_0^2 c^2. \quad (6.11)$$

§ 7. Властивості перетворення Лоренца стосовно векторних і тензорних величин з теорії електромагнітного поля

7.1. Чотиривимірні векторні і тензорні величини теорії поля

У мікроскопічній електродинаміці вводились такі чотиривимірні величини:

радіус-вектор (координати)	$x_\mu = (\vec{r}, ict); \quad \vec{r} = (x, y, z)$
швидкість	$u_\mu = \left(\frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{i}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right); \quad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$
потенціал	$A_\mu = (\vec{A}, i\varphi); \quad \vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$
узагальнений імпульс	$\mathcal{P}_\mu = (\vec{\mathcal{P}}, i\frac{\mathcal{E}}{c}); \quad \vec{\mathcal{P}} = \vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A}; \quad \mathcal{E} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + e\varphi$
тензор електро- магнітного поля	$F_{\mu\nu} = -\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}$

7.2. Пряме і зворотне перетворення Лоренца в матричній формі. Властивість ортогональності матриці перетворення Лоренца

Запишемо прямі перетворення Лоренца для координат x, y, z, t (див. Додаток С):

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Нагадаємо, що великою буквою V позначається швидкість однієї системи відліку відносно іншої. Для визначеності будемо вважати, що ця швидкість направлена уздовж осі OX . Перепишемо перетворення для координат x_μ

($x_1 = x; x_2 = y; x_3 = z; x_4 = ict$). Для цього виразимо $t = \frac{x_4}{ic} = -i \frac{x_4}{c}$;

$t' = \frac{x_4'}{ic} = -i \frac{x_4'}{c}$. Тоді

$$x_1 = \frac{x_1' - i \frac{V}{c} x_4'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad x_2 = x_2'; \quad x_3 = x_3'; \quad x_4 = \frac{x_4' + i \frac{V}{c} x_1'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (7.1)$$

Запишемо ці перетворення в матричній формі.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{-iV/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{iV/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1' - i \frac{V}{c} x_4'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ x_2' \\ x_3' \\ \frac{x_4' + i \frac{V}{c} x_1'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

Введемо матрицю перетворення Лоренца

$$\alpha_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{-iV/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{iV/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Тоді прямі перетворення Лоренца можна записати у вигляді

$$x_\mu = \alpha_{\mu\nu} x'_\nu. \quad (7.4)$$

Наявність індексу, що повторюється, вказує на те, що за цим індексом відбувається підсумовування (такі індекси називаються «німими»).

Доведемо, що матриця перетворення Лоренца має властивість ортогональності (див. Додаток В). Скористаємось для цього тим фактом, що квадрат

інтервалу є величиною інваріантною відносно перетворень Лоренца (див. Додатки В, С).

$$S^2 = S'^2; \quad S = \sqrt{-x_\mu^2}; \quad S' = \sqrt{-x'_\nu{}^2}.$$

Тоді

$$x_\mu^2 = x'_\nu{}^2;$$

$$x_\mu^2 = x_\mu x_\mu = \alpha_{\mu\nu} x'_\nu \alpha_{\mu\lambda} x'_\lambda = \alpha_{\mu\nu} \alpha_{\mu\lambda} x'_\nu x'_\lambda.$$

З іншого боку,

$$x'_\nu{}^2 = x'_\nu x'_\nu.$$

$$\alpha_{\mu\nu} \alpha_{\mu\lambda} x'_\nu x'_\lambda = x'_\nu x'_\nu.$$

Остання рівність є вірною за умови

$$\alpha_{\mu\nu} \alpha_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda} = \begin{cases} 1, & \nu = \lambda; \\ 0, & \nu \neq \lambda. \end{cases} \quad (7.5)$$

Це умова ортогональності матриці. Отже, перетворення Лоренца є ортогональним перетворенням.

Запишемо зворотне перетворення Лоренца. Для цього домножимо (7.4) на $\alpha_{\mu\lambda}$, скористаємось умовою ортогональності матриці (7.5)

$$\alpha_{\mu\lambda} x_\mu = \alpha_{\mu\lambda} \alpha_{\mu\nu} x'_\nu$$

і одержимо зворотні перетворення Лоренца

$$x'_\lambda = \alpha_{\mu\lambda} x_\mu. \quad (7.6)$$

7.3. Властивість скалярного добутку пари довільних 4-векторів

Покажемо, що скалярний добуток двох довільних векторів є інваріантним відносно перетворень Лоренца. Введемо довільні вектори A_μ, B_μ . Запишемо їх скалярний добуток і застосуємо до кожного з векторів пряме перетворення Лоренца

$$A_\mu B_\mu = \alpha_{\mu\nu} A'_\nu \alpha_{\mu\lambda} B'_\lambda = \alpha_{\mu\nu} \alpha_{\mu\lambda} A'_\nu B'_\lambda = \delta_{\nu\lambda} A'_\nu B'_\lambda = A'_\nu B'_\nu.$$

Таким чином, отримуємо, що скалярний добуток двох довільних векторів є інваріантним відносно перетворень Лоренца

$$A_\mu B_\mu = A'_\mu B'_\mu. \quad (7.7)$$

Висновок: квадрат довжини 4-вектора – інваріант відносно перетворень Лоренца

$$A_\mu A_\mu = A'_\mu A'_\mu. \quad (7.8)$$

7.4. 4-тензор 2 рангу $A_{\mu\nu}$. Тензорність матриці $A_{\mu\nu}$

Тензором першого рангу в чотиривимірному просторі (4-вектором) називається сукупність чотирьох величин, які при перетворенні системи координат перетворюються за законом

$$A_\mu = \alpha_{\mu\nu} A'_\nu; \quad A'_\lambda = \alpha_{\mu\lambda} A_\mu. \quad (7.9)$$

Тензором другого рангу в чотиривимірному просторі називається сукупність 16 величин, які при перетворенні системи координат перетворюються за законом

$$A_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\lambda} \alpha_{\nu\sigma} A'_{\lambda\sigma}. \quad (7.10)$$

Сформулюємо критерій тензорності матриці $A_{\mu\nu}$. Введемо до розгляду два 4-вектори B_μ, C_ν і побудуємо функціонал (квадратичну форму):

$$F = A_{\mu\nu} B_\mu C_\nu; \quad F' = A'_{\lambda\sigma} B'_\lambda C'_\sigma.$$

Покажемо, що якщо $A_{\mu\nu}$ – тензор другого рангу, то $F = F'$, тобто функціонал є інваріантом відносно перетворень Лоренца. Розглянемо F' , врахуємо при цьому, що B_μ, C_ν – вектори, і для них виконується перетворення вигляду (7.9)

$$F' = A'_{\lambda\sigma} B'_\lambda C'_\sigma = A'_{\lambda\sigma} \alpha_{\mu\lambda} B_\mu \alpha_{\nu\sigma} C_\nu = \alpha_{\mu\lambda} \alpha_{\nu\sigma} A'_{\lambda\sigma} B_\mu C_\nu.$$

Якщо має місце рівність

$$A_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\lambda} \alpha_{\nu\sigma} A'_{\lambda\sigma},$$

то

$$F' = A'_{\lambda\sigma} B'_\lambda C'_\sigma = A_{\mu\nu} B_\mu C_\nu = F.$$

Таким чином, якщо $F = F'$, то $A_{\mu\nu}$ – тензор другого рангу.

§ 8. Перетворення Лоренца для електромагнітного поля

8.1. Формули перетворення Лоренца для чотиривимірного векторного потенціалу

Електромагнітне поле характеризується двома величинами $\vec{E}$ і $\vec{H}$ (або $\vec{A}$ і φ)

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{H} = \text{rot} \vec{A}.$$

З'ясуємо, як зміниться поле при переході від однієї інерціальної системи відліку (ICB) до іншої. Одержимо формули перетворення Лоренца для чотиривимірного векторного потенціалу A_μ

$$A_\mu = (A_1, A_2, A_3, A_4) = (A_x, A_y, A_z, i\varphi). \quad (8.1)$$

Нехай в системі K' потенціал A'_ν відомий. Необхідно знайти потенціал A_μ у системі K .

Для вектора в чотиривимірному просторі відомий закон перетворення компонент (7.4) – прямі перетворення Лоренца. Отже, справедливим є вираз

$$A_\mu = \alpha_{\mu\nu} A'_\nu, \quad (8.2)$$

де $\alpha_{\mu\nu}$ – матриця перетворення Лоренца (7.3). Введемо

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (8.3)$$

Тоді

$$\alpha_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\frac{V}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\frac{V}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (8.4)$$

Отримаємо формули перетворень Лоренца для компонент вектора потенціалу.

Нехай $\mu = 1$.

$$A_1 = \alpha_{1\nu} A'_\nu = \alpha_{11} A'_1 + \alpha_{12} A'_2 + \alpha_{13} A'_3 + \alpha_{14} A'_4.$$

Згідно з (8.4) $\alpha_{12} = \alpha_{13} = 0$, $\alpha_{11} = \gamma$, $\alpha_{14} = -i\frac{V}{c}\gamma$. З урахуванням (8.1)

одержимо

$$A_x = \gamma(A'_x + \frac{V}{c}\varphi').$$

Розмірковуючи аналогічно, можна отримати, що при $\mu = 2$

$$A_y = A'_y,$$

а при $\mu = 3$

$$A_z = A'_z.$$

Розглянемо $\mu = 4$:

$$A_4 = \alpha_{4\nu} A'_\nu = \alpha_{41} A'_1 + \alpha_{42} A'_2 + \alpha_{43} A'_3 + \alpha_{44} A'_4.$$

У відповідності до (8.4) і (8.1) одержимо

$$i\varphi = \gamma(i\varphi' + i\frac{V}{c}A'_x).$$

Запишемо прямі перетворення Лоренца для чотиривимірному вектора потенціалу

$$A_x = \frac{A'_x + \frac{V}{c}\varphi'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad A_y = A'_y; \quad A_z = A'_z; \quad \varphi = \frac{\varphi' + \frac{V}{c}A'_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (8.5)$$

Зворотні перетворення Лоренца для чотиривимірному вектора потенціалу
витають з (8.5) за допомогою заміни $V \rightarrow -V$:

$$A'_x = \frac{A_x - \frac{V}{c}\varphi}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad A'_y = A_y; \quad A'_z = A_z; \quad \varphi' = \frac{\varphi - \frac{V}{c}A_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (8.6)$$

8.2. Формули перетворень Лоренца для елементів тензора електромагнітного поля

Тензор електромагнітного поля є антисиметричним тензором, тобто $F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$. Діагональні елементи антисиметричного тензора

$F_{\nu\nu} = F_{\mu\mu} = 0$ (Додаток В). Нехай в системі K' тензор електромагнітного поля $F'_{\lambda\sigma}$ відомий. Необхідно знайти тензор електромагнітного поля $F_{\mu\nu}$.

$$F'_{\lambda\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & F'_{12} & F'_{13} & F'_{14} \\ -F'_{12} & 0 & F'_{23} & F'_{24} \\ -F'_{13} & -F'_{23} & 0 & F'_{34} \\ -F'_{14} & -F'_{24} & -F'_{34} & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.7)$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ -F_{12} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ -F_{13} & -F_{23} & 0 & F_{34} \\ -F_{14} & -F_{24} & -F_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

Беручи до уваги вигляд тензора електромагнітного поля, треба знайти формули перетворення Лоренца для елементів $F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{23}, F_{24}, F_{34}$. Компоненти тензора другого рангу у відповідності з (7.10) перетворюються за законом

$$A_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\lambda} \alpha_{\nu\sigma} A'_{\lambda\sigma}.$$

Нехай $\mu = 1, \nu = 2$

$$F_{12} = \alpha_{1\lambda} \alpha_{2\sigma} F'_{\lambda\sigma} = \alpha_{1\lambda} (\alpha_{21} F'_{\lambda 1} + \alpha_{22} F'_{\lambda 2} + \alpha_{23} F'_{\lambda 3} + \alpha_{24} F'_{\lambda 4}).$$

Згідно з (8.4) єдиний відмінний від нуля елемент другого рядка матриці α – це елемент $\alpha_{22} = 1$. Одержимо

$$F_{12} = \alpha_{1\lambda} F'_{\lambda 2} = \alpha_{11} F'_{12} + \alpha_{12} F'_{22} + \alpha_{13} F'_{32} + \alpha_{14} F'_{42}.$$

Підставивши відповідні значення елементів матриці перетворення Лоренца і тензора електромагнітного поля, отримаємо перетворення Лоренца для елемента F_{12}

$$F_{12} = \gamma \left(F'_{12} - i \frac{V}{c} F'_{42} \right).$$

Аналогічно одержимо перетворення Лоренца для інших елементів. Остаточно перетворення Лоренца для елементів тензора електромагнітного поля мають вигляд

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{F'_{12} - i \frac{V}{c} F'_{42}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; & F_{13} &= \frac{F'_{13} - i \frac{V}{c} F'_{43}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; & F_{14} &= F'_{14}; \\ F_{23} &= F'_{23}; & F_{24} &= \frac{F'_{24} - i \frac{V}{c} F'_{12}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; & F_{34} &= \frac{F'_{34} - i \frac{V}{c} F'_{13}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Нагадаємо, що інші елементи визначаються виходячи з властивостей антисиметричного тензора $F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$ і $F_{\mu\mu} = 0$.

8.3. Перетворення векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої

Електромагнітне поле є відносним, тобто змінюється при переході від однієї системи координат до іншої. Співвідношення (8.5), (8.6) характеризують змінення векторного і скалярного потенціалів електромагнітного поля при переході від однієї системи координат до іншої. Визначимо, як перетворюються компоненти векторів напруженості електричного і магнітного поля. Для цього скористаємось формулою (5.7), що визначає тензор електромагнітного поля через компоненти векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}.$$

В системі координат, що рухається, тензор електромагнітного поля

$$F'_{\lambda\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & H'_z & -H'_y & -iE'_x \\ -H'_z & 0 & H'_x & -iE'_y \\ H'_y & -H'_x & 0 & -iE'_z \\ iE'_x & iE'_y & iE'_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Скориставшись перетвореннями (8.8) і підставивши відповідні вирази для компонент тензорів $F_{\mu\nu}$ і $F'_{\lambda\sigma}$ з наведених вище співвідношень, отримуємо прямі перетворення Лоренца для компонент векторів напруженості електричного і магнітного поля

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x; & E_y &= \frac{E'_y + \frac{V}{c} H'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; & E_z &= \frac{E'_z - \frac{V}{c} H'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \\ H_x &= H'_x; & H_y &= \frac{H'_y - \frac{V}{c} E'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; & H_z &= \frac{H'_z + \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Таким чином, вектори напруженості електромагнітного поля є відносними величинами. Зокрема, в одній системі координат електричне або магнітне поле може бути рівним нулю і бути присутнім в іншій системі координат. Наприклад, нехай у системі K' : $\vec{H}' = 0$; $\vec{E}' \neq 0$. Знайдемо напруженості поля в системі K . Відповідно до (8.9)

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x; & E_y &= \frac{E'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; & E_z &= \frac{E'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \\ H_x &= H'_x = 0; & H_y &= \frac{-\frac{V}{c} E'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; & H_z &= \frac{\frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned}$$

Очевидно, що в системі K' : $\vec{H}' = 0$, а в системі K : $\vec{H} \neq 0$.

Отримаємо зворотні перетворення Лоренца для компонент векторів напруженості електричного і магнітного полів, замінивши $V \rightarrow -V$:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x; & E'_y &= \frac{E_y - \frac{V}{c} H_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; & E'_z &= \frac{E_z + \frac{V}{c} H_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \\ H'_x &= H_x; & H'_y &= \frac{H_y + \frac{V}{c} E_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; & H'_z &= \frac{H_z - \frac{V}{c} E_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

8.4. Формули перетворення Лоренца для векторів напруженостей електромагнітного поля в нерелятивістському випадку

Розглянемо нерелятивістський випадок, тобто будемо вважати, що $1 - V^2/c^2 \approx 1$. Перетворимо вирази (8.9) для цього випадку. Тоді формули прямих перетворень Лоренца матимуть вигляд

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x; & E_y &= E'_y + \frac{V}{c} H'_z; & E_z &= E'_z - \frac{V}{c} H'_y; \\ H_x &= H'_x; & H_y &= H'_y - \frac{V}{c} E'_z; & H_z &= H'_z + \frac{V}{c} E'_y. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Переформулюємо (8.11) у векторній формі. При цьому врахуємо, що перетворення Лоренца записуються нами для випадку, коли швидкість однієї системи відліку відносно іншої направлена уздовж осі OX , тобто $\vec{V} = \vec{x}_0 V$. Скористаємося таким допоміжним виразом:

$$[\vec{H}', \vec{V}] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ H'_x & H'_y & H'_z \\ V & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{x}_0 \cdot 0 + \vec{y}_0 \cdot H'_z \cdot V - \vec{z}_0 \cdot H'_y \cdot V.$$

Тоді прямі перетворення Лоренца у векторній формі запишуться так:

$$\vec{E} = \vec{E}' + \frac{1}{c} [\vec{H}', \vec{V}]; \quad \vec{H} = \vec{H}' - \frac{1}{c} [\vec{E}', \vec{V}], \quad (8.12)$$

а зворотні перетворення Лоренца у векторній формі

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V}, \vec{H}]; \quad \vec{H}' = \vec{H} - \frac{1}{c} [\vec{V}, \vec{E}]. \quad (8.13)$$

Розглянемо два окремі випадки.

1) Нехай у системі K' : $\vec{H}' = 0$; $\vec{E}' \neq 0$. Тоді, виходячи з (8.12), в системі K одержимо

$$\vec{E} = \vec{E}'; \quad \vec{H} = -\frac{1}{c} [\vec{E}, \vec{V}].$$

2) Нехай в системі K' : $\vec{H}' \neq 0$; $\vec{E}' = 0$. Тоді в K

$$\vec{H} = \vec{H}'; \quad \vec{E} = \frac{1}{c} [\vec{H}, \vec{V}].$$

В обох випадках в силу властивостей векторного добутку вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ взаємно перпендикулярні. Отже, якщо в якійсь системі координат електричне або магнітне поле дорівнює нулю, то у всіх інших системах координат вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ є взаємно перпендикулярними. Справедливо і зворотне: якщо в якійсь системі координат вектори напруженості $\vec{E}$ і $\vec{H}$ взаємно перпендикулярні (але не дорівнюють один одному), то існує така система координат, в якій поле або чисто електричне, або чисто магнітне.

§ 9. Інваріанти електромагнітного поля

9.1. Умова інваріантності для потенціалів електромагнітного поля

Інваріант – це величина, яка не змінюється при переході від однієї системи координат до іншої.

Як отримано раніше (співвідношення (7.7)), скалярний добуток двох довільних векторів є інваріантом. У випадку рівності цих векторів маємо умову (7.8) інваріантності квадрата довжини вектора

$$A_\mu A_\mu = A'_\nu A'_\nu = \text{inv}.$$

Нехай вектор A_μ – 4-вектор потенціалу. Будемо вважати, що в системі K заданий потенціал $A_\mu = (\vec{A}, i\varphi)$, а в K' – потенціал $A'_\nu = (\vec{A}', i\varphi')$.

Знайдемо квадрати довжин цих векторів:

$$A_\mu A_\mu = A^2 + (i\varphi)^2 = A^2 - \varphi^2,$$

$$A'_\nu A'_\nu = A'^2 + (i\varphi')^2 = A'^2 - \varphi'^2.$$

В силу (7.8) маємо

$$A^2 - \varphi^2 = A'^2 - \varphi'^2 = \text{inv}, \quad (9.1)$$

тобто різниця квадратів векторного і скалярного потенціалів є інваріантом відносно перетворень Лоренца.

9.2. Відомості з тензорного аналізу, що використовуються для знаходження інваріантів електромагнітного поля

Знайдемо інваріанти для векторів напруженості електричного і магнітного поля. Нехай в системі K задані вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$, а в K' – вектори $\vec{E}'$ і $\vec{H}'$.

З тензорного аналізу відомо таке. Нехай $A_{\mu\nu}$ – симетричний (антисиметричний) тензор другого рангу. Такий тензор можна привести до діагонального вигляду (головне значення тензора). Для цього будується характеристичне рівняння, рішенням якого будуть діагональні елементи (головні значення) тензора. Характеристичне рівняння представляє собою рівність нулю визначника

$$|A_{\mu\nu} - \lambda \delta_{\mu\nu}| = 0,$$

де

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розписавши визначник, одержуємо поліном степеня не більше четвертого відносно λ

$$a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^3 + a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda + a_5 = 0, \quad (9.2)$$

корені якого λ_i і будуть головними значеннями тензора.

Головні значення тензора інваріантні відносно перетворень Лоренца, тому і коефіцієнти a_i рівняння (9.2) також інваріантні відносно перетворень Лоренца ($i = 1, 2, 3, 4$).

9.3. Отримання і аналіз інваріантів векторів напруженості електромагнітного поля

Тензор електромагнітного поля $F_{\mu\nu}$ є антисиметричним. Побудуємо для нього характеристичне рівняння

$$|F_{\mu\nu} - \lambda \delta_{\mu\nu}| = 0,$$

корені якого будуть інваріантними відносно перетворень Лоренца, отже, інваріантами будуть і коефіцієнти, що стоять у рівнянні при λ . Ці коефіцієнти будуть виражатися через компоненти тензора $F_{\mu\nu}$, які, в свою чергу, визначаються через компоненти векторів напруженості електричного і магнітного поля. Ці обставини дозволять нам визначити інваріанти векторів напруженості електромагнітного поля. Враховуючи явний вигляд тензора електромагнітного поля (5.7)

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix},$$

отримаємо характеристичне рівняння у вигляді рівності нулю визначника

$$\begin{vmatrix} -\lambda & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & -\lambda & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & -\lambda & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розписавши визначник, одержуємо характеристичне рівняння у вигляді бі-квадратного рівняння

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \lambda^2(H_x^2 + H_y^2 + H_z^2 - E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) - \\ & -(E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z)E_x H_x - \\ & -(E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z)E_y H_y - \\ & -(E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z)E_z H_z = 0. \end{aligned}$$

Коефіцієнт при λ^2 є різницею квадратів довжин векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$, а вільний член – квадрат їх скалярного добутку

$$\lambda^4 + \lambda^2(\vec{H}^2 - \vec{E}^2) - \lambda^0(\vec{E}, \vec{H})^2 = 0.$$

Коефіцієнти цього рівняння інваріантні відносно перетворень Лоренца

$$\begin{aligned} \vec{H}^2 - \vec{E}^2 &= \text{inv}; \\ (\vec{E}, \vec{H})^2 &= \text{inv} \Rightarrow (\vec{E}, \vec{H}) = \text{inv}. \end{aligned}$$

Отримуємо інваріанти напруженостей електромагнітного поля

$$\begin{aligned} \vec{H}^2 - \vec{E}^2 &= \text{inv}; \\ (\vec{E}, \vec{H}) &= \text{inv}. \end{aligned} \tag{9.3}$$

При цьому перше із співвідношень (9.3) носить назву першого інваріанта, а друге – другого інваріанта електромагнітного поля.

Таким чином, якщо в системі K задані вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$, а в K' – вектори $\vec{E}'$ і $\vec{H}'$, то мають місце рівності

$$\begin{aligned} \vec{H}^2 - \vec{E}^2 &= \vec{H}'^2 - \vec{E}'^2; \\ (\vec{E}, \vec{H}) &= (\vec{E}', \vec{H}'). \end{aligned}$$

Проаналізуємо отримані вирази.

1) Розглянемо як приклад плоску електромагнітну хвилю. Для плоскої хвилі має місце співвідношення $|\vec{E}| = |\vec{H}|$. Тоді перший інваріант дорівнює нулю: $\vec{H}^2 - \vec{E}^2 = 0$, і ця рівність буде справедливою в усіх системах відліку. Очевидно, ця властивість плоскої хвилі зберігається в будь-якій інерціальній системі відліку. Таким чином, якщо в якійсь системі відліку $|\vec{E}| = |\vec{H}|$, то довжини цих векторів будуть однаковими і в будь-якій іншій системі відліку.

2) Іншою властивістю плоскої хвилі є той факт, що вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ взаємно перпендикулярні, тобто дорівнює нулю другий інваріант $(\vec{E}, \vec{H}) = 0$. Отже, і в будь-якій іншій системі відліку такий скалярний добуток буде дорівнювати нулю, і ця властивість плоских хвиль зберігається. Таким чином, якщо в якійсь системі відліку електричне і магнітне поля взаємно перпендикулярні, то вони перпендикулярні і в будь-якій іншій інерціальній системі відліку.

3) Якщо в одній системі відліку електромагнітне поле є переважно магнітним, $|\vec{H}| > |\vec{E}|$ (переважно електричним, $|\vec{E}| > |\vec{H}|$), то воно буде переважно магнітним (електричним) і в будь-якій іншій системі координат. Цей висновок є наслідком першого інваріанта, оскільки вираз $\vec{H}^2 - \vec{E}^2$ повинен зберігати свій знак в усіх системах координат.

4) Другий інваріант також повинен зберігати свій знак в усіх системах координат. Тому, якщо в будь-якій системі координат вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ утворюють гострий (тупий) кут, то вони будуть утворювати гострий (тупий) кут і в будь-якій іншій системі координат.

5) Перетвореннями Лоренца завжди можна досягти того, щоб $\vec{E}$ і $\vec{H}$ отримали будь-які значення, що задовольняють лише умові: щоб $\vec{H}^2 - \vec{E}^2$ і $(\vec{E}, \vec{H})$ мали задані певні значення. Виключенням є випадок, коли обидва

інваріанти дорівнюють нулю. В цьому випадку $\vec{E}$ і $\vec{H}$ в усіх системах відліку є рівними за величиною і взаємно перпендикулярними за напрямком.

6) Якщо $(\vec{E}, \vec{H}) = 0$, то завжди можна знайти таку систему відліку, в якій $\vec{E} = 0$ або $\vec{H} = 0$ (в залежності від знака $\vec{H}^2 - \vec{E}^2$), тобто поле є чисто електричним або чисто магнітним. Справедливо і зворотнє: якщо в якійсь системі відліку $\vec{E} = 0$ або $\vec{H} = 0$, то в будь-якій іншій системі відліку $\vec{E}$ і $\vec{H}$ взаємно перпендикулярні.

9.4. Перший інваріант електромагнітного поля у вигляді тензора $F_{\mu\nu}$

Запишемо перший інваріант у чотиривимірній формі. Тензор електромагнітного поля має вигляд (5.7). Знайдемо $F_{\mu\nu}^2$.

$$F_{\mu\nu}^2 = F_{\mu\nu} \cdot F_{\mu\nu} = \sum_{\mu=1}^4 \sum_{\nu=1}^4 F_{\mu\nu} \cdot F_{\mu\nu} = H_z^2 + H_y^2 - E_x^2 + H_z^2 + H_x^2 - E_y^2 + H_y^2 + H_x^2 - E_z^2 - E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 = 2(\vec{H}^2 - \vec{E}^2).$$

Отримуємо, що

$$F_{\mu\nu}^2 = 2(\vec{H}^2 - \vec{E}^2) = \text{inv.} \quad (9.4)$$

§ 10. Густина зарядів. Чотиривимірний вектор густини струму

10.1. Проблеми, що виникають при спробі описати заряджену матеріальну точку в термінах густини заряду. Поняття густини заряду

До цих пір ми розглядали тільки точкові заряди – матеріальні точки, які крім маси мають ще і заряд.

Усі заряди, що існують у природі, можна вважати точковими, тому що елементарні частинки, по суті, є точковими зарядами, а будь-яку складну систему зарядів можна розглядати як сукупність елементарних (точкових) зарядів.

Розглянемо об'єм V , в якому заряд Q розподілений неперервно. Введемо густину заряду ρ таким чином, що

$$Q = \int_V \rho dV. \quad (10.1)$$

Заряд елементарного об'єму $dQ = \rho dV$. Тоді густину заряду визначимо так:

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}. \quad (10.2)$$

В загальному випадку густина заряду є функція координат і часу $\rho = \rho(\vec{r}, t)$.

У дійсності заряди є точковими. Матеріальна точка не має об'єму, тобто $\Delta V \rightarrow 0$, тому густина заряду ρ , що визначена згідно з (10.2), буде прагнути до нескінченності.

Це відбувається тому, що ми намагаємось визначити густину дискретного заряду, використовуючи поняття густини заряду, яке введено для неперервного розподілу заряду. Для точкового заряду густина заряду дорівнює нулю скрізь, крім точки, де знаходиться сам заряд, в цій точці $\rho \rightarrow \infty$. Отже, ρ для точкового заряду можна записати за допомогою дельта-функції, яка дозволить пов'язати дискретний розподіл зарядів з неперервним.

10.2. Основні властивості одновимірної дельта-функції Дірака

1) За визначенням

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0; \\ \infty, & x = 0. \end{cases} \quad (10.3)$$

δ -функція є інтегрованою в нескінченних межах, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (10.4)$$

Це дає можливість представити модель δ -функції у вигляді прямокутника, основа якого прагне до нуля при рівності одиниці його площі.

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0, & x \neq a; \\ \infty, & x = a. \end{cases} \quad (10.5)$$

2) Умова нормування

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x-a) dx = \begin{cases} 1, & a \in (x_1, x_2); \\ 0, & a \notin (x_1, x_2). \end{cases} \quad (10.6)$$

3)

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \delta(x-a) dx = \begin{cases} f(a), & a \in (x_1, x_2); \\ 0, & a \notin (x_1, x_2). \end{cases} \quad (10.7)$$

4) δ -функція є парною функцією

$$\delta(x) = \delta(-x). \quad (10.8)$$

10.3. Властивості тривимірної δ -функції

Введемо у розгляд радіус-вектор $\vec{r} = \vec{x}_0 x + \vec{y}_0 y + \vec{z}_0 z$ і довільний вектор $\vec{a} = \vec{x}_0 a_x + \vec{y}_0 a_y + \vec{z}_0 a_z$.

1) Тривимірну δ -функцію будемо визначати так:

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z); \quad (10.9)$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{a}) = \delta(x - a_x) \delta(y - a_y) \delta(z - a_z). \quad (10.10)$$

2) Умова нормування

$$\begin{aligned} \int_V \delta(\vec{r} - \vec{a}) dV &= \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \delta(x - a_x) \delta(y - a_y) \delta(z - a_z) dx dy dz = \\ &= \begin{cases} 1, & \vec{a} \in V; \\ 0, & \vec{a} \notin V. \end{cases} \end{aligned} \quad (10.11)$$

3)

$$\int_V f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{a}) dV = \begin{cases} f(\vec{a}), & \vec{a} \in V; \\ 0, & \vec{a} \notin V. \end{cases} \quad (10.12)$$

4) δ -функція є парною функцією

$$\delta(\vec{r}) = \delta(-\vec{r}). \quad (10.13)$$

10.4. Визначення густини заряду за допомогою дельта-функції

Розглянемо об'єм V , в якому зосереджені точкові заряди e_i , що характеризуються радіус-векторами $\vec{r}_i$, $\vec{r}$ – радіус-вектор точки спостереження – точки, в якій визначаємо густину заряду. Введемо густину заряду, скориставшись поняттям δ -функції

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (10.14)$$

Для введеної таким чином густини зарядів виконується умова

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \infty, & \vec{r} = \vec{r}_i; \\ 0, & \vec{r} \neq \vec{r}_i. \end{cases}$$

Знайдемо повний заряд Q об'єму V

$$Q = \int_V \rho dV = \int_V \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) dV = \sum_{(i)} e_i \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) dV = \sum_{(i)} e_i.$$

Тут ми скористалися властивістю дельта-функції (10.11), оскільки $\vec{r}_i \in V$.

З'ясуємо, чи є густина заряду інваріантом відносно перетворень Лоренца. Заряд об'єму dV визначається таким чином:

$$dQ = \rho dV. \quad (10.15)$$

Заряд dQ є інваріантом, але елементарний об'єм dV – не інваріант (що витікає з перетворень Лоренца). Отже, ρ не є інваріантом.

10.5. Чотиривимірний вектор густини струму, його складові

Розглянемо як dV скільки завгодно малий об'єм. dQ – заряд dV .

У класичній фізиці густина струму вводилася таким чином:

$$\vec{j} = \rho \vec{v}, \quad (10.16)$$

де $\vec{v}$ – швидкість руху заряджених частинок.

Домножимо (10.15) на dx_μ

$$dQ dx_\mu = \rho dV dx_\mu = \rho dV dt \frac{dx_\mu}{dt}. \quad (10.17)$$

Величина, що стоїть зліва, є 4-вектором. Тому і справа повинен стояти 4-вектор. $dV dt$ є скаляром. Введемо вектор густини струму таким чином:

$$j_\mu = \rho \frac{dx_\mu}{dt}; \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (10.18)$$

За місцем розташування густини струму в рівнянні (10.17) j_μ є 4-вектором.

Розглянемо послідовно $\mu = 1, 2, 3, 4$ ($x_\mu = (x, y, z, ict)$).

$$\mu = 1 \quad j_1 = \rho \frac{dx_1}{dt} = \rho \frac{dx}{dt} = \rho v_x = j_x;$$

$$\mu = 2 \quad j_2 = \rho \frac{dx_2}{dt} = \rho \frac{dy}{dt} = \rho v_y = j_y;$$

$$\mu = 3 \quad j_3 = \rho \frac{dx_3}{dt} = \rho \frac{dz}{dt} = \rho v_z = j_z.$$

Якщо кожне з цих рівнянь домножити на відповідний орт декартової системи координат і скласти, то отримаємо класичний вираз для тривимірного вектора густини струму (10.16)

$$\vec{j} = \rho \vec{v}.$$

Тут $\vec{v}$ – швидкість руху об'єму dV .

$$\mu = 4 \quad j_4 = \rho \frac{dx_4}{dt} = \rho \frac{d(ict)}{dt} = ic\rho.$$

Остаточно маємо, що 4-вектор густини струму дорівнює

$$j_\mu = (\vec{j}, ic\rho). \quad (10.19)$$

Тривимірний вектор густини струму $\vec{j}$ відповідно до (10.16) з урахуванням (10.14) можна записати так:

$$\vec{j} = \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (10.20)$$

§ 11. Закон збереження заряду. Рівняння неперервності

11.1. Приріст у часі величини заряду, що міститься в об'ємі, з використанням поняття густини заряду

Розглянемо об'єм V , що оточений поверхнею S . Всередині об'єму міститься заряд, розподілений з густиною $\rho(\vec{r}, t)$. Будемо вважати, що заряди можуть вільно проходити через поверхню S . Введемо в розгляд також одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні $\vec{n}$ і радіус-вектор точки спостереження $\vec{r}$.

Повний заряд Q всередині об'єму V визначається з використанням поняття густини заряду за формулою (10.1)

$$Q = \int_V \rho dV.$$

Для визначення змінення із часом заряду в об'ємі необхідно знайти похідну заряду за часом

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV. \quad (11.1)$$

Оскільки $\partial t > 0$, то і $\partial Q > 0$, тобто ми розглядаємо приріст (збільшення) заряду в об'ємі.

11.2. Приріст у часі величини заряду в тому ж об'ємі V з використанням поняття густини струму

З іншого боку, змінення заряду в об'ємі можна знайти, використовуючи поняття густини струму. Змінення заряду в об'ємі за одиницю часу визначається кількістю заряду, що виходить з об'єму V в одиницю часу або входить в об'єм V за одиницю часу. Використовуючи визначення швидкості і густини заряду, можна стверджувати, що за одиницю часу через елементарну поверхню $d\vec{S}$ пройде заряд, рівний $\rho \vec{v} d\vec{S}$. Тут $\vec{v}$ – швидкість заряду в точці простору, де знаходиться $d\vec{S}$. Урахуємо, що $d\vec{S} = dS \vec{n}$, де $\vec{n}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні. Це означає, що ви-

раз $\rho \vec{v} d\vec{S}$ є додатним, якщо заряд виходить з об'єму V , і від'ємним, якщо заряд входить до нього.

Повний заряд, що проходить через замкнену поверхню S за одиницю часу, визначається так:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = - \oint_S \rho \vec{v} d\vec{S}.$$

Знак «мінус» перед інтегралом з'явився тому, що нас цікавить приріст заряду в об'ємі. Скористаємося визначенням тривимірного вектора густини струму $\vec{j} = \rho \vec{v}$. Тоді приріст заряду в об'ємі запишеться таким чином:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = - \oint_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (11.2)$$

Введемо поняття повного струму як кількість заряду, що виходить через всю поверхню S за одиницю часу

$$I = \oint_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (11.3)$$

Тоді

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -I.$$

11.3. Закон збереження заряду в інтегральній і диференціальній формі

Прирівняємо вирази (11.1) і (11.2) та отримаємо рівняння неперервності в інтегральній формі

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (11.4)$$

Фізичний зміст цього співвідношення – закон збереження заряду.

Одержимо закон збереження заряду в диференціальній формі, використовуючи теорему Остроградського–Гаусса

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV.$$

Підставимо цей вираз у (11.4)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = 0.$$

Змінімо порядок інтегрування і диференціювання в першому інтегралі і запишемо все під один інтеграл

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right) dV = 0.$$

Через те, що інтегрування відбувається за довільним об'ємом, то нулю дорівнює підінтегральний вираз. Одержуємо рівняння неперервності в диференціальній формі

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (11.5)$$

11.4. Закон збереження заряду в релятивістськи-коваріантній формі

Запишемо рівняння неперервності в релятивістськи-коваріантній формі

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \quad (11.6)$$

$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu}$ – 4-дивергенція 4-вектора $j_\mu = (\vec{j}, ic\rho)$. Переконаємось у справед-

ливості (11.6)

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial (ic\rho)}{\partial (ict)} = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Доведемо, що рівняння неперервності автоматично задовольняється, якщо ρ представлено через δ – функцію. Густина заряду має вигляд

$$\rho = \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i),$$

а густина струму

$$\vec{j} = \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i).$$

Нехай для простоти у нас є лише одна частинка із зарядом e і радіус-вектором $\vec{r}_0$

$$\rho = e \delta(\vec{r} - \vec{r}_0),$$

$$\vec{j} = e \vec{v} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0).$$

Знайдемо $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, урахуємо при цьому, що $\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial t}$ – швидкість зарядженої частинки

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial \vec{r}_0} \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial t} = \vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial \vec{r}_0}.$$

Оскільки ρ залежить від різниці $\vec{r} - \vec{r}_0$, то

$$\frac{\partial \rho}{\partial \vec{r}_0} = - \frac{\partial \rho}{\partial \vec{r}} = - \text{grad } \rho.$$

Тоді

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \vec{v} \text{grad } \rho.$$

Скористаємося векторною тотожністю і врахуємо, що швидкість частинки не залежить від координат

$$\text{div } \rho \vec{v} = \rho \text{div } \vec{v} + \vec{v} \text{grad } \rho = \vec{v} \text{grad } \rho;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \text{div } \rho \vec{v} = - \text{div } \vec{j}.$$

Таким чином, отримуємо, що для випадку, який розглядається, виконується рівняння неперервності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0.$$

§ 12. Функціонал дії для електромагнітного поля

12.1. Функціонал дії для фізичної системи «заряджена частинка + електромагнітне поле»

Як одержано в § 1, функціонал дії для зарядженої частинки, що рухається в заданому електромагнітному полі, має вигляд (1.1)

$$S(A_\mu, x_\mu) = S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu), \quad (12.1)$$

де

$$S_m = S_m(x_\mu) = -m_0 c \int_a^b \sqrt{-dx_\mu^2}$$

– функціонал дії для вільної частинки, а

$$S_{mf} = S_{mf}(A_\mu, x_\mu) = \frac{e}{c} \int_a^b A_\mu dx_\mu$$

– функціонал дії, який обумовлено взаємодією зарядженої частинки і електромагнітного поля.

Якщо йдеться про систему частинок, то в силу адитивності функціонала дії функціонал дії системи дорівнює сумі функціоналів дії кожної частинки окремо

$$S_m = \sum_{(i)} \left(-m_{0_i} c \int_{a_i}^{b_i} \sqrt{-dx_{\mu_i}^2} \right), \quad (12.2)$$

$$S_{mf} = \sum_{(i)} \frac{e_i}{c} \int_{a_i}^{b_i} A_{\mu_i} dx_{\mu_i}. \quad (12.3)$$

Тут підсумовування відбувається за всіма частинками системи, довільна i -а частинка характеризується масою m_{0_i} , зарядом e_i , a_i, b_i – відповідно, її початкове і кінцеве положення, x_{μ_i} описує її траєкторію, а A_{μ_i} – потенціал поля в тій точці простору, де знаходиться i -а частинка.

Розглянемо тепер систему, що складається з електромагнітного поля і частинок, які в ньому знаходяться.

Електромагнітне поле є об'єктивною реальністю, тобто воно існує незалежно від того, внесені в нього пробні заряди чи ні, і більше того, будучи одного разу збудженим джерелами у вигляді електромагнітної хвилі, поле може існувати навіть тоді, коли джерела видалені на нескінченність. Тому необхідно оперувати з полем як з реальним об'єктом. У даному випадку ми приписуємо йому функціонал дії S_f , який залежить лише від властивостей електромагнітного поля і характеризує поле за відсутності заряджених частинок.

Доки ми цікавились лише рухом зарядів у заданому електромагнітному полі, частина функціонала дії, яка характеризує саме поле, в розгляді не враховувалась, тому що функціонал дії S_f не залежить від властивостей частинок, отже, не може впливати на виведення рівнянь руху заряджених частинок у заданому електромагнітному полі. При виведенні рівнянь, що визначають саме поле, урахування S_f є обов'язковим. Без урахування S_f ми отримали лише першу пару рівнянь Максвелла, яких не достатньо для визначення поля, система рівнянь виявилася незамкненою.

12.2. Частина функціонала дії, яка залежить тільки від поля

Сформулюємо вихідні передумови, на основі яких будемо визначати функціонал дії для електромагнітного поля, необхідний для отримання рівнянь електромагнітного поля.

1) Будемо виходити з принципу суперпозиції, якому, як відомо з досліджень, підкорюється електромагнітне поле: поле, що утворюється системою зарядів, є результатом векторного додавання полів, які утворюються кожним із зарядів. Це означає, що напруженості результуючого поля в кожній точці дорівнюють векторній сумі напруженостей у цій точці кожного з полів зокрема.

2) Всяке рішення рівнянь поля повинно бути полем, яке може існувати в природі. Відповідно до принципу суперпозиції сума будь-яких таких полів також повинна бути полем, яке може існувати в природі, тобто повинно задовольняти рівнянням поля.

3) Лінійні диференціальні рівняння мають таку властивість, що сума будь-яких їх рішень також є рішенням. Отже, рівняння поля повинні бути лінійними диференціальними рівняннями.

4) Оскільки функціонал дії записується у вигляді інтеграла, то зі сказаного вище витікає, що під знаком інтеграла повинен стояти вираз квадратичний по полю. Тільки в цьому випадку рівняння будуть лінійними, оскільки рівняння поля отримуються шляхом варіювання функціонала дії, при варіюванні степінь підінтегрального виразу знижується на одиницю.

5) У вираз для S_f не можуть входити потенціали поля, тому що вони не визначені однозначно (4.2) (у визначенні S_{mf} ця неоднозначність не була суттєвою).

6) Функціонал дії S_f повинен бути скаляром, тоді і підінтегральний вираз повинен бути скаляром. І цей скаляр повинен характеризувати поле. Цим вимогам задовольняє $F_{\mu\nu}^2$

$$F_{\mu\nu}^2 = 2(\vec{H}^2 - \vec{E}^2). \quad (12.4)$$

Таким чином, функціонал дії для електромагнітного поля запишеться у вигляді

$$S_f = a \int_V \int_{t_a}^{t_b} F_{\mu\nu}^2 dV dt, \quad (12.5)$$

де $a = \text{const}$.

Доведемо, що a повинно бути від'ємним. Під інтегралом стоїть вираз (12.4), поле $\vec{E}$ згідно з (2.19)

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

тобто містить $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, а $\vec{E}^2$ – відповідно $\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^2$. Нехай $a > 0$, і $\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^2$ вхо-

дить до підінтегрального виразу з мінусом. Тоді достатньо швидкою змі-

ною векторного потенціалу $\vec{A}$ у часі завжди можна зробити $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ скільки завгодно великим, отже, S_f буде від'ємним зі скільки завгодно великим абсолютним значенням

$$\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^2 \rightarrow \infty \Rightarrow S_f < 0; \quad |S_f| \rightarrow \infty.$$

Тоді S_f не буде мати мінімуму, як того потребує принцип найменшої дії ($\delta S = 0$ – умова мінімуму функціонала дії). Отже, $a < 0$.

Чисельне значення a визначається вибором одиниць для вимірювання поля. Після вибору a (тобто вибору одиниць виміру поля) однозначно визначаються і одиниці вимірювання всіх інших електромагнітних величин.

Ми користуємось гауссівською системою одиниць, в якій константа a є безрозмірною і чисельно рівною $a = -\frac{1}{16\pi}$. Тоді

$$S_f = -\frac{1}{16\pi} \int_V \int_{t_a}^{t_b} F_{\mu\nu}^2 dV dt. \quad (12.6)$$

Тут $dV = dx dy dz$.

Урахуємо в (12.6), що згідно з (12.4) $F_{\mu\nu}^2 = 2(\vec{H}^2 - \vec{E}^2)$. Тоді

$$S_f = \frac{1}{8\pi} \int_V \int_{t_a}^{t_b} (\vec{E}^2 - \vec{H}^2) dV dt. \quad (12.7)$$

Знайдемо функцію Лагранжа електромагнітного поля. За визначенням (D.2)

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L dt.$$

Порівнюючи останню формулу з (12.7), одержимо, що функція Лагранжа електромагнітного поля має вигляд

$$L_f = \frac{1}{8\pi} \int_V (\vec{E}^2 - \vec{H}^2) dV. \quad (12.8)$$

Перейдемо в (12.6) до інтегрування за чотиривимірним об'ємом. Для цього виразимо dt через $d\tau$

$$d\tau = ic dt; \quad dt = d\tau / ic = -\frac{i}{c} d\tau.$$

Введемо до розгляду елементарний чотиривимірний об'єм $d\Omega = dx dy dz d\tau$ і запишемо (12.6) у вигляді інтеграла за чотиривимірним об'ємом Ω

$$S_f = \frac{i}{16\pi c} \int_{\Omega} F_{\mu\nu}^2 d\Omega. \quad (12.9)$$

12.3. Загальний вигляд функціонала дії для системи, яка складається з електромагнітного поля і заряджених частинок, що в ньому знаходяться

Таким чином, функціонал дії для фізичної системи, що складається з електромагнітного поля і заряджених частинок, які в ньому знаходяться, має вигляд

$$S(A_\mu, x_\mu) = S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu) \quad (12.10)$$

або в явному вигляді

$$S = \sum_{(i)} \left(-m_{0i} c \int_{a_i}^{b_i} \sqrt{-dx_{\mu_i}^2} \right) + \sum_{(i)} \frac{e_i}{c} \int_{a_i}^{b_i} A_{\mu_i} dx_{\mu_i} + \frac{i}{16\pi c} \int_{\Omega} F_{\mu\nu}^2 d\Omega. \quad (12.11)$$

Зауважимо, що заряди вже не вважаються малими, як при виводі рівнянь руху зарядів у заданому полі. Отже, A_μ і $F_{\mu\nu}$ відносяться до справжнього поля, тобто зовнішнього поля разом з полем, яке утворюється самими зарядами. Тому A_μ і $F_{\mu\nu}$ залежать від положення і швидкості зарядів.

§ 13. Друга пара рівнянь Максвелла

13.1. Повний вираз для функціонала дії системи «заряджена частинка + електромагнітне поле»

Повний вираз для функціонала дії фізичної системи, що складається з електромагнітного поля і заряджених частинок, які в ньому знаходяться, має вигляд (12.10)

$$S(A_\mu, x_\mu) = S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu)$$

або в явному вигляді (12.11)

$$S = \sum_{(i)} \left(-m_0 c \int_{a_i}^{b_i} \sqrt{-dx_{\mu_i}^2} \right) + \sum_{(i)} \frac{e_i}{c} \int_{a_i}^{b_i} A_{\mu_i} dx_{\mu_i} + \frac{i}{16\pi c} \int_{\Omega} F_{\mu\nu}^2 d\Omega.$$

Зауважимо, що функціонал дії є інваріантом відносно перетворень Лоренца.

13.2. Принцип найменшої дії з використанням повного виразу для функціонала дії

Переконаємось в тому, що при використанні в ПНД повного виразу для функціонала дії системи «заряджена частинка + електромагнітне поле» зберігається отриманий раніше результат: рівняння руху для зарядів в електромагнітному полі і перша пара рівнянь Максвелла.

Виходячи з принципу найменшої дії за Гамільтоном, задача формулюється так: розглянемо точки просторово-часового континуума a_i і b_i , які характеризують початкове і кінцеве положення i -ї зарядженої частинки. Будемо вважати ці точки фіксованими, тобто $\delta x_\mu \big|_{a_i} = 0$ і $\delta x_\mu \big|_{b_i} = 0$. Перехід з точки a_i до точки b_i здійснюється згідно з ПНД так, щоб $\delta S(x_\mu, A_\mu) = 0$.

Знайдемо варіацію записаного нами функціонала дії

$$\delta S(A_\mu, x_\mu) = \delta \{ S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu) \} = 0;$$

$$\delta S(A_\mu, x_\mu) = \delta S(A_\mu, x_\mu) \Big|_{A_\mu = \text{const}} + \delta S(A_\mu, x_\mu) \Big|_{x_\mu = \text{const}} = 0. \quad (13.1)$$

У першому доданку вважається фіксованим поле, а в другому – траєкторія руху частинок. Далі «= const» будемо для стислості опускати.

Таким чином, отримуємо варіаційну задачу в такій постановці:

$$\begin{aligned} \delta S(A_\mu, x_\mu) &= \delta \{ S_m + S_{mf} + S_f \} \Big|_{A_\mu} + \delta \{ S_m + S_{mf} + S_f \} \Big|_{x_\mu} = 0; \\ \delta x_\mu \Big|_{a_i} &= 0; \\ \delta x_\mu \Big|_{b_i} &= 0. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Маємо

$$\begin{aligned} \delta S(A_\mu, x_\mu) \Big|_{A_\mu} &= \delta \{ S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu) \} \Big|_{A_\mu} = \\ &= \delta S_m(x_\mu) \Big|_{A_\mu} + \delta S_{mf}(A_\mu, x_\mu) \Big|_{A_\mu} + \delta S_f(A_\mu) \Big|_{A_\mu}. \end{aligned}$$

Останній доданок при постійному полі дорівнює нулю.

$$\begin{aligned} \delta S(A_\mu, x_\mu) \Big|_{x_\mu} &= \delta \{ S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu) \} \Big|_{x_\mu} = \\ &= \delta S_m(x_\mu) \Big|_{x_\mu} + \delta S_{mf}(A_\mu, x_\mu) \Big|_{x_\mu} + \delta S_f(A_\mu) \Big|_{x_\mu}. \end{aligned}$$

В цьому виразі перший доданок дорівнює нулю при заданих траєкторіях.

Розглянемо дві варіаційні задачі окремо: при постійному полі варіюємо траєкторії і при фіксованих траєкторіях варіюємо поле.

Перша варіаційна задача формулюється так:

$$\begin{aligned} \delta \{ S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) \} \Big|_{A_\mu} &= 0; \\ \delta x_\mu \Big|_{a_i} &= 0; \\ \delta x_\mu \Big|_{b_i} &= 0. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Цю задачу вже розв'язано в § 5 її результатом було рівняння руху зарядженої частинки в заданому електромагнітному полі, яке записано в релятивістськи-коваріантній формі (5.4)

$$m_0 c \frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u_\nu,$$

наслідком якого є тривимірне рівняння руху зарядженої частинки в заданому полі (2.18)

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}]$$

і перша пара рівнянь Максвелла (3.3)

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t};$$

$$\text{div } \vec{H} = 0.$$

Функціонал дії електромагнітного поля і зарядів, що в ньому знаходяться, який в загальному випадку складається з трьох доданків, для системи, в якій поле вважається заданим, представляється двома доданками, як це нами і передбачалось при розв'язанні першої варіаційної задачі в § 5. Іншими словами, використання повного виразу для функціонала дії при постійному полі дає отриманий нами раніше результат.

13.3. Варіаційна задача для отримання другої пари рівнянь Максвелла

Для знаходження рівнянь для електромагнітного поля, виходячи з ПНД, ми повинні вважати заданим рух зарядженої частинки, а варіювати потенціал поля A_μ . Друга варіаційна задача має вигляд

$$\begin{aligned} \delta \{ S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu) \} \Big|_{x_\mu} &= 0; \\ \delta x_\mu \Big|_{a_i} &= 0; \\ \delta x_\mu \Big|_{b_i} &= 0. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Визначимо варіацію функціонала дії, розписавши доданки, що в нього входять, явно

$$\delta \left\{ \sum_{(i)} \frac{e_i}{c} \int_{a_i}^{b_i} A_{\mu_i} dx_{\mu_i} + \frac{i}{16\pi c} \int_{\Omega} F_{\mu\nu}^2 d\Omega \right\} \Big|_{x_\mu} = 0.$$

13.4. Запис виразу для $S_{mf}(A_\mu, x_\mu)$ у вигляді інтеграла за чотиривимірним об'ємом

Перетворимо інтеграл, що входить у вираз S_{mf} , до чотиривимірного вигляду. Для цього скористаємось виразом для густини заряду

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i),$$

тоді повний заряд об'єму V

$$Q = \int_V \rho dV = \sum_{(i)} e_i.$$

Перепишемо вираз S_{mf} і скористаємось властивістю δ -функції (10.12)

$$\begin{aligned} S_{mf} &= \sum_{(i)} \frac{e_i}{c} \int_{a_i}^{b_i} A_{\mu_i} dx_{\mu_i} = \frac{1}{c} \int \sum_{(i)} e_i A_{\mu_i} dx_{\mu_i} = \\ &= \frac{1}{ic^2} \int_V dV \int_{t(a_i)}^{t(b_i)} ic \rho(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \frac{dx_\mu}{dt} dt A_\mu. \end{aligned}$$

Урахуємо, що $ic dV dt = dV d(ict) = dV d\tau = d\Omega$. Тепер можна перейти до інтегралу за чотиривимірним об'ємом. Застосуємо при цьому визначення чотиривимірного вектора густини струму (10.18)

$$S_{mf} = \frac{1}{ic^2} \int_{\Omega} \rho \frac{dx_\mu}{dt} A_\mu d\Omega = -\frac{i}{c^2} \int_{\Omega} j_\mu A_\mu d\Omega.$$

Підставимо S_{mf} у варіаційну задачу

$$\begin{aligned} \delta \left\{ -\frac{i}{c^2} \int_{\Omega} j_\mu A_\mu d\Omega + \frac{i}{16\pi c} \int_{\Omega} F_{\mu\nu}^2 d\Omega \right\} \Big|_{x_\mu} &= 0, \\ -\frac{i}{c} \int_{\Omega} \delta \left(\frac{1}{c} j_\mu A_\mu - \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu}^2 \right) d\Omega \Big|_{x_\mu} &= 0. \end{aligned}$$

Зауважимо, що $j_\mu = j_\mu(x_\mu)$, густина струму не залежить від A_μ . Тому

$j_\mu \Big|_{x_\mu} = \text{const}$, тоді $\delta(j_\mu A_\mu) = j_\mu \delta A_\mu$. Отже,

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{c} j_{\mu} \delta A_{\mu} - \frac{1}{16\pi} \delta F_{\mu\nu}^2 \right) d\Omega \Big|_{x_{\mu}} = 0.$$

13.5. Друга пара рівнянь Максвелла в релятивістськи-коваріантній формі. Умова випромінювання в теорії поля

Знайдемо $\delta F_{\mu\nu}^2$, урахуємо при цьому визначення тензора електромагнітного поля (5.3) $F_{\mu\nu} = -\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\mu}}$. Тоді

$$\begin{aligned} \delta F_{\mu\nu}^2 &= 2F_{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = -2F_{\mu\nu} \delta \left(\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}} \right) + 2F_{\mu\nu} \delta \left(\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\mu}} \right) = \\ &= -2F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \delta A_{\mu} + 2F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \delta A_{\nu}. \end{aligned}$$

Ми змінили порядок диференціювання і варіювання. Візьмемо до уваги, що тензор електромагнітного поля є антисиметричним, тобто $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$:

$$\delta F_{\mu\nu}^2 = -2F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \delta A_{\mu} - 2F_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \delta A_{\nu}.$$

Індекси μ і ν – «німі», тому в другому доданку можемо поміняти їх місцями.

$$\delta F_{\mu\nu}^2 = -2F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \delta A_{\mu} - 2F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \delta A_{\mu} = -4F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \delta A_{\mu}.$$

Варіаційна задача набуде вигляду

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{c} j_{\mu} \delta A_{\mu} + \frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \delta A_{\mu} \right) d\Omega \Big|_{x_{\mu}} = 0.$$

Розглянемо 4-вектор, що задано добутком $F_{\mu\nu} \delta A_{\mu}$, в якому за індексом μ відбувається підсумовування, а $\nu = 1, 2, 3, 4$. За визначенням дивергенція в чотиривимірному просторі від 4-вектора дорівнює $\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (F_{\mu\nu} \delta A_{\mu})$.

$$\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (F_{\mu\nu} \delta A_{\mu}) = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} \delta A_{\mu} + F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \delta A_{\mu}.$$

Нас цікавить другий доданок. Він має вигляд

$$F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \delta A_{\mu} = -\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} \delta A_{\mu} + \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (F_{\mu\nu} \delta A_{\mu}).$$

Підставимо останній вираз у варіаційну задачу і запишемо у вигляді двох інтегралів

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{c} j_{\mu} \delta A_{\mu} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} \delta A_{\mu} \right) \Big|_{x_{\mu}} d\Omega + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (F_{\mu\nu} \delta A_{\mu}) \Big|_{x_{\mu}} d\Omega = 0.$$

Скористаємось теоремою Остроградського–Гаусса для чотиривимірного простору

$$\int_{\Omega} \frac{\partial B_{\nu}}{\partial x_{\nu}} d\Omega = \int_{S_{\Omega}} B_{\nu} dS_{\nu}.$$

Застосуємо її до другого інтегралу

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (F_{\mu\nu} \delta A_{\mu}) d\Omega = \int_{S_{\Omega}} (F_{\mu\nu} \delta A_{\mu}) dS_{\nu}$$

і повернемося до варіаційної задачі

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{c} j_{\mu} \delta A_{\mu} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} \delta A_{\mu} \right) d\Omega + \frac{1}{4\pi} \int_{S_{\Omega}} F_{\mu\nu} \delta A_{\mu} dS_{\nu} = 0.$$

Спрямуємо $\Omega \rightarrow \infty$, тоді $S_{\Omega} \rightarrow \infty$. $F_{\mu\nu}$ визначається через компоненти векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ згідно з (5.7). Межами інтегрування за координатами є нескінченність, де поле прагне до нуля. На межах інтегрування за часом у початковий і кінцевий моменти часу варіація потенціалів дорівнює нулю, тому що за змістом ПНД потенціали в початковий і кінцевий моменти часу задані. Таким чином, $F_{\mu\nu} \Big|_{S_{\Omega} \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, отже, інтеграл за гіперповерхнею S_{Ω} прагне до нуля.

Сформулюємо умову випромінювання електромагнітного поля. Будемо вимагати спадання на нескінченності тензора електромагнітного поля

$$\lim_{R \rightarrow \infty} F_{\mu\nu} = 0 \text{ як } \frac{1}{R^{\alpha+1}} \quad (\alpha > 0).$$

Таким чином, інтеграл за поверхнею при $S_\Omega \rightarrow \infty$ теж прагне до нуля. Варіаційна задача набуває вигляду

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{c} j_\mu - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \right) \delta A_\mu d\Omega = 0.$$

За змістом ПНД варіація потенціалу поля δA_μ довільна, отже, нулю повинен дорівнювати коефіцієнт при δA_μ . Одержуємо таке коваріантне рівняння, наслідком якого є друга пара рівнянь Максвелла:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\mu, \quad (13.5)$$

$\mu = 1, 2, 3, 4$, за ν відбувається підсумовування.

13.6. Отримання другої пари рівнянь Максвелла в диференціальній формі для векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ з релятивістськи-коваріантного рівняння

Розглянемо рівняння (13.5) з урахуванням явного вигляду тензора електромагнітного поля (5.7)

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

і 4-вектора густини струму (10.19)

$$j_\mu = (\vec{j}, ic\rho) = (j_x, j_y, j_z, ic\rho).$$

Скористаємось також явним виглядом виразу для $\text{rot } \vec{H}$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{x}_0 \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{z}_0 \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Розглянемо $\mu = 1$.

$$\frac{\partial F_{1\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_1;$$

$$\frac{\partial F_{1\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}.$$

З урахуванням явного виразу для $\text{rot } \vec{H}$

$$\left(\text{rot } \vec{H} \right)_x = \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_x.$$

Аналогічно $\mu = 2$ дає

$$\left(\text{rot } \vec{H} \right)_y = \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_y;$$

при $\mu = 3$ маємо

$$\left(\text{rot } \vec{H} \right)_z = \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_z.$$

Домноживши кожне з цих рівнянь на відповідний орт і склавши, отримуємо таке рівняння:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Нехай $\mu = 4$.

$$\frac{\partial F_{4\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_4;$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{4\nu}}{\partial x_\nu} &= \frac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{44}}{\partial x_4} = \\ &= i \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = i \operatorname{div} \vec{E}.\end{aligned}$$

Візьмемо до уваги, що $j_4 = ic\rho$, тоді одержимо рівняння

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho.$$

Таким чином, маємо другу пару рівнянь Максвелла в диференціальній формі

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho.\end{aligned}\quad (13.6)$$

Дві пари рівнянь Максвелла (3.3), (13.6) повністю визначають електромагнітне поле і є основними рівняннями електродинаміки.

13.7. Друга пара рівнянь Максвелла в інтегральній формі, їх фізична інтерпретація

Отримаємо другу пару рівнянь Максвелла в інтегральній формі. Введемо в розгляд довільний об'єм V , який обмежено поверхнею S , а також одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні $\vec{n}$. Проінтегруємо друге з рівнянь (13.6) за об'ємом

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = 4\pi \int_V \rho dV.$$

Згідно з (10.1)

$$Q = \int_V \rho dV,$$

де Q – повний заряд об'єму V . Застосуємо теорему Остроградського–Гаусса (А.37)

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \oint_S \vec{E} d\vec{S},$$

$d\vec{S} = \vec{n}dS$. Тоді інтегральна форма другого рівняння (13.6) має вигляд

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q. \quad (13.7)$$

Потік електричного поля через замкнену поверхню дорівнює помноженому на 4π повному заряду, що знаходиться в об'ємі, обмеженому цією поверхнею. Інтегральне формулювання (13.7) другого з рівнянь (13.6) відповідає відомому експериментальному закону Кулона.

Розглянемо перше рівняння (13.6). Проінтегруємо його за деякою замкненою поверхнею S .

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} \int_S \left\{ \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} d\vec{S}.$$

Застосуємо до лівої частини теорему Стокса

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{S} = \oint_L \vec{H} d\vec{l},$$

де $d\vec{l} = dl\vec{\tau}$, $\vec{\tau}$ – одиничний вектор дотичної до контуру.

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \left\{ \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} d\vec{S}. \quad (13.8)$$

За місцем у рівнянні величина $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ має зміст густини струму. Ця величина

отримала назву струму зміщення. Інтегральне формулювання (13.8) першого рівняння (13.6) відповідає відомому експериментальному закону Ампера: циркуляція магнітного поля по деякому контуру дорівнює помноженій на $\frac{4\pi}{c}$ сумі струмів дійсного і зміщення, що протікають через поверхню, обмежену цим контуром.

13.8. Перша пара рівнянь Максвелла в релятивістськи-коваріантній формі

Перша пара рівнянь Максвелла (3.3) у релятивістськи-коваріантній формі має вигляд

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = 0. \quad (13.9)$$

Тут індекси μ, ν, σ незалежно змінюються від одиниці до чотирьох. Ве-

личина $\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}$ є тензором третього рангу. Можна показати,

що цей тензор антисиметричний за всіма індексами, і відмінними від нуля у нього будуть тільки ті компоненти, у яких значення всіх трьох індексів різні. Це дає чотири скалярні рівняння, що відповідають першій парі рівнянь Максвелла – векторному

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

яке можна представити у вигляді трьох скалярних рівнянь, і скалярному

$$\text{div } \vec{H} = 0.$$

§ 14. Самоузгоджена система рівнянь мікроскопічної електродинаміки (теорії поля)

14.1. Аксиоматика, що лежить в основі теорії поля

1) Існування двох рівноправних форм матерії – частинок і електромагнітного поля.

2) Простір і час єдині і утворюють просторово-часовий континуум (ПЧК), процеси в якому підпорядковуються законам спеціальної теорії відносності Ейнштейна.

3) Постулат сили Лоренца

$$\vec{F}_L = e\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}(\vec{r}, t)].$$

Фізична система, що складається з електромагнітного поля і зарядів, які в ньому знаходяться, характеризується функціоналом дії (12.10)

$$S(A_\mu, x_\mu) = S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu),$$

який в явному вигляді записується згідно з (12.11)

$$S = \sum_{(i)} \left(-m_{0i} c \int_{a_i}^{b_i} \sqrt{-dx_{\mu_i}^2} \right) + \sum_{(i)} \frac{e_i}{c} \int_{a_i}^{b_i} A_{\mu_i} dx_{\mu_i} + \frac{i}{16\pi c} \int_{\Omega} F_{\mu\nu}^2 d\Omega,$$

де $d\Omega = dx dy dz d\tau$.

Перехід фізичної системи з одного стану до іншого здійснюється відповідно до принципу найменшої дії (ПНД) таким чином, щоб функціонал дії був мінімальним, початкове і кінцеве положення при цьому вважаються фіксованими:

$$\delta S = 0;$$

$$\delta x_{\mu_i} \Big|_{a_i} = 0;$$

$$\delta x_{\mu_i} \Big|_{b_i} = 0.$$

Застосовуючи ПНД до функціоналу дії фізичної системи, що складається з електромагнітного поля і зарядів, які в ньому знаходяться, отримаємо

$$\begin{aligned} \delta S(A_\mu, x_\mu) &= \delta \left\{ S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu) \right\} \Big|_{A_\mu = \text{const}} + \\ &+ \delta \left\{ S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu) \right\} \Big|_{x_\mu = \text{const}} = 0. \end{aligned}$$

Візьмемо до уваги, що варіація $S_f(A_\mu)$ при постійному полі ($A_\mu = \text{const}$) дорівнює нулю, також дорівнює нулю варіація $S_m(x_\mu)$ на заданій траєкторії ($x_\mu = \text{const}$). Тоді варіаційна задача набуває вигляду

$$\begin{aligned} \delta S(A_\mu, x_\mu) &= \delta \left\{ S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) \right\} \Big|_{A_\mu = \text{const}} + \\ &+ \delta \left\{ S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu) \right\} \Big|_{x_\mu = \text{const}} = 0. \end{aligned}$$

14.2. Самоузгоджена система рівнянь мікроскопічної електродинаміки, її фізичний зміст

Будемо розглядати дві варіаційні задачі окремо:

$$\delta \left\{ S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) \right\} \Big|_{A_\mu = \text{const}} = 0; \quad (14.1)$$

$$\delta \left\{ S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu) \right\} \Big|_{x_\mu = \text{const}} = 0. \quad (14.2)$$

Перша варіаційна задача описує процеси, які відбуваються із зарядженою частинкою в заданому електромагнітному полі. Її розв'язання дає рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі і першу пару рівнянь Максвелла.

Друга варіаційна задача описує процеси, що відбуваються з електромагнітним полем при русі в ньому заряджених частинок. Траєкторії частинок передбачаються заданими. Рішення другої варіаційної задачі дає другу пару рівнянь Максвелла.

Таким чином, електромагнітне поле і заряджені частинки, що в ньому рухаються, взаємодіють одне з одним: електромагнітне поле змінюється при русі зарядів, і рух зарядів змінюється під впливом електромагнітного поля. Маємо так звану самоузгоджену задачу, що представляє собою сумісний розгляд двох варіаційних задач

$$\begin{cases} \delta \left\{ S_m(x_\mu) + S_{mf}(A_\mu, x_\mu) \right\} \Big|_{A_\mu = \text{const}} = 0; \\ \delta \left\{ S_{mf}(A_\mu, x_\mu) + S_f(A_\mu) \right\} \Big|_{x_\mu = \text{const}} = 0. \end{cases} \quad (14.3)$$

Сумісне розв'язання двох варіаційних задач називається самоузгодженим рішенням.

Сформулюємо самоузгоджену задачу мікроскопічної електродинаміки. До самоузгодженої задачі мікроскопічної електродинаміки входять дві пари рівнянь Максвелла, визначення для густини заряду і густини струму, рівняння руху для кожної зарядженої частинки, що входить в систему, доповнені початковими значеннями радіус-векторів і швидкостей, які необхідні для ви-

значення густин заряду і струму. Крім того, для напруженостей електричного і магнітного полів повинна виконуватися умова випромінювання.

$$\left\{ \begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \\ \text{div } \vec{H} &= 0; \\ \text{rot } \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \\ \text{div } \vec{E} &= 4\pi\rho; \\ \rho &= \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)); \\ \vec{j} &= \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)); \quad \vec{v}_i(t) = \frac{d\vec{r}_i}{dt}; \\ \frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} &= e_i \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e_i}{c} [\vec{v}_i, \vec{H}(\vec{r}, t)]; \\ \vec{r}_i(t_0) &= \vec{r}_{0i}; \quad \vec{v}_i(t_0) = \vec{v}_{0i}; \\ \lim_{R \rightarrow \infty} |\vec{E}|, |\vec{H}| &= 0. \end{aligned} \right. \quad (14.4)$$

Тут $\vec{r}_i$, $\vec{v}_i$ – радіус-вектор і швидкість i -ї зарядженої частинки, m_{0i} , e_i – її маса і заряд, $\vec{r}$ – радіус-вектор точки спостереження.

§ 15. Закон збереження енергії в мікроскопічній електродинаміці

15.1. Змінення за одиницю часу кінетичної енергії заряджених частинок, які знаходяться в електромагнітному полі

Рівняння руху однієї зарядженої частинки в електромагнітному полі у релятивістськи-коваріантній формі має вигляд (5.4)

$$m_0 c \frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u_\nu,$$

де $\mu = 1, 2, 3, 4$, $u_\nu = \frac{dx_\nu}{ds}$ – чотиривимірний вектор швидкості. З ураху-

ванням того, що $x_1 \rightarrow x$; $x_2 \rightarrow y$; $x_3 \rightarrow z$; $x_4 \rightarrow ict$ і $ds = cdt\sqrt{1-v^2/c^2}$,

ці компоненти мають значення (5.9)

$$u_1 = \frac{v_x}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}; \quad u_2 = \frac{v_y}{c\sqrt{1-v^2/c^2}};$$

$$u_3 = \frac{v_z}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}; \quad u_4 = \frac{i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

$F_{\mu\nu}$ – тензор електромагнітного поля (5.3):

$$F_{\mu\nu} = -\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}.$$

Нагадаємо, що при $\mu = 1, 2, 3$ отримуємо тривимірне рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі (2.18)

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}].$$

Значення $\mu = 4$ дає такий результат:

$$m_0 c \frac{du_4}{ds} = \frac{e}{c} F_{4\nu} u_\nu = \frac{e}{c} (F_{41} u_1 + F_{42} u_2 + F_{43} u_3 + F_{44} u_4).$$

Після підстановки компонент 4-вектора швидкості (5.9) і відповідних значень компонент тензора електромагнітного поля (5.7) одержимо

$$\frac{d\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)}{dt} = e(v_x E_x + v_y E_y + v_z E_z).$$

Диференційована величина зліва є кінетична енергія. Таким чином, при $\mu = 4$ маємо отриману нами раніше формулу змінення кінетичної енергії (2.22)

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \vec{v} \cdot e\vec{E} = \vec{v} \cdot \vec{F}_K,$$

згідно з якою змінення кінетичної енергії зарядженої частинки дорівнює скалярному добутку сили Кулона і вектора швидкості.

Це співвідношення було одержано для однієї частинки. Розглянемо тепер систему заряджених частинок, що знаходяться в електромагнітному полі. Тоді змінення кінетичної енергії i -ї частинки дорівнює

$$\frac{d\mathcal{E}_{k_i}}{dt} = \vec{v}_i \cdot e_i \vec{E}(\vec{r}_i, t), \quad (15.1)$$

де $\vec{r}_i$, $\vec{v}_i$ – радіус-вектор і швидкість i -ї зарядженої частинки.

Кінетична енергія системи частинок дорівнює сумі кінетичних енергій усіх частинок системи, тобто $\mathcal{E}_k = \sum_{(i)} \mathcal{E}_{k_i}$. Тоді змінення кінетичної енергії системи частинок

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{(i)} \mathcal{E}_{k_i} = \sum_{(i)} \frac{d\mathcal{E}_{k_i}}{dt} = \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \cdot \vec{E}(\vec{r}_i, t). \quad (15.2)$$

Скористаємось визначенням для густини струму (10.20)

$$\vec{j} = \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i),$$

а також властивістю δ -функції (10.12) з урахуванням того, що всі $\vec{r}_i \in V$ (V – об'єм, який містить систему заряджених частинок)

$$\vec{E}(\vec{r}_i, t) = \int_V \vec{E}(\vec{r}, t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) dV. \quad (15.3)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \cdot \vec{E}(\vec{r}_i, t) &= \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i(t) \int_V \vec{E}(\vec{r}, t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) dV = \\ &= \int_V \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \vec{E}(\vec{r}, t) dV = \int_V \vec{j} \vec{E}(\vec{r}, t) dV. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \int_V \vec{j} \vec{E} dV. \quad (15.4)$$

15.2. Закон збереження енергії в інтегральній формі. Енергетичні величини, які характеризують електромагнітне поле

Визначимо $\vec{j}$ з рівняння Максвелла

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \Rightarrow \vec{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \vec{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

і підставимо в (15.4)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_k}{dt} &= \int_V \left\{ \frac{c}{4\pi} \text{rot } \vec{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} \vec{E} dV = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_V \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV + \frac{c}{4\pi} \int_V \vec{E} \text{rot } \vec{H} dV. \end{aligned}$$

Візьмемо до уваги, що

$$\vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2} \frac{\partial |\vec{E}|^2}{\partial t}, \quad (15.5)$$

крім того, виконується векторна тотожність

$$\text{div} [\vec{E}, \vec{H}] = \vec{H} \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \text{rot } \vec{H} \Rightarrow \vec{E} \text{rot } \vec{H} = -\text{div} [\vec{E}, \vec{H}] + \vec{H} \text{rot } \vec{E}.$$

Отримаємо

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = -\frac{1}{8\pi} \int_V dV \frac{\partial |\vec{E}|^2}{\partial t} + \frac{c}{4\pi} \int_V dV \vec{H} \text{rot } \vec{E} - \frac{c}{4\pi} \int_V dV \text{div} [\vec{E}, \vec{H}].$$

Скористаємось рівнянням Максвелла

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \vec{H} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{2c} \frac{\partial |\vec{H}|^2}{\partial t}$$

і підставимо в $\frac{d\mathcal{E}_k}{dt}$. Змінення кінетичної енергії системи заряджених час-

тинок в електромагнітному полі визначається таким чином:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_k}{dt} &= -\frac{1}{8\pi} \int_V dV \frac{\partial |\vec{E}|^2}{\partial t} - \\ &- \frac{1}{8\pi} \int_V dV \frac{\partial |\vec{H}|^2}{\partial t} - \frac{c}{4\pi} \int_V dV \text{div} [\vec{E}, \vec{H}]. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Введемо позначення:

$$w_E = \frac{1}{8\pi} |\vec{E}|^2; \quad w_H = \frac{1}{8\pi} |\vec{H}|^2; \quad w = w_E + w_H; \quad (15.7)$$

$$\vec{P} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (15.8)$$

За місцем положення цих величин у (15.6) видно, що w_E , w_H мають зміст густини енергії. w_E – густина енергії електричного поля, w_H – густина енергії магнітного поля, тоді w – густина енергії електромагнітного поля. $\vec{P}$ – вектор Умова–Пойнтинга. Тоді

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V (w_E + w_H) dV - \int_V \text{div } \vec{P} dV. \quad (15.9)$$

Позначимо

$$W = \int_V (w_E + w_H) dV. \quad (15.10)$$

W – енергія електромагнітного поля, що міститься в об'ємі V . Скористаємось теоремою Остроградського–Гаусса

$$\int_V \text{div } \vec{P} dV = \oint_S \vec{P} d\vec{S} = \oint_S \vec{P} \cdot \vec{n} dS,$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі. Величина $\oint_S \vec{P} d\vec{S}$ – це

потік вектора Умова–Пойнтинга. Вона додатна, коли вектори $\vec{P}$ і $\vec{n}$ утворюють гострий кут, тобто цей потік направлений з об'єму V до зовнішньої області.

Одержуємо закон збереження енергії в інтегральній формі – теорему Умова–Пойнтинга

$$-\frac{d}{dt}(W + \mathcal{E}_k) = \oint_S \vec{P} d\vec{S}. \quad (15.11)$$

Тут S – замкнена поверхня, що обмежує об'єм V , $(W + \mathcal{E}_k)$ – повна енергія в об'ємі. Знак «-» свідчить про убуття енергії в об'ємі. Таким чином, можна сформулювати закон збереження енергії мікроскопічної електродинаміки так: зменшення енергії в об'ємі V відбувається за рахунок її випромінювання в зовнішню область.

З формулювання (15.11) становиться очевидним фізичний зміст вектора $\vec{P}$. Оскільки $\frac{d}{dt}(W + \mathcal{E}_k)$ – це потужність, то вектор Умова–Пойнтинга представляє собою густину потоку потужності електромагнітного поля, який протікає через поверхню S , тобто кількість енергії поля, що протікає через одиничну поверхню за одиницю часу.

Переформулюємо вираз (15.11)

$$\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = -\frac{dW}{dt} - \oint_S \vec{P} d\vec{S}. \quad (15.12)$$

Для такої форми запису формулювання теореми Умова–Пойнтинга звучить так: приріст кінетичної енергії частинок відбувається за рахунок зменшення енергії електромагнітного поля всередині V і притока енергії ззовні об'єму.

Можливе і таке формулювання:

$$-\frac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \frac{dW}{dt} + \oint_S \vec{P} d\vec{S} \quad (15.13)$$

– зменшення кінетичної енергії заряджених частинок в об'ємі V витрачається на збільшення енергії електромагнітного поля в об'ємі і енергію випромінювання поля за межі V .

15.3. Закон збереження енергії в диференціальній формі

Одержимо закон збереження енергії в диференціальній формі. Для цього врахуємо, що

$$\frac{d}{dt} W = \frac{d}{dt} \int_V (w_E + w_H) dV = \frac{d}{dt} \int_V w dV. \quad (15.14)$$

Підставимо (15.4) і (15.14) до (15.9)

$$\int_V \vec{j} \vec{E} dV = -\frac{d}{dt} \int_V w dV - \int_V \operatorname{div} \vec{P} dV.$$

Цей вираз можна переписати так:

$$\int_V (\vec{j} \vec{E} + \frac{dw}{dt} + \operatorname{div} \vec{P}) dV = 0.$$

Оскільки рівність повинна виконуватись для довільного об'єму V , то нулю дорівнює підінтегральний вираз. Звідси одержуємо диференціальну форму закону збереження енергії мікроскопічної електродинаміки (теорему Умова–Пойнтинга)

$$\operatorname{div} \vec{P} + \vec{j} \vec{E} + \frac{dw}{dt} = 0. \quad (15.15)$$

§ 16. Електростатика

16.1. Вигляд системи рівнянь мікроскопічної електродинаміки у випадку електростатики. Фізичний зміст цього наближення

Сформулюємо фізичну постановку задачі мікроскопічної електродинаміки в загальному вигляді: в обмеженому об'ємі V рухаються заряджені частинки з масами m_i і зарядами e_i , що характеризуються в будь-який момент часу радіус-векторами $\vec{r}_i(t)$. За відомим розподілом зарядів необхідно знайти електромагнітне поле в точці спостереження з радіус-вектором $\vec{r}$. Задача електродинаміки в загальній постановці описується вихідними рівняннями мікроскопічної електродинаміки (14.4)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \\ \text{div } \vec{H} = 0; \\ \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \\ \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho; \\ \rho = \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)); \\ \vec{j} = \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)); \quad \vec{v}_i(t) = \frac{d\vec{r}_i}{dt}; \\ \frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = e_i \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e_i}{c} [\vec{v}_i, \vec{H}(\vec{r}, t)]; \\ \vec{r}_i(t_0) = \vec{r}_{0i}; \quad \vec{v}_i(t_0) = \vec{v}_{0i}; \\ \lim_{R \rightarrow \infty} |\vec{E}|, |\vec{H}| = 0. \end{array} \right.$$

Окремим випадком загальної задачі електродинаміки є електростатика. Фізична постановка задачі електростатики формулюється таким чином: необхідно знайти електромагнітне поле за умов, що:

1) всі заряджені частинки покояться, тобто всі їх радіус-вектори $\vec{r}_i$ не залежать від часу, є постійними, а всі їх швидкості дорівнюють нулю $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = 0$;

2) положення всіх зарядів задані, тобто всі $\vec{r}_i$ відомі.

Задача спрощується у порівнянні із загальним формулюванням, тому що положення і швидкості всіх заряджених частинок відомі, і відсутня необхідність інтегрування рівнянь руху. Можемо визначити густину заряду

$$\rho = \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i),$$

а густина струму дорівнює нулю

$$\vec{j} = \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \equiv 0 \quad (\vec{v}_i(t) = 0).$$

Крім того, оскільки всі частинки покояться, то всі похідні за часом дорівнюють нулю ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$).

У випадку електростатики рівняння Максвелла розділяються на дві незалежні системи рівнянь відносно електричного і магнітного полів

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{H} = 0; \\ \text{div } \vec{H} = 0. \end{array} \right. \quad (16.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = 0; \\ \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho. \end{array} \right. \quad (16.2)$$

Рішенням системи (16.1) є постійний вектор. В силу умови випромінювання $\lim_{R \rightarrow \infty} |\vec{H}| = 0$, магнітне поле на нескінченності повинно дорівнювати нулю. Отже, магнітне поле повинно дорівнювати нулю в будь-якій точці простору, тобто $\vec{H} \equiv 0$.

Знайдемо рішення системи (16.2). Для цього скористаємось виразом для напруженості електричного поля $\vec{E}$ через потенціали (2.19) з урахуванням того, що $\frac{\partial}{\partial t} = 0$:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (16.3)$$

Тут φ – скалярний потенціал.

Одержимо рівняння для скалярного потенціалу. Для цього підставимо вираз (16.3) в систему (16.2). Підстановка в перше рівняння системи в силу відомої векторної тотожності (A.24) $\text{rot grad } \varphi = 0$ перетворює рівняння в тотожність. Підставивши вираз (16.3) до другого рівняння системи і скориставшись векторною тотожністю (A.23) $\text{div grad } \varphi = \Delta \varphi$, отримуємо рівняння Пуассона для скалярного потенціалу

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \quad (16.4)$$

У випадку $\rho = 0$ рівняння Пуассона переходить в рівняння Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \quad (16.5)$$

Розв'язавши рівняння Пуассона, знайдемо скалярний потенціал, потім за допомогою (16.3) – напруженість електричного поля.

16.2. Ідея методу функції Гріна. Реалізація методу функції Гріна у випадку електростатики

Для рішення рівняння Пуассона скористаємось методом функції Гріна. Ми передбачаємо, що всі радіус-вектори в деякому замкненому об'ємі задані, тобто всі $\vec{r}_i$ відомі. Крім радіус-вектора точки спостереження

$$\vec{r} = \vec{x}_0 x + \vec{y}_0 y + \vec{z}_0 z$$

введемо допоміжний вектор

$$\vec{r}' = \vec{x}_0 x' + \vec{y}_0 y' + \vec{z}_0 z'$$

і елемент об'єму

$$dV' = dx' dy' dz'.$$

Скориставшись властивостями тривимірної дельта-функції (10.12)

$$\int_V f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{a}) d\vec{r} = \begin{cases} f(\vec{a}), & \vec{a} \in V; \\ 0, & \vec{a} \notin V \end{cases}$$

і (10.13)

$$\delta(\vec{r}) = \delta(-\vec{r}),$$

запишемо густину заряду у вигляді інтеграла за об'ємом

$$\rho(\vec{r}) = \int_V dV' \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (16.6)$$

і підставимо в рівняння Пуассона

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -4\pi \int_V dV' \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (16.7)$$

Рішення цього рівняння будемо шукати у вигляді

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V dV' \rho(\vec{r}') g(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (16.8)$$

де $\rho(\vec{r}')$ – вагова функція, а $g(\vec{r}, \vec{r}')$ – шукана функція. Підставимо це представлення до рівняння Пуассона (16.7). При цьому врахуємо, що оператор Лапласа містить похідні за нештрихованими координатами.

Поміняємо порядок інтегрування і диференціювання

$$\int_V dV' \rho(\vec{r}') \Delta g(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \int_V dV' \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

Перепишемо цей вираз таким чином:

$$\int_V dV' \rho(\vec{r}') [\Delta g(\vec{r}, \vec{r}') + 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')] = 0.$$

Через те, що інтегрування відбувається за довільним об'ємом, то рівність нулю інтеграла означає рівність нулю підінтегрального виразу. Тому маємо

$$\Delta g(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (16.9)$$

Порівнюючи (16.9) з (16.4) з урахуванням (10.14), робимо висновок про те, що це рівняння – рівняння Пуассона для одиничного точкового заряду, а рішенням його є функція Гріна $g(\vec{r}, \vec{r}')$ – функція випромінювання одиничного точкового джерела.

Вигляд рівняння для функції Гріна не залежить від розподілу заряду в об'ємі. Таким чином, якщо відоме рішення рівняння для функції Гріна, то співвідношення (16.8) дозволяє знайти потенціал, який утворюється будь-яким заданим розподілом заряду.

Рішення рівняння (16.9) відоме:

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (16.10)$$

Тоді потенціал визначається співвідношенням (16.8)

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (16.11)$$

Знаючи потенціал, визначимо напруженість електричного поля за допомогою формули (16.3). Урахуємо при цьому, що градієнт береться за нештрихованими координатами

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\nabla\int_V dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\int_V dV' \rho(\vec{r}') \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

В явному вигляді градієнт згідно з (А.34) дорівнює

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Тоді остаточний вираз для напруженості електричного поля буде мати вигляд

$$\vec{E} = \int_V dV' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (16.12)$$

16.3. Мультіпольне розкладання для потенціалу у випадку електростатики, область його застосовності

Знайдемо наближений вираз для електростатичного потенціалу у випадку, коли точка спостереження віддалена від об'єму V , в якому зосереджені заряди, ($\vec{r}_i \in V, i = 1, 2, 3, \dots$), на значну відстань, тобто $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$.

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}},$$

при цьому $x \gg x', y \gg y', z \gg z'$. Розкладемо цей вираз в ряд Тейлора за малим параметром $\vec{r}'$, обмеживши розкладання двома доданками

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{r}|} - \vec{r}' \nabla \frac{1}{|\vec{r}|} + \dots$$

Підставивши отриманий вираз у (16.11), представимо його у вигляді двох інтегралів

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}|} - \int_V dV' \rho(\vec{r}') \vec{r}' \nabla \frac{1}{|\vec{r}|}.$$

Інтегрування відбувається за штрихованими координатами, а $\vec{r}$ і $\nabla \frac{1}{|\vec{r}|}$ за-

лежать від нештрихованих координат, отже, ці величини можна винести за знак інтеграла

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|} \int_V dV' \rho(\vec{r}') - \nabla \frac{1}{|\vec{r}|} \int_V dV' \rho(\vec{r}') \vec{r}'.$$

Розглянемо перший інтеграл, скориставшись визначенням густини заряду (10.14)

$$\rho(\vec{r}') = \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i)$$

і властивістю дельта-функції (10.11)

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r}|} \int_V dV' \rho(\vec{r}') &= \frac{1}{|\vec{r}|} \int_V dV' \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) = \\ &= \frac{1}{|\vec{r}|} \sum_{(i)} e_i \int_V dV' \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) = \frac{1}{|\vec{r}|} \sum_{(i)} e_i = \frac{Q}{|\vec{r}|}, \end{aligned}$$

де Q – повний заряд об'єму V .

Другий інтеграл з урахуванням (10.12)

$$\begin{aligned} \nabla \frac{1}{|\vec{r}|} \int_V dV' \rho(\vec{r}') \vec{r}' &= \nabla \frac{1}{|\vec{r}|} \int_V dV' \vec{r}' \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) = \\ &= \nabla \frac{1}{|\vec{r}|} \sum_{(i)} e_i \int_V dV' \vec{r}' \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) = \nabla \frac{1}{|\vec{r}|} \sum_{(i)} e_i \vec{r}_i = \vec{p} \nabla \frac{1}{|\vec{r}|}. \end{aligned}$$

Тут $\vec{p} = \sum_{(i)} e_i \vec{r}_i$ – дипольний момент системи зарядів.

Таким чином, для випадку, коли точка спостереження віддалена від об'єму V на значну відстань ($|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$), отримуємо наближений вираз для електростатичного потенціалу

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{|\vec{r}|} - \vec{p} \nabla \frac{1}{|\vec{r}|} + \dots \quad (16.13)$$

Це так зване мультипольне розкладання. В даному випадку ми обмежились дипольним розкладанням, наступні доданки, що виникають при утриманні в розкладанні в ряд Тейлора більшої кількості членів, є моментами більш високих порядків.

§ 17. Магнітостатика

17.1. Вигляд системи рівнянь мікроскопічної електродинаміки у випадку магнітостатики. Фізичний зміст цього наближення

Другим окремим випадком загальної постановки задачі електродинаміки є магнітостатика. Розглянемо поля, які утворюються зарядами, що здійснюють стаціонарні (постійні) рухи, при своєму русі вони не приходять з нескінченності і не уходять на нескінченність, а рухаються у скінченному об'ємі. Будемо вважати, що імпульси зарядів, які рухаються, залишаються весь час скінченними, отже, всі величини змінюються в скінченних межах, тому їх можна розглядати середніми у часі. Зокрема, середнє магнітне поле $\vec{H}$, яке утворюється зарядами, що рухаються, є функцією координат і не залежить від часу, тобто є стаціонарним. Таким чином, наближення магнітостатики полягає в наступному:

1) положення і швидкості всіх зарядів задані, тобто всі $\vec{r}_i$ і $\vec{v}_i$ відомі;

2) оскільки всі процеси стаціонарні, то всі похідні за часом $\frac{\partial}{\partial t} = 0$,

крім $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \neq 0$, отже, і густина струму $\vec{j} \neq 0$.

Як і у випадку електростатики, задача спрощується у порівнянні з загальним формулюванням, тому що положення і швидкості всіх заряджених частинок відомі, і немає необхідності інтегрувати рівняння руху. Можемо визначити густину заряду і густину струму

$$\rho = \sum_{(i)} e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad \vec{j} = \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i).$$

У випадку магнітостатики рівняння Максвелла розділяються на дві незалежні системи рівнянь відносно електричного і магнітного полів:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}); \\ \text{div } \vec{H} = 0. \end{cases} \quad (17.1)$$

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = 0; \\ \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho. \end{cases} \quad (17.2)$$

17.2. Реалізація методу функції Гріна у випадку магнітостатики

Знайдемо рішення системи (17.1). Для цього отримаємо рівняння для векторного потенціалу $\vec{A}$ з урахуванням виразу (2.19)

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A},$$

а також умови калібровки Кулона (4.6)

$$\text{div } \vec{A} = 0.$$

Підставимо вирази для $\vec{H}$ через векторний потенціал в перше рівняння системи (17.1) і скористаємось відомою векторною тотожністю (A.26)

$$\text{rot } \vec{H} = \text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Перший доданок цього виразу дорівнює нулю в силу умови калібровки Кулона. Отримуємо рівняння Пуассона для векторного потенціалу

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (17.3)$$

Для розв'язання цього рівняння також скористаємось методом функції Гріна. Запишемо густину струму у вигляді інтеграла за об'ємом

$$\vec{j}(\vec{r}) = \int_V dV' \vec{j}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (17.4)$$

Векторний потенціал шукаємо у вигляді

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V dV' \vec{j}(\vec{r}') g(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (17.5)$$

де $\vec{j}(\vec{r}')$ – вагова функція, а $g(\vec{r}, \vec{r}')$ – шукана функція Гріна. Підставимо представлення (17.4) і (17.5) до рівняння Пуассона (17.3)

$$\frac{1}{c} \Delta \int_V dV' \vec{j}(\vec{r}') g(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{4\pi}{c} \int_V dV' \vec{j}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

Оператор Лапласа містить похідні за нештрихованими координатами. Змінимо порядок інтегрування і диференціювання

$$\begin{aligned} \int_V dV' \vec{j}(\vec{r}') \Delta g(\vec{r}, \vec{r}') &= -4\pi \int_V dV' \vec{j}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \\ \int_V dV' \vec{j}(\vec{r}') [\Delta g(\vec{r}, \vec{r}') + 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')] &= 0, \end{aligned}$$

звідки маємо

$$\Delta g(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

Одержуємо рівняння для функції Гріна, таке саме, як у випадку електростатики (16.9). Його рішення (16.10) відоме

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Таким чином, векторний потенціал визначається співвідношенням

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (17.6)$$

а напруженість магнітного поля

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{c} \text{rot} \int_V dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

17.3. Наближене рішення задачі магнітостатики

Визначимо векторний потенціал, користуючись наближеним виразом для функції Гріна у випадку, коли заряди зосереджені в об'ємі V , а поле обчислюється у віддаленій точці ($|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$). Аналогічно попередньому скористаємось розкладанням в ряд Тейлора виразу

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{r}|} - \vec{r}' \nabla \frac{1}{|\vec{r}|} + \dots,$$

градієнт в явному вигляді (А.34)

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}.$$

Тоді наближений вираз для функції Гріна

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r}|} + \vec{r}' \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \dots$$

Підставимо його до виразу для векторного потенціалу

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \int_V dV' \vec{j}(\vec{r}') \left(\frac{1}{|\vec{r}|} + \vec{r}' \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) = \\ &= \frac{1}{c|\vec{r}|} \int_V dV' \vec{j}(\vec{r}') + \frac{\vec{r}}{c|\vec{r}|^3} \int_V dV' \vec{j}(\vec{r}') \vec{r}'. \end{aligned}$$

Скористаємось визначенням густини струму (10.20)

$$\vec{j}(\vec{r}') = \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i)$$

і властивостями дельта-функції (10.11), (10.12)

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{c|\vec{r}|} \int_V dV' \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) + \frac{\vec{r}}{c|\vec{r}|^3} \int_V dV' \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) \vec{r}' = \\ &= \frac{1}{c|\vec{r}|} \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \int_V dV' \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) + \frac{\vec{r}}{c|\vec{r}|^3} \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i \int_V dV' \vec{r}' \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i). \end{aligned}$$

Тоді наближене рішення задачі магнітостатики для векторного потенціалу в дипольному наближенні має вигляд

$$\vec{A} = \frac{1}{c|\vec{r}|} \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i + \frac{1}{c|\vec{r}|^3} \sum_{(i)} e_i \vec{v}_i (\vec{r} \cdot \vec{r}_i), \quad (17.7)$$

а для того, щоб визначити напруженість магнітного поля, необхідно застосувати оператор rot до векторного потенціалу (17.7).

Додаток А. Векторний аналіз

У даному Додатку стисло представлені відомі визначення і формули векторної алгебри.

Скалярний добуток двох векторів

Скалярний добуток двох векторів у спеціальній літературі може записуватись у різний спосіб:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a} \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b}.$$

Визначення скалярного добутку дається формулою

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}). \quad (\text{A.1})$$

Нехай у декартовій системі координат вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ мають вигляд

$$\vec{a} = a_x \vec{x}_0 + a_y \vec{y}_0 + a_z \vec{z}_0; \quad \vec{b} = b_x \vec{x}_0 + b_y \vec{y}_0 + b_z \vec{z}_0,$$

де $a_x, a_y, a_z; b_x, b_y, b_z$ – проекції цих векторів на осі, а $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ – орти декартової системи координат. Тоді їх скалярний добуток

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (\text{A.2})$$

Результатом скалярного добутку двох векторів є скаляр.

Векторний добуток двох векторів

Різні форми запису векторного добутку:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a} \vec{b}] = [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Результатом векторного добутку двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є вектор, перпендикулярний $\vec{a}$ і $\vec{b}$, який за абсолютною величиною дорівнює

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}). \quad (\text{A.3})$$

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $[\vec{a}, \vec{b}]$ утворюють праву тройку векторів.

У декартовій системі координат

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Властивість векторного добутку

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]. \quad (\text{A.5})$$

Змішаний добуток векторів

Змішаний або векторно-скалярний добуток трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ є скаляром, який чисельно дорівнює

$$\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = \vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Властивість змішаного добутку

$$\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}] = \vec{b}[\vec{c}, \vec{a}] = \vec{c}[\vec{a}, \vec{b}] = -\vec{b}[\vec{a}, \vec{c}] = -\vec{a}[\vec{c}, \vec{b}] = -\vec{c}[\vec{b}, \vec{a}]. \quad (\text{A.7})$$

Подвійний векторний добуток векторів

Результатом подвійного векторного добутку є вектор

$$[\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}). \quad (\text{A.8})$$

Скалярне і векторне поле

Скалярним або векторним полем називається область простору, кожній точці якої поставлено у відповідність значення деякого скаляра або, відповідно, вектора.

Кожна точка в просторі визначається радіус-вектором – вектором, проведеним з початку координат до даної точки. В декартовій системі координат точка з координатами (x, y, z) характеризується радіус-вектором

$$\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0. \quad (\text{A.9})$$

Оскільки кожна точка поля визначається її радіус-вектором $\vec{r}$, то задання скалярного або векторного поля еквівалентне заданню відповідно скалярної функції $\varphi(\vec{r})$ або векторної функції $\vec{a}(\vec{r})$. Ці функції можуть залежати, окрім $\vec{r}$, ще і від інших аргументів, наприклад, від часу.

Оператори градієнт, дивергенція, ротор і лапласіан

Розглянемо систему координат, не конкретизуючи її вигляд. Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – орти, q_1, q_2, q_3 – координати, a_1, a_2, a_3 – проекції вектора $\vec{a}$ на осі цієї системи. Для цієї довільної системи координат введемо оператори: градієнт, дивергенція, ротор і лапласіан

$$\text{grad } \varphi = \frac{\vec{e}_1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}; \quad (\text{A.10})$$

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 a_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 a_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 a_3) \right); \quad (\text{A.11})$$

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3} & \frac{\vec{e}_2}{h_1 h_3} & \frac{\vec{e}_3}{h_1 h_2} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 a_1 & h_2 a_2 & h_3 a_3 \end{vmatrix}; \quad (\text{A.12})$$

$$\Delta = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \right). \quad (\text{A.13})$$

Тут h_1, h_2, h_3 – коефіцієнти Ляме (в деяких джерелах зустрічається транскрипція «Ламе»). За допомогою коефіцієнтів Ляме записані загальні вирази для операторів градієнт, дивергенція, ротор і лапласіан, які є справедливими для довільної системи координат. Конкретизувавши вигляд системи координат і скориставшись відомими для даного вигляду коефіцієнтами Ляме, за допомогою (A.10) – (A.13) можна отримати вирази для цих операторів в обраній системі координат.

Коефіцієнти Ляме

	Коефіцієнти Ляме		
Система координат (координати)	h_1	h_2	h_3
декартова (x, y, z)	1	1	1
циліндрична (ρ, φ, z)	1	ρ	1
сферична (r, θ, φ)	1	r	$r \sin \theta$

Наприклад, для декартової системи координат ортам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ відповідають $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$; координатам $q_1, q_2, q_3 - x, y, z$; проекціям вектора $a_1, a_2, a_3 - a_x, a_y, a_z$. Коефіцієнти Ляме для декартової системи всі дорівнюють одиниці.

Тоді оператори градієнт, дивергенція, ротор і лапласіан у декартовій системі координат будуть мати вигляд

$$\text{grad } \varphi = \vec{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad (\text{A.14})$$

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}; \quad (\text{A.15})$$

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}; \quad (\text{A.16})$$

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (\text{A.17})$$

Вигляд операторів градієнт, дивергенція, ротор і лапласіан у сферичній і циліндричній системах координат можна отримати аналогічно, застосовуючи відповідні вирази для коефіцієнтів Ляме.

Наведемо у вигляді таблиці об'єкти, на які діють оператори градієнт, дивергенція, ротор і лапласіан, і результати, що утворюються в результаті дії цих операторів.

Оператор	Об'єкт дії оператора	Результат дії оператора
градієнт	скаляр	вектор
дивергенція	вектор	скаляр
ротор	вектор	вектор
лапласіан	скаляр	скаляр
	вектор	вектор

Оператор набла

Введемо векторно-диференціальний оператор набла

$$\nabla = \vec{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{A.18})$$

За допомогою оператора набла оператори градієнт, дивергенція, ротор і лапласіан записуються таким чином:

$$\nabla \varphi = \text{grad } \varphi = \vec{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad (\text{A.19})$$

$$(\nabla \vec{a}) = \text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}; \quad (\text{A.20})$$

$$[\nabla \vec{a}] = \text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}; \quad (\text{A.21})$$

$$(\nabla \nabla) \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (\text{A.22})$$

Правила векторної алгебри розповсюджуються на оператор набла, якщо він входить множником у добуток, який містить лише один істинний вектор або скаляр (визначення істинного вектора і скаляра див. у Додатку В).

З урахуванням (A.19) – (A.22) можна показати, що мають місце тождества:

$$\text{div grad } \varphi = (\nabla, \nabla \varphi) = (\nabla, \nabla) \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi; \quad (\text{A.23})$$

$$\text{rot grad } \varphi = [\nabla, \nabla \varphi] = [\nabla, \nabla] \varphi = 0; \quad (\text{A.24})$$

$$\text{div rot } \vec{a} = (\nabla [\nabla \vec{a}]) = ([\nabla, \nabla] \vec{a}) = 0; \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{a} &= [\nabla [\nabla \vec{a}]] = \nabla (\nabla \vec{a}) - \vec{a} (\nabla \nabla) = \\ &= \text{grad div } \vec{a} - \Delta \vec{a} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

При виведенні (A.23), (A.24) ми скористалися тим, що скаляр можна винести зі скалярного (векторного) добутку, в (A.24), (A.25) застосовано факт рівності нулю векторного добутку двох однакових векторів (див. (A.3)), в (A.25) і (A.26) – властивості змішаного (A.7) і подвійного векторного (A.8) добутку.

Застосування оператора набла до добутку

Якщо векторно-диференціальний оператор набла діє на добуток, що містить два і більше істинних скаляра або вектора, то правила векторної алгебри не можна застосовувати безпосередньо. На добуток оператор ∇ діє у два етапи:

- 1) як диференціальний оператор ∇ застосовується до кожного множника окремо, вважаючи інший при цьому постійним (як при диференціюванні в математичному аналізі: $d(\varphi\psi) = \varphi d\psi + \psi d\varphi$);
- 2) як векторний оператор, що підпорядковується всім правилам векторної алгебри. При цьому оператор набла завжди ставиться після множника, який вважається умовно постійним, перед множником, що є змінним.

Згідно з цим справедливі такі тотожності:

$$\text{grad}(\varphi\psi) = \varphi \text{grad} \psi + \psi \text{grad} \varphi; \quad (\text{A.27})$$

$$\text{div}(\varphi \vec{a}) = \vec{a} \text{grad} \varphi + \varphi \text{div} \vec{a}; \quad (\text{A.28})$$

$$\text{rot}(\varphi \vec{a}) = \varphi \text{rot} \vec{a} - [\vec{a}, \text{grad} \varphi]; \quad (\text{A.29})$$

$$\text{div}[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b} \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \text{rot} \vec{b}; \quad (\text{A.30})$$

$$\text{rot}[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \text{div} \vec{b} - \vec{b} \text{div} \vec{a} + (\vec{b} \nabla) \vec{a} - (\vec{a} \nabla) \vec{b}; \quad (\text{A.31})$$

$$\text{grad}(\vec{a}, \vec{b}) = [\vec{a}, \text{rot} \vec{b}] + [\vec{b}, \text{rot} \vec{a}] + (\vec{b} \nabla) \vec{a} + (\vec{a} \nabla) \vec{b}. \quad (\text{A.32})$$

При цьому вираз вигляду $(\vec{a} \nabla)$ є оператором і дорівнює

$$(\vec{a} \nabla) = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{A.33})$$

(не плутати з $(\nabla \vec{a}) = \text{div} \vec{a}$!). Оператор $(\vec{a} \nabla)$ діє на вектор або скаляр, при цьому вектор $\vec{a}$ вважається постійним, на нього оператор набла не діє.

Дія операторів градієнт, дивергенція, ротор на складні функції

$$\text{grad} \varphi[f(r)] = \text{grad} f \frac{\partial \varphi}{\partial f}; \quad (\text{A.34})$$

$$\text{div} \vec{a}[f(r)] = \left(\text{grad} f, \frac{\partial \vec{a}}{\partial f} \right); \quad (\text{A.35})$$

$$\text{rot} \vec{a}[f(r)] = \left[\text{grad} f, \frac{\partial \vec{a}}{\partial f} \right]. \quad (\text{A.36})$$

Теорема Остроградського-Гаусса

Розглянемо довільну замкнену поверхню S , V – об'єм, обмежений поверхнею S .

Інтеграл за замкненою поверхнею S довільного вектора $\vec{a}$ називається поток вектора $\vec{a}$ через поверхню S .

Теорема Остроградського-Гаусса: потік вектора $\vec{a}$ через довільну замкнену поверхню S дорівнює інтегралу дивергенції цього вектора за об'ємом V , обмеженим цією поверхнею:

$$\oint_S \vec{a} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{a} dV. \quad (\text{A.37})$$

Тут $d\vec{S} = \vec{n} dS$, де dS – нескінченно мала площадка, $\vec{n}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до цієї площадки.

Теорема Стокса

Розглянемо довільний замкнений контур L і поверхню S , що спирається на цей контур.

Інтеграл від довільного вектора $\vec{a}$ за замкненим контуром L називається циркуляцією цього вектора за контуром L .

Теорема Стокса: циркуляція довільного вектора $\vec{a}$ за замкненим контуром L дорівнює потоку ротора цього вектора через поверхню S , що спирається на контур L :

$$\oint_L \vec{a} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{a} d\vec{S}. \quad (\text{A.38})$$

Тут $d\vec{l} = \vec{\tau} dl$, де dl – нескінченно малий елемент контуру, $\vec{\tau}$ – одиничний вектор, дотичний до цього елемента; $d\vec{S} = \vec{n} dS$.

Додаток В. Тензорний аналіз

У Додатку В викладені основні положення тензорного аналізу в об'ємі,

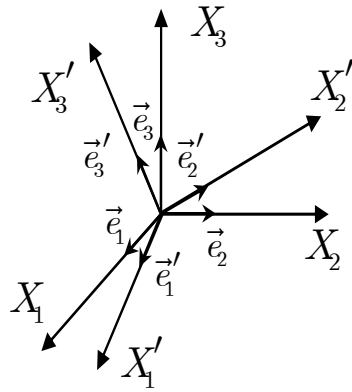


Рис. 2

що необхідний для вивчення курсу «Мікроскопічна електродинаміка».

Поняття скаляр, вектор, тензор, які широко застосовуються в фізиці, є математичними абстракціями, що відображають загальні властивості реальних фізичних величин, таких, як густина, швидкість, напруженість поля, момент інерції тощо.

Тензори – це математичні величини, які визначаються своїми законами перетворення при поворотах системи координат.

Розглянемо дві декартові системи координат – вихідну $X_1X_2X_3$ і повернуту $X'_1X'_2X'_3$, які мають спільний початок (рис. 2). $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – орти вихідної, а $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ – орти повернутої (штрихованої) системи координат.

Тензор нульового рангу

Скаляром (інваріантом) називається величина, що не змінює свого значення при поворотах координатної системи, тобто має те саме значення у вихідній і повернутій системах координат:

$$R = R'. \quad (B.1)$$

Скаляр – це тензор нульового рангу. Прикладом скаляра може бути відстань між двома точками, маса, заряд, час.

Зв'язок між ортами вихідної і повернутої систем координат

Виразимо орти системи $X'_1X'_2X'_3$ через орти вихідної системи $X_1X_2X_3$.

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 \cos(\widehat{\vec{e}'_1, \vec{e}_1}) + \vec{e}_2 \cos(\widehat{\vec{e}'_1, \vec{e}_2}) + \vec{e}_3 \cos(\widehat{\vec{e}'_1, \vec{e}_3});$$

$$\vec{e}'_2 = \vec{e}_1 \cos(\widehat{\vec{e}'_2, \vec{e}_1}) + \vec{e}_2 \cos(\widehat{\vec{e}'_2, \vec{e}_2}) + \vec{e}_3 \cos(\widehat{\vec{e}'_2, \vec{e}_3});$$

$$\vec{e}'_3 = \vec{e}_1 \cos(\widehat{\vec{e}'_3, \vec{e}_1}) + \vec{e}_2 \cos(\widehat{\vec{e}'_3, \vec{e}_2}) + \vec{e}_3 \cos(\widehat{\vec{e}'_3, \vec{e}_3}).$$

Однією формулою цей зв'язок можна записати:

$$\vec{e}'_i = \sum_{j=1}^3 \cos(\widehat{\vec{e}'_i, \vec{e}_j}) \vec{e}_j = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \vec{e}_j.$$

Тут введено матрицю переходу від вихідної системи координат до повернутої – матрицю повороту. Елемент матриці повороту представляє собою косинус кута між i -ю віссю повернутої і j -ю віссю вихідної системи координат

$$\alpha_{ij} = \cos(\widehat{\vec{e}'_i, \vec{e}_j}). \quad (B.2)$$

Зауважимо, що елемент матриці повороту також може бути введений як результат скалярного добутку i -го орта повернутої і j -го орта вихідної системи координат: $(\vec{e}'_i, \vec{e}_j) = \alpha_{ij}$.

Зв'язок між ортами в матричній формі має вигляд

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}.$$

У тензорному аналізі прийнято знак суми опускати; на той факт, що у виразі має місце підсумовування, вказує наявність індексу, який повторюється, в даному випадку індексу j . (Індекс підсумовування називається «німим» індексом, від нього результат підсумовування не залежить, тому він може бути позначений будь-якою буквою.) Таким чином, зв'язок між ортами двох систем координат:

$$\vec{e}'_i = \alpha_{ij} \vec{e}_j. \quad (\text{B.3})$$

Підсумовування в цьому виразі відбувається за елементами рядка матриці повороту.

Аналогічно можна виразити орти вихідної системи координат через орти повернутої

$$\vec{e}_i = \sum_{j=1}^3 \cos(\widehat{\vec{e}'_j, \vec{e}_i}) \vec{e}'_j = \alpha_{ji} \vec{e}'_j. \quad (\text{B.4})$$

В останньому виразі підсумовування відбувається за елементами стовпця матриці повороту.

Перетворення компонент вектора при переході від однієї системи координат до іншої. Тензор першого рангу

Визначимо, як перетворюються компоненти вектора при переході від вихідної системи координат до повернутої. Для цього запишемо радіус-вектор довільної точки в кожній з систем координат

$$\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = x'_1 \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}'_2 + x'_3 \vec{e}'_3.$$

Перепишемо цей вираз таким чином:

$$\sum_{k=1}^3 x_k \vec{e}_k = \sum_{i=1}^3 x'_i \vec{e}'_i.$$

Опустимо знак суми:

$$x_k \vec{e}_k = x'_i \vec{e}'_i. \quad (\text{B.5})$$

Визначимо звідси x'_i . Для цього домножимо останній вираз зліва скалярно на вектор $\vec{e}'_i$

$$x_k (\vec{e}'_i, \vec{e}_k) = x'_i (\vec{e}'_i, \vec{e}'_i).$$

Далі врахуємо, що $(\vec{e}'_i, \vec{e}'_i) = 1$, а $(\vec{e}'_i, \vec{e}_k) = \alpha_{ik}$. Тоді вираз, який визначає закон перетворення компонент вектора при переході від вихідної системи координат до повернутої, буде таким:

$$x'_i = \alpha_{ik} x_k. \quad (\text{B.6})$$

Підсумовування відбувається за елементами рядка.

Аналогічно отримуємо зворотне перетворення компонент вектора.

Для цього домножимо (B.5) справа скалярно на вектор $\vec{e}_k$

$$x_k (\vec{e}_k, \vec{e}_k) = x'_i (\vec{e}'_i, \vec{e}_k).$$

Оскільки $(\vec{e}_k, \vec{e}_k) = 1$, а $(\vec{e}'_i, \vec{e}_k) = \alpha_{ik}$, то зворотне перетворення компонент вектора запишеться так:

$$x_k = \alpha_{ik} x'_i. \quad (\text{B.7})$$

Підсумовування відбувається за елементами стовпця.

Вектор у тривимірному просторі – це сукупність трьох величин, які перетворюються при повороті системи координат за законом

$$x'_i = \alpha_{ik} x_k.$$

Вектор – це тензор першого рангу. Прикладом тензора першого рангу може бути радіус-вектор, швидкість.

Тензор другого рангу. Тензор s-го рангу

Тензором другого рангу в тривимірному просторі називається сукупність дев'яти величин, що перетворюються при повороті системи координат за законом

$$T'_{ik} = \alpha_{il} \alpha_{km} T_{lm}. \quad (\text{B.8})$$

У цьому виразі підсумовування відбувається від 1 до 3 за індексами l і m .

Прикладом тензора другого рангу може бути діелектрична і магнітна проникність анізотропних магнітодіелектриків

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}; \quad \hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}.$$

Тензором s-го рангу в тривимірному просторі називається сукупність 3^s величин, що перетворюються при повороті системи координат за законом

$$T'_{i'l'l'...l'} = \alpha_{ii'} \alpha_{kk'} \alpha_{l'l'} \dots \alpha_{l'l'} T_{ikl...l}. \quad (\text{B.9})$$

Властивість ортогональності матриці повороту

Для отримання умови ортогональності матриці повороту будемо виходити із умови ортогональності векторів: два вектора є ортогональними, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю. В силу ортогональності ортів вихідної і повернутої систем координат, а також враховуючи, що орти мають одиничну довжину, одержуємо

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} = \delta_{ij}; \quad (\text{B.10})$$

$$(\vec{e}'_k, \vec{e}'_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases} = \delta_{kl}. \quad (\text{B.11})$$

Розпишемо $(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, виражаючи орти нештрихованої системи координат через орти штрихованої (B.4) і враховуючи (B.10), (B.11).

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = (\alpha_{ki} \vec{e}'_k, \alpha_{lj} \vec{e}'_l) = \alpha_{ki} \alpha_{lj} (\vec{e}'_k, \vec{e}'_l) = \alpha_{ki} \alpha_{lj} \delta_{kl} = \alpha_{ki} \alpha_{kj} = \delta_{ij}.$$

Таким чином, маємо умову ортогональності матриці за другою парою індексів

$$\alpha_{ki} \alpha_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

Якщо елементи матриці переходу задовольняють цій умові, то матриця переходу є ортогональною, і саме перетворення називається ортогональним.

Таким чином, поворот системи координат – ортогональне перетворення.

Аналогічно розглянемо скалярний добуток $(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j)$.

$$(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j) = (\alpha_{ik} \vec{e}_k, \alpha_{jl} \vec{e}_l) = \alpha_{ik} \alpha_{jl} (\vec{e}_k, \vec{e}_l) = \alpha_{ik} \alpha_{jl} \delta_{kl} = \alpha_{ik} \alpha_{jk} = \delta_{ij}.$$

Отримуємо умову ортогональності матриці за першою парою індексів:

$$\alpha_{ik} \alpha_{jk} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

Побудова зворотної матриці перетворення

За визначенням зворотної матрицею називається така матриця, для якої має місце співвідношення

$$\hat{\alpha}^{-1} \hat{\alpha} = \hat{\alpha} \hat{\alpha}^{-1} = \hat{I}, \quad (\text{B.14})$$

де $\hat{I}$ – одинична матриця:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В явному вигляді співвідношення (B.14)

$$\alpha^{-1}_{ik} \alpha_{kj} = \alpha_{ik} \alpha^{-1}_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

Порівнюючи останній вираз з умовою ортогональності матриці (B.13), отримуємо

$$\alpha^{-1}_{kj} = \alpha_{jk} \Leftrightarrow \hat{\alpha}^{-1} = \hat{\alpha}^T. \quad (\text{B.16})$$

Матрицю зворотного перетворення одержуємо шляхом транспонування матриці прямого перетворення. Це справедливо для ортогонального перетворення.

Скористаємось (B.16) для отримання виразу зворотного перетворення компонент вектора (B.7) з прямого перетворення (B.6). Для цього пряме перетворення (B.6)

$$x'_k = \alpha_{ki} x_i$$

домножимо на α^{-1}_{ik}

$$\alpha^{-1}_{ik} x'_k = \alpha^{-1}_{ik} \alpha_{ki} x_i.$$

Згідно з (B.15), (B.16) $\alpha^{-1}_{ik} \alpha_{ki} = 1$, а $\alpha^{-1}_{ik} = \alpha_{ki}$. Тоді

$$\alpha_{ki} x'_k = x_i.$$

Таким чином, одержуємо той самий вираз для зворотного перетворення, що і в (B.7).

Симетрія тензорів

Тензор $S_{ikl\dots}$ називається симетричним за парою індексів i і k , якщо він не змінюється при перестановці індексів:

$$S_{ikl\dots} = S_{kil\dots}. \quad (\text{B.17})$$

Якщо при такій перестановці змінюється знак, то тензор називається антисиметричним.

$$A_{ikl\dots} = -A_{kil\dots}. \quad (\text{B.18})$$

Діагональні елементи антисиметричного тензора дорівнюють нулю:

$$A_{iil\dots} = -A_{iil\dots} = 0. \quad (\text{B.19})$$

Умову симетричності (антисиметричності) тензора можна узагальнити на будь-яку пару індексів.

Властивість симетричності (антисиметричності) тензора зберігається при переході від однієї системи координат до іншої, тобто є інваріантною. Поняття симетрії тензора відноситься до тензорів рангу не нижче за другий.

Симетричний тензор другого рангу містить 6 незалежних компонент, а антисиметричний тензор другого рангу – всього 3 незалежні компоненти.

Згортання тензорів

Процедура згортання тензора полягає у підсумовуванні його за двома індексами, які прирівнюються. Наприклад, згорнемо тензор 3-го рангу T_{ikl} за першою парою індексів. Для цього прирівняємо $i = k$ і просумуємо:

$$T_{iil} = \sum_{i=1}^3 T_{iil} = T_{11l} + T_{22l} + T_{33l}; \quad l = 1, 2, 3. \quad (\text{B.20})$$

Користуючись визначеннями тензора 3-го рангу і вектора, а також властивістю ортогональності матриці переходу, можна показати, що результат згортання T_{iil} представляє собою тензор першого рангу (вектор). Процедура згортання тензора зменшує ранг тензора на дві одиниці. Згорнути можна тензор рангу не нижче другого. Тензор парного рангу може бути згорнутий до скаляра (інваріанта), тензор непарного рангу – до вектора.

Перетворення тензорів при інверсії системи координат

Раніше ми розглядали повороти системи координат. Важливе значення в фізиці має інверсне перетворення системи координат. Інверсією системи координат назовемо дзеркальне відбиття координатних осей, тобто

$$x'_\alpha = -x_\alpha. \quad (\text{B.21})$$

Вектори можуть поводитися по-різному стосовно інверсії системи координат. В залежності від поведінки при інверсії існують два типи векторів – справжні вектори і псевдовектори.

Справжній (полярий) вектор – це такий вектор, компоненти якого при інверсії системи координат змінюють свій знак. Прикладом справжнього вектора можуть бути радіус-вектор точки $\vec{r}$, швидкість частинки $\vec{v}$, імпульс $\vec{p}$, сила $\vec{F}$, напруженість електричного поля $\vec{E}$ тощо.

Псевдовектор (аксіальний вектор) – це такий вектор, компоненти якого при інверсії системи координат не змінюють свій знак. Наприклад, до аксіальних векторів належать кутова швидкість $\vec{\omega}$, момент імпульсу $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]$, напруженість магнітного поля $\vec{H} = [\nabla \times \vec{A}]$ і взагалі будь-який векторний добуток двох істинних векторів.

Сформульовані визначення полярних і аксіальних векторів поширюються на тензори довільного рангу. Тензор s-го рангу називається істинним або полярним, якщо його компоненти при інверсії набувають множника $(-1)^s$, і псевдотензором, якщо його компоненти множаться на $(-1)^{s+1}$.

Додаток С. Спеціальна теорія відносності

Додаток С містить основні положення спеціальної теорії відносності.

Системою відліку називають систему координат для просторових вимірювань, яку об'єднано з годинником для вимірювання часу.

Інерціальна система відліку (ICB) – це така система, в якій виконується закон інерції (перший закон Ньютона), згідно з яким тіло рухається рівномірно прямолинійно або знаходиться у стані спокою, якщо на нього не діють сили або дія цих сил скомпенсована.

Теорія відносності відповідає на питання: що таке простір і час, вивчає їх і всі процеси, що відбуваються в просторі і часі.

Фізичний процес представляє собою неперервну послідовність подій. Подія – складова частина процесу. В чотиривимірному просторі подія зображується так званою світовою точкою, яка характеризується чотирма координатами – трьома просторовими і часом (x, y, z, t) . Будь-якій частинці відповідає деяка лінія (світова лінія), точки якої визначають координати частинки в усі моменти часу.

Існують дві теорії відносності:

- 1) Теорія відносності Галілея–Ньютона, яка є справедливою в класичній механіці для швидкостей, значно менших за швидкість світла ($v \ll c$).
- 2) Теорія відносності Ейнштейна, яка виконується при швидкостях, порівнянних зі швидкістю світла ($v \rightarrow c$).

Відповідно до загальнонаукового принципу додатковості Бора, який стверджує, що будь-яка нова теорія не відкидає стару, а включає її в себе як граничний випадок, теорія відносності Галілея–Ньютона є граничним випадком теорії відносності Ейнштейна.

Теорія відносності Галілея–Ньютона

Одну подію можна спостерігати в різних ICB. Розглянемо дві системи

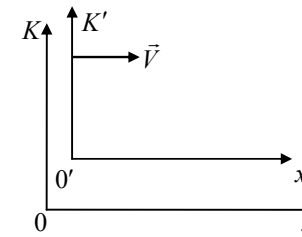


Рис. 3

відліку K і K' , при цьому K' рухається відносно K зі швидкістю $\vec{V}$, для визначеності направленою уздовж осі OX – $\vec{V} = \vec{x}_0 V$ (рис. 3).

Нехай подія в системі K характеризується координатами (x, y, z, t) , а в K' – (x', y', z', t') . Зв'язок між координатами в

двох системах здійснюється за допомогою перетворень Галілея–Ньютона.

Прямі перетворення Галілея–Ньютона:

$$x = x' + Vt'; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = t'. \quad (C.1)$$

Зворотні перетворення Галілея–Ньютона можна отримати з прямих шляхом заміни $V \rightarrow -V$:

$$x' = x - Vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t. \quad (C.2)$$

У класичній механіці:

- 1) простір є відносним (просторові співвідношення між різними подіями залежать від того, в якій системі відліку вони розглядаються);
- 2) час є абсолютним (властивості часу не залежать від системи відліку – час однаковий для всіх систем відліку).

Постулати теорії відносності Галілея–Ньютона:

- 1) всі закони природи (механіки) інваріантні в усіх ICB;
 - 2) виконується класичний закон додавання швидкостей $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$.
- Швидкість розповсюдження взаємодії вважається нескінченною.

Інваріанти теорії відносності Галілея–Ньютона:

Введемо в розгляд елементарний відрізок dl . Розглянемо квадрат його довжини:

в системі K
$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

в системі K' $dl'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$.

Інваріантами теорії відносності Галілея–Ньютона є квадрат довжини елементарного відрізка

$$dl^2 = dl'^2$$

і квадрат елементарного часового інтервалу

$$dt^2 = dt'^2.$$

Спеціальна теорія відносності Ейнштейна (СТВ)

Вивчення явищ електромагнетизму спонукало переглянути постулати теорії відносності Галілея–Ньютона. Електродинаміка вивчає тіла, які мають не лише масу, а й заряд. Експериментально встановлено, що сила Лоренца, яка діє на заряд з боку електромагнітного поля, пропорційна швидкості і дорівнює

$$\vec{F}_L = e\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}(\vec{r}, t)].$$

Розглянемо рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}(\vec{r}, t)].$$

Якщо для переходу до іншої ІСВ застосувати до цього рівняння класичний закон додавання швидкостей, то рівняння виявиться неінваріантним.

З наведеного прикладу видно, що рівняння електродинаміки не інваріантні відносно перетворень Галілея–Ньютона. Отже, необхідно переглядати представлення про простір і час. Рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі залишається інваріантним, якщо застосувати до нього не перетворення Галілея–Ньютона, а перетворення Лоренца.

Прямі перетворення Лоренца мають вигляд:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (C.3)$$

зворотні перетворення Лоренца ($V \rightarrow -V$):

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (C.4)$$

Аксіоматика спеціальної теорії відносності Ейнштейна

1) Постулат відносності: всі закони природи, у тому числі і закони електродинаміки, інваріантні в будь-якій інерціальній системі відліку.

2) Постулат сталості швидкості світла: швидкість світла в усіх інерціальних системах відліку є однаковою, скінченною і дорівнює $c = 2,998 \cdot 10^{10}$ см/с – гранична швидкість передачі взаємодії між тілами.

При побудові теорії поля важливим є той факт, що перший постулат розповсюджується і на закони електродинаміки. В спеціальній теорії відносності зберігається поняття інерціальної системи відліку.

Чотиривимірний просторово-часовий континуум (ПЧК)

У СТВ використовуються поняття відносного простору і відносного часу, які складають ПЧК. Геометрія ПЧК представляє собою систему чотирьох взаємно ортогональних координат. Розглянемо дві події 1 і 2 в системах K і K' .

	в системі K	в системі K'
Подія 1	(x_1, y_1, z_1, t_1)	(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1)
Подія 2	(x_2, y_2, z_2, t_2)	(x'_2, y'_2, z'_2, t'_2)

Інтервал між подіями 1 і 2 в K :

$$S = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}; \quad (C.5)$$

в K' :

$$S' = \sqrt{c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2}. \quad (C.6)$$

У СТВ інтервал між двома подіями є інваріантом. Цей факт – математичний вираз сталості швидкості світла.

$$S = S'. \quad (\text{C.7})$$

Введемо позначення $\tau = ict$ ($i^2 = -1$). Тоді елементарний інтервал визначимо так:

$$dS = \sqrt{-d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}. \quad (\text{C.8})$$

Елементарний інтервал є інваріантом спеціальної теорії відносності.

Перетворення Лоренца для швидкості

Знайдемо формули, які пов'язують швидкість матеріальної частинки, що рухається, в одній системі відліку зі швидкістю тієї ж частинки в іншій системі. Нехай, як і раніше, система K' рухається відносно системи K зі швидкістю $\vec{V}$ уздовж осі OX (рис. 3). Швидкість частинки в системі K – $\vec{v}$, а в K' – $\vec{v}'$. За визначенням компоненти швидкості частинки в обох системах координат дорівнюють

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt}; & v_y &= \frac{dy}{dt}; & v_z &= \frac{dz}{dt}; \\ v'_x &= \frac{dx'}{dt'}; & v'_y &= \frac{dy'}{dt'}; & v'_z &= \frac{dz'}{dt'}. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Скориставшись формулами (C.3), отримаємо

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad dy = dy'; \quad dz = dz'; \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Розділимо вирази для dx , dy , dz на вираз для dt і одержимо формули, які визначають перетворення швидкостей:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}; \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}; \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (\text{C.10})$$

Додаток D. Релятивістська механіка

Цей Додаток містить короткі зведення з релятивістської механіки, відомі з теоретичної механіки.

В теоретичній механіці стан однієї частинки в тривимірному просторі описується шістьма незалежними змінними: узагальненими координатами q_1, q_2, q_3 і узагальненими швидкостями $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ ($\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$, $q_i = q_i(t)$; $\dot{q}_i = \dot{q}_i(t)$). Система з N частинок характеризується $3N$ узагальненими координатами і $3N$ узагальненими швидкостями, тобто $6N$ незалежними змінними.

Задачею фізики є описання руху – переходу фізичної системи з одного стану в інший.

Для характеристики стану фізичної системи вводиться функція Лагранжа

$$L \equiv L(q, \dot{q}, t), \quad (\text{D.1})$$

де q – сукупність усіх узагальнених координат, $\dot{q}$ – сукупність усіх узагальнених швидкостей, які параметрично залежать від часу. Функція Лагранжа описує стан системи в будь-який момент часу.

Перехід системи з одного стану до іншого характеризується функціоналом дії (дією) S :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t). \quad (\text{D.2})$$

t_1 і t_2 – моменти часу, в які система знаходиться в початковому і кінцевому положенні.

Принцип найменшої дії (ПНД). Рівняння Лагранжа

Згідно з принципом найменшої дії перехід з одного стану до іншого відбувається за справжньою траєкторією, тобто за такою траєкторією, на якій функціонал дії є мінімальним. Математично ПНД виражається в рівності нулю варіації функціонала дії

$$\delta S = 0. \quad (D.3)$$

Виходячи з ПНД, рівняння руху частинки (рівняння Лагранжа) має вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (D.4)$$

Імпульс частинки

Імпульс частинки визначається таким чином:

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \nabla_v L, \quad (D.5)$$

де

$$\nabla_v = \vec{x}_0 \frac{\partial}{\partial v_x} + \vec{y}_0 \frac{\partial}{\partial v_y} + \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial v_z}. \quad (D.6)$$

Енергія частинки

Енергія частинки визначається такою формулою:

$$\mathcal{E} = \vec{P}\vec{v} - L. \quad (D.7)$$

Функціонал дії і функція Лагранжа вільної матеріальної релятивістської частинки

Будемо виходити з того, що в релятивістській механіці:

1) ПНД зберігається, отже, в релятивістській механіці можна ввести функціонал дії у вигляді інтеграла за світовою лінією між двома заданими подіями a і b – знаходженням частинки в початковому і кінцевому положенні у визначені моменти часу t_1 і t_2 ;

2) є справедливим постулат відносності, згідно з яким закони релятивістської механіки інваріантні відносно перетворень Лоренца.

Отже, інтеграл повинен братися від скаляра (інваріанта). Крім того, під інтегралом повинен стояти диференціал у першому степені. Єдиний такий скаляр, який можна побудувати для вільної матеріальної частинки, це dS –

елементарний інтервал, що є інваріантом відносно перетворень Лоренца. Таким чином, функціонал дії для вільної частинки повинен мати вигляд

$$S = \int_a^b \alpha dS,$$

де α – деяка стала. Можна показати, що для того, щоб інтеграл мав мінімум, коефіцієнт α повинен бути від'ємним.

З урахуванням явного вигляду елементарного інтервалу (C.8) маємо

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b \alpha dS = \int_a^b \alpha \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \alpha c dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right)} = \int_{t_a}^{t_b} \alpha c dt \sqrt{1 - v^2 / c^2}. \end{aligned}$$

Отримуємо, що функціонал дії вільної релятивістської частинки

$$S = \int_{t_a}^{t_b} \alpha c dt \sqrt{1 - v^2 / c^2}.$$

Порівнявши останню формулу з (D.2), одержуємо вираз для функції Лагранжа вільної релятивістської частинки

$$L = \alpha c \sqrt{1 - v^2 / c^2}.$$

Визначимо коефіцієнт α , який повинен характеризувати частинку. Для цього здійснимо граничний перехід при $c \rightarrow \infty$ до класичного випадку, при цьому релятивістський вираз для функції Лагранжа вільної матеріальної частинки повинен перейти в класичний вираз $L = \frac{mv^2}{2}$. Розкладемо L в ряд за степенями $\frac{v}{c}$.

$$L = \alpha c \sqrt{1 - v^2 / c^2} \approx \alpha c - \frac{\alpha v^2}{2c}.$$

Сталі члени в функції Лагранжа не відбиваються на рівняннях руху, тому αc в останньому виразі можна опустити. Порівнюючи $-\frac{\alpha v^2}{2c}$ з класичним

$$L = \frac{mv^2}{2}, \text{ отримуємо } \alpha = -m_0 c.$$

Таким чином, функціонал дії вільної релятивістської частинки

$$S = -m_0 c \int_a^b dS = -m_0 c^2 \int_{t_a}^{t_b} dt \sqrt{1 - v^2 / c^2}, \quad (\text{D.8})$$

а функція Лагранжа вільної релятивістської частинки

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2}. \quad (\text{D.9})$$

Зручно записувати функціонал дії в чотиривимірному просторі, осі якого позначаються x_1, x_2, x_3, x_4 . При цьому осі x_1 поставимо у відповідність координату x , осі x_2 – координату y , осі x_3 – z , а $x_4 - \tau = ict$.

Тоді елементарний інтервал

$$dS = \sqrt{-dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2} = \sqrt{-dx_\mu dx_\mu} = \sqrt{-dx_\mu^2}. \quad (\text{D.10})$$

В останньому виразі знак суми опущено, на підсумовування за μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) вказує наявність індексу, що повторюється.

Функціонал дії вільної релятивістської частинки в чотиривимірному просторі записується так:

$$S = -m_0 c \int_a^b \sqrt{-dx_\mu^2}. \quad (\text{D.11})$$

Імпульс релятивістської частинки

Знайдемо імпульс релятивістської частинки, підставляючи у вираження імпульсу (D.5) (з урахуванням (D.6)) відповідний вираз для функції Лагранжа (D.9). В результаті одержуємо, що імпульс релятивістської частинки

$$\vec{P} = \nabla_v \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2} \right) = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \quad (\text{D.12})$$

Енергія релятивістської частинки

Підставимо до формули (D.7) вираз для функції Лагранжа вільної релятивістської частинки (D.9) і отримаємо, що енергія вільної релятивістської частинки дорівнює

$$\mathcal{E} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \quad (\text{D.13})$$

ПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що є фізичним об'єктом досліджень в теорії поля (мікроскопічній електродинаміці)?
2. Які існують методи дослідження об'єктів мікроскопічної електродинаміки?
3. Яка теоретична модель реального фізичного об'єкта використовується в мікроскопічній електродинаміці? Якою є область застосовності даної теорії?
4. В чому полягає фундаментальна проблема природознавства, що розв'язується в електродинаміці?
5. Яке місце посідає мікроскопічна електродинаміка в курсі теоретичної фізики?
6. Сформулюйте фундаментальні положення теоретичної фізики, на яких базується побудова теорії поля.
7. В чому полягає роль релятивістської механіки в побудові теорії поля?
8. Сформулюйте властивість адитивності функціонала дії. Який вигляд має функціонал дії для зарядженої частинки в електромагнітному полі? Як вводиться чотиривимірний векторний потенціал електромагнітного поля?
9. Отримайте вираз функції Лагранжа для зарядженої частинки в електромагнітному полі.
10. Як вводиться узагальнений вектор імпульсу для зарядженої частинки в електромагнітному полі? Чому він дорівнює? В чому полягає фізичний зміст тривимірного векторного потенціалу електромагнітного поля?
11. Отримайте формулу для енергії зарядженої частинки в електромагнітному полі. Сформулюйте фізичний зміст скалярного потенціалу електромагнітного поля.
12. Чому дорівнює функція Гамільтона для зарядженої частинки в електромагнітному полі?
13. Виведіть рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі на основі релятивістського рівняння руху.
14. Сформулюйте постулат сили Лоренца. Дайте визначення напруженості електричного і магнітного полів. Як пов'язані векторний і скалярний потенціали із силовими характеристиками електромагнітного поля?
15. Знайдіть змінення кінетичної енергії зарядженої частинки в електромагнітному полі. Чому дорівнює робота електромагнітного поля зі змінення кінетичної енергії?
16. Визначте поняття ізотропії часу. Як воно відображається в теорії поля?
17. Отримайте першу пару рівнянь Максвелла в диференціальній формі.

18. Отримайте першу пару рівнянь Максвелла в інтегральній формі. В чому полягає їх фізичний зміст?
19. Доведіть, що перша пара рівнянь Максвелла є незамкненою системою рівнянь.
20. Як визначаються напруженості електромагнітного поля через потенціали? Чи є однозначним це визначення? Наскільки однозначно визначаються потенціали?
21. В чому полягає градієнтна інваріантність потенціалів?
22. Сформулюйте умови калібровки Лоренца, калібровки Кулона для потенціалів.
23. Як пов'язана градієнтна інваріантність потенціалів з принципом найменшої дії за Гамільтоном?
24. Чому виникає необхідність отримання рівняння руху в коваріантній формі? Сформулюйте в загальному вигляді задачу для отримання рівняння руху в коваріантній формі. В чому полягає специфіка електромагнітного випадку?
25. Визначте варіацію функціонала дії для зарядженої частинки в електромагнітному полі.
26. Отримайте рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі в релятивістськи-коваріантній формі.
27. Як вводиться тензор електромагнітного поля? Сформулюйте його загальні властивості. Визначте елементи цього тензора через складові (проекції) векторів напруженості електричного і магнітного поля.
28. Які чотири скалярні рівняння містить в собі релятивістськи-коваріантне рівняння руху?
29. Сформулюйте задачу з відшукування 4-вектора імпульсу в загальному випадку. Визначте 4-вектор імпульсу зарядженої частинки в електромагнітному полі, його складові.
30. Отримайте рівняння Гамільтона–Якобі в релятивістськи-коваріантній формі.
31. Сформулюйте пряме і зворотне перетворення Лоренца в матричній формі. В чому полягає властивість ортогональності матриці перетворення Лоренца? Властивість скалярного добутку пари довільних 4-векторів?
32. Дайте визначення 4-тензора 2 рангу $A_{\mu\nu}$. Сформулюйте умову тензорності матриці $A_{\mu\nu}$.
33. Отримайте формули прямого і зворотного перетворення Лоренца для чотиривимірного векторного потенціалу.

34. Виведіть формули перетворень Лоренца для елементів тензора електромагнітного поля.
35. Отримайте прямі та зворотні перетворення Лоренца для компонент векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої.
36. Якого вигляду набувають формули перетворення Лоренца для векторів напруженостей електромагнітного поля в нерелятивістському випадку?
37. Сформулюйте умову інваріантності для потенціалів електромагнітного поля.
38. Отримайте і проаналізуйте інваріанти векторів напруженості електромагнітного поля.
39. Отримайте перший інваріант електромагнітного поля у вигляді тензора $F_{\mu\nu}$.
40. Які проблеми виникають при спробі описати заряджену матеріальну точку в термінах густини заряду? Як вводиться поняття густини заряду?
41. Дайте визначення густини заряду за допомогою тривимірної дельта-функції. Чи є густина заряду інваріантом відносно перетворень Лоренца?
42. Як визначається чотиривимірний вектор густини струму? Чому дорівнюють його складові?
43. Визначте приріст у часі величини заряду, що міститься в об'ємі, з використанням поняття густини заряду.
44. Знайдіть приріст у часі величини заряду в тому ж об'ємі V з використанням поняття густини струму.
45. Виведіть закон збереження заряду в інтегральній і диференціальній формі.
46. Отримайте закон збереження заряду в релятивістськи-коваріантній формі.
47. Сформулюйте функціонал дії для фізичної системи «заряджена частинка + електромагнітне поле».
48. Визначте частину функціонала дії, що залежить тільки від електромагнітного поля.
49. Який загальний вигляд має функціонал дії для системи, яка складається з електромагнітного поля і заряджених частинок, що в ньому знаходяться?
50. Переконайтесь в тому, що при використанні в ПНД повного виразу для функціонала дії системи «заряджена частинка + електромагнітне поле» зберігається отриманий раніше результат: рівняння руху для зарядів в електромагнітному полі і перша пара рівнянь Максвелла.

51. Сформулюйте варіаційну задачу для отримання другої пари рівнянь Максвелла.
52. Як записати вираз для $S_{mf}(A_\mu, x_\mu)$ у вигляді інтеграла за чотиривимірним об'ємом?
53. Виведіть другу пару рівнянь Максвелла в релятивістськи-коваріантній формі. В чому полягає умова випромінювання в теорії поля?
54. Отримайте другу пару рівнянь Максвелла в диференціальній формі для векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ з релятивістськи-коваріантного рівняння.
55. Сформулюйте другу пару рівнянь Максвелла в інтегральній формі, дайте їх фізичну інтерпретацію.
56. Як виглядає перша пара рівнянь Максвелла в релятивістськи-коваріантній формі?
57. Яка аксіоматика лежить в основі теорії поля?
58. Сформулюйте самоузгоджену систему рівнянь мікроскопічної електродинаміки, проаналізуйте її фізичний зміст.
59. Визначте змінення за одиницю часу кінетичної енергії заряджених частинок, які знаходяться в електромагнітному полі.
60. Отримайте закон збереження енергії в мікроскопічній електродинаміці в інтегральній формі. Які енергетичні величини вводяться для характеристики електромагнітного поля?
61. Дайте визначення вектора Умова–Пойнтинга. В чому полягає його фізичний зміст?
62. Сформулюйте закон збереження енергії в мікроскопічній електродинаміці в диференціальній формі.
63. Сформулюйте фізичну постановку задачі мікроскопічної електродинаміки в загальному вигляді.
64. Як формулюється фізична постановка задачі мікроскопічної електродинаміки в окремому випадку електростатики?
65. Якого вигляду набуває система рівнянь мікроскопічної електродинаміки у випадку електростатики? В чому полягає фізичний зміст цього наближення?
66. Отримайте рівняння Пуассона (Лапласа) для електростатичного потенціалу.
67. В чому полягає ідея методу функції Гріна? Як реалізується метод функції Гріна у випадку електростатики?
68. Знайдіть наближений вираз для електростатичного потенціалу у випадку віддаленої точки спостереження. В чому полягає мультипольне розкладання для потенціалу у випадку електростатики? Яка область його застосовності?

69. Сформулюйте фізичну постановку задачі мікроскопічної електродинаміки в окремому випадку магнітостатики.
70. Як виглядає система рівнянь мікроскопічної електродинаміки у випадку магнітостатики? Сформулюйте фізичний зміст цього наближення.
71. Отримайте рівняння Пуассона для векторного потенціалу.
72. Як реалізується метод функції Гріна у випадку магнітостатики?
73. Як визначається векторний потенціал у випадку віддаленої точки спостереження?

ЛІТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Краткий курс теоретической физики. Кн.1: Механика. Электродинамика. – М.: Наука, 1969. – 271 с.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. В 10 т. Т.2. Теория поля. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. В 10 т. Т.1. Механика. – М.: Наука, 2002. – 224 с.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. В 10 т. Т.8. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 620 с.
5. *Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н.* Классическая электродинамика. – М.: Наука, 1985. – 399 с.
6. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965. – 702 с.
7. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. – М.: Наука, 1989. – 504 с.
8. *Батыгин В. В., Топтыгин И. Н.* Сборник задач по электродинамике. – М.: Наука, 1970. – 503 с.