

Notes on Vector Integration

L. M. Tseytlin

Kharkov State University

The article announces some results of the author's Ph.D. thesis and introduces a new definition of an integral for functions with values in Banach spaces. This definition, called Riemann–Lebesgue integral, is shown to be quite general (both Bochner and Riemann integrals are its special cases) and useful in the study of Banach spaces.

1. Introduction

There exist several definitions of the integral for function with values in Banach spaces and corresponding classes of integrable functions. The simplest one is the definition of Riemann integral, which exactly coincides with its finite-dimensional counterpart. The most commonly used definition, however, is that of Bochner (see [1], II.2). Although Bochner integrability is a direct generalization of Lebesgue integrability and preserves most of the properties of the latter, nevertheless, there exist functions that are Riemann-integrable but not Bochner-integrable.

Example 1.1 Consider the space $l_2([0; 1])$. This space consists of all such functions $f : [0; 1] \rightarrow \mathbf{R}$ that $\sum_{t \in [0; 1]} |f(t)|^2 < \infty$. The norm on $l_2([0; 1])$ is given by $\|f\| = (\sum_{t \in [0; 1]} |f(t)|^2)^{1/2}$. It is easy to see that $l_2([0; 1])$ is a non-separable Hilbert space. Its orts are given by $e_t = \chi_{\{t\}}$. Now consider the function $f : [0; 1] \rightarrow l_2([0; 1])$ defined as $f(t) = e_t$. This functions is not measurable (for definition of measurability in this case see [1], II.1), since it is not "almost separable-valued". Therefore it can't be Bochner-integrable. On the other hand, it is not difficult to show that it is Riemann-integrable and the integral equals zero.

More general definitions are those of Dunford integration and Pettis integration (see [1], II.3). Pettis integral is quite useful, and the class of Pettis-integrable functions includes both Bochner and Riemann integrable functions. However the definition of Pettis is "non-constructive" in that it does not involve approximations with "simple" functions. This fact makes it difficult to apply the techniques used to investigate the Lebesgue and Bochner integrals to the case of Pettis

integral. And in fact, some conventional properties of Lebesgue integral do not hold for Pettis integral. For example, there exists a Pettis-integrable function $f : [0; 1] \rightarrow X$, for which the "antiderivative" $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\mu$ is not differentiable ([2]); the space of Pettis-integrable functions is not always complete, etc.

In this note we present new definition of integrability for functions with values in Banach spaces and a series of results about it, obtained by the author in his Ph.D. thesis prepared under the supervision of Dr. V.M. Kadets at Kharkov State University. As will be shown, this definition is quite general, natural and convenient. The properties of this integral depend on the properties of the Banach space where the function takes its values, which makes it a valuable tool on the study of the structure of Banach spaces, especially in the non-separable case.

2. Main results about Riemann–Lebesgue integral

2.1. The Riemann–Lebesgue integral and integral sums. Let (Ω, Σ, μ) be a measure space, X a Banach space.

Definition 2.1 Let $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ be an arbitrary function. We will call its upper Lebesgue integral the value of $\bar{\int} f d\mu = \inf \{ \int g d\mu : g(t) \geq f(t) \forall t; g \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu) \}$. In particular, $\bar{\int} f d\mu = +\infty$, if f has no Lebesgue-integrable majorant.

Using the notion of the upper Lebesgue integral, we introduce the upper L_1 space $(\overline{L}_1)$.

Definition 2.2 The space $\overline{L}_1(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ is the space of all such functions $f : \Omega \rightarrow X$ that $\bar{\int} \|f\| d\mu < +\infty$. The norm on this space is given by $\|f\| = \bar{\int} \|f(t)\| d\mu(t)$, and is called RL-norm $(\|\cdot\|_{RL})$.

It is easy to see that any bounded function, as well as any Bochner-integrable function lies in $\overline{L}_1$.

Now let's define the notion of Riemann–Lebesgue integral sums.

Definition 2.3 Let $f : \Omega \rightarrow X$ be an arbitrary function. Let $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^\infty$ be a partition of Ω into a countable number of measurable subsets. i. e. $\Delta_i \in \Sigma$, Δ_i are disjoint and their union equals Ω . Let $T = \{t_i\}_{i=1}^\infty$ be a set of sampling points for Π , i. e. $t_i \in \Delta_i$. We can construct a formal series $S(f, \Pi, T) = \sum_{i=1}^\infty f(t_i) \mu(\Delta_i)$. This series is called the (absolute) Riemann–Lebesgue integral sum for f with respect to Π and T provided it is absolutely convergent.

It seems natural to order the set of partitions in the following way. We will say that the partition Π_1 follows partition Π_2 , or Π_1 is inscribed into Π_2 ($\Pi_1 \succ \Pi_2$), if Π_1 is a finer partition, that is, if Π_1 consists of subsets $\{D_i\}_{i=1}^\infty$ and Π_2 consists of $\{E_k\}_{k=1}^\infty$, then the set of indices $\mathbb{N}$ can be broken into disjoint subsets I_k , $k \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{k=1}^\infty I_k = \mathbb{N}$ such that $E_k = \bigcup_{i \in I_k} D_i$.

Lemma 2.4 Let $f \in \overline{L}_1(\Omega, \Sigma, \mu, X)$. Then there exists a partition Π of Ω , such that for any finer partition $\Gamma \succ \Pi$ and any set of sampling points T the series $S(f, \Gamma, T)$ is absolutely convergent.

Now we can introduce the definition of Riemann–Lebesgue integral.

Definition 2.5 A function $f : \Omega \rightarrow X$ is called Riemann–Lebesgue integrable on a measurable set $A \subset \Omega$, if there exists a point $x \in X$, such that for any $\epsilon > 0$ there exists a partition Π of A , such that for any finer partition $\Gamma \succ \Pi$ and any set of sampling points T , $\|S(f, \Gamma, T) - x\| < \epsilon$, and the sum $S(f, \Gamma, T)$ is absolutely convergent. The point x is called the Riemann–Lebesgue integral of f over A and is denoted as usual, $\int_A f(t)dt$.

Let's note a few simple properties of Riemann–Lebesgue integral:

1. Riemann–Lebesgue integral is additive: if functions f and g are Riemann–Lebesgue integrable, then $f + g$ also has this property and $\int(f + g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.
2. If a function f is Riemann–Lebesgue integrable over a set A , it is also Riemann–Lebesgue integrable over any measurable subset of A .
3. As a function of a set, Riemann–Lebesgue integral is a countably-additive measure of bounded variation.
4. If $f : \Omega \rightarrow X$ is a Riemann–Lebesgue integrable function and $T : X \rightarrow Y$ is a continuous operator, then the composition $Tf : \Omega \rightarrow Y$ is also a Riemann–Lebesgue integrable function.
5. If $f : \Omega \rightarrow X$ is a Riemann–Lebesgue integrable function, then $f \in \overline{L}_1(\Omega, \Sigma, \mu, X)$.

Definition 2.6 The space $RL_1(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ is the subspace of $\overline{L}_1(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ that consists of all Riemann–Lebesgue integrable functions.

RL_1 is a closed subspace of $\overline{L}_1$ and therefore is a Banach space.

Even if a function is not Riemann–Lebesgue integrable, we can consider the set of partial limits of its Riemann–Lebesgue integral sums:

Definition 2.7 Let $f : \Omega \rightarrow X$ be an arbitrary function with values in a Banach space X . We will say that a point $x \in X$ belongs to the limit set $I(f)$, if for any $\epsilon > 0$ and any partition Π there exists a finer partition $\Gamma \succ \Pi$ with a set of sampling points T , such that $\|S(f, \Gamma, T) - x\| < \epsilon$ and $S(f, \Gamma, T)$ is an absolute integral sum. In other words, $I(f)$ is the set of partial limits of Riemann–Lebesgue integral sums of f .

Theorem 2.8 Let $f \in \overline{L_1}(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ be a function and let $g \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ be its Lebesgue-integrable majorant. Let $\{\Pi_n\}$ be a sequence of partitions, for each of which the upper integral sum of g is absolutely convergent. Assume that for any choice of sampling points T_n for Π_n , the sequence $S(f, \Pi_n, T_n)$ converges to a certain element $x \in X$. Then f is RL -integrable and $x = \int f d\mu$.

The following useful facts follow from the above theorem:

Theorem 2.9 Let a bounded function $f : [0; 1] \rightarrow X$ be Riemann-integrable. Then it is also Riemann–Lebesgue integrable and the values of both integrals coincide.

Theorem 2.10 Let a function $f : [0; 1] \rightarrow X$ be Bochner-integrable. Then it is also Riemann–Lebesgue integrable and the values of both integrals coincide.

Riemann–Lebesgue integral also has the following properties:

1. A Riemann–Lebesgue integrable function is also Pettis-integrable and the values of both integrals coincide.
2. If the space X is separable, then Riemann–Lebesgue integrability is equivalent to Bochner integrability.

2.2. RL_1 Space. The RL_1 space is a closed subspace in $\overline{L_1}$. The L_1 space (the space of all Bochner-integrable functions) is, in turn, a closed subspace in RL_1 . To investigate when L_1 is complemented in RL_1 we introduce the following definition.

Definition 2.11 Let $f : \Omega \rightarrow X$ be a Riemann–Lebesgue integrable function. A function $g : \Omega \rightarrow X$ is called a Bochner-integrable equivalent for f , if g is Bochner-integrable and for any measurable set $A \subset \Omega$,

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$$

(Riemann–Lebesgue integral).

It is easy to see that if any function $f \in RL_1(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ has a Bochner-integrable equivalent then $L_1(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ is complemented in $RL_1(\Omega, \Sigma, \mu, X)$. The following theorem gives a sufficient condition of existence of a Bochner-integrable equivalent.

Theorem 2.12 Let a Banach space X have the following property: every separable subspace of X is contained in a separable complemented subspace of X (the class of such spaces includes, for example, all weakly compactly generated spaces). Then any Riemann–Lebesgue integrable function $f : \Omega \rightarrow X$ has a Bochner-integrable equivalent.

The following theorem gives a sufficient condition for L_1 to coincide with RL_1 :

Theorem 2.13 *Let X is a Banach space with the following property: every Riemann–Lebesgue integrable function with values in X has a Bochner-integrable equivalent. Assume that there exists a countable set of functionals in X^* , which separates points of X . Then every Riemann–Lebesgue integrable function with values in X is also Bochner-integrable.*

2.3. The Limit Set $I(f)$. The following facts have been shown about the limit set $I(f)$.

Theorem 2.14 *Let (Ω, Σ, μ) be a measure space, X a weakly compactly generated Banach space and $f \in \overline{L}_1(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ an arbitrary function. Then $I(f)$ is not empty.*

Theorem 2.15 *The limit set $I(f)$ is always convex.*

Theorem 2.16 *For any convex closed set S of no more than continuum cardinality in a Banach space X , there exists a function $f : [0; 1] \rightarrow X$, so that $I(f) = S$.*

REFERENCES

1. J. Diestel, J.J Uhl, Jr. Vector Measures. – AMS: Providence, Rhode Island, 1997.
2. Kadets V.M. Non-differentiable indefinite Pettis integrals // Quaestiones Mathematicae. – 1994. – 17. – P. 137–139.

Начальная задача для некоторых квазилинейных
дифференциально-алгебраических уравнений

И. Г. Худошин

Харьковский государственный университет

В статье получены достаточные условия разрешимости начальной задачи для уравнения $A \frac{dx}{dt} + Bx(t) = f(t, x)$, $a \leq t \leq b$ в гильбертовых пространствах, в случае, когда пучок $\lambda A + B$ регулярен, точка $\lambda = \infty$ является полюсом резольвенты $(\lambda A + B)^{-1}$ и соответствующее корневое подпространство X_2 конечномерно. Получено представление спектральных проекторов с помощью биортогональных цепочек собственных и присоединенных векторов прямого и сопряженного пучка.

В гильбертовых пространствах X , Y рассматривается дифференциальное уравнение

$$A \frac{dx}{dt} + Bx(t) = f(t, x), a \leq t \leq b \quad (1)$$

где $A, B \in L[X, Y]$, $f \in C(\Omega, Y)$, Ω — открытое множество в $[a, b] \times X$, функция $x(t)$ принимает значения в X . В статье получены достаточные условия разрешимости начальной задачи для уравнения (1) в случае, когда пучок $\lambda A + B$ регулярен, бесконечно удаленная точка является полюсом резольвенты $(\lambda A + B)^{-1}$ и корневое подпространство X_2 , отвечающее точке $\lambda = \infty$, конечномерно. В работе [1] рассмотрен случай $\|(A + B)^{-1}\| = O(1)$, $\lambda \rightarrow \infty$.

В работе [2] рассмотрен случай полюса в точке $\lambda = \infty$ для резольвенты $(\lambda T + I)^{-1}$, отвечающей приведенному уравнению

$$T \frac{du}{dt} + u(t) = \varphi(t, Nu) \quad (2)$$

Известно, что подпространства X_2 и $Y_2 = BX_2$ образуют инвариантную пару относительно пучка $\lambda A + B$. Существуют такие их прямые дополнения X_1 и Y_1 , которые также образуют инвариантную пару относительно пучка $\lambda A + B$ [3, 4, 5]:

$$AX_i \subset Y_i, BX_i \subset Y_i, i = 1, 2.$$

Пусть резольвента $(\lambda A + B)^{-1}$ имеет в точке $\lambda = \infty$ полюс порядка $n - 1$. Тогда существует каноническая система $\{\varphi_j^i\}$ собственных и присоединенных

векторов пучка $\lambda A + B$, отвечающих точке $\lambda = \infty$ и образующих базис подпространства X_2 [6, 7]:

$$A\varphi_1^i = 0, A\varphi_2^i = B\varphi_1^i, \dots, A\varphi_{r(i)}^i = B\varphi_{r(i)-1}^i, B\varphi_{r(i)}^i \notin \text{Im}(A), i = 1, \dots, k.$$

Через X_2^m обозначим линейную оболочку цепочек длины $r(i) = m$ из канонической системы $\{\varphi_j^i\}$, $m = 1, \dots, n$. Тогда

$$X_2 = X_2^1 \oplus \dots \oplus X_2^n.$$

Подпространства X_2^m в свою очередь представим в виде прямой суммы

$$X_2^m = X_2^{m0} \oplus \dots \oplus X_2^{m, m-1},$$

где X_2^{mk} обозначает линейную оболочку векторов высоты k из всех цепочек длины m . Ясно, что X_2^{m0} есть подпространство собственных векторов из X_2^m , и X_2^{mk} ($k > 0$) — подпространство присоединенных векторов высоты k из X_2^m . Заметим, что $X_2^1 = X_2^{10}$. Положим $Y_2^{mk} = BX_2^{mk}$. Тогда спектральная пара подпространств X_2, Y_2 , отвечающая точке спектра пучка $\lambda = \infty$, представляется в виде прямой суммы

$$X_2 = X_2^{10} \oplus X_2^{20} \oplus X_2^{21} \oplus \dots \oplus X_2^{n0} \oplus \dots \oplus X_2^{n, n-1},$$

$$Y_2 = Y_2^{10} \oplus Y_2^{20} \oplus Y_2^{21} \oplus \dots \oplus Y_2^{n0} \oplus \dots \oplus Y_2^{n, n-1}.$$

Построим проекторы на выделенные подпространства. Т.к. $\{\varphi_j^i\}, \{\psi_j^i = B\varphi_j^i\}$ есть базисы в подпространствах X_2, Y_2 соответственно, то проекторы $P_2 : X \rightarrow X_2, Q_2 : Y \rightarrow Y_2$ можно искать в виде

$$P_2 x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r(i)} \langle x, f_j^i \rangle \varphi_j^i, \quad Q_2 y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r(i)} \langle y, g_j^i \rangle \psi_j^i, \quad (3)$$

где f_j^i, g_j^i — некоторые векторы. Векторы f_j^i, g_j^i ищутся из условий инвариантности пар подпространств X_k, Y_k ($k = 1, 2$)

$$Q_2 A = A P_2, \quad Q_2 B = B P_2, \quad (4)$$

и условий идемпотентности проекторов

$$P_2^2 = P_2, \quad Q_2^2 = Q_2. \quad (5)$$

По теореме Руткаса-Радбель [3, 4, 5] в наших предположениях существуют единственные проекторы P_2, Q_2 со свойствами (4). Они называются спектральными проекторами типа Рисса для пучка $\lambda A + B$ и строятся с помощью контурных интегралов. Подставляя (3) в (4), получим

$$A^* g_{r(i)}^i = 0, A^* g_{r(i)-1}^i = f_{r(i)}^i, \dots, A^* g_1^i = f_2^i; i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

$$B^* g_1^i = f_1^i, \dots, B^* g_{r(i)}^i = f_{r(i)}^i; i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Из (6), (7) следует

$$A^* g_{r(i)}^i = 0, A^* g_{r(i)-1}^i = B^* g_{r(i)}^i, \dots, A^* g_1^i = B^* g_2^i; i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Таким образом g_j^i есть собственные и присоединенные векторы пучка $\lambda A^* + B^*$, отвечающие точке $\lambda = \infty$. Подставляя (3) в (5), получим, что

$$\langle \varphi_j^i, f_m^k \rangle = 1 \text{ при } i = k, j = m, \quad \langle \varphi_j^i, f_m^k \rangle = 0 \text{ в остальных случаях.}$$

$$\langle \psi_j^i, g_m^k \rangle = 1 \text{ при } i = k, j = m, \quad \langle \psi_j^i, g_m^k \rangle = 0 \text{ в остальных случаях.}$$

Мы доказали следующее утверждение, облегчающее практическое вычисление спектральных проекторов.

Лемма 1. Пусть резольвента $(\lambda A + B)^{-1}$ имеет полюс в точке $\lambda = \infty$ и соответствующее спектральное подпространство X_2 конечномерно. Тогда спектральные проекторы P_2, Q_2 типа Рисса в точке $\lambda = \infty$ могут быть представлены в виде (3), где $\{\varphi_j^i\}$ — канонический базис собственных и присоединенных векторов пучка $\lambda A + B$ в точке $\lambda = \infty$, $\{g_j^i\}$ — биортогональный канонический базис собственных и присоединенных векторов пучка $\lambda A^* + B^*$ в точке $\lambda = \infty$, и $\psi_j^i = B \varphi_j^i, f_j^i = B^* g_j^i$.

Проекторы $P_1 : X \rightarrow X_1, Q_1 : Y \rightarrow Y_1$ возьмем в виде

$$P_1 = I_X - P_2, \quad Q_1 = I_Y - Q_2, \quad (9)$$

а проекторы

$$P_2^{mk} : X \rightarrow X_2^{mk}, \quad Q_2^{mk} : Y \rightarrow Y_2^{mk} \quad (10)$$

возьмем как соответствующие частичные суммы в выражениях (3). Операторы $A_1 = AP_1 : X_1 \rightarrow Y_1, B_2 = BP_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ обратимы [3,4,5].

Рассмотрим случай полюса резольвенты $(\lambda A + B)^{-1}$ первого порядка в точке $\lambda = \infty$. Здесь максимальная длина цепочек есть $n = 2$. Заметим, что тогда резольвента $(A + \mu B)^{-1}$ имеет в точке $\mu = 0$ полюс порядка два.

Теорема 1. Пусть бесконечно удаленная точка является простым полюсом резольвенты $(\lambda A + B)^{-1}$, соответствующее корневое подпространство X_2 , отвечающее точке $\lambda = \infty$, конечномерно, и $P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_2^{10}, Q_2^{10}, P_2^{20}, Q_2^{20}, P_2^{21}, Q_2^{21}$ — проекторы (3), (9), (10).

Пусть также выполняются следующие условия:

1) $f(t, x)$ непрерывна в окрестности Ω точки (t_0, x^0) вместе со своей производной Фреше $\frac{\partial f}{\partial x}$.

2) Оператор $BP_2^{10} - (Q_2^{10} + Q_2^{21}) \frac{\partial f}{\partial x}(t_0, x^0) = L : X_2^{10} \oplus X_2^{20} \rightarrow Y_2^{10} \oplus Y_2^{21}$ обратим.

Тогда начальная задача

$$A \frac{dx}{dt} + Bx(t) = f(t, x) \quad (11)$$

$$(P_1 + P_2^{21})x(t_0) = (P_1 + P_2^{21})x^0 \quad (12)$$

имеет единственное решение $x(t)$, определенное в некоторой окрестности точки t_0 .

Доказательство. Неизвестную функцию $x(t)$ представим в виде суммы компонент

$$x = x_1 + x_2^{10} + x_2^{20} + x_2^{21}$$

где $x_1 = P_1 x$, $x_2^{10} = P_2^{10} x$, $x_2^{20} = P_2^{20} x$, $x_2^{21} = P_2^{21} x$. Подставляя это разложение в (11), действуя на (11) проекторами $Q_1, Q_2^{10}, Q_2^{20}, Q_2^{21}$, получаем

$$A_1 \frac{dx_1}{dt} + B_1 x_1(t) = Q_1 f(t, x), \quad (13)$$

$$A_{21} \frac{dx_2^{21}}{dt} + B_2 x_2^{20}(t) = Q_2^{20} f(t, x), \quad (14)$$

$$B_2 x_2^{10}(t) = Q_2^{10} f(t, x), \quad (15)$$

$$B_2 x_2^{21}(t) = Q_2^{21} f(t, x). \quad (16)$$

Легко видеть, что оператор $A_{21} = AP_2^{21} : X_2^{21} \rightarrow Y_2^{20}$ биективен. Следовательно, он обратим.

Равенства (15), (16) запишем в виде

$$B(P_2^{10} + P_2^{21})x(t) = (Q_2^{10} + Q_2^{21})f(t, x).$$

Введем переменную $h = x_2^{10} + x_2^{20}$. Тогда, в силу условия 2), по теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки $(t_0, (P_1 + P_2^{21})x^0)$ существует функция $h(t, x_1, x_2^{21})$, такая, что

$$B(P_2^{10} + P_2^{21})h(t, x_1, x_2^{21}) = (Q_2^{10} + Q_2^{21})f(t, h(t, x_1, x_2^{21}) + x_1 + x_2^{21})$$

в этой окрестности. При этом $h, \frac{\partial h}{\partial x_1}, \frac{\partial h}{\partial x_2^{21}}$ непрерывны в этой окрестности. Подставляя найденные h и $P_2^{20}h = x_2^{20}$ в (13), (14), получаем систему дифференциальных уравнений относительно x_1, x_2^{21} с обратимым оператором при производной:

$$A_1 \frac{dx_1}{dt} + Bx_1(t) = Q_1 f(t, x_1 + x_2^{21} + h(t, x_1, x_2^{21})),$$

$$A_{21} \frac{dx_2^{21}}{dt} + BP_2^{20}h(t, x_1, x_2^{21}) = Q_2^{20} f(t, x_1 + x_2^{21} + h(t, x_1, x_2^{21})).$$

Правая часть системы непрерывна по t и имеет непрерывные производные Фреше по x_1, x_2^{21} , а значит липшицева в окрестности точки $(t_0, (P_1 + P_2^{21})x^0)$. Следовательно, полученная система имеет единственное решение, определенное в окрестности точки t_0 .

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай полюса резольвенты $(\lambda A + B)^{-1}$ произвольного порядка в точке $\lambda = \infty$.

Теорема 2. Пусть бесконечно удаленная точка является полюсом резольвенты $(\lambda A + B)^{-1}$ порядка $n - 1$, соответствующее корневое подпространство X_2 конечномерно и $P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_2^{mk}, Q_2^{mk}, k = 1, \dots, n - 1; m = 1, \dots, n$ проекторы (3), (9), (10). Обозначим $x_2^{mk} = P_2^{mk}x$.

Пусть также выполняются следующие условия:

- 1) $f(t, x) \in C([a, b] \times E, Y), E \subseteq X$;
- 2) $Q_2^{mk}f(t, x) = Q_2^{mk}f(t, x_2^{mk}, \dots, x_2^{m, m-1}) m = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n - 1$;
- 3) $Q_2^{mk}f(t, x_2^{mk}, \dots, x_2^{m, m-1}) \in C^k([a, b], Y)$
 $\forall x_2^{mp} \in C^p([a, b], X), p = k, \dots, m - 1$;
- 4) $Q_2^{mk}f(t, x)$ липшицева по x_2^{mk} в норме пространства $C^k([a, b], X)$ с константой $L < \frac{1}{\|B\|}$.

- 5) $Q_1f(t, x)$ липшицева по x в норме пространства $C([a, b], X)$.

Тогда $\forall x^0 \in E, t_0 \in [a, b]$ начальная задача

$$A \frac{dx}{dt} + Bx(t) = f(t, x), \quad (17)$$

$$P_1x(t_0) = P_1x^0 \quad (18)$$

имеет единственное решение, определенное в некоторой окрестности точки t_0 .

Доказательство. Доказательство проведем для случая, когда корневое подпространство X_2 состоит только из цепочек длины два. В этом случае $X_2 = X_2^{20} \oplus X_2^{21}, Y_2 = Y_2^{20} \oplus Y_2^{21}$. Неизвестную вектор-функцию представим в виде суммы компонент

$$x(t) = x_1(t) + x_2^{20}(t) + x_2^{21}(t),$$

где $x_1(t) = P_1x(t), x_2^{20}(t) = P_2^{20}x(t), x_2^{21}(t) = P_2^{21}x(t)$. Подставляя это представление в (18) и действуя на него проекторами Q_1, Q_2^{20}, Q_2^{21} , получим систему уравнений

$$A_1 \frac{dx_1}{dt} + B_1x_1(t) = Q_1f(t, x), \quad (19)$$

$$A_2 \frac{dx_2^{21}}{dt} + B_2x_2^{20}(t) = Q_2^{20}f(t, x_2^{20}, x_2^{21}), \quad (20)$$

$$B_2x_2^{21}(t) = Q_2^{21}f(t, x_2^{21}). \quad (21)$$

Из условий 3), 4) теоремы следует, что отображение $B_2^{-1}Q_2^{21}f(t, \cdot)$ является сжимающим в пространстве $C^1([a, b], X)$. Тогда по теореме о неподвижной точке существует единственная функция $x_2^{21}(t) \in C^1([a, b], X)$, являющаяся решением (21). Аналогично, $B_2^{-1}(Q_2^{21}f(t, \cdot, y) - A_2y'(t))$ является сжимающим в пространстве $C([a, b], X)$ для любого $y(t) \in C^1([a, b], X)$. Подставляя решение (21) в (20) получим, что существует единственная функция $x_2^{20}(t) \in C([a, b], X)$ являющаяся решением (20). Подставляя $x_2^{20}(t), x_2^{21}(t)$ в (19) и умножая (19) на A_1^{-1} , получим обыкновенное дифференциальное уравнение с непрерывной, липшицевой по x правой частью. Это уравнение имеет

единственное решение для любого начального вектора $x_1(t_0) = P_1(x^0)$, определенное в некоторой окрестности t_0 .

Теорема доказана.

Теоремы 1,2 для уравнения (1) с двумя операторами A, B являются аналогами теорем 6.2, 6.1 из работы [2], полученных для приведенного уравнения (2) с одним оператором T .

ЛИТЕРАТУРА

1. Favini A., Plazzi P. Some Results Concerning the Abstract Degenerate Nonlinear Equation $D_t Mu(t) + Lu(t) = f(t, Ku(t))$. // Calculus, Systems, Signal Process. – 1986. – V. 5, 2. – P. 261-274.
2. Favini A., Rutkas A. Existence and uniqueness of solution of some abstract degenerate nonlinear equation. // Differential Integral Equations. – 1999. – 12(4). – P. 373-394.
3. Руткас А. Г. Задача Коши для уравнения $A \frac{dx}{dt} + Bx(t) = f(t)$. // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11, 11. – С. 1996-2010.
4. Радбель Н. И. О начальном многообразии и диссипативности задачи Коши для уравнения $A \frac{dx}{dt} + Bx(t) = 0$. // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15, 6. – С. 1142-1143.
5. Радбель Н. И. Упорядоченные пары линейных операторов и задача Коши для уравнения $A \frac{dx}{dt} + Bx(t) = 0$ в банаховом пространстве. // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Донецк, ДонГУ – 1984. – С. 133.
6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. // Наука, Москва. – 1966. – С. 576.
7. Келдыш М. В. Избранные труды. // Наука, Москва. – 1985. – С. 477.

Существование и единственность базисных решений электродинамической системы

Е. В. Попова

Харьковский государственный университет

Немонохроматические поля в цилиндрическом волноводе с неоднородной нестационарной средой раскладываются в ряд по счетной системе специальных модовых полей. Приведены условия существования и единственности базисных решений смешанной задачи для уравнений Максвелла.

Введение

Вопрос существования обобщенных решений смешанной задачи для уравнений Максвелла в ограниченной области с идеально проводящей границей был исследован в [1] для классического случая неоднородной нестационарной среды без дисперсии. В цилиндрическом волноводе с диспергирующей средой, рассмотренной в [2], проекции векторов поля на поперечное сечение волновода формально представлялись разложениями по базисам из собственных векторов самосопряженных операторов, индуцированных уравнениями Максвелла. Для среды с конкретным законом пространственной дисперсии [3], а затем с достаточно общими дисперсионными операторами [4, 5] методом разделения переменных была выделена счетная система базисных решений – специальных модовых полей, в ряд по которым раскладывались решения электродинамической задачи. В данной статье исследуются свойства проекций решений на подпространства Вейля [6]. Получены условия существования и единственности базисных решений смешанной задачи для уравнений Максвелла.

1. Разложение поля по системе модовых состояний

Рассматривается электромагнитное поле в неоднородной нестационарной среде, заполняющей цилиндрический волновод с идеально проводящей боковой поверхностью Σ . Односвязное поперечное сечение $S = \{(x, y)\}$ ограничено кусочно-гладким контуром ∂S . Векторы напряженностей $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, индукций $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ электрического и магнитного полей удовлетворяют уравнениям

Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.2)$$

Свободные заряды и внешние источники поля отсутствуют. Граничные условия на поверхности волновода соответствуют идеальному металлу :

$$[\mathbf{E}, \mathbf{n}]|_{\Sigma} = 0, \quad (\mathbf{H}, \mathbf{n})|_{\Sigma} = 0, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{n}$ - орт нормали к поверхности Σ . В материальных уравнениях среды

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{H} \quad (1.4)$$

матричные преобразования $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ (индукционные операторы [4]) полагаются диагональными :

$$\mathbf{D} = (D \oplus D \oplus D_{\parallel}), \quad \mathbf{B} = (B \oplus B \oplus B_{\parallel}). \quad (1.5)$$

Выделив поперечные и продольные составляющие векторов поля $\mathbf{E} = \mathbf{E} + zE_z$, $\mathbf{H} = \mathbf{H} + zH_z$ (z - орт оси Z волновода), можем записать $\mathbf{D}\mathbf{E} = (DE_x, DE_y, D_{\parallel}E_z)' = \mathbf{D}\mathbf{E} + zD_{\parallel}E_z$, $\mathbf{B}\mathbf{H} = (BH_x, BH_y, B_{\parallel}H_z)' = \mathbf{B}\mathbf{H} + zB_{\parallel}H_z$. Здесь предполагается, что $D, D_{\parallel}, B, B_{\parallel}$ - линейные интегро-дифференциальные преобразования над скалярными функциями от переменных z, t , позволяющие учитывать временную дисперсию и пространственную дисперсию среды вдоль оси Z волновода. Естественные области определения линейных индукционных операторов $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ уточняются в каждом конкретном случае.

Перепишем граничные условия (1.3) для поперечных и продольных составляющих векторов поля :

$$[\mathbf{E}, \mathbf{n}]|_{\partial S} = 0, \quad E_z|_{\partial S} = 0, \quad (\mathbf{H}, \mathbf{n})|_{\partial S} = 0. \quad (1.6)$$

Ограниченность энергии поля в поперечном сечении S волновода отвечает требованию $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_2^2(S) \oplus 0$ и $E_z, H_z \in L_2(S)$ при фиксированных z, t . Будем рассматривать такие индукционные операторы $\mathbf{D}, \mathbf{B}$ (1.5) и непрерывно-дифференцируемые (гладкие) решения $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ (непрерывные вплоть до границы Σ), для которых левые и правые части уравнений (1.1), (1.2) также интегрируемы с квадратом в области S при фиксированных z, t .

В пространстве $L_2^3(S) = L_2^2(S) \oplus L_2(S)$ построим проекции решений $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ задачи (1.1)-(1.5) на подпространства, индуцированные разбиением Вейля [6] пространства $L_2^2(S)$ для плоской односвязной области S . Введем в $L_2^2(S) \oplus 0 \subset L_2^3(S)$ линейалы гладких потенциальных векторов

$$\overset{\circ}{G} = \{\nabla\varphi(x, y), \varphi \in C^2(S), \varphi|_{\partial S} = 0\}, \quad \widetilde{G} = \{\nabla\psi(x, y), \psi \in C^2(S)\}$$

и гладких соленоидальных векторов

$$\overset{\circ}{J} = \{[\mathbf{z}, \nabla\varphi(x, y)], \varphi \in C^2(S), \varphi|_{\partial S} = 0\}, \quad \widetilde{J} = \{[\mathbf{z}, \nabla\psi(x, y)], \psi \in C^2(S)\}.$$

Подпространства, образованные замыканиями введенных линеалов, обозначим соответственно $\overset{\circ}{G}, G$ и $\overset{\circ}{J}, J$. По теореме Вейля элементами подпространства U , лежащего в пересечении G и J , являются градиенты гармонических функций. Имеет место следующее ортогональное разложение пространства $\mathcal{L} = L_2^2(S) \oplus 0 : \mathcal{L} = \overset{\circ}{G} + U + \overset{\circ}{J}$. Соответственно

$$\mathcal{L} = \overset{\circ}{G} + J, J = U + \overset{\circ}{J} \quad \text{и} \quad \mathcal{L} = G + \overset{\circ}{J}, G = \overset{\circ}{G} + U. \quad (1.7)$$

Гладкие вектор-функции $\mathcal{E}, \mathcal{H}$, удовлетворяющие граничному условию (1.6), представим при фиксированных z, t в виде сумм проекций, отвечающих разложениям (1.7):

$$\mathcal{E} = \mathbf{E}_{\overset{\circ}{G}} + \mathbf{E}_J + z\mathbf{E}_z, \quad \mathcal{H} = \mathbf{H}_{\overset{\circ}{J}} + \mathbf{H}_G + z\mathbf{H}_z. \quad (1.8)$$

Используя обозначения $\nabla_r = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0)$, $\text{div}_r \mathbf{F} = (\nabla_r, \mathbf{F})$ и $\Delta_r = \text{div} \nabla_r$, построим проекции (1.8) векторов $\mathcal{E}, \mathcal{H}$ [7]:

$$\mathbf{E}_{\overset{\circ}{G}} = \nabla_r \Phi_E, \mathbf{E}_J = [\nabla_r \Psi_E, z], \quad \mathbf{H}_{\overset{\circ}{J}} = [z, \nabla_r \Phi_H], \mathbf{H}_G = \nabla_r \Psi_H, \quad (1.9)$$

где скалярные функции $\Phi_E, \Phi_H \in C^2(S)$ при фиксированных z, t удовлетворяют краевым задачам Дирихле, а $\Psi_E, \Psi_H \in C^2(S)$ – краевым задачам Неймана для уравнений Пуассона:

$$\begin{aligned} \Delta_r \Phi_E &= \text{div}_r \mathbf{E}, \quad \Phi_E|_{\partial S} = 0, & \Delta_r \Phi_H &= \text{div}_r [\mathbf{H}, z], \quad \Phi_H|_{\partial S} = 0, \\ \Delta_r \Psi_E &= \text{div}_r [z, \mathbf{E}], \quad \frac{\partial}{\partial n} \Psi_E|_{\partial S} = 0, & \Delta_r \Psi_H &= \text{div}_r \mathbf{H}, \quad \frac{\partial}{\partial n} \Psi_H|_{\partial S} = 0. \end{aligned}$$

В пространстве $L_2(S)$ выберем вещественные ортонормированные базисы

$$\{\varphi_i(x, y)\}_1^\infty, \quad \{\psi_j(x, y)\}_0^\infty \quad (1.10)$$

из собственных функций оператора $-\Delta_r$ с граничными условиями Дирихле и Неймана соответственно. Обозначим через $\alpha_i^2 > 0$ и $\gamma_j^2 \geq 0$ собственные значения, которым отвечают собственные функции φ_i и ψ_j . При этом $\gamma_0 = 0$ отвечает $\psi_0 \equiv \text{const}$. Разложим скалярные функции Φ_E, Φ_H, E_z и Ψ_E, Ψ_H, H_z по выделенным базисам:

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \sum_{i=1}^\infty a_i(z, t) \varphi_i(x, y), \quad \Phi_H = \sum_{i=1}^\infty b_i(z, t) \varphi_i(x, y), \quad E_z = \sum_{i=1}^\infty g_i(z, t) \varphi_i(x, y), \\ \Psi_E &= \sum_{j=0}^\infty e_j(z, t) \psi_j(x, y), \quad \Psi_H = \sum_{j=0}^\infty h_j(z, t) \psi_j(x, y), \quad H_z = \sum_{j=0}^\infty f_j(z, t) \psi_j(x, y). \end{aligned}$$

Ряды для $\Phi_E, \Phi_H \in C^2(S)$, $\Phi_E|_{\partial S} = \Phi_H|_{\partial S} = 0$ и $\Psi_E, \Psi_H \in C^2(S)$, $\frac{\partial}{\partial n} \Psi_E|_{\partial S} = \frac{\partial}{\partial n} \Psi_H|_{\partial S} = 0$ можно дифференцировать по x, y один раз [8], причем полученные ряды $\nabla_r \Phi_E = \sum_{i=1}^\infty a_i \nabla \varphi_i$, $\nabla_r \Phi_H = \sum_{i=1}^\infty b_i \nabla \varphi_i$, $\nabla_r \Psi_E = \sum_{j=1}^\infty e_j \nabla \psi_j$,

$\nabla_r \Psi_H = \sum_{j=1}^{\infty} h_j \nabla \psi_j$ сходятся в $\mathcal{L}$. Так, в соответствии с (1.8), (1.9) произвольные гладкие вектор-функции $\mathcal{E}, \mathcal{H}$, удовлетворяющие граничным условиям (1.6), можно представить при каждом (z, t) сходящимися в $L_2^3(S)$ рядами:

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} a_i(z, t) \nabla_{\perp} \varphi_i(x, y) \\ g_i(z, t) \varphi_i(x, y) \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{\infty} \begin{pmatrix} e_j(z, t) [\nabla \psi_j(x, y), \mathbf{z}]_{\perp} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} b_i(z, t) [\mathbf{z}, \nabla \varphi_i(x, y)]_{\perp} \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{\infty} \begin{pmatrix} h_j(z, t) \nabla_{\perp} \psi_j(x, y) \\ f_j(z, t) \psi_j(x, y) \end{pmatrix} + \\ + \mathbf{z} f_0(z, t) \psi_0,$$

где $a_i = (\Phi_E, \varphi_i)$, $b_i = (\Phi_H, \varphi_i)$, $g_i = (E_z, \varphi_i)$, $e_j = (\Psi_E, \psi_j)$, $h_j = (\Psi_H, \psi_j)$, $f_j = (H_z, \psi_j)$ и $f_0 = (H_z, \psi_0)$ (" $\perp$ " - вложение вектора из $R^2 \oplus 0$ в R^2).

Лемма 1.1. Каждая из систем вектор-функций (1.12), (1.13)

$$\left\{ \frac{1}{\alpha_i} \nabla \varphi_i \right\}_1^{\infty} \cup \left\{ \frac{1}{\gamma_j} [\nabla \psi_j, \mathbf{z}] \right\}_1^{\infty}, \quad (1.12)$$

$$\left\{ \frac{1}{\gamma_j} \nabla \psi_j \right\}_1^{\infty} \cup \left\{ \frac{1}{\alpha_i} [\mathbf{z}, \nabla \varphi_i] \right\}_1^{\infty} \quad (1.13)$$

образует ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{L}$.

Доказательство. Достаточно показать, что система $\left\{ \frac{1}{\alpha_i} \nabla \varphi_i \right\}_1^{\infty}$ образует ортонормированный базис в подпространстве $\overset{\circ}{G}$, а система $\left\{ \frac{1}{\gamma_j} \nabla \psi_j \right\}_1^{\infty}$ - в подпространстве G . Тогда наборы векторов $\left\{ \frac{1}{\alpha_i} [\mathbf{z}, \nabla \varphi_i] \right\}_1^{\infty}$ и $\left\{ \frac{1}{\gamma_j} [\nabla \psi_j, \mathbf{z}] \right\}_1^{\infty}$ являются ортонормированными базисами в подпространствах $\overset{\circ}{J}$ и J соответственно. Полнота в пространстве $\mathcal{L}$ каждой из систем (1.12), (1.13) следует из ортогональных разложений $\mathcal{L}$ (1.7).

Покажем, что в G плотны гладкие градиенты с нулевой нормальной составляющей на границе: $G = \{ \nabla \psi, \psi \in C^2(S), \frac{\partial}{\partial n} \psi|_{\partial S} = 0 \}$. Действительно, для любого гладкого финитного вектора $\mathbf{F} = \nabla \psi + [\mathbf{z}, \nabla \varphi]$ из $\mathcal{L} = G + \overset{\circ}{J}$, где $\nabla \psi \in \widetilde{G}$, $[\mathbf{z}, \nabla \varphi] \in \overset{\circ}{J}$, имеем: $(\mathbf{F}, \mathbf{n})|_{\partial S} = \frac{\partial}{\partial n} \psi|_{\partial S} + \frac{\partial}{\partial l} \varphi|_{\partial S} = \frac{\partial}{\partial n} \psi|_{\partial S} = 0$. Векторы $\mathbf{F}$ плотны во всем пространстве $\mathcal{L}$, $[\mathbf{z}, \nabla \varphi]$ - в $\overset{\circ}{J}$, откуда $\nabla \psi$ с $\frac{\partial}{\partial n} \psi|_{\partial S} = 0$ плотны в G . Для такого вектора $\nabla \psi$ из плотного в G линейала разложим функцию ψ в $L_2(S)$ по базису $\{\psi_j\}_0^{\infty}$: $\psi(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \psi_j(x, y)$. Дифференцируя ряд по x, y [8], получим $\nabla \psi = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \nabla \psi_j$. Следовательно, система $\{\nabla \psi_j\}_1^{\infty}$ полна в G . Ортогональность векторов системы вытекает из граничных условий и ортогональности в $L_2(S)$ функций набора $\{\psi_j\}_1^{\infty}$: $(\nabla \psi_j, \nabla \psi_k)_{\mathcal{L}} = \gamma_j^2 (\psi_j, \psi_k)_{L_2} = 0$, $j \neq k$, и $\|\psi_j\|^2 = \gamma_j^2$.

Аналогично доказывается ортогональность и полнота в подпространстве $\overset{\circ}{G}$ системы $\{\nabla\varphi_i\}_1^\infty$. Лемма доказана.

Выделим в пространстве $L_2^3(S) = L_2^2(S) \oplus L_2(S)$ два ортогональных базиса:

$$\{z\varphi_i, \nabla\varphi_i\}_1^\infty \cup \{[\nabla\psi_j, z]\}_1^\infty, \quad (1.14)$$

$$\{[z, \nabla\varphi_i]\}_1^\infty \cup z\psi_0 \cup \{z\psi_j, \nabla\psi_j\}_1^\infty. \quad (1.15)$$

Тогда (1.11) есть разложение гладких вектор-функций $\mathcal{E}, \mathcal{H}$, удовлетворяющих граничному условию (1.6), в ряд Фурье по базисам (1.14), (1.15) соответственно. Действительно, коэффициенты Фурье имеют вид:

$$a_i = \frac{1}{\mathfrak{x}_i^2}(\mathbf{E}, \nabla\varphi_i)_L = \frac{1}{\mathfrak{x}_i^2}(\nabla_r \Phi_E, \nabla\varphi_i)_L = (\Phi_E, \varphi_i)_{L_2},$$

$$b_i = \frac{1}{\mathfrak{x}_i^2}(\mathbf{H}, [z, \nabla\varphi_i])_L = \frac{1}{\mathfrak{x}_i^2}([z, \nabla_r \Phi_H], [\nabla\varphi_i])_L = (\Phi_H, \varphi_i)_{L_2},$$

$$e_j = \frac{1}{\gamma_j^2}(\mathbf{E}, [\nabla\psi_j, z])_L = \frac{1}{\gamma_j^2}([\nabla_r \Psi_E, z], [\nabla\psi_j, z])_L = (\Psi_E, \psi_j)_{L_2},$$

$$h_j = \frac{1}{\gamma_j^2}(\mathbf{H}, \nabla\psi_j)_L = \frac{1}{\gamma_j^2}(\nabla_r \Psi_H, \nabla\psi_j)_L = (\Psi_H, \psi_j)_{L_2}.$$

Рассмотрим произвольное решение задачи (1.1)-(1.5), считая вектор-функции $\mathcal{E}, \mathcal{H}, D\mathcal{E}, B\mathcal{H}$ достаточно гладкими так, чтобы интегро-дифференциальные операции $D, D_{||}, B, B_{||}$ по переменным z, t в (1.5) являлись перестановочными с интегро-дифференциальными операциями по x, y , а именно:

$$\int_S A F ds = A \int_S F ds, \quad \frac{\partial}{\partial x} A F = A \frac{\partial}{\partial x} F, \quad \frac{\partial}{\partial y} A F = A \frac{\partial}{\partial y} F \quad (1.16)$$

(A – любое из преобразований $D, D_{||}, B, B_{||}$; $F(x, y, z, t)$ – компонента поля). Используя разложение (1.11) решения $\mathcal{E}, \mathcal{H}$ в пространстве $L_2^3(S)$, спроектируем первое из векторных уравнений (1.1) на элементы базиса (1.14), второе – на элементы базиса (1.15). Скалярные уравнения (1.2) спроектируем в $L_2(S)$ на функции базисов $\{\varphi_i\}_1^\infty, \{\psi_j\}_0^\infty$ соответственно. После несложных преобразований с учетом (1.16) [7] получим системы уравнений для коэффициентов Фурье решения $\mathcal{E}, \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} D_{||} g_i + \mathfrak{x}_i^2 b_i &= 0, & \frac{\partial}{\partial t} D a_i + \frac{\partial b_i}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} B b_i + \frac{\partial a_i}{\partial z} &= g_i, & \frac{\partial}{\partial z} D_{||} g_i - \mathfrak{x}_i^2 D a_i &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} B_{||} f_j + \gamma_j^2 e_j &= 0, & \frac{\partial}{\partial t} B h_j + \frac{\partial e_j}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} D e_j + \frac{\partial h_j}{\partial z} &= f_j, & \frac{\partial}{\partial z} B_{||} f_j - \gamma_j^2 B h_j &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B_{||} f_0 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} B_{||} f_0 = 0. \quad (1.19)$$

Назовем *модовыми E-полями* $\mathcal{E}_E^i, \mathcal{H}_E^i$, *модовыми H-полями* $\mathcal{E}_H^j, \mathcal{H}_H^j$ ($i, j = 1, 2, \dots$) и *нуль-модовым полем* $\mathcal{E}_0, \mathcal{H}_0$ специальные решения задачи (1.1)-(1.5) вида:

$$\mathcal{E}_E^i = a_i(z, t) \nabla \varphi_i(x, y) + z g_i(z, t) \varphi_i(x, y), \quad \mathcal{H}_E^i = b_i(z, t) [z, \nabla \varphi_i(x, y)], \quad (1.20)$$

$$\mathcal{E}_H^j = e_j(z, t)[\nabla \psi_j(x, y), z], \quad \mathcal{H}_H^j = h_j(z, t)\nabla \psi_j(x, y) + z f_j(z, t)\psi_j(x, y), \quad (1.21)$$

$$\mathcal{E}_0 \equiv 0, \quad \mathcal{H}_0 = z f_0(z, t)\psi_0, \quad (1.22)$$

где функции φ_i, ψ_j от (x, y) есть элементы базисов (1.10), а функции a_i, b_i, g_i от (z, t) удовлетворяют системе (1.17), e_j, h_j, f_j от (z, t) – системе (1.18) и $f_0(z, t)$ – уравнениям (1.19). Гладкость функций переменных z, t в определении модовых полей уточним ниже. Счетная система специальных решений (1.20)–(1.22) получена методом разделения переменных (x, y) и (z, t) в работах [3, 4]. Таким образом, в разложении решения $\mathcal{E}, \mathcal{H}$ (1.11) слагаемые с индексами 0, i, j совпадают соответственно с модовыми нуль-, E-, H-полями и справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.2. Пусть преобразования $D, D_{||}, B, B_{||}$ в (1.5) удовлетворяют условию (1.16). Тогда гладкие решения $\mathcal{E}, \mathcal{H}$ задачи (1.1)–(1.5) раскладываются в ряд по системе модовых нуль-, E- и H-полей

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E} \\ \mathcal{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_0 \\ \mathcal{H}_0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_E^i \\ \mathcal{H}_E^i \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_H^j \\ \mathcal{H}_H^j \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

сходящийся при фиксированных значениях z, t в пространстве $L_2^6(S)$.

Суммы модовых E-полей и H-полей гладкого решения $\mathcal{E}, \mathcal{H}$ в соответствии с построением базисов в лемме 1 могут быть записаны в виде гладких проекций (1.9) на подпространства Вейля :

$$\mathcal{E}_E = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_E^i = \mathbf{E}_G + z E_z = \nabla_r \Phi_E + z E_z, \quad \mathcal{H}_E = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_E^i = \mathbf{H}_G = [z, \nabla_r \Phi_H],$$

$$\mathcal{E}_H = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{E}_H^j = \mathbf{E}_J = [\nabla_r \Psi_E, z], \quad \mathcal{H}_H = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_H^j = \mathbf{H}_G + z \hat{H}_z = \nabla_r \Psi_H + z \hat{H}_z,$$

где $\hat{H}_z = H_z - f_0 \psi_0$. Заметим, что поля $\mathcal{E}_E, \mathcal{H}_E$ и $\mathcal{E}_H, \mathcal{H}_H$ удовлетворяют граничным условиям (1.3).

Лемма 1.3. Поле $\mathcal{E}, \mathcal{H}$ есть гладкое решение задачи (1.1)–(1.5) тогда и только тогда, когда сумма модовых E-полей и сумма модовых H-полей в разложении (1.23) также являются решениями, ортогональными в $L_2^6(S)$.

Доказательство. Подставим гладкое решение в виде суммы (1.8) проекций (1.9) $\mathcal{E} = \nabla_r \Phi_E + [\nabla_r \Psi_E, z] + z E_z$, $\mathcal{H} = [z, \nabla_r \Phi_H] + \nabla_r \Psi_H + z H_z$ в систему уравнений (1.1), (1.2). После проектирования на ортогональные подпространства она распадется на уравнения (1.19) для нуль-модового поля и две не связанные между собой системы [7] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} D_{||} E_z &= \Delta_r \Phi_H, \quad \frac{\partial}{\partial t} D \nabla_r \Phi_E + \frac{\partial}{\partial z} \nabla_r \Phi_H = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} B \nabla_r \Phi_H + \frac{\partial}{\partial z} \nabla_r \Phi_E &= \nabla_r E_z, \quad \frac{\partial}{\partial z} D_{||} E_z + D \Delta_r \Phi_E = 0, \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} B_{||} \hat{H}_z &= \Delta_r \Psi_E, \quad \frac{\partial}{\partial t} B \nabla_r \Psi_H + \frac{\partial}{\partial z} \nabla_r \Psi_E = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} D \nabla_r \Psi_E + \frac{\partial}{\partial z} \nabla_r \Psi_H &= \nabla_r \hat{H}_z, \quad \frac{\partial}{\partial z} B_{||} \hat{H}_z + B \Delta_r \Psi_H = 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Проектированием векторных уравнений системы (1.24) ((1.25)) в пространстве $\overset{\circ}{G}$ (G) на элементы базиса $\{\nabla\varphi_i\}_1^\infty$ ($\{\nabla\psi_j\}_1^\infty$) и скалярных уравнений на базисные в $L_2(S)$ функции $\{\varphi_i\}_1^\infty$ ($\{\psi_j\}_0^\infty$) [7] получим с учетом разложения (1.11) систему (1.17) на функции от z, t модовых Е-полей (систему (1.18) на функции модовых Н-полей). Таким образом, если $\mathcal{E}, \mathcal{H}$ – гладкое решение уравнений (1.1), (1.2), то удовлетворяется система (1.24) для поля $\mathcal{E}_E, \mathcal{H}_E$ и (1.25) для поля $\mathcal{E}_H, \mathcal{H}_H$. Ортогональность $\mathcal{E}_E$ и $\mathcal{E}_H$ ($\mathcal{H}_E$ и $\mathcal{H}_H$) следует из ортогональности подпространств $\overset{\circ}{G}$ и J ($\overset{\circ}{J}$ и G). Необходимость доказана. Достаточность утверждения очевидна.

Рассмотрим индукционные операторы D, B (1.5), у которых блоки D, B имеют вид

$$D = D_0 + D_1 \frac{d}{dz}, \quad B = B_0 + B_1 \frac{d}{dz}, \quad (1.26)$$

где D_0, B_0 – обратимые операторы. В качестве D_0, B_0 обычно выбирают операторы умножения на функции проницаемостей $\varepsilon(z, t) > 0, \mu(z, t) > 0$, а интегро-дифференциальные преобразования D_1, B_1 учитывают временную дисперсию и пространственную дисперсию среды вдоль оси Z волновода ([3, 4, 5]). Как показано в [4] условие (1.26) позволяет свести систему (1.17) для Е-поля к уравнению относительно функции $g_i(z, t)$:

$$(I + \frac{\partial}{\partial z} D_0^{-1} D_1) \frac{\partial}{\partial t} B \frac{\partial}{\partial t} D_{\parallel} g_i + (\varepsilon_i^2 + \varepsilon_i^2 \frac{\partial}{\partial z} D_0^{-1} D_1 - \frac{\partial}{\partial z} D_0^{-1} \frac{\partial}{\partial z} D_{\parallel}) g_i = 0, \quad (1.27)$$

систему (1.18) для Н-поля – к уравнению относительно $f_j(z, t)$:

$$(I + \frac{\partial}{\partial z} B_0^{-1} B_1) \frac{\partial}{\partial t} D \frac{\partial}{\partial t} B_{\parallel} f_j + (\gamma_j^2 + \gamma_j^2 \frac{\partial}{\partial z} B_0^{-1} B_1 - \frac{\partial}{\partial z} B_0^{-1} \frac{\partial}{\partial z} B_{\parallel}) f_j = 0. \quad (1.28)$$

При этом функции a_i, b_i выражаются через g_i , а e_j, h_j – через f_j :

$$\varepsilon_i^2 a_i = -D_0^{-1} (D_1 \frac{\partial}{\partial t} B \frac{\partial}{\partial t} D_{\parallel} - \frac{\partial}{\partial z} D_{\parallel} + \varepsilon_i^2 D_1) g_i, \quad \varepsilon_i^2 b_i = -\frac{\partial}{\partial t} D_{\parallel} g_i, \quad (1.29)$$

$$\gamma_j^2 e_j = -B_0^{-1} (B_1 \frac{\partial}{\partial t} D \frac{\partial}{\partial t} B_{\parallel} - \frac{\partial}{\partial z} B_{\parallel} + \gamma_j^2 B_1) f_j, \quad \gamma_j^2 h_j = -\frac{\partial}{\partial t} B_{\parallel} f_j. \quad (1.30)$$

В качестве примера рассмотрим конечный отрезок волновода, заполненного неоднородной стационарной средой, между сечениями $z_1 = 0$ и $z_2 = l$. Стационарные индукционные операторы вида

$$D\mathcal{E} = \varepsilon(z)\mathcal{E} + z \int_0^l \mathcal{G}_1(z, \xi) E_z(x, y, \xi, t) d\xi,$$

$$B\mathcal{H} = \mu(z)\mathcal{H} + z \int_0^l \mathcal{G}_2(z, \xi) H_z(x, y, \xi, t) d\xi$$

позволяют учитывать пространственную дисперсию среды вдоль оси волновода интегральными операторами, действующими на продольные компоненты поля E_z и H_z . Операторы $Du = D_0 u = \varepsilon(z)u(z)$, $Bu = B_0 u = \mu(z)u(z)$ ($\varepsilon, \mu > 0$) и $D_{\parallel} u = \int_0^l \mathcal{G}_1(z, \xi) u(\xi) d\xi$, $B_{\parallel} u = \int_0^l \mathcal{G}_2(z, \xi) u(\xi) d\xi$ действуют на

функции $u(z)$ в пространстве $C[0, l]$. Пусть ядра $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ есть функции Грина операторов Штурма-Лиувилля $D_{\parallel}^{-1}v = \alpha_1(z)v(z) - \frac{d}{dz}\alpha_2(z)\frac{d}{dz}v(z)$, $B_{\parallel}^{-1}v = \beta_1(z)v(z) - \frac{d}{dz}\beta_2(z)\frac{d}{dz}v(z)$ ($\alpha_1, \beta_1 \in C[0, l]$, $\alpha_2, \beta_2 \in C^1[0, l]$, $\alpha_1, \beta_1 \geq 0$, $\alpha_2, \beta_2 > 0$), определенных на линейном многообразии дважды непрерывно дифференцируемых функций таких, что $v(0) = v(l) = 0$. Тогда $D_{\parallel}, B_{\parallel}$ – ограниченные линейные операторы, определенные на всем $C[0, l]$ и $D_{\parallel}^{-1}, B_{\parallel}^{-1}$ – обратные к ним. Подставляя в (1.27) $D = D_0$, $D_1 = 0$ и в (1.28) $B = B_0$, $B_1 = 0$, получим следующие уравнения для функций $\tilde{g}_i = D_{\parallel}g_i$ и $\tilde{f}_j = B_{\parallel}f_j$: $\frac{\partial^2}{\partial t^2}B\tilde{g}_i + (\alpha_i^2 D_{\parallel}^{-1} - \frac{\partial}{\partial z}D^{-1}\frac{\partial}{\partial z})\tilde{g}_i = 0$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}D\tilde{f}_j + (\gamma_j^2 B_{\parallel}^{-1} - \frac{\partial}{\partial z}B^{-1}\frac{\partial}{\partial z})\tilde{f}_j = 0$. Так, для рассмотренной среды с интегральным законом пространственной дисперсии уравнения (1.27), (1.28) сводятся к уравнениям колебаний вида $\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{g}_i = \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_i^2 \alpha_2 + \frac{1}{\varepsilon})\frac{\partial}{\partial z}\tilde{g}_i - \alpha_i^2 \alpha_1 \tilde{g}_i$, $\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{f}_j = \frac{\partial}{\partial z}(\gamma_j^2 \beta_2 + \frac{1}{\mu})\frac{\partial}{\partial z}\tilde{f}_j - \gamma_j^2 \beta_1 \tilde{f}_j$ с граничными условиями $\tilde{g}_i(0, t) = \tilde{g}_i(l, t) = 0$, $\tilde{f}_j(0, t) = \tilde{f}_j(l, t) = 0$. Окончательно получим $g_i = \alpha_1 \tilde{g}_i - \frac{\partial}{\partial z}\alpha_2 \frac{\partial}{\partial z}\tilde{g}_i$, $f_j = \beta_1 \tilde{f}_j - \frac{\partial}{\partial z}\beta_2 \frac{\partial}{\partial z}\tilde{f}_j$.

2. Условия существования и единственности модовых полей в стационарной среде

Рассмотрим поле в стационарной среде, полагая индукционные операторы $\mathbf{D}, \mathbf{B}$ (1.5) стационарными. Исходную электродинамическую задачу (1.1)-(1.5) дополним начальным условием при $t = t_0$:

$$\mathcal{E}|_{t=t_0} = \mathcal{E}^0, \quad \mathcal{H}|_{t=t_0} = \mathcal{H}^0. \quad (2.1)$$

Будем считать вектор-функции $\mathcal{E}^0, \mathcal{H}^0$ от (x, y, z) непрерывными в цилиндрической области $\Omega = S \times (z_1, z_2)$, где интервал (z_1, z_2) может быть как неограниченным, так и конечным в случае конечного отрезка волновода. Вектор-функции $\mathcal{E}^0, \mathcal{H}^0$, непрерывные вплоть до границы $\Sigma = \partial S \times (z_1, z_2)$, удовлетворяют граничным условиям (1.3). Обозначим через

$$f_0^0(z), \quad a_i^0(z), \quad b_i^0(z), \quad g_i^0(z), \quad e_j^0(z), \quad h_j^0(z), \quad f_j^0(z), \quad i, j = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

коэффициенты Фурье вектор-функций $\mathcal{E}^0, \mathcal{H}^0$ в разложении (1.11) по базисам (1.14), (1.15) пространства $L_2^3(S)$ при $t = t_0$. Начальные условия для модовых нуль-, Е- и Н-полей запишем в виде:

$$f_0(z, t_0) = f_0^0(z), \quad a_i(z, t_0) = a_i^0(z), \quad b_i(z, t_0) = b_i^0(z), \quad g_i(z, t_0) = g_i^0(z), \\ e_j(z, t_0) = e_j^0(z), \quad h_j(z, t_0) = h_j^0(z), \quad f_j(z, t_0) = f_j^0(z), \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Введем обозначения преобразований в уравнениях (1.27), (1.28):

$$Q_1 = \tilde{D}B, \quad A_1 = Q_1 D_{\parallel}, \quad C_1(\alpha_i^2) = \alpha_i^2 \tilde{D} - \frac{\partial}{\partial z}D_0^{-1}\frac{\partial}{\partial z}D_{\parallel}, \\ Q_2 = \tilde{B}D, \quad A_2 = Q_2 B_{\parallel}, \quad C_2(\gamma_j^2) = \gamma_j^2 \tilde{B} - \frac{\partial}{\partial z}B_0^{-1}\frac{\partial}{\partial z}B_{\parallel}, \quad (2.4)$$

где $\tilde{D} = I + \frac{\partial}{\partial z} D_0^{-1} D_1$ и $\tilde{B} = I + \frac{\partial}{\partial z} B_0^{-1} B_1$. Предположим, что преобразования $D, D_{||}, B, B_{||}$ в (1.5) и $A_1, Q_1, C_1(\alpha_i^2), A_2, Q_2, C_2(\gamma_j^2)$ (2.4) задают замкнутые линейные операторы в некотором банаховом пространстве скалярных функций $\{u(z)\} = X$, причем функции из областей определения операторов удовлетворяют условиям излучения при $|z| \rightarrow \infty$ или однородным граничным условиям на интервале $z_1 \leq z \leq z_2$ в случае конечного волновода. Заметим, что области определения $\mathcal{D}(C_1), \mathcal{D}(C_2)$ операторов $C_1(\alpha_i^2), C_2(\gamma_j^2)$ не зависят от α_i^2, γ_j^2 .

Уточним гладкость функций от z, t в определении модовых Е-полей (1.20), Н-полей (1.21). В соответствии с (1.27)-(1.30) будем рассматривать две абстрактные начальные задачи:

$$Q_1 \frac{d^2}{dt^2} D_{||} g_i + C_1(\alpha_i^2) g_i = 0, \quad g_i(t_0) = g_i^0, \quad \frac{d}{dt} D_{||} g_i(t_0) = -\alpha_i^2 b_i^0, \quad (2.5)$$

$$Q_2 \frac{d^2}{dt^2} B_{||} f_j + C_2(\gamma_j^2) f_j = 0, \quad f_j(t_0) = f_j^0, \quad \frac{d}{dt} B_{||} f_j(t_0) = -\gamma_j^2 e_j^0, \quad (2.6)$$

где функции $g_i : [t_0, +\infty) \rightarrow X, f_j : [t_0, +\infty) \rightarrow X$ дважды непрерывно дифференцируемы в норме пространства X вместе с $D_{||} g_i(t), B_{||} f_j(t)$, причем значения $g_i(t), f_j(t)$ принадлежат многообразиям $\mathcal{D}(A_1) \cap \mathcal{D}(C_1), \mathcal{D}(A_2) \cap \mathcal{D}(C_2)$ соответственно. Таким образом, вопрос существования и единственности функций a_i, b_i, g_i от (z, t) в модовом Е-поле (1.20), e_j, h_j, f_j от (z, t) в модовом Н-поле (1.21) сводится к вопросу существования и единственности решения начальных задач (2.5), (2.6).

Теорема 2.1. Пусть для стационарных индукционных операторов (1.5) и операторов (2.4) выполнены условия:

1) $D_{||}, B_{||}, D, B$ замкнуты и $D_{||}, B_{||}$ не имеют ядра; D, B представимы в виде (1.26).

2) $Q_1, Q_2, C_1(\alpha_i^2), C_2(\gamma_j^2) (i, j = 1, 2, \dots)$ замкнуты и Q_1, Q_2 не имеют ядра; области значений A_1, A_2 совпадают со всем пространством X , а области определения подчинены включениям:

$$\mathcal{D}(A_1) \subseteq \mathcal{D}(C_1), \quad \mathcal{D}(A_2) \subseteq \mathcal{D}(C_2).$$

Тогда для любых функций $g_i^0(z) \in \mathcal{D}(A_1), b_i^0(z) \in \mathcal{D}(Q_1), f_j^0(z) \in \mathcal{D}(A_2), e_j^0(z) \in \mathcal{D}(Q_2) (i, j = 1, 2, \dots)$ из начальных условий (2.3) существует единственная система модовых Е-полей (1.20), Н-полей (1.21), где функции $\varphi_i(x, y), \psi_j(x, y)$ есть элементы фиксированных базисов (1.10).

Доказательство. Рассмотрим модовое Е-поле $\mathcal{E}_E^i, \mathcal{H}_E^i$. В начальной задаче (2.5) для функции $g_i(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(A_1)$ выполним замену $u_i(t) = A_1 g_i(t), t \geq t_0$. Из условий теоремы вытекает существование замкнутого оператора $D_{||}^{-1}$ и ограниченных, определенных на всем пространстве X операторов $Q_1^{-1}, A_1^{-1} = D_{||}^{-1} Q_1^{-1}$. Действительно, область значений $A_1 = Q_1 D_{||}$, а значит Q_1 , совпадает с X и Q_1^{-1}, A_1^{-1} ограничены, как замкнутые операторы, определенные на всем пространстве. Каждое решение $u_i(t)$ начальной задачи

$$\frac{d^2}{dt^2} u_i + C_1(\alpha_i^2) A_1^{-1} u_i = 0, \quad u_i(t_0) = A_1 g_i^0, \quad \frac{d}{dt} u_i(t_0) = -\alpha_i^2 Q_1 b_i^0 \quad (2.7)$$

порождает решение $g_i(t) = A_1^{-1}u_i(t)$ задачи (2.5), для которого существует $\frac{d}{dt}D_{\parallel}g_i = Q_1^{-1}\frac{d}{dt}u_i$. Из замкнутости $C_1(\mathfrak{x}_i^2)$ и включения $\mathcal{D}(A_1) \subseteq \mathcal{D}(C_1)$ вытекает ограниченность оператора $C_1(\mathfrak{x}_i^2)A_1^{-1}$, определенного на всем X . Следовательно, для $\forall u_i(t_0), \frac{d}{dt}u_i(t_0) \in X$ начальная задача (2.7) имеет единственное решение экспоненциального вида [9], причем $g_i(t), D_{\parallel}g_i(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы в норме пространства X . Таким образом, для $\forall g_i^0(z) \in \mathcal{D}(A_1), b_i^0(z) \in \mathcal{D}(Q_1)$ существует модовое Е-поле $\mathcal{E}_E^i, \mathcal{H}_E^i$ (1.20), у которого функции a_i, b_i, g_i с учетом (1.29) определены однозначно.

Рассмотрим модовое Н-поле $\mathcal{E}_H^j, \mathcal{H}_H^j$. Аналогично доказывается, что для $\forall f_j^0(z) \in \mathcal{D}(A_2), e_j^0(z) \in \mathcal{D}(Q_2)$ начальная задача (2.6) имеет единственное решение $f_j(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(A_2)$, дважды непрерывно дифференцируемое вместе с $B_{\parallel}f_j(t)$ в норме пространства X , а значит существует модовое Н-поле $\mathcal{E}_H^j, \mathcal{H}_H^j$ (1.21) с однозначно определенными функциями e_j, h_j, f_j . Теорема доказана.

Проиллюстрируем теорему на примерах среды с дифференциальными индукционными операторами (1.5). Рассмотрим конечный отрезок волновода между сечениями $z_1 = 0$ и $z_2 = l$, в которых стоят металлические заглушки. Граничные условия (1.6) на металлических заглушках для модовых полей (1.20), (1.21) переходят в условия $a_i(0, t) = a_i(l, t) = 0, e_j(0, t) = e_j(l, t) = 0$ и $f_j(0, t) = f_j(l, t) = 0$. Зададим в пространстве $X = C[0, l]$ стационарные операторы

$$D = \varepsilon(z)I_0 - \frac{d}{dz}\alpha(z)\frac{d}{dz}, \quad D_{\parallel} = \varepsilon_{\parallel}(z)I, \quad B = \mu(z)I, \quad B_{\parallel} = \mu_{\parallel}(z)I_0,$$

где функции $\varepsilon \in C^1[0, l], \alpha, \varepsilon_{\parallel}, \mu, \mu_{\parallel} \in C^2[0, l]$ строго положительны. Оператор D определим на множестве $\mathcal{D} = \mathcal{D}(D)$ дважды непрерывно дифференцируемых функций $u(z)$ таких, что $u(0) = u(l) = 0$. Через I_0 обозначим единичный оператор, действующий на подпространстве функций, обращающихся в нуль на концах $[0, l]$. Граничные условия на заглушках соответствуют естественным требованиям $a_i, e_j \in \mathcal{D}(D), f_j \in \mathcal{D}(B_{\parallel})$ при фиксированном t . Очевидно, $D_0 = \varepsilon I_0, D_1 = -\frac{d}{dz}\alpha I, B_0 = B, B_1 = 0$. Операторы Q_1, A_1, C_1 и Q_2, A_2, C_2 (2.4) имеют вид:

$$Q_1 = \left(\frac{1}{\alpha}I_0 - \frac{d}{dz}\frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{dz}\right)\alpha\mu I, \quad Q_2 = \varepsilon I_0 - \frac{d}{dz}\alpha\frac{d}{dz}, \quad A_1 = Q_1\varepsilon_{\parallel}I, \quad A_2 = Q_2\mu_{\parallel}I_0,$$

$$C_1(\mathfrak{x}_i^2) = \left(\frac{\mathfrak{x}_i^2}{\alpha\mathfrak{x}_i^2 + \varepsilon_{\parallel}}I_0 - \frac{d}{dz}\frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{dz}\right)(\alpha\mathfrak{x}_i^2 + \varepsilon_{\parallel})I, \quad C_2(\gamma_j^2) = \left(\frac{\gamma_j^2}{\mu_{\parallel}}I - \frac{d}{dz}\frac{1}{\mu}\frac{d}{dz}\right)\mu_{\parallel}I_0.$$

Области определения $\mathcal{D}(Q_1) = \mathcal{D}(A_1) = \mathcal{D}(C_1) = \mathcal{D}$ и $\mathcal{D}(Q_2) = \mathcal{D}(A_2) = \mathcal{D}(C_2) = \mathcal{D}$. В соответствии с определением модовых полей $g_i, f_j \in \mathcal{D}$ при каждом t . Области значений операторов A_1, A_2 (C_1, C_2, Q_1, Q_2) совпадают со всем пространством. Оператор Штурма-Лиувилля D , как и $Q_1, C_1(\mathfrak{x}_i^2), Q_2, C_2(\gamma_j^2)$, имеет ограниченный обратный, определенный на всем пространстве. Согласно теореме 2.1, для любых функций $g_i^0(z), b_i^0(z), f_j^0(z), e_j^0(z) \in \mathcal{D}$ из начальных условий (2.3) существует единственная система модовых Е-полей (1.20), Н-полей (1.21).

Аналогично можно рассмотреть среду, дисперсия которой учитывается

дифференциальным оператором $B = \mu(z) I_0 - \frac{d}{dz} \beta(z) \frac{d}{dz}$.

Непрерывные вектор-функции $\mathcal{E}^0, \mathcal{H}^0$ от (x, y, z) , удовлетворяющие граничным условиям (1.3), будем называть квазиначальными векторами задачи (1.1)-(1.5), (2.1), если их коэффициенты Фурье (2.2) являются начальными данными (2.3) для некоторой системы модовых Е-полей (1.20), Н-полей (1.21) и нуль-модового поля (1.22).

Квазиначальные векторы $\mathcal{E}^0, \mathcal{H}^0$ при фиксированном z представим в виде суммы проекций (1.8) на подпространства Вейля :

$$\mathcal{E}^0 = \mathbf{E}_G^0 + \mathbf{E}_J^0 + z \mathbf{E}_z^0, \quad \mathcal{H}^0 = \mathbf{H}_G^0 + \mathbf{H}_J^0 + z \mathbf{H}_z^0.$$

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда каждый квазиначальный вектор $\mathcal{E}^0, \mathcal{H}^0$ задачи (1.1)-(1.5), (2.1) однозначно определяется проекциями $\mathcal{E}^1 = P_1 \mathcal{E}^0, \mathcal{H}^1 = P_2 \mathcal{H}^0$:

$$P_1 \mathcal{E}^0 = \mathbf{E}_J^0 + z \mathbf{E}_z^0, \quad P_2 \mathcal{H}^0 = \mathbf{H}_J^0 + z \mathbf{H}_z^0 \quad (\forall z \in (z_1, z_2)).$$

Множества всех проекций описываются следующим образом :

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ \mathcal{E}^1 = P_1 \mathcal{E}^0 : \mathcal{E}^1 = [\nabla_r \Psi(x, y, z), \mathbf{z}] + z \mathcal{G}(x, y, z), \quad \frac{\partial}{\partial n} \Psi|_{\partial S} = 0, \right.$$

$$\mathcal{G}|_{\partial S} = 0, \quad \Psi \in C^1(\Omega), \mathcal{G} \in C(\Omega); \forall z \in (z_1, z_2) : \Psi \in C^1(\bar{S}), \mathcal{G} \in C(\bar{S});$$

$$(\Psi, \psi_j) \in \mathcal{D}(Q_2), (\mathcal{G}, \varphi_i) \in \mathcal{D}(A_1), \quad i, j = 1, 2, \dots \left. \right\},$$

$$\mathcal{M}_2 = \left\{ \mathcal{H}^1 = P_2 \mathcal{H}^0 : \mathcal{H}^1 = [\mathbf{z}, \nabla_r \Phi(x, y, z)] + z \mathbf{F}(x, y, z), \quad \Phi|_{\partial S} = 0, \right.$$

$$\Phi \in C^1(\Omega), \mathbf{F} \in C(\Omega); \forall z \in (z_1, z_2) : \Phi \in C^1(\bar{S}), \mathbf{F} \in C(\bar{S});$$

$$(\mathbf{F}, \psi_0) = B_{\parallel}^{-1} c_0, \quad c_0 = \text{const}, \quad c_0 \in \mathcal{D}(B_{\parallel}^{-1});$$

$$(\Phi, \varphi_i) \in \mathcal{D}(Q_1), (\mathbf{F}, \psi_j) \in \mathcal{D}(A_2), \quad i, j = 1, 2, \dots \left. \right\}.$$

Доказательство. В разложении (1.11) квазиначальных вектор-функций $\mathcal{E}^0, \mathcal{H}^0$ по базисам (1.14), (1.15) выделим следующие проекции $\mathcal{E}^1, \mathcal{H}^1$:

$$\mathcal{E}^1 = \sum_{j=1}^{\infty} e_j^0(z) [\nabla \psi_j(x, y), \mathbf{z}] + z \sum_{i=1}^{\infty} g_i^0(z) \varphi_i(x, y),$$

$$\mathcal{H}^1 = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^0(z) [\mathbf{z}, \nabla \varphi_i(x, y)] + z \sum_{j=1}^{\infty} f_j^0(z) \psi_j(x, y) + z f_0^0(z) \psi_0.$$

Системы вектор-функций $\{ [\nabla \psi_j, \mathbf{z}] \}_1^{\infty}$ и $\{ [\mathbf{z}, \nabla \varphi_i] \}_1^{\infty}$ образуют базисы в подпространствах J и $\overset{\circ}{J}$ соответственно. Следовательно, $\mathcal{E}^1 = \mathbf{E}_J^0 + z \mathbf{E}_z^0, \mathcal{H}^1 = \mathbf{H}_J^0 + z \mathbf{H}_z^0, \forall z \in (z_1, z_2)$. В силу теоремы 2.1 коэффициенты Фурье $b_i^0 \in \mathcal{D}(Q_1), g_i^0 \in \mathcal{D}(A_1)$ и $e_j^0 \in \mathcal{D}(Q_2), f_j^0 \in \mathcal{D}(A_2), i, j = 1, 2, \dots$, однозначно определяют систему модовых Е-полей (1.20) и Н-полей (1.21). Для нуль-модового поля (1.22) из существования оператора $B_{\parallel}^{-1}$ следует, что эквивалентное системе (1.19) уравнение $B_{\parallel} f_0 = c_0, c_0 = \text{const}$ из $\mathcal{D}(B_{\parallel}^{-1})$, имеет единственное решение $f_0(z, t) \equiv f_0^0(z) = B_{\parallel}^{-1} c_0$.

Проекции $\mathbf{E}_J^0, \mathbf{H}_J^0$ непрерывных вектор-функций $\mathcal{E}^0, \mathcal{H}^0$ имеют вид (1.9):

$E_J^0 = [\nabla_r \Psi(x, y, z), z]$, $H_J^0 = [z, \nabla_r \Phi(x, y, z)]$, где $\frac{\partial}{\partial n} \Psi|_{\partial S} = 0$, $\Phi|_{\partial S} = 0$ и достаточно выбрать $\Psi, \Phi \in C^1(\Omega)$. Действительно, для непрерывных вектор-функций $\nabla_r \Psi \in G$, $\nabla_r \Phi \in \overset{\circ}{G}$ в силу граничных условий сохраняются соотношения: $(\nabla_r \Psi, \nabla \psi_j)_{\mathcal{L}} = \gamma_j^2(\Psi, \psi_j)_{L_2} = \gamma_j^2 e_j^0$ и $(\nabla_r \Phi, \nabla \varphi_i)_{\mathcal{L}} = \varkappa_i^2(\Phi, \varphi_i)_{L_2} = \varkappa_i^2 b_i^0$. Теорема доказана.

Автор благодарит А. Г. Руткаса за внимание и замечания к статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быховский Э. Б. Решение смешанной задачи для системы уравнений Максвелла в случае идеально-проводящей границы // Вестник ЛГУ. – 1957. – 13. – С. 50-66.
2. Третьяков О. А. Эволюционные волноводные уравнения // Радиотехника и электроника. – 1989. – Т. 34, 5. – С. 917-926.
3. Руткас А. Г. Модовые поля в волноводе со слоистой диспергирующей средой. – Харьков, 1987. – 34 с. (Препринт / ИРЭ АН УССР: N 360).
4. Попова Е. В., Руткас А. Г. Модовые разложения полей в волноводе с неоднородной средой // Труды УНИИРТ. – 1997. – 2 (10). – С. 54-59.
5. Попова Е. В. Метод дискретного разложения решения одной электродинамической задачи // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999. – С. 198-202.
6. Вейль Г. Избранные труды. Математика. Теоретическая физика. – М.: Наука, 1984. – 511 с.
7. Разложение поля в волноводе с неоднородной нестационарной средой по системе модовых состояний / Попова Е. В.; Харьк. ун-т. – Харьков, 1996. – 29 с. – Деп. в ГНТБ Украины 23.10.96. – N 1955 – Ук96.
8. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – 5-е изд. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
9. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.

Асимптотические разложения нерегулярно растущих
интегралов

Т. И. Малютина

*Украинская академия банковского дела
г. Сумы*Изучается асимптотическое поведение при $r \rightarrow \infty$ интегралов

$$\int_a^b f(t) \exp(i|\ln rt|^\sigma) dt.$$

Особенностями рассматриваемого случая есть то, что асимптотика таких интегралов резко различается при $\sigma \in (0, 1)$, $\sigma = 1$, $\sigma \in (1, \infty)$, а также то, что такие интегралы представляют нерегулярно растущие функции. В случае $\sigma > 1$ имеется аналогия с классическим интегралом Фурье.

1. Предисловие

Изучение свойств коэффициентов Фурье функции или изучение свойств преобразования Фурье функции по свойствам самой функции — один из важных и достаточно изученных разделов гармонического анализа. Это сводится к изучению свойств интегралов $\int_a^b f(t) \exp(ixt) dt$. Мы изучаем интегралы $\int_a^b f(t) \exp(i|\ln rt|^\sigma) dt$, по форме напоминающие предыдущие. При определённых ограничениях на f мы получаем асимптотические формулы для указанных интегралов. В трёхтомной монографии Э. Я. Риекстыньша [1–3] с очень обширной библиографией нахождению асимптотических разложений интегралов $\int_a^b f(t) K(rt) dt$ при различных ограничениях на функции f и K посвящены многие главы. Тем не менее интегралы вида $\int_a^b f(t) \exp(i|\ln rt|^\sigma) dt$ там не рассматриваются. В статье не предлагаются новые методы получения асимптотических разложений. Так при $\sigma > 1$ мы используем традиционный метод интегрирования по частям, а при $\sigma < 1$ асимптотическое разложение получается разложением в ряд Тейлора функции $\exp(i|\ln rt|^\sigma)$ по степеням $\frac{\ln t}{\ln r}$. Наш случай интересен тем, что для различных значений параметра σ

для нахождения асимптотических формул нужно применять различные методы, а также тем, что асимптотические формулы содержат нерегулярно растущие функции. Заметим еще следующее. Пусть $\sigma > 1$, f – бесконечнодифференцируемая функция, которая сама и все ее производные обращаются в нуль в точках a и b . Тогда из наших результатов следует, что интеграл $\int_a^b f(t) \exp(i|\ln rt|^\sigma) dt$ убывает при $r \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $\ln r$. Исстинный порядок убывания интеграла в этом случае нужно находить иными методами. В случае $\sigma > 1$ имеется аналогия с нахождением асимптотических формул для классического интеграла Фурье. В частности, мы доказываем соответствующий вариант леммы Римана – Лебега.

2. Об одном аналоге теоремы Римана–Лебега

Мы начнём с аналога леммы Римана–Лебега.

Лемма 1. Пусть $f(t) \in L_1([a, b])$, $0 \leq a < b \leq \infty$ и пусть $\sigma > 1$. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \exp(i|\ln rt|^\sigma) dt = 0.$$

Доказательство. Пусть вначале $a > 0$, $f \in C_1([a, b])$. Заметим, что при $r > \frac{1}{a}$

$$\exp(i|\ln rt|^\sigma) dt = \frac{t d[\exp(i(\ln rt)^\sigma)]}{i\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}}.$$

После интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \exp(i|\ln rt|^\sigma) dt &= \left. \frac{f(t)t \exp(i(\ln rt)^\sigma)}{i\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}} \right|_a^b - \\ &- \frac{1}{i\sigma} \int_a^b \left[\frac{f'(t)t + f(t)}{(\ln rt)^{\sigma-1}} - \frac{(\sigma-1)f(t)t}{(\ln rt)^\sigma} \right] \exp(i(\ln rt)^\sigma) dt. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что правая часть последнего равенства стремится к нулю, если $r \rightarrow \infty$.

Пусть теперь $f \in L_1([a, b])$, ε – произвольное положительное число, а функция $f_1 \in C_1([a, b])$ такова, что

$$\int_a^b |f(t) - f_1(t)| dt \leq \varepsilon.$$

Тогда

$$\left| \int_a^b f(t) \exp(i(\ln rt)^\sigma) dt \right| \leq \left| \int_a^b f_1(t) \exp(i(\ln rt)^\sigma) dt \right| + \varepsilon.$$

Из доказанного выше следует утверждение теоремы при $a > 0$.

Если $a = 0$, $f \in L_1([0, b])$, то учитывая неравенство $|\exp(i|\ln rt|^\sigma)| \leq 1$, по заданному $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \int_0^\delta f(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_0^b f(t) \exp(i|\ln rt|^\sigma) dt \right| &= \left| \int_0^\delta + \int_\delta^b \right| \leq \\ &\varepsilon + \left| \int_\delta^b f(t) \exp(i|\ln rt|^\sigma) dt \right|. \end{aligned}$$

Откуда следует утверждение леммы.

Замечание. Лемма остаётся справедливой, если ядра $\exp(i|\ln rt|^\sigma)$ заменить на $\exp(i\varphi(rt) \ln rt)$, где φ — гладкая возрастающая функция на полуоси $[0, \infty)$ такая, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$.

В лемме 1, как и в лемме Римана–Лебега, не оценивается скорость стремления к нулю интеграла. Это и в принципе невозможно сделать при ограничении $f \in L_1([a, b])$. При дополнительных ограничениях на гладкость функции f с помощью интегрирования по частям можно получить более детальную информацию об асимптотическом поведении интеграла.

3. Асимптотические формулы для интегралов

Теорема 1 Пусть $f(t)$ — абсолютно непрерывная функция на сегменте $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$ и пусть $\sigma > 1$. Тогда при $r \rightarrow \infty$

$$\int_a^b f(t) d(t^\rho \cos(\ln rt)^\sigma) = b^\rho f(b) \cos(\ln rb)^\sigma - a^\rho f(a) \cos(\ln ra)^\sigma + o(1).$$

В частности, предельное множество интеграла по направлению $r \rightarrow \infty$ совпадает с сегментом $[-a^\rho |f(a)| - b^\rho |f(b)|, a^\rho |f(a)| + b^\rho |f(b)|]$.

Доказательство. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_a^b f(t) d(t^\rho \cos(\ln rt)^\sigma) = f(t) t^\rho \cos(\ln rt)^\sigma \Big|_a^b - \int_a^b f'(t) t^\rho \cos(\ln rt)^\sigma dt.$$

Так как $f' \in L_1([a, b])$, то по лемме 1 интеграл в правой части сходится к нулю при $r \rightarrow \infty$.

Докажем теперь утверждение теоремы о предельном множестве интеграла. Предварительно докажем лемму.

Лемма 2. Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная, T — периодическая функция, $p > 1$, $A = \varphi([0, T))$, a, b — произвольные числа, $-\infty < b \leq a < \infty$. Тогда предельное множество функции $(\varphi((x+a)^p), \varphi((x+b)^p))$: $R \rightarrow R^2$ при $x \rightarrow \infty$ совпадает с декартовым квадратом $A \times A$.

Доказательство. Пусть $f(x) = (x^{1/p} + c)^p$, тогда

$$f'(x) = \left(1 + \frac{c}{x^{1/p}}\right)^{p-1} = 1 + \frac{c(p-1)}{x^{1/p}} + \dots$$

Зафиксируем число $x \in [0, T)$ и определим последовательность x_k условием

$$(x_k + b)^p = x + kT, \quad x_k = (x + kT)^{1/p} - b, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через

$$w_k = (x_k + a)^p = ((x + kT)^{1/p} + a - b)^p = y_k + k_1 T,$$

где $k_1 = k_1(k) \in \mathbb{N}$, $y_k \in [0, T)$.

Применяя формулу Лагранжа конечных приращений, получим

$$\begin{aligned} w_{k+1} - w_k &= ((x + (k+1)T)^{1/p} + a - b)^p - ((x + kT)^{1/p} + a - b)^p = \\ &= T \left(1 + \frac{a-b}{(x + (k+\theta)T)^{1/p}}\right)^{p-1} = T \left(1 + \frac{(a-b)(p-1)}{(x + (k+\theta)T)^{1/p}} + \dots\right) = \\ &= T + \Delta_k, \quad \theta \in (0, 1). \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \Delta_k &= T \left(\frac{(a-b)(p-1)}{(x + (k+\theta)T)^{1/p}} + \frac{(a-b)(p-1)(p-2)}{2(x + (k+\theta)T)^{2/p}} + \dots \right) \sim \\ &\sim T \left(\frac{(a-b)(p-1)}{(x + (k+\theta)T)^{1/p}} \right), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность Δ_k обладает свойствами:

- 1) $\Delta_k \geq 0$, $\Delta_k \rightarrow 0$, при $k \rightarrow \infty$,
- 2) $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k = \infty$,
- 3) если $w_k = y_k + k_1(k)T$, $k_1 = k_1(k) \in \mathbb{N}$, $y_k \in [0, T)$, то

$$w_{k+1} = y_k + \Delta_k + (k_1 + 1)T. \quad (1)$$

Из свойств 1), 2), 3) следует, что предельное множество последовательности y_k при $k \rightarrow \infty$ есть весь полусегмент $[0, T)$.

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число, $y \in [0, T)$, $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, T - y\}$. Тогда $\varepsilon_1 > 0$. Пусть k_0 такое число, что при $k \geq k_0$

выполняется неравенство $\Delta_k < \varepsilon_1$. По определению $y_{k_0} \in [0, T)$. Из формулы (1) следует, что

$$w_{k_0+m} = y_{k_0} + \Delta_{k_0} + \Delta_{k_0+1} + \dots + \Delta_{k_0+m-1} + (k_1(k_0) + m)T,$$

при любом $m \in \mathbb{N}$. Из расходимости ряда $\Delta_{k_0} + \Delta_{k_0+1} + \dots$ следует, что существует наименьшее число m такое, что будет выполняться неравенство

$$y_{k_0} + \Delta_{k_0} + \dots + \Delta_{k_0+m-1} > T + y.$$

Тогда

$$y_{k_0} + \Delta_{k_0} + \dots + \Delta_{k_0+m-1} = T + y + \delta,$$

где $0 < \delta \leq \Delta_{k_0+m-1} < \varepsilon_1$.

Очевидно, что $0 < y + \delta < T$. Тогда $w_{k_0+m} = y_{k_0+m} + (k_1(k_0) + m + 1)T$, $y_{k_0+m} = y + \delta$. Так как $0 < \delta < \varepsilon_1 < \varepsilon$, а $\varepsilon > 0$ — произвольное число, то y принадлежит предельному множеству последовательности y_k . Так как y произвольное число из полуинтервала $[0, T)$, то лемма доказана.

Вторая часть теоремы теперь следует из леммы 2, если заметить, что $(\ln ra)^\sigma = (\ln r + \ln a)^\sigma$ и положить $x = \ln r$.

Теорема 2. Пусть $f(t)$ — абсолютно непрерывная функция на сегменте $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$ и пусть $\sigma > 1$. Тогда при $r \rightarrow \infty$

$$\int_a^b f(t) \cos(\ln rt)^\sigma dt = \frac{1}{\sigma \ln^{\sigma-1} r} [bf(b) \sin \ln^\sigma rb - af(a) \sin \ln^\sigma ra] + \frac{o(1)}{\ln^{\sigma-1} r}.$$

В частности, предельное множество функции

$$\sigma \ln^{\sigma-1} r \int_a^b f(t) \cos(\ln rt)^\sigma dt$$

по направлению $r \rightarrow \infty$ совпадает с сегментом $[-a|f(a)| - b|f(b)|, a|f(a)| + b|f(b)|]$.

Теорема доказывается как и теорема 1.

В случае, если $f(t)$ имеет несколько производных, интегрирование по частям можно повторять и мы получаем

Теорема 3. Пусть функция $f(t)$ имеет абсолютно непрерывную $k-1$ -ую производную $f^{(k-1)}(t)$ на сегменте $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$, $k \geq 1$ и пусть $\sigma > 1$. Тогда

$$\int_a^b f(t) \cos(\ln rt)^\sigma dt = \sum_{m=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^m \frac{t \Phi_{2m}(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}} \sin(\ln rt)^\sigma \Big|_a^b +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\frac{k-2}{2}} (-1)^m \frac{t\Phi_{2m+1}(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}} \cos(\ln rt)^\sigma \Big|_a^b + \frac{o(1)}{(\ln r)^{k(\sigma-1)}}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (2)$$

где пустая сумма считается равной нулю,

$$\Phi_m(t) = L^m f(t), \quad Lf(t) = \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dt} \frac{tf(t)}{(\ln rt)^{\sigma-1}}.$$

Доказательство. Докажем, что

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \cos(\ln rt)^\sigma dt &= \sum_{m=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^m \frac{t\Phi_{2m}(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}} \sin(\ln rt)^\sigma \Big|_a^b + \\ &+ \sum_{m=0}^{\frac{k-2}{2}} (-1)^m \frac{t\Phi_{2m+1}(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}} \cos(\ln rt)^\sigma \Big|_a^b + (-1)^{\frac{k-1}{2}} \int_a^b \frac{t\Phi_k(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}} d[\cos(\ln rt)^\sigma], \end{aligned} \quad (3)$$

при k – нечетном, а при четном k последнее слагаемое в правой части (3) имеет вид

$$(-1)^{\frac{k}{2}} \int_a^b \frac{t\Phi_k(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}} d[\sin(\ln rt)^\sigma].$$

Применяя формулу интегрирования по частям и равенство

$$\cos(\ln rt)^\sigma dt = \frac{td[\sin(\ln rt)^\sigma]}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}}, \quad (4)$$

получим

$$\int_a^b f(t) \cos(\ln rt)^\sigma dt = \frac{t\Phi_0(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}} \sin(\ln rt)^\sigma \Big|_a^b - \int_a^b \Phi_1(t) \sin(\ln rt)^\sigma dt.$$

Так как

$$\sin(\ln rt)^\sigma dt = -\frac{t}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}} d[\cos(\ln rt)^\sigma], \quad (5)$$

то справедливость формулы (3) при $k = 1$ установлена. Пусть формула (3) справедлива при всех нечетных $k \leq m$, а функция $f(t)$ имеет $m+1$ -ую абсолютно непрерывную производную на сегменте $[a, b]$. Применяя дважды формулу интегрирования по частям и равенства (4), (5), получим

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \int_a^b \frac{t\Phi_m(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}} d[\cos(\ln rt)^\sigma] &= (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{t\Phi_m(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}} \cos(\ln rt)^\sigma \Big|_a^b + \\ &+ (-1)^{\frac{m+1}{2}} \int_a^b \frac{t\Phi_{m+1}(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}} d[\sin(\ln rt)^\sigma] = (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{t\Phi_{m+1}(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}} \sin(\ln rt)^\sigma \Big|_a^b + \end{aligned}$$

$$+ (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{t\Phi_m(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}} \cos(\ln rt)^\sigma \Big|_a^b + (-1)^{\frac{m+1}{2}} \int_a^b \frac{t\Phi_{m+2}(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}} d[\cos(\ln rt)^\sigma].$$

Таким образом формула (3) справедлива и при $k = m + 2$. На основании принципа математической индукции отсюда следует ее справедливость при всех нечетных $k \geq 1$. Для четных k доказательство аналогично. Формула (2) следует из (3), если заметить, что

$$\Phi_k(t) = \frac{O(1)}{(\ln r)^{(k+1)(\sigma-1)}}, \quad r \rightarrow \infty.$$

Замечание. Очевидно, что в случае если $f(t)$ есть бесконечно дифференцируемая функция, то асимптотическая формула (2) справедлива при любом k .

В случае, когда $\sigma \in (0, 1)$ асимптотическое разложение интеграла получается не с помощью интегрирования по частям, а разложением ядра.

Теорема 4. Пусть $f(t) \in L_1([a, b])$, $0 < a < b < \infty$ и пусть $\sigma \in (0, 1)$. Тогда справедливо разложение

$$\int_a^b f(t) \exp(i\lambda |\ln rt|^\sigma) dt = \exp(i\lambda \ln^\sigma r) \left(\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{n,k}}{(\ln r)^{k(1-\sigma)+n}} \right), \quad (6)$$

где

$$\alpha_0 = \int_a^b f(t) dt, \quad \alpha_{n,k} = \frac{i^k \lambda^k}{k!} c_{n,k} \int_a^b f(t) (\ln t)^{n+k} dt,$$

а величина $c_{n,k}$ определяется из разложения

$$\left(\frac{1}{x} ((1+x)^\sigma - 1) \right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,k} x^n.$$

Двойной ряд в формуле (6) является абсолютно сходящимся при достаточно больших r . Разложение (6) справедливо как асимптотическое разложение в случае если $a = 0$, $\int_0^t t^{-\epsilon} |f(t)| dt < \infty$ при некотором $\epsilon > 0$.

Это разложение справедливо как асимптотическое разложение и в случае $b = \infty$, $\int_0^\infty t^\epsilon |f(t)| dt < \infty$.

Доказательство. Воспользовавшись разложением функции e^x в ряд Тейлора и равенством

$$\exp(i\lambda |\ln rt|^\sigma) = \exp(i\lambda \ln^\sigma r) \exp \left(i\lambda \ln^{\sigma-1} r \ln t \left(\frac{\ln r}{\ln t} \left(1 + \frac{\ln t}{\ln r} \right)^\sigma - 1 \right) \right),$$

получим

$$\int_a^b f(t) \exp(i\lambda |\ln rt|^\sigma) dt = \exp(i\lambda \ln^\sigma r) (\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k l^k}{\ln^{k(1-\sigma)} r} \int_a^b f(t) \ln^k t \left(\frac{\ln r}{\ln t} \left(1 + \frac{\ln t}{\ln r} \right)^\sigma - 1 \right)^k dt).$$

Разлагая последний сомножитель по степеням $x = \frac{\ln t}{\ln r}$, мы получим разложение (6). Абсолютная сходимость ряда следует из того, что при больших r выполняется неравенство $\ln t < \ln r$. Заключительная часть теоремы следует из того, что сходимость интеграла $\int_0^b t^{-\varepsilon} |f(t)| dt \left(\int_0^\infty t^\varepsilon |f(t)| dt \right)$ влечет за собой сходимость интеграла $\int_0^b |f(t)| \left(\ln \frac{1}{t} \right)^k dt \left(\int_0^\infty |f(t)| (\ln t)^k dt \right)$ при любом $k > 0$.

Замечание. Величину $c_{n,k}$ можно записать в конечном виде если вначале воспользоваться формулой Ньютона для бинома $((1+x)^\sigma - 1)^k$, а затем использовать разложение в ряд Тейлора функции $(1+x)^{m\sigma}$.

Мы рассмотрели случаи $\sigma > 1$ и $\sigma < 1$. Случай $\sigma = 1$ нужно рассматривать отдельно. Легко видеть, что предельное множество функции $\int_a^b f(t) d(t^\rho \cos \ln rt)$ по направлению $r \rightarrow \infty$ совпадает с множеством

$$\left\{ \cos \varphi \int_a^b f(t) d(t^\rho \cos \ln t) - \sin \varphi \int_a^b f(t) d(t^\rho \sin \ln t) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}.$$

В частности,

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) d(t^\rho \cos \ln rt) = \sqrt{\left(\int_a^b f(t) d(t^\rho \cos \ln t) \right)^2 + \left(\int_a^b f(t) d(t^\rho \sin \ln t) \right)^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. Т1. – Рига: Зинатне, 1974. – 390 с.
2. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. Т2. – Рига: Зинатне, 1977. – 463 с.
3. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. Т3. – Рига: Зинатне, 1981. – 370 с.

Плоский МГД-подшипник с вдувом или отсосом на
стенках и распределенными источниками массы

Д. В. Легейда, И. Е. Тарапов

Харьковский государственный университет

Исследуется влияние вдува (отсоса), а также распределенных источников массы на характеристики плоского МГД-подшипника. В приближении гидродинамической теории смазки найдено распределение скорости по сечению смазочного слоя и вычислены сила трения на стенках и подъемная сила. Получены графики зависимости коэффициента эффективности подшипника от числа Альфвена, скорости продува, наклона струи вдува. Установлено влияние источников и стоков массы на течение жидкости и эффективность подшипника.

Рассматривается стационарная задача магнито-гидродинамической теории смазки с вдувом (отсосом) несжимаемой жидкости через поверхность плоского подшипника в однородном магнитном поле H_0 перпендикулярном шипу (рис.1). Длина подшипника l , максимальный зазор δ , минимальный – δ_0 . Предположим, что башмак наклонен к шипу под углом θ , так что толщина переменного зазора равна $h'(x) = \delta - x'tg\theta$ и $\delta_0 = \delta - ltg\theta$. Вдув определяется нормальными (α'_0 и α'_1) и касательными (β'_0 и β'_1) составляющими скорости на шипе и башмаке соответственно. Пусть шип движется со скоростью V_0 вдоль оси x .

Допускается, что в рабочей зоне подшипника имеются распределенные источники массы интенсивности q . Тогда, основная система уравнений состоит из уравнений движения, непрерывности и уравнения индукции и в размерных величинах имеет вид [1],[2]:

$$\rho \operatorname{div} \mathbf{v} = q, \quad (1)$$

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + q \mathbf{v} = -\nabla \left(p - \frac{1}{3} q + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \mu \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H}, \quad (2)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{H} = (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu_m \Delta \mathbf{H}, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (4)$$

где ρ – плотность жидкости, μ – динамическая вязкость, ν_m – магнитная вязкость, p – гидростатическое давление, $\mathbf{v} = v'_x \mathbf{i}_x + v'_y \mathbf{i}_y$.

$$k_l^3 \left[-\psi_y \psi_{xx} + \left(-\psi_x + \tilde{Q} \int_0^y q(y) dy \right) (-\psi_{xy} + \tilde{Q} q(y)) + \right. \\ \left. + \tilde{Q} \left(-\psi_x + \tilde{Q} \int_0^y q(y) dy \right) \right] = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial p^*}{\partial y} - \\ - \frac{1}{\text{Re}} (k_l^4 \psi_{xxx} + k_l^2 \psi_{xyy}) + \text{Al}^2 k_l^2 \left[\frac{k_l}{k_H} (\chi_x \chi_{xy} - \chi_y \chi_{xx}) - \chi_{xy} \right], \quad (7)$$

$$k_l \left(\psi_y \chi_{xy} - \psi_x \chi_{yy} - \chi_y \psi_{xy} + \chi_x \psi_{yy} + \tilde{Q} \chi_{yy} \int_0^y q(y) dy \right) = \\ = k_H \psi_{yy} + \frac{1}{\text{Rm}} (k_l^2 \chi_{yxx} + \chi_{yyy}), \quad (8)$$

$$k_l (-\psi_y \chi_{xx} + \psi_x \chi_{xy} + \chi_y \psi_{xx} - \chi_x \psi_{xy}) + k_H (\psi_{xy} - \tilde{Q} q) + \\ + k_l \tilde{Q} q \chi_{xx} = -\frac{1}{\text{Rm}} [k_l^2 \chi_{xxx} + \chi_{xyy}], \quad (9)$$

Здесь: $\text{Re} = \frac{V_0 \delta}{\nu}$ – число Рейнольдса, $\text{Rm} = \frac{V_0 \delta}{\nu_m}$ – магнитное число Рейнольдса, $\text{Al}^2 = \frac{H_0^2}{4\pi \rho V_0^2}$ – число Альфвена, $\tilde{Q} = Q_0 l / V_0$ – безразмерный параметр, характеризующий плотность источников массы. Для характерного масштаба давления принято $p_0 = \frac{l \mu V_0}{\delta^2}$.

Граничные условия в безразмерных переменных имеют вид:

$$\psi_y(x, 0) = 1 + \beta_0, \quad \psi_y(x, h(x)) = \alpha_1 \sin \theta + \beta_1 \cos \theta, \\ \psi_x(x, 0) = -\frac{k_v}{k_l} \alpha_0, \quad \psi_x(x, h(x)) = -\frac{k_v}{k_l} (\alpha_1 \cos \theta - \beta_1 \sin \theta), \\ \chi_y(x, 0) = 0, \quad \chi_y(x, h(x)) = 0, \\ \chi_x(x, 0) = 0, \quad \chi_x(x, h(x)) = 0, \\ p(0, y) = p_0, \quad p(1, y) = p_1. \quad (10)$$

Как принято в гидродинамической теории смазки, будем считать $k_l \ll 1$. Кроме того, предположим, что вдув существенно не меняет соотношения между вертикальной и горизонтальной компонентами скорости в смазочном слое (слабый вдув), так что $k_v \ll 1$, и можно считать $k_l = k_v$, а компоненты H_x и H_y сравнимы по масштабу и $k_H \sim 1$. Тогда, отбрасывая члены порядка k_l , получим следующую систему уравнений

$$\frac{\partial p^*}{\partial x} = \psi_{yyy} + \text{Al}^2 \text{Re} k_H \chi_{yy}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y} = 0, \quad (12)$$

$$k_H \text{Rm} \psi_{yy} + \chi_{yyy} = 0, \quad (13)$$

$$\chi_{xyy} = 0. \quad (14)$$

Для решения задачи воспользуемся условием баланса расхода жидкости в поперечном сечении. Проинтегрируем уравнение неразрывности, записанное в безразмерных переменных поперек смазочного слоя

$$\int_0^{h(x)} \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + v_y \Big|_{y=h(x)} - v_y \Big|_{y=0} = \int_0^{h(x)} q(y) dy.$$

Учитывая граничные условия, после очевидных преобразований получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(x)} v_x dy - v_x \Big|_{y=h(x)} \frac{dh(x)}{dx} + \alpha_h + \alpha_0 = \int_0^{h(x)} q(y) dy,$$

где безразмерные величины

$$\alpha_h = -\alpha_1 \cos \theta + \beta_1 \sin \theta,$$

$$h(x) = 1 - \frac{\text{tg} \theta}{k_l} x = 1 - (1 - \Delta)x, \quad \Delta = \frac{\delta_0}{\delta} \sim 1.$$

Подставляя в предыдущее выражение значения v_x на верхней пластине и $dh(x)/dx$, находим

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(x)} v_x dy + (\alpha_1 \sin \theta + \beta_1 \cos \theta)(1 - \Delta) + \alpha_h + \alpha_0 = \int_0^h q(y) dy.$$

Поскольку $(1 - \Delta) \ll 1$, то слагаемое с $(1 - \Delta)$ можно опустить. Переходя к функции тока, получим

$$\int_0^{h(x)} \psi_y dy + (\alpha_0 + \alpha_h)x = x \int_0^{h(x)} q(y) dy + Q,$$

где $Q = \text{const}$, или

$$\psi(h(x)) - \psi(0) + (\alpha_0 + \alpha_h)x = x \int_0^{h(x)} q(y) dy + Q. \quad (15)$$

Это уравнение выражает собой условие баланса масс в поперечном сечении слоя смазки.

В случае отсутствия источников массы это условие имеет вид

$$\psi(h(x)) - \psi(0) + (\alpha_0 + \alpha_h)x = Q. \quad (16)$$

Из уравнения (14) и граничных условий для χ_x получаем

$$\chi_x = 0.$$

Следовательно,

$$H_y = H_0.$$

Из уравнения (12) следует, что $p^* = p^*(x)$. Таким образом, для определения $\psi_y \equiv v_x$, $\chi_y \equiv H_x$ получаем систему линейных дифференциальных уравнений

$$\psi_{yyy} + \text{Al}^2 \text{Re} k_H \chi_{yy} = \frac{dp^*}{dx}, \quad (17)$$

$$\chi_{yyy} + k_H \text{Rm} \psi_{yy} = 0, \quad (18)$$

или

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + A^2 \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{dp^*}{dx}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + B^2 \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0. \quad (20)$$

Здесь $A^2 = \text{Al}^2 \text{Re} k_H$, $B^2 = \text{Rm} k_H$, а граничные условия для v_x и H_x могут быть записаны в виде

$$v_x(x, 0) = 1 + \beta_0, \quad v_x(x, h) = \alpha_1 \sin \theta + \beta_1 \cos \theta, \quad (20)$$

$$H_x(x, 0) = H_x(x, h) = 0. \quad (21)$$

Решение системы (19)-(20), удовлетворяющее условиям (21), имеет вид

$$\begin{aligned} v_x = & -\frac{1 + \beta_0}{2} \left[\frac{\text{sh} \left(2m \left(y - \frac{h}{2} \right) \right)}{\text{sh} mh} - 1 \right] - \\ & - \frac{h}{4m} \frac{\partial p^*}{\partial x} \left[\text{cth} mh - \frac{\text{ch} (2m (y - \frac{h}{2}))}{\text{sh} mh} \right] + \\ & + \frac{\alpha_1 \sin \theta + \beta_1 \cos \theta}{2} \left[1 + \frac{\text{sh} \left(2m \left(y - \frac{h}{2} \right) \right)}{\text{sh} mh} \right], \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{H_x}{B^2} = & \frac{(1 - \alpha_1 \sin \theta - \beta_1 \cos \theta + \beta_0)}{4m} \times \\ & \times \left[\frac{\text{ch} \left(2m \left(y - \frac{h}{2} \right) \right)}{\text{sh} mh} - \text{cth} mh \right] + \\ & + \frac{h}{8m^2} \frac{\partial p^*}{\partial x} \left[\frac{2y}{h} - 1 - \frac{\text{sh} \left(2m \left(y - \frac{h}{2} \right) \right)}{\text{sh} mh} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

В случае $q = \alpha_0 = \alpha_1 = \beta_0 = \beta_1 = 0$ эти формулы совпадают с соответствующими формулами [1].

Интегрируя выражения для v_x по y от 0 до $h(x)$ и используя (15) получим выражение для dp^*/dx . Удобнее перейти от x к переменной $h(x)$; тогда получаем

$$\frac{dp^*}{dh} = \frac{4m^2[(Q + Q_q(h))(1 - \Delta) - (\alpha_0 + \alpha_h)(1 - h)\text{th}mh]}{(1 - \Delta)^2 h(mh - \text{th}mh)} - \frac{2m^2(\alpha_1 \sin \theta + \beta_1 \cos \theta + 1 + \beta_0)\text{th}mh}{(1 - \Delta)(mh - \text{th}mh)}, \quad (24)$$

где

$$Q_q(h) \equiv \frac{1 - h}{1 - \Delta} \int_0^h q(y) dy.$$

Интегрируя (24) по h от Δ до 1 найдем выражение для безразмерного расхода Q

$$Q = \frac{(p_0 - p_1)(1 - \Delta)}{4I_{-1}} + \frac{(\alpha_0 + \alpha_h)}{1 - \Delta} \left(1 - \frac{I_0}{I_{-1}}\right) + (\alpha_1 \sin \theta + \beta_1 \cos \theta + 1 + \beta_0) \frac{I_0}{2I_{-1}} - \frac{\tilde{I}_{-1}}{I_{-1}}, \quad (25)$$

где

$$I_k = m^2 \int_{\Delta}^1 h^k \frac{\text{th}mh}{mh - \text{th}mh} dh, \\ \tilde{I}_k = m^2 \int_{\Delta}^1 h^k \frac{Q_q \text{th}mh}{mh - \text{th}mh} dh. \quad (26)$$

Вычислим силу трения действующую на нижнюю пластину

$$F_{\text{тр}} = \int_0^1 \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} dx = \frac{1}{1 - \Delta} \int_{\Delta}^1 \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} dh.$$

Проводя вычисления, получим

$$(1 - \Delta)F_{\text{тр}} = (\alpha_1 \sin \theta + \beta_1 \cos \theta + 1 + \beta_0) \ln \frac{\text{sh}m}{\text{sh}m\Delta} + 2QI_0 - \frac{2(\alpha_0 + \alpha_h)}{1 - \Delta}(I_0 - I_1) - (\alpha_1 \sin \theta + \beta_1 \cos \theta + 1 + \beta_0)I_1 + 2\tilde{I}_0. \quad (27)$$

Интегрируя выражение (24) по h от Δ до h , получим функцию распределения давления по подшипнику

$$p(h(x)) - p(\Delta) = \frac{4Q}{1-\Delta} I_{-1}(h) - \frac{4(\alpha_0 + \alpha_h)}{(1-\Delta)^2} [I_{-1}(h) - I_0(h)] - \frac{2(\alpha_1 \sin \theta + \beta_1 \cos \theta + 1 + \beta_0)}{1-\Delta} I_0(h) + \frac{4\tilde{I}_{-1}}{1-\Delta}. \quad (28)$$

Здесь $I_k(h)$ отличаются от соответствующих интегралов (26) лишь переменным верхним пределом h . Интегрируя (28) по всей длине подшипника, найдем подъемную силу

$$\begin{aligned} P &= \int_0^1 [p(h(x)) - p(\Delta)] dx = \frac{1}{1-\Delta} \int_{\Delta}^1 [p(h) - p(\Delta)] dh = \\ &= \frac{4Q}{(1-\Delta)^2} \int_{\Delta}^1 I_{-1}(h) dh - \frac{4(\alpha_0 + \alpha_h)}{(1-\Delta)^3} \int_{\Delta}^1 [I_{-1}(h) - I_0(h)] dh - \\ &- \frac{2(\alpha_1 \sin \theta + \beta_1 \cos \theta + 1 + \beta_0)}{(1-\Delta)^2} \int_{\Delta}^1 I_0(h) dh + \\ &+ \frac{4}{(1-\Delta)^2} \int_{\Delta}^1 \tilde{I}_{-1}(h) dh. \end{aligned} \quad (29)$$

Каждый из интегралов в (22) вычисляется интегрированием по частям и дает

$$\int_{\Delta}^1 I_k(h) dh = I_k - I_{k+1}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\begin{aligned} P &= \frac{4Q}{(1-\Delta)^2} (I_{-1} - I_0) - \frac{4(\alpha_0 + \alpha_h)}{(1-\Delta)^3} [I_{-1} - 2I_0 + I_1] - \\ &- \frac{2(\alpha_1 \sin \theta + \beta_1 \cos \theta + 1 + \beta_0)}{(1-\Delta)^2} [I_0 - I_1] + \\ &+ \frac{4}{(1-\Delta)^2} (\tilde{I}_{-1} - \tilde{I}_0). \end{aligned} \quad (30)$$

В случае отсутствия продува и источников массы из (30) получаем

$$P = \frac{2I_1}{(1-\Delta)^2} \left(1 - \frac{I_0^2}{I_{-1}I_1} \right),$$

что совпадает с соответствующей формулой работы [1].

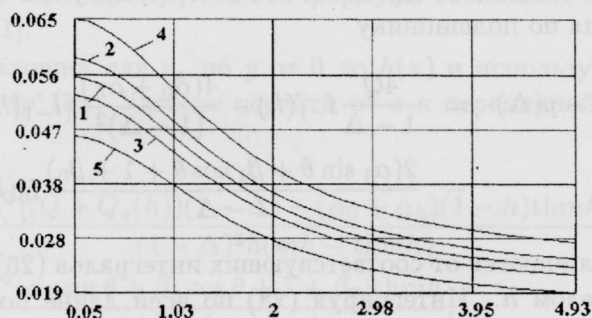


Рис. 2: Зависимость коэффициента эффективности подшипника η от числа Альфвена

Исходя из полученного решения, были зависимости коэффициента эффективности подшипника $\eta = P/F_{\text{тр}}$ (отношение подъемной силы к силе трения на нижней пластине) от следующих ниже величин.

На рис. 2 показана зависимость коэффициента эффективности от магнитного поля (числа Альфвена). График 1 соответствует ситуации отсутствия продува, а 2 и 3 продуву перпендикулярно стенкам подшипника в положительном и отрицательном направлениях. Данные результаты показывают, что магнитное поле, тормозящее течение жидкости вдоль канала (как и в задаче о движении между параллельными пластинами), приводит к ухудшению показателей подшипника. Вдув на нижней пластине, приводящий к уменьшению силы трения (график 2), улучшает свойства подшипника, а отсос, увеличивающий силу трения - ухудшает (график 3). Распределенные источники массы не приводят к качественному изменению (графики 4 и 5), однако источники (4) улучшают, а стоки массы (5) приводят к ухудшению свойств подшипника.

На рис. 3 изображены графики зависимости η от отношения продува $\alpha = \frac{\alpha_0}{\alpha_1}$. Линейный характер зависимости обусловлен малыми значениями для скорости вдува и отсоса. График 1 соответствует отсутствию источников (стоков) массы, 2 - источникам, а 3 - стокам массы.

На рис. 4 показана зависимость η от угла наклона вдува на нижней пластине при постоянной интенсивности. Отсос на верхней пластине перпендикулярен ей и по модулю равен вдуву на нижней пластине. Графики 1, 2, 3 соответствуют тем же случаям, что и на рис. 2

Как основной вывод, следует отметить уменьшение силы трения на поверхности, через которую вдувается масса среды, и увеличение при отсосе с этой поверхности. Распределенные в смазке источники массы качественно не меняют этого вывода, источники массы улучшают свойства подшипника, а стоки - ухудшают.

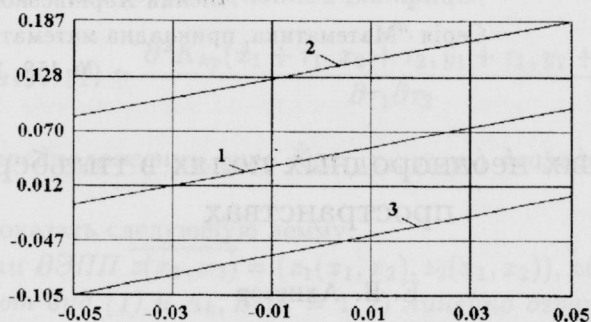


Рис. 3: Зависимость коэффициента эффективности подшипника η от скорости продува $a = a_0/a_1$

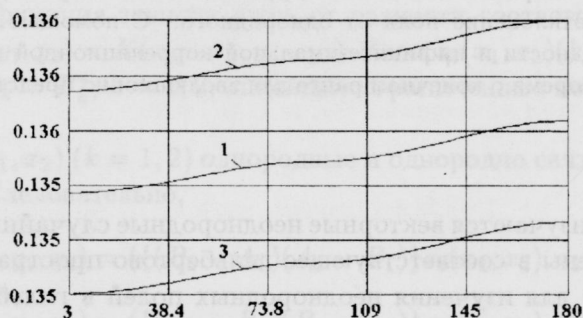


Рис. 4: Зависимость коэффициента подшипника η от угла наклона струи вдува на нижней стенке

Результаты, приведенные в работе (выражения 22, 23, 27, 30) позволяют получить, если это необходимо, и другие характеристики МГД-подшипника, в частности - электрический ток.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарапов И.Е. Задача смазки в магнитной гидродинамике // Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы. - Рига. - 1962. - С. 147-154.
2. Tarapov I.Ye. The motion of continuum with sources of mass, impulse and energy continuously distributed // Proceed. of the Fifth Intern. Conf. of Fluid Mech., Cairo, Egypt, - 1995. - P. 1286-1297.

О векторных неоднородных полях в гильбертовых пространствах

Е. Б. Ахизер

Харьковский государственный университет

В статье изучаются неоднородные векторные поля в гильбертовых пространствах. Введено понятие представимого векторного поля и дан критерий эволюционной представимости в терминах корреляционной матрицы. Введена инфинитезимальная корреляционная матрица, которая характеризует отклонение поля от однородного. С помощью понятия ранга неоднородности и инфинитезимальной корреляционной матрицы доказывается теорема о конечном ранге для эволюционно представимого поля.

В данной статье изучаются векторные неоднородные случайные поля после того, как они вложены в соответствующее гильбертово пространство. Такое вложение позволяет для изучения неоднородных полей в гильбертовом пространстве использовать теорию систем дважды перестановочных операторов, ведущую роль в создании которой сыграли работы Ваксмана Л. Л. и Золотарева В. А. [1]. Затем Аббауи Л., Барруш Ф., Золотарев В. А. и Янцевич А. А. успешно применили спектральную теорию систем дважды перестановочных операторов к изучению некоторых классов скалярных неоднородных полей и векторных неоднородных кривых в гильбертовых пространствах. Настоящая работа посвящена некоторым проблемам корреляционной теории неоднородных векторных полей в гильбертовом пространстве.

Векторное поле $\bar{z}(x_1, x_2) = (z_1(x_1, x_2), z_2(x_1, x_2))$ называется эволюционно представимым (ВЭПП), если случайные поля $z_k(x_1, x_2)$ ($k = 1, 2$) эволюционно представимы, т.е. имеют вид:

$$z_1(x_1, x_2) = e^{ix_1 A_1 + ix_2 A_2} z_{01}, \quad z_2(x_1, x_2) = e^{ix_1 B_1 + ix_2 B_2} z_{02}, \quad (1)$$

где z_{0k} – некоторые фиксированные элементы пространства $H = \overline{\bigvee C_{p,q}^{(k)} z_k(x_p, x_q)}$ и A_k, B_k ($k = 1, 2$) – линейные ограниченные коммутирующие операторы, действующие в пространстве H .

Определение. Инфинитезимальной корреляционной матрицей (ИКМ) $\dot{W}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ назовем матрицу, элементами которой являются следу-

ющие производные от корреляционной матрицы:

$$W_{kp}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{\partial^2 K_{kp}(x_1 + \tau_1, x_2 + \tau_2, y_1 + \tau_1, y_2 + \tau_2)}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} \Big|_{\tau_1 = \tau_2 = 0},$$

$k, p = 1, 2$. (В предположении, что $\tilde{K}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ дважды дифференцируема).

Нетрудно доказать следующую лемму:

Лемма. Если ВЭПП $\overline{z(x_1, x_2)} = (z_1(x_1, x_2), z_2(x_1, x_2))$, где $z_k(x_1, x_2)$ ($k = 1, 2$) имеют вид (1) и A_k, B_k ($k = 1, 2$) линейно ограниченные коммутирующие операторы, то ИКМ $\tilde{W}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \langle (2Im A_1 2Im A_2 z_1(x), z_1(y)) & \langle (B_1^* - A_1)(A_2^* - B_2) z_1(x), z_2(y) \rangle \\ \langle (A_1^* - B_1)(B_2^* - A_2) z_2(x), z_1(y) \rangle & \langle 2Im B_1 2Im B_2 z_2(x) z_2(y) \rangle \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$.

Случайное поле $z_k(x_1, x_2)$ ($k = 1, 2$) называется однородным, если его корреляционная функция зависит лишь от разности соответствующих аргументов: $K(x_1, x_2, y_1, y_2) = K(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$. Если $z_k(x_1, x_2)$ ($k = 1, 2$) однородны, то $A_k = A_k^*$, $B_k = B_k^*$, $k = 1, 2$, линейные ограниченные коммутирующие операторы [2].

Пусть $z_k(x_1, x_2)$ ($k = 1, 2$) однородные и однородно связанные, тогда ИКМ равна нулю. Следовательно,

$$W_{12}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \langle \{(B_1 - A_1)(A_2 - B_1)\} z_1(x_1, x_2), z_2(y_1, y_2) \rangle = 0, \quad (3)$$

$$W_{21}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \langle \{(A_1 - B_1)(B_2 - A_2)\} z_2(x_1, x_2), z_1(y_1, y_2) \rangle = 0. \quad (4)$$

Записи $[(B_1 - A_1)(A_2 - B_2)] z_1(x_1, x_2)$ и $[(A_1 - B_1)(B_2 - A_2)] z_2(x_1, x_2)$ имеют смысл только в случае непустого пересечения областей определения операторов A_i и B_i , $i = 1, 2$. Не ограничивая общности, можно считать области определения операторов A_i и B_i , $i = 1, 2$ соответственно $D(A_i)$ и $D(B_i)$ всюду плотными в H (существование сопряженного гарантирует это), то есть $\overline{D(A_i)} \equiv \overline{D(B_i)} \equiv H$, $i = 1, 2$. Для случая, когда A_i и B_i ($i = 1, 2$) — ограниченные операторы, можно считать $D(A_i) \equiv D(B_i) \equiv H$ ($i = 1, 2$) и что они заданы во всем пространстве H . Выражения (3) и (4) означают, что элементы $[(B_1 - A_1)(A_2 - B_2)] z_1(x_1, x_2)$ и $[(A_1 - B_1)(B_2 - A_2)] z_2(x_1, x_2)$ — ортогональны всем элементам всюду плотного множества, в частности и $z_2(x_1, x_2)$ и $z_1(x_1, x_2)$ соответственно, то есть

$$\begin{cases} [(B_1 - A_1)(A_2 - B_2)] z_1(x_1, x_2) \equiv 0 \\ [(A_1 - B_1)(B_2 - A_2)] z_2(x_1, x_2) \equiv 0 \end{cases}$$

Поскольку $\overline{D(A_i)} \equiv \overline{D(B_i)}$, то заключаем, что $A_i \overset{H}{=} B_i$. В случае ограниченности операторов A_i и B_i ($i = 1, 2$) получаем, что $A_i = B_i$, так как $D(A_i) \equiv D(B_i)$.

Итак, $A_1 = B_1 = A_1^*$, $A_2 = B_2 = A_2^*$ если только $z_1(x_1, x_2) = e^{ix_1 A_1 + ix_2 A_2} z_{01}$, $z_2(x_1, x_2) = e^{ix_1 B_1 + ix_2 B_2} z_{02}$ однородные и однородно связанные поля.

Таким образом, лемма доказана.

Теорема 1. Для того, чтобы векторное эволюционно представимое поле (ВЭПП) $\bar{z}(x_1, x_2) = (z_1(x_1, x_2), z_2(x_1, x_2))$, где $z_1(x_1, x_2) = e^{ix_1 A_1 + ix_2 A_2} z_{01}$, $z_2(x_1, x_2) = e^{ix_1 B_1 + ix_2 B_2} z_{02}$ было однородным в широком смысле, необходимо и достаточно, чтобы

- a) $A_k = A_k^* = B_k$, $k = 1, 2$,
 б) $[A_k A_l] = 0$, $k, l = 1, 2$.

Следующая теорема дает критерий эволюционной представимости векторного поля $\bar{z}(x_1, x_2)$.

Теорема 2. Для того, чтобы комплексно значная матрица-функция $\check{K}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ была корреляционной матрицей ВЭПП

$$\bar{z}(x_1, x_2) = (e^{ix_1 A_1 + ix_2 A_2} z_{01}, e^{ix_1 B_1 + ix_2 B_2} z_{02}),$$

где $z_{0k} \in H$, $A_k, B_k \in [H, H]$ ($k = 1, 2$), необходимо и достаточно, чтобы

- a) матрица $\check{K}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ была эрмитово неотрицательной;
 б) $\check{K}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ — дважды непрерывно дифференцируемой;
 в) существовала такая константа $0 < \mu < \infty$, что

$$\left| \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \left\langle \vec{a}_k \check{L}(x_{1k}, x_{2k}, y_{1j}, y_{2j}), \vec{b}_j \right\rangle \right|^2 \leq \\ \leq \mu \sum_{k,j=1}^{N_1} \left\langle \vec{a}_k \check{K}_{nn}(x_{1k}, x_{2k}, y_{1j}, y_{2j}), \vec{a}_j \right\rangle \sum_{k,j=1}^{N_2} \left\langle \vec{b}_k \check{K}_{nn}(x_{1k}, x_{2k}, y_{1j}, y_{2j}), \vec{b}_j \right\rangle,$$

где

$$L_{nj}(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, y_j^{(1)}, y_j^{(2)}) = \frac{\partial K_{nn}(x_1, x_2, y_1, y_2)}{\partial x_j} \bigg|_{\substack{x_1 = x_k^{(1)}, y_1 = y_j^{(1)}, \\ x_2 = x_k^{(2)}, y_2 = y_j^{(2)}}},$$

$$\vec{a}_k = (a_k^{(1)}, a_k^{(2)}), \quad \vec{b}_k = (b_k^{(1)}, b_k^{(2)}), \quad a_k^{(i)}, b_k^{(i)} \in C.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$\check{K}_{nn}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \langle \langle z_n(x_1, x_2), z_n(y_1, y_2) \rangle \rangle \quad n = 1, 2,$$

где $z_1(x_1, x_2) = e^{ix_1 A_1 + ix_2 A_2} z_{01}$, $z_2(x_1, x_2) = e^{ix_1 B_1 + ix_2 B_2} z_{02}$, $z_{0k} \in H$, A_i и B_i ($i = 1, 2$) — линейные ограниченные коммутирующие операторы в гильбертовом пространстве H .

А) Пусть $\{x_k^{(i)}\}_{k=1}^N$, $\{y_l^{(i)}\}_{l=1}^N$ — последовательности из $D_{\check{K}(x_1, x_2, y_1, y_2)}$ и $\vec{a}_k = (a_k^{(1)}, a_k^{(2)})$, $\vec{b}_k = (b_k^{(1)}, b_k^{(2)})$, $a_k^{(i)}, b_k^{(i)} \in C$, $i = 1, 2$.

Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{k,j=1}^N \langle \bar{a}_k \tilde{K}(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, y_j^{(1)}, y_j^{(2)}), \bar{a}_j \rangle = \\ &= \sum_{k,j=1}^1 \sum_{i,l=1}^2 \langle a_k^{(i)} z_i(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}), a_j^{(l)} z_l(y_j^{(1)}, y_j^{(2)}) \rangle = \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^2 a_k^{(i)} z_i(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}), \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^2 a_j^{(l)} z_l(y_j^{(1)}, y_j^{(2)}) \right\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Б) $\tilde{K}(t, s)$ бесконечно дифференцируема при ограниченных A_i и B_i ($i = 1, 2$).

В) Из определения $L_{nj}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ имеем:

$$L_{1j}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{\partial K_{11}((x_1, x_2, y_1, y_2))}{\partial x_j} = \langle iA_j z_1(x_1, x_2), z_1(y_1, y_2) \rangle, \quad j = 1, 2,$$

и

$$\left\| \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^2 \langle a_k^{(l)} z_l(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}) \rangle \right\|^2 = \sum_{k,j=1}^{N_1} \langle \bar{a}_k K_{11}(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, y_j^{(1)}, y_j^{(2)}), \bar{a}_j \rangle,$$

то в результате получим

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \langle \bar{a}_k L_{1j}(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, y_j^{(1)}, y_j^{(2)}) \bar{b}_j \rangle \right|^2 = \\ &= \left| \left\langle \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^2 iA_l a_k^{(l)} z_l(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}), \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{m=1}^2 b_j^{(m)} z_m(y_j^{(1)}, y_j^{(2)}) \right\rangle \right|^2 \leq \\ &\leq \|A_l\|^2 \left\| \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^2 a_k^{(l)} z_l(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}) \right\|^2 \left\| \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{m=1}^2 b_j^{(m)} z_m(y_j^{(1)}, y_j^{(2)}) \right\|^2 \leq \\ &\leq \mu_1 \sum_{k,j=1}^{N_1} \langle \bar{a}_k K_{11}(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, y_j^{(1)}, y_j^{(2)}), \bar{a}_j \rangle \sum_{k,j=1}^{N_2} \langle \bar{b}_k K_{11}(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, y_j^{(1)}, y_j^{(2)}), \bar{b}_j \rangle, \end{aligned}$$

где принято в качестве $\mu_1 \max \{\|A_l\|^2, l = 1, 2\}$.

Аналогично рассуждая и учитывая, что

$$L_{2j}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{\partial K_{22}((x_1, x_2, y_1, y_2))}{\partial x_j} = \langle iB_j z_2(x_1, x_2), z_2(y_1, y_2) \rangle, \quad j = 1, 2$$

получим

$$\left| \left\langle \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^2 iB_l a_k^{(l)} z_l(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}), \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{m=1}^2 b_j^{(m)} z_m(y_j^{(1)}, y_j^{(2)}) \right\rangle \right|^2 \leq$$

$$\leq \|B_l\|^2 \left\| \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^2 a_k^{(l)} z_2(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}) \right\|^2 \left\| \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{m=1}^2 b_j^{(m)} z_2(y_j^{(1)}, y_j^{(2)}) \right\|^2 \leq$$

$$\leq \mu_2 \sum_{k,j=1}^{N_1} \langle \bar{a}_k K_{22}(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, y_j^{(1)}, y_j^{(2)}), \bar{a}_j \rangle \sum_{k,j=1}^{N_2} \langle \bar{b}_k K_{22}(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, y_j^{(1)}, y_j^{(2)}), \bar{b}_j \rangle,$$

где в качестве μ_2 теперь взято $\max \{\|B_l\|^2, l = 1, 2\}$.

Окончательно имеем:

$$\left| \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \langle \vec{a}_k \tilde{L}(x_{1k}, x_{2k}, y_{1j}, y_{2j}), \vec{b}_j \rangle \right|^2 \leq$$

$$\leq \mu \sum_{k,j=1}^{N_1} \langle \vec{a}_k K_{nn}(x_{1k}, x_{2k}, y_{1j}, y_{2j}), \vec{a}_j \rangle \sum_{k,j=1}^{N_2} \langle \vec{b}_k K_{nn}(x_{1k}, x_{2k}, y_{1j}, y_{2j}), \vec{b}_j \rangle,$$

где $\mu = \max \{\mu_1, \mu_2\} = \max \{\|A_l\|^2, \|B_l\|^2, l = 1, 2\}$.

Достаточность. Рассмотрим гильбертово пространство H $\dim H = N$ (в случае $N = \infty$ H предполагается сепарабельным)

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^N \bar{a}_k \tilde{z}(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}), \quad \bar{a}_k = (a_k^{(1)}, a_k^{(2)}), \quad h_k^{(j)} \in C, \quad j = 1, 2 \right\}.$$

Определим в этом гильбертовом пространстве H бинарную форму

$$\left\langle \sum_{k=1}^{N_1} \bar{a}_k z_l(x_k), \sum_{j=1}^{N_2} \bar{a}_j z_l(y_j) \right\rangle = \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \langle \bar{a}_k \tilde{K}(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, y_j^{(1)}, y_j^{(2)}), \bar{a}_j \rangle, \quad (5)$$

где $x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)})$, $y_j = (y_j^{(1)}, y_j^{(2)})$.

Докажем, что таким образом заданная бинарная форма (5) обладает всеми свойствами скалярного произведения:

$$а) \langle a_i z_i(x_1, x_2), a_l z_l(y_1, y_2) \rangle = \langle a_i \tilde{K}(x_1, x_2, y_1, y_2), a_l \rangle = \overline{\langle a_l, a_i \tilde{K}(x_1, x_2, y_1, y_2) \rangle} =$$

$$= \overline{\langle a_l, z_l(y_1, y_2), a_i z_i(x_1, x_2) \rangle}, \quad \forall i, l = 1, 2;$$

$$б) \left\langle \sum_{k=1}^N a_k^{(i)} z_i(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}), a z(x_1, x_2) \right\rangle = \sum_{k=1}^N \langle a_k^{(i)} z_i(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}), a z(x_1, x_2) \rangle_H;$$

$$в) \langle \lambda a_i z_i(x_1, x_2), a_l z_l(y_1, y_2) \rangle = \langle \lambda a_i \tilde{K}(x_1, x_2, y_1, y_2), a_l \rangle =$$

$$= \lambda \langle a_i \tilde{K}(x_1, x_2, y_1, y_2), a_l \rangle = \lambda \langle a_i z_i(x_1, x_2), a_l z_l(y_1, y_2) \rangle \quad \forall i, l = 1, 2,$$

$$г) \left\langle \sum_{k=1}^M a_k^{(l)} z_l(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}), \sum_{j=1}^M a_j^{(m)} z_m(y_j^{(1)}, y_j^{(2)}) \right\rangle_H =$$

$$= \sum_{k,j=1}^M \langle a_k^{(l)} z_l(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}), a_j^{(m)} z_m(y_j^{(1)}, y_j^{(2)}) \rangle =$$

$$= \sum_{k,j=1}^M \langle a_k^{(l)} K(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, y_j^{(1)}, y_j^{(2)}), a_j^{(m)} \rangle \geq 0, \quad l, m = 1, 2.$$

Если замкнуть бинарную форму, то получаем гильбертово пространство H . Пусть $\bar{z}(x_1, x_2) = (z_1(x_1, x_2), z_2(x_1, x_2))$ – поверхность в H . Тогда

$$\langle \langle z_k(x_1, x_2), z_l(y_1, y_2) \rangle \rangle = \check{K}(x_1, x_2, y_1, y_2), \quad k, l = 1, 2.$$

Зададим билинейные функционалы $F_{nj}(n, j = 1, 2)$ таким образом:

$$F_{nj}(a, b) = \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M \langle \bar{a}_k \check{L}_{nj}(x_1, x_2, y_1, y_2), \bar{b}_m \rangle, \quad n, j = 1, 2, \quad (6)$$

где

$$\bar{a}_k = (a_k^{(1)}, a_k^{(2)}), \quad \bar{b}_m = (b_m^{(1)}, b_m^{(2)}),$$

$$a_l = \sum_{k=1}^N a_k^{(l)} z_l(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}), \quad b_n = \sum_{m=1}^M b_m^{(n)} z_n(y_m^{(1)}, y_m^{(2)}).$$

Из условия в) теоремы, билинейные функции $F_{nj}(n, j = 1, 2)$ определены корректно и ограничены. Используя теорему Рисса, запишем функционалы $F_{nj}(a, b)$ в виде $F_{1j}(a, b) = \langle iA_j a, b \rangle$, $F_{2j}(a, b) = \langle iB_j a, b \rangle$, $j = 1, 2$, где A_j, B_j ($j = 1, 2$) – линейные ограниченные операторы в H . Пусть $b = \sum_{m=1}^M b_m z_n(y_m^{(1)}, y_m^{(2)})$, $n = 1, 2$, тогда при $n = 1$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_l} \langle z_1(x_1, x_2), b \rangle &= \frac{\partial}{\partial x_l} \sum_{m=1}^M \bar{b}_m K_{11}(x_1, x_2, y_m^{(1)}, y_m^{(2)}) = \sum_{j=1}^M \bar{b}_m L_{1j}(x_1, x_2, y_m^{(1)}, y_m^{(2)}) = \\ &= \sum_{m=1}^M b_m \langle iA_l z_1(x_1, x_2), z_1(y_m^{(1)}, y_m^{(2)}) \rangle = \langle iA_l z_1(x_1, x_2), b \rangle, \quad l = 1, 2. \end{aligned}$$

Это значит, что $\frac{\partial z_1(x_1, x_2)}{\partial x_l} = iA_l z_1(x_1, x_2)$ в слабом смысле, т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{z_1(x_1 + \varepsilon, x_2) - z_1(x_1, x_2)}{\varepsilon} = iA_1 z_1(x_1, x_2),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{z_1(x_1 + \varepsilon, x_2) - z_1(x_1, x_2)}{\varepsilon} = iA_2 z_1(x_1, x_2)$$

в слабом смысле. Аналогично, при $n = 2$:

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \langle z_2(x_1, x_2), b \rangle = \sum_{m=1}^M \bar{b}_m L_{2l}(x_1, x_2, y_m^{(1)}, y_m^{(2)}) = \langle iB_l z_2(x_1, x_2), b \rangle, \quad l = 1, 2.$$

Т.е. $\frac{\partial z_2}{\partial x_l} = iB_l z_2(x_1, x_2)$ в слабом смысле, откуда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{z_2(x_1 + \varepsilon, x_2) - z_2(x_1, x_2)}{\varepsilon} = iB_1 z_2(x_1, x_2),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{z_2(x_1 + \varepsilon, x_2) - z_2(x_1, x_2)}{\varepsilon} = iB_2 z_2(x_1, x_2)$$

в слабом смысле. С другой стороны:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{z_l(x_1 + \varepsilon, x_2) - z_l(x_1, x_2)}{\varepsilon} \right\|^2 &= \frac{1}{\varepsilon^2} [K_{ll}(x_1 + \varepsilon, x_2, x_1 + \varepsilon, x_2) - \\ &- K_{ll}(x_1 + \varepsilon, x_2, x_1, x_2) - K_{ll}(x_1, x_2, x_1 + \varepsilon, x_2) + K_{ll}(x_1, x_2, x_1, x_2)], \\ \frac{\partial^2 K_{ll}(x_1, x_2, y_1, y_2)}{\partial x_1 \partial y_1} \Big|_{\substack{x_1=y_1 \\ x_2=y_2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial K_{ll}(x_1, x_2, y_1 + \varepsilon, y_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial K_{ll}(x_1, x_2, y_1, y_2)}{\partial x_1} \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} [K_{ll}(x_1 + \varepsilon, x_2, x_1 + \varepsilon, x_2) - K_{ll}(x_1, x_2, x_1 + \varepsilon, x_2) - \\ &- K_{ll}(x_1 + \varepsilon, x_2, x_1, x_2) + K_{ll}(x_1, x_2, x_1, x_2)]. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \left\| \frac{z_l(x_1, x_2 + \varepsilon) - z_l(x_1, x_2)}{\varepsilon} \right\|^2 &= \frac{1}{\varepsilon^2} [K_{ll}(x_1, x_2 + \varepsilon, x_1, x_2 + \varepsilon) - \\ &- K_{ll}(x_1, x_2 + \varepsilon, x_1, x_2) - K_{ll}(x_1, x_2, x_1, x_2 + \varepsilon) + K_{ll}(x_1, x_2, x_1, x_2)], \\ \frac{\partial^2 K_{ll}(x_1, x_2, y_1, y_2)}{\partial x_2 \partial y_2} \Big|_{\substack{x_1=y_1 \\ x_2=y_2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial K_{ll}(x_1, x_2, y_1 + \varepsilon, y_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial K_{ll}(x_1, x_2, y_1, y_2)}{\partial x_1} \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} [K_{ll}(x_1, x_2 + \varepsilon, x_1, x_2 + \varepsilon) - K_{ll}(x_1, x_2, x_1, x_2 + \varepsilon) - \\ &- K_{ll}(x_1, x_2 + \varepsilon, x_1, x_2) + K_{ll}(x_1, x_2, x_1, x_2)]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \frac{z_l(x_1, x_2) - z_l(x_1, x_2)}{\varepsilon} \right\|^2 &\rightarrow \frac{\partial^2 K_{ll}(x_1, x_2, y_1, y_2)}{\partial x_1 \partial y_1} \Big|_{\substack{x_1=y_1 \\ x_2=y_2}}, \\ \left\| \frac{z_l(x_1, x_2 + \varepsilon) - z_l(x_1, x_2)}{\varepsilon} \right\|^2 &\rightarrow \frac{\partial^2 K_{ll}(x_1, x_2, y_1, y_2)}{\partial x_2 \partial y_2} \Big|_{\substack{x_1=y_1 \\ x_2=y_2}}. \end{aligned}$$

То есть $\left\| \frac{1}{\varepsilon} [z_l(x_1 + \varepsilon, x_2) - z_l(x_1, x_2)] \right\|$ и $\left\| \frac{1}{\varepsilon} [z_l(x_1, x_2 + \varepsilon) - z_l(x_1, x_2)] \right\|$ — ограничены в совокупности. Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K_{11}(x_1, x_2, y_1, y_2)}{\partial x_k \partial y_k} &= \frac{\partial L_{1k}(x_1, x_2, y_1, y_2)}{\partial y_k} = \frac{\partial}{\partial y_k} \langle iA_k z_1(x_1, x_2), z_1(y_1, y_2) \rangle \Big|_{x_k=y_k} = \\ &= \langle iA_k z_1(x_1, x_2), iA_k z_1(y_1, y_2) \rangle \Big|_{x_k=y_k} = \|iA_k z_1(x_1, x_2)\|^2, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 K_{22}(x_1, x_2, y_1, y_2)}{\partial x_k \partial y_k} = \frac{\partial L_{2k}(x_1, x_2, y_1, y_2)}{\partial y_k} = \frac{\partial}{\partial y_k} \langle iB_k z_2(x_1, x_2), z_2(y_1, y_2) \rangle \Big|_{x_k=y_k} =$$

$$= \langle iB_k z_2(x_1, x_2), iB_k z_2(y_1, y_2) \rangle \Big|_{x_k=y_k} = \|iB_k z_2(x_1, x_2)\|^2,$$

то

$$\left\| \frac{z_1(x_1 + \varepsilon, x_2) - z_1(x_1, x_2)}{\varepsilon} \right\| \rightarrow \|iA_1 z_1(x_1, x_2)\|,$$

$$\left\| \frac{z_1(x_1, x_2 + \varepsilon) - z_1(x_1, x_2)}{\varepsilon} \right\| \rightarrow \|iA_2 z_1(x_1, x_2)\|,$$

$$\left\| \frac{z_2(x_1 + \varepsilon, x_2) - z_2(x_1, x_2)}{\varepsilon} \right\| \rightarrow \|iB_1 z_2(x_1, x_2)\|,$$

$$\left\| \frac{z_2(x_1, x_2 + \varepsilon) - z_2(x_1, x_2)}{\varepsilon} \right\| \rightarrow \|iB_2 z_2(x_1, x_2)\|,$$

и тогда $\frac{\partial}{\partial x_k} z_1(x_1, x_2) = iA_k z_1(x_1, x_2)$ и $\frac{\partial}{\partial x_k} z_2(x_1, x_2) = iB_k z_2(x_1, x_2)$ в сильном смысле.

Таким образом,

$$\frac{\partial z_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} = iA_1 z_1(x_1, x_2), \quad z_1(x_1, x_2) \Big|_{x_1=0} = z_1^{(2)}(x_2).$$

Следовательно, $z_1(x_1, x_2) = e^{iA_1 x_1} z_1^{(2)}(x_2)$.

$$\frac{\partial z_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} = iA_2 z_1(x_1, x_2) = e^{iA_1 x_1} \frac{\partial z_1^{(2)}(x_2)}{\partial x_2}.$$

Так как $\tilde{K}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 K_{11}(x_1, x_2, y_1, y_2)}{\partial x_1 \partial x_2} &= -\langle A_1 A_2 z_1(x_1, x_2), z_1(y_1, y_2) \rangle \\ \frac{\partial^2 K_{11}(x_1, x_2, y_1, y_2)}{\partial x_2 \partial x_1} &= -\langle A_2 A_1 z_1(x_1, x_2), z_1(y_1, y_2) \rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_1 A_2 = A_2 A_1,$$

Используя коммутруемость операторов A_1 и A_2 , имеем:

$$e^{iA_1 x_1} iA_2 z_1^{(2)}(x_2) = e^{iA_1 x_1} \frac{\partial z_1^{(2)}(x_2)}{\partial x_2}.$$

Таким образом,

$$iA_2 z_1^{(2)}(x_2) = \frac{\partial z_1^{(2)}(x_2)}{\partial x_2}, \quad z_1^{(2)}(x_2) = e^{iA_2 x_2} z_1(0),$$

где $z_1^{(2)}(0) = z_1(0, 0) = z_{01}$.

Аналогично рассуждая с полем $z_2(x_1, x_2)$, получим, что

$$z_1(x_1, x_2) = e^{iA_1 x_1 + iA_2 x_2} z_{01}, \quad z_2(x_1, x_2) = e^{iB_1 x_1 + iB_2 x_2} z_{02}$$

или

$$\bar{z}(x_1, x_2) = \left(e^{iA_1x_1 + iA_2x_2} z_{01}, e^{iB_1x_1 + iB_2x_2} z_{02} \right).$$

Поскольку ИКМ однородного поля равна нулю, то ее можно выбрать в качестве характеристики отклонения от однородности.

Рассмотрим квадратичные формы вида

$$\sum_{l,m=1}^N \langle \bar{a}_l \check{W}(x_l^{(1)}, x_l^{(2)}, x_m^{(1)}, x_m^{(2)}), \bar{a}_m \rangle, \quad (7)$$

где $\check{W}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ – ИКМ, а $\bar{a}_l \in C$.

Определение. Рангом нестационарности ВЭПП называется максимальный ранг квадратичных форм (7).

Очевидно, что из конечномерности рангов случайных полей $z_1(x_1, x_2) = e^{ix_1A_1 + ix_2A_2} z_{01}$ и $z_2(x_1, x_2) = e^{ix_1B_1 + ix_2B_2} z_{02}$ не вытекает конечномерность ранга ВЭПП $\bar{z}(x_1, x_2) = (z_1(x_1, x_2), z_2(x_1, x_2))$. В данном случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Для того, чтобы ранг ВЭПП $\bar{z}(x_1, x_2)$ был конечен, необходимо и достаточно, чтобы все подпространства

$$G_\alpha = \frac{1}{i}(A_\alpha - A_\alpha^*)H, F_\alpha = \frac{1}{i}(B_\alpha - B_\alpha^*)H, M_\alpha = \frac{1}{i}(A_\alpha^* - B_\alpha)H, \alpha = 1, 2$$

были конечномерны.

Доказательство. Начнем с необходимости.

Пусть ВЭПП $\bar{z}(x_1, x_2)$ имеет конечный ранг, тогда должен быть конечен ранг квадратичной формы (7). Распишем эту квадратичную форму:

$$\begin{aligned} & \sum_{l,m=1}^N \langle \bar{a}_l \check{W}(x_l^{(1)}, x_l^{(2)}, x_m^{(1)}, x_m^{(2)}), \bar{a}_m \rangle = \\ &= \sum_{l,m=1}^N a_l^{(1)} \langle 2ImA_1 2ImA_2 z_1(x_l^{(1)}, x_l^{(2)}), z_1(x_m^{(1)}, x_m^{(2)}) \rangle a_m^{(1)} + \\ &+ \sum_{l,m=1}^N a_l^{(1)} \langle [(B_1^* - A_1)A_2 - B_2^*(B_1^* - A_1)] z_1(x_l^{(1)}, x_l^{(2)}), z_2(x_m^{(1)}, x_m^{(2)}) \rangle a_m^{(2)} + \\ &+ \sum_{l,m=1}^N a_l^{(2)} \langle [(A_1^* - B_1)B_2 - A_2^*(A_1^* - B_1)] z_2(x_l^{(1)}, x_l^{(2)}), z_1(x_m^{(1)}, x_m^{(2)}) \rangle a_m^{(1)} + \\ &+ \sum_{l,m=1}^N a_l^{(2)} \langle 2ImB_1 2ImB_2 z_2(x_l^{(1)}, x_l^{(2)}), z_2(x_m^{(1)}, x_m^{(2)}) \rangle a_m^{(2)} = \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 2ImA_1 2ImA_2 & (B_1^* - A_1)(A_2 - B_2^*) \\ (A_1^* - B_1)(B_2 - A_2^*) & 2ImB_1 2ImB_2 \end{pmatrix} Z, Z \right\rangle, \end{aligned}$$

где

$$Z = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^N a_l^{(1)} z_1(x_l^{(1)}, x_l^{(2)}) \\ \sum_{l=1}^N a_l^{(2)} z_2(x_l^{(1)}, x_l^{(2)}) \end{pmatrix},$$

здесь использована дважды перестановочность операторов $A_l, B_l (l = 1, 2)$.

Поскольку ранг всей формы конечен, то ранг полученной блочной матрицы

$$E = \begin{pmatrix} 2Im A_1 2Im A_2 & (B_1^* - A_1)(A_2 - B_2^*) \\ (A_1^* - B_1)(B_2 - A_2^*) & 2Im B_1 2Im B_2 \end{pmatrix}$$

также конечен. Следовательно, максимальный минор, отличный от нуля, имеет конечный порядок. Таким образом, и все другие миноры, отличные от нуля, должны иметь конечный порядок. Это относится и к минорам, отвечающим матричным элементам $\frac{1}{i}(A_\alpha - A_\alpha^*), \frac{1}{i}(B_\alpha - B_\alpha^*), \frac{1}{i}(A_\alpha^* - B_\alpha)$. Отсюда вытекает, что подпространства $G_\alpha, F_\alpha, M_\alpha (\alpha = 1, 2)$ имеют конечную размерность.

Достаточность. Предположим, что все пространства $G_\alpha, F_\alpha, M_\alpha (\alpha = 1, 2)$ конечномерны. Пусть $\{g_n\}_{n=1}^{r_1}$ — ортонормированный базис в H_{01} , который состоит из сужения $2Im A_1 2Im A_2$ на его инвариантное подпространство H_{01} . $\{f_m\}_{m=1}^{r_2}$ — ортонормированный базис в H_{02} , который состоит из сужения $2Im B_1 2Im B_2$ на его инвариантное подпространство H_{02} . $\{a_p\}_{p=1}^{r_3}$ — ортонормированный базис в пространстве M_1 , а $\{b_k\}_{k=1}^{r_4}$ — ортонормированный базис в пространстве M_2 .

Таким образом, для ИКМ векторного поля $\bar{z}(x_1, x_2)$ получаем представление

$$\bar{W}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{r_1} \lambda_n \varphi_{n1}(x) \overline{\varphi_{n1}(y)} & - \sum_{k=1}^{r_4} \sum_{p=1}^{r_3} \psi_{kp1}(x) \overline{\xi_{kp21}(y)} \\ - \sum_{k=1}^{r_4} \sum_{p=1}^{r_3} \xi_{kp1}(x) \overline{\psi_{kp21}(y)} & \sum_{m=1}^{r_2} \beta_m \theta_{m2}(x) \overline{\theta_{m2}(y)}, \end{pmatrix},$$

где $\lambda_n (n = \overline{1, r_1})$ и $\beta_m (m = \overline{1, r_2})$ — действительные числа и $2Im A_1 2Im A_2 g_n = \lambda_n g_n, 2Im B_1 2Im B_2 f_m = \beta_m f_m$.

Следовательно, квадратичная форма (7) имеет вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{j,l=1}^N \langle \bar{a}_j W(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, x_l^{(1)}, x_l^{(2)}) \bar{a}_l \rangle = \\ & = \sum_{n=1}^{r_1} \lambda_n \left(\sum_{j=1}^N a_j^{(1)} \varphi_{n1}(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}) \sum_{l=1}^N a_l^{(2)} \overline{\varphi_{n1}(x_l^{(1)}, x_l^{(2)})} \right) - \\ & - \sum_{k=1}^{r_4} \sum_{p=1}^{r_3} \left(\sum_{j=1}^N a_j^{(1)} \psi_{kp1}(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}) \sum_{l=1}^N a_l^{(2)} \overline{\xi_{kp2}(x_l^{(1)}, x_l^{(2)})} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N a_j^{(2)} \psi_{kp2}(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}) \sum_{l=1}^N a_l^{(1)} \overline{\xi_{kp1}(x_l^{(1)}, x_l^{(2)})} + \\
& + \sum_{m=1}^{r_2} \beta_m \left(\sum_{j=1}^N a_j^{(2)} \Theta_{m2}(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}) \sum_{l=1}^N a_l^{(2)} \overline{\Theta_{m2}(x_l^{(1)}, x_l^{(2)})} \right) = \\
& = \sum_{n=1}^{r_1} \lambda_n \left| \sum_{j=1}^N a_j^{(1)} \varphi_{n1}(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}) \right|^2 - \\
& - \sum_{k=1}^{r_4} \sum_{p=1}^{r_3} \left(\sum_{j=1}^N a_j^{(1)} \psi_{kp1}(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}) \sum_{l=1}^N a_l^{(2)} \overline{\xi_{kp2}(x_l^{(1)}, x_l^{(2)})} + \right. \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{(2)} \psi_{kp2}(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}) \sum_{l=1}^N a_l^{(1)} \overline{\xi_{kp1}(x_l^{(1)}, x_l^{(2)})} \Big) + \\
& + \sum_{m=1}^N \beta_m \left| \sum_{j=1}^N a_j^{(2)} \Theta_{m2}(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}) \right|^2.
\end{aligned}$$

В силу исходного предположения, ранг эрмитовых форм

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{r_4} \sum_{p=1}^{r_3} \left(\sum_{j=1}^N a_j^{(1)} \psi_{kp1}(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}) \sum_{l=1}^N a_l^{(2)} \overline{\xi_{kp2}(x_l^{(1)}, x_l^{(2)})} + \right. \\
& + \sum_{j=1}^N a_j^{(2)} \psi_{kp2}(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}) \sum_{l=1}^N a_l^{(1)} \overline{\xi_{kp1}(x_l^{(1)}, x_l^{(2)})} \Big)
\end{aligned}$$

конечен. А, следовательно, и ранг всей формы (7) также конечен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Золотарев В. А. О треугольных моделях систем дважды перестановочных операторов // ДАН Арм.ССР. – 1976. – Т. 63, 3, С. 136–140.
2. Некоторые классы неоднородных случайных полей / Аббауи Л., Янцевич А. А.; Харьков. ун-т. – Харьков, 1984. – 52 с. – Деп. в УкрНИИНТИ, № 2206 – Ук-84.
3. Системы коммутирующих операторов и корреляционная теория одного класса кривых в гильбертовых пространствах / Янцевич А. А., Барруш Ф. С.; Харьков. ун-т. – Харьков, – 1991. – 31 с. – Деп. в ВИНТИ, № 2415 – 891.

Об одном классе нестационарных последовательностей, порождаемом дифференциально-разностными уравнениями в гильбертовом пространстве

Н. В. Черемская

Харьковский государственный университет

В статье при помощи дифференциально-разностного уравнения в гильбертовом пространстве строится корреляционная теория одного класса нестационарных последовательностей. Использование треугольных моделей несамосопряженных операторов позволяет проследить, как эволюционирует пространственно-временной спектр.

В статье реализуется гильбертов подход для изучения некоторых классов нестационарных случайных последовательностей, определяемых задачей Коши со случайными начальными данными. При этом существенную роль играют треугольные модели операторов [1], представление операторной экспоненты при помощи резольвенты [2]. Идея такого подхода была кратко изложена в [3].

Рассмотрим задачу Коши со случайными начальными данными для дифференциально-разностного уравнения

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{n+1}(x) &= \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_n}{\partial x^2}, \\ \tilde{u}_n \Big|_{n=0} &= \begin{cases} \tilde{u}_0(x, w), & x \geq 0 \\ 0 & x < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

где $w \in \Omega$, Ω – вероятностное пространство. $\tilde{u}_0(x, w)$ – случайный процесс с $M\tilde{u}_0(x, w) = 0$ и непрерывной корреляционной функцией $\tilde{K}_{u_0}(x, y)$.

Вложим $\tilde{u}_0(x, w)$ в гильбертово пространство $H_{u_0} = \bigvee_k C_k \tilde{u}_0(x, w)$ [1].

Тогда $\tilde{u}_0(x, w)$ в H_{u_0} является кривой $u_0(x) \in H_{u_0}$. Рассмотрим в H_{u_0} детерминированную задачу Коши

$$\begin{cases} u_{n+1}(x) &= \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_n(x)}{\partial x^2} \\ u_n \Big|_{n=0} &= u_0(x). \end{cases} \quad (2)$$

Используя (1), легко получить уравнение для корреляционной функции $\widetilde{K}_{m,n}(x, y)$ решения (1):

$$\widetilde{K}_{m+1,n+1}(x, y) = \nu^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \widetilde{K}_{m,n}(x, y). \quad (3)$$

Согласно начальным условиям,

$$\widetilde{K}_{m,n}(x, y) \Big|_{m=n=0} = \widetilde{K}_{0,0}(x, y) = \widetilde{K}_{u_0}(x, y).$$

Заметим, что из (2) получаем такое же уравнение для $K_{m,n}(x, y)$, но $K_{m,n}(x, y)$ рассматривается как скалярное произведение в соответствующем гильбертовом пространстве $H_{\tilde{u}_0}$ [1]:

$$u_{n+1}(x) = \nu \frac{\partial^2 u_n(x)}{\partial x^2},$$

$$u_{m+1}(y) = \nu \frac{\partial^2 u_m(y)}{\partial y^2}.$$

Перемножая (скалярно) левую и правую части, получаем

$$K_{m+1,n+1}(x, y) = \nu^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} K_{m,n}(x, y),$$

$$K_{m,n}(x, y) \Big|_{m=n=0} = \widetilde{K}_{0,0}(x, y) = \langle u_0(x), u_0(y) \rangle H_{\tilde{u}_0}, \quad (4)$$

$\widetilde{K}_{m,n}$ и $K_{m,n}$ удовлетворяют одной и той же задаче Коши. По теореме единственности $\widetilde{K}_{m,n} = K_{m,n}$.

Таким образом, нахождение корреляционной функции сводится к задаче Коши (4).

Можно рассмотреть разные корреляционные функции $K_{m,n}(x, y)$:

$$1) \ m = n, \ x \neq y, \ K_{m,n}(x, y) = K_{n,n}(x, y),$$

$$2) \ m = n, \ x = y, \ K_{m,n}(x, y) = K_{n,n}(x, x),$$

$$3) \ m \neq n, \ x = y, \ K_{m,n}(x, y) = K_{m,n}(x, x),$$

$$4) \ m \neq n, \ x \neq y, \ K_{m,n}(x, y).$$

Рассмотрим задачу Коши для корреляционной функции, когда начальные данные представляют собой эволюционно представимый диссипативный, асимптотически затухающий случайный процесс (кривую в гильбертовом пространстве) [1]:

$$K_{m+1,n+1}(x, y) = \nu^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} K_{m,n}(x, y),$$

$$K_{0,0}(x, y) = \begin{cases} K_{0,0}(x, y) = \int_0^{\infty} \varphi_0(x+z) \overline{\varphi_0(y+z)} dz, & x, y \geq 0, \\ 0 & \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

$$K_{m,n}(x, y) = \int_0^{\infty} \varphi_m(x+z) \overline{\varphi_n(y+z)} dz. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получаем:

$$\int_0^{\infty} \left[\varphi_{m+1}(x+z) \overline{\varphi_{n+1}(y+z)} - \nu^2 \varphi_m''(x+z) \overline{\varphi_n''(y+z)} \right] dz = 0. \quad (7)$$

Для выполнения (7) достаточно следующего условия:

$$\nu \varphi_m''(x+z) = \varphi_{m+1}(x+z).$$

Следовательно, для нахождения $\varphi_n(x)$ получаем задачу Коши:

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(x) &= \nu \frac{\partial^2 \varphi_n(x)}{\partial x^2}, \\ \varphi_n(x) \Big|_{n=1} &= \begin{cases} \varphi_0(x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned} K_{m+1,n+1}(x, y) &= \nu^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} K_{m,n}(x, y), \\ W_{m,n}(x, y) &= K_{m+1,n}(x, y) - K_{m,n+1}(x, y), \\ W_{m+1,n+1}(x, y) &= K_{m+2,n+1}(x, y) - K_{m+1,n+2}(x, y), \\ K_{m+2,n+1}(x, y) &= \nu^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} K_{m+1,n}(x, y), \\ K_{m+1,n+2}(x, y) &= \nu^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} K_{m,n+1}(x, y). \end{aligned} \quad (8)$$

Вычитая почленно из (8), получаем

$$\begin{cases} W_{m+1,n+1}(x, y) = \nu^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} W_{m,n}(x, y), \\ W_{m,n} \Big|_{m=n=0} = W_{0,0}(x, y) = \varphi_0(x) \overline{\varphi_0(y)}. \end{cases} \quad (9)$$

Будем искать решение (9) в виде $W_{m,n}(x, y) = \varphi_m(x) \overline{\varphi_n(y)}$, тогда для $\varphi_n(x)$ получаем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \varphi_{m+1}(x) = \nu \frac{\partial^2 \varphi_m(x)}{\partial x^2} \\ \varphi_m(x) \Big|_{m=0} = \begin{cases} \varphi_0(x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases} \end{cases} \quad (10)$$

Пусть теперь инфинитезимальная корреляционная функция $W(x, y)$ ($W(x, y) = -\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)K(x, y)$) имеет вид $W(x, y) = \varphi(x)\overline{\varphi(y)}$, где $\varphi_0(x) = \langle e^{ixA}u_0, g \rangle$, а g – каналовой элемент диссипативного оператора A [1].

Будем искать решение задачи (10) в виде $\varphi_n(x) = \langle B(n)e^{ixA}u_0, g \rangle$. Тогда из (10) имеем:

$$\langle (B(n+1) + \nu B(n)A^2)e^{ixA}u_0, g \rangle = 0.$$

Обозначим $B(n+1) + \nu B(n)A^2 = D(n)$, $\langle e^{ixA}u_0, D^*(n)g \rangle = 0$, $\forall x \in R^+$, $\bigcup_{x, u_0} e^{ixA}u_0 = H_u^{\sim}([1])$, значит $D^*(n)g$ ортогонален любому элементу из $H_u^{\sim}$, т.е. $D^*(n)g = 0$.

Следовательно, $D(n) = 0$, если $g \notin \text{Ker } D(n)$.

Итак,

$$B(n+1) + \nu B(n)A^2 = 0, \quad B(n+1) = -\nu A^2 B(n), \quad B(0) = I.$$

Отсюда $B(n) = (-1)^n \nu^n A^{2n}$. Заметим, что можно непосредственно искать решение задачи Коши (2) в случае

$$u_0(x) = \begin{cases} e^{ixA}u_0, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

в виде $u_n(x) = D(n)e^{ixA}u_0$, тогда для $D(n)$ из уравнения (2) имеем $D(n) = (-1)^n A^{2n}$, а $u_n(x) = (-1)^n \nu^n A^{2n} e^{ixA}u_0$ является решением задачи Коши. Или в более простой форме $u_n(x) = \nu^n \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} e^{ixA} u_0$.

При вычислении $(-1)^n \nu^n A^{2n} e^{ixA}$ удобно пользоваться представлением этой операторной функции от A с помощью резольвенты этого оператора

$$(-1)^n \nu^n e^{ixA} A^{2n} u_0 = -(-1)^n \nu^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{i\lambda x} \lambda^{2n} (A - \lambda I)^{-1} u_0 d\lambda,$$

где γ – контур, охватывающий весь спектр оператора A .

При вычислении $u_n(x)$ существенно используются треугольные модели операторов [1].

Пусть A – ограниченный диссипативный оператор с дискретным спектром $\dim \text{Im } A\bar{H} = 1$ и $u_0 = g$ – каналовой элемент. Его треугольная модель в l_2 имеет вид [1]

$$(\hat{A}f)_k = \lambda_k f_k + i \int_{j=k+1}^N f_j \beta_j \beta_k, \quad \text{где } \lambda_k = \alpha_k + i \frac{\beta_k^2}{2}, \quad \sum_{k=1}^N \beta_k^2 < \infty,$$

Λ – функции [1], соответствующие оператору $(-1)^n \nu^n e^{-ixA^*} A^{*2n}$, в данном случае имеют вид:

$$\Lambda_k(n, x) = -\frac{1}{2\pi i} (-1)^n \nu^n \oint_{\gamma} e^{-i\lambda x} \lambda^{2n} ((A^* - \lambda I)^{-1} g)_k d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}(-1)^n \nu^n \oint_{\gamma} e^{-i\lambda x} \lambda^{2n} \frac{\beta_k}{\lambda_k - \lambda} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j - \lambda}{\lambda_j - \lambda} d\lambda.$$

Получим теперь $\varphi(n)$ для треугольной модели оператора A в $L^2[0, 1]$ вида

$$(\hat{A}f)(y) = a(y)f(y) + i \int_0^y f(t)dt,$$

$$H = L^2[0, 1] \quad f(y) : \int_0^1 |f(y)|^2 dy < \infty.$$

Резольвента оператора A в данном случае имеет вид [2]:

$$(A - \lambda I)^{-1} u_0(y) = \frac{u_0(y)}{a(y) - \lambda} - i \int_0^y u_0(\tau) \frac{\partial^2}{\partial y \partial \tau} e^{-\int_{\tau}^y \frac{d\zeta}{a(\zeta) - \lambda}} d\tau.$$

Таким образом,

$$e^{ixA} u_0 = e^{ixa(y)} u_0(y) + \frac{1}{2\pi} \int_0^y u_0(\tau) d\tau \frac{\partial^2}{\partial x \partial \tau} \oint_{\gamma} e^{ix} d\lambda \exp \left(-i \int_{\tau}^y \frac{d\zeta}{a(\zeta) - \lambda} \right)$$

или иначе:

$$e^{ixA} u_0 = e^{ixa(y)} u_0(y) - \int_0^y d\tau e^{ia(\tau)x} u_0(\tau) \sqrt{\frac{x}{y - \tau}} I_1 \left(2\sqrt{x(y - \tau)} \right).$$

Итак,

$$u_n(x) = \nu^n \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} e^{ixA} u_0(y) = \\ = \nu^n \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \left\{ e^{ia(y)x} u_0(y) - \int_0^y d\tau e^{ia(\tau)x} u_0(\tau) \sqrt{\frac{x}{y - \tau}} I_1 \left(2\sqrt{x(y - \tau)} \right) \right\},$$

где

$$I_1 \left(2\sqrt{x(y - \tau)} \right) = \frac{2\sqrt{x(y - \tau)}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(2\sqrt{x(y - \tau)} \right)^{2k}}{2^{2k} k! (k + 1)!}.$$

Рассмотрим отдельные случаи.

1. $a(y) = 0$,

$$u_n(x) = \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \left\{ u_0(y) - \int_0^y d\tau u_0(\tau) \sqrt{\frac{x}{y - \tau}} I_1 \left(2\sqrt{x(y - \tau)} \right) \right\},$$

2. $a(y) = a_0$,

$$u_n(x) = \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \left\{ e^{ix a_0} u_0(y) - \int_0^y d\tau e^{i a_0 x} u_0(\tau) \sqrt{\frac{x}{y-\tau}} I_1 \left(2\sqrt{x(y-\tau)} \right) \right\},$$

3. $a(y) = y$

$$u_n(x) = \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \left\{ e^{ix y} u_0(y) - \int_0^y d\tau e^{i y x} u_0(\tau) \sqrt{\frac{x}{y-\tau}} I_1 \left(2\sqrt{x(y-\tau)} \right) \right\}.$$

4. Случай кусочно-постоянной функции $a(y)$

$$a(y) = \begin{cases} b_1, & 0 \leq y < a_1 \\ b_2, & a_1 \leq y < a_2 \\ b_3, & a_2 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

рассматривался в [2].

При вычислении $u_n(x)$ непосредственно в виде $u_n(x) = \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} e^{ix A} u_0$ в случае, когда u_0 не является канальным элементом, вычисления существенно усложняются, но могут быть проведены до конца.

Пусть A — ограниченный диссипативный оператор с дискретным спектром и $\dim 2Im A \bar{H} = 1$. Его треугольная модель в l_2 имеет вид:

$$(\hat{A}f)_k = \lambda_k f_k + i \int_{j=k+1}^N f_j \beta_j \beta_k, \text{ где } \lambda_k = \alpha_k + i \frac{\beta_k^2}{2}, \quad \sum_{k=1}^N \beta_k^2 < \infty.$$

Тогда

$$e^{ix A} u_0 = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} e^{i\lambda x} (\hat{A}^* - \lambda I)^{-1} u_0 d\lambda,$$

$$u_k = ((A^* - \lambda I)f(\lambda))_k,$$

$$u_k = (\bar{\lambda}_k - \lambda) f_k(\lambda) - i \sum_{j=1}^{k-1} f_j(\lambda) \beta_j \beta_k,$$

$$\frac{u_k}{\beta_k} = \frac{\bar{\lambda}_k - \lambda}{\beta_k} f_k(\lambda) - i \sum_{j=1}^{k-1} f_j(\lambda) \beta_j.$$

Обозначим $\frac{u_k}{\beta_k} = a_k$, $\frac{\bar{\lambda}_k - \lambda}{\beta_k} f_k(\lambda) = h_k$. Тогда

$$a_k = h(k) - i \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h(j)}{\bar{\lambda}_j - \lambda} \beta_j^2,$$

$$a_{k+1} = h(k+1) - i \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h(j)}{\lambda_j - \lambda} \beta_j^2,$$

$$a_{k+1} - a_k = h(k+1) - h(k) - i \frac{h(k)}{\lambda_j - \lambda} \beta_j^2.$$

Для $h(k)$ отсюда получаем линейное неоднородное разностное уравнение первого порядка

$$h(k+1) - h(k) - \frac{i\beta_k^2}{\lambda_k - \lambda} h(k) = a_{k+1} - a_k,$$

решение которого имеет вид:

$$h(k) = \sum_{\mu=0}^{k-1} \left[1 + \frac{i\beta_{\mu}^2}{\lambda_{\mu} - \lambda} \right] \left\{ \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{a_{\nu+1} - a_{\nu}}{\prod_{\mu=0}^{\nu} \left[1 + \frac{i\beta_{\mu}^2}{\lambda_{\mu} - \lambda} \right]} \right\} + \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j - \lambda}{\lambda_j - \lambda}.$$

Для $f_k(\lambda)$ получаем:

$$f_k(\lambda) = \frac{\beta_k}{\lambda_k - \lambda} \left\{ \sum_{\mu=0}^{k-1} \left[1 + \frac{i\beta_{\mu}^2}{\lambda_{\mu} - \lambda} \right] \left\{ \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{a_{\nu+1} - a_{\nu}}{\prod_{\mu=0}^{\nu} \left[1 + \frac{i\beta_{\mu}^2}{\lambda_{\mu} - \lambda} \right]} \right\} + \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j - \lambda}{\lambda_j - \lambda} \right\}. \quad (11)$$

Дальнейшее выражение для (11) опускается ввиду его громоздкости.

Рассмотрим случай, когда A – вольтерров оператор с единственной точкой спектра $\{0\}$

$$(A - \lambda I)^{-1} u_0 = f(\lambda, x),$$

$$u_0 = (A - \lambda I) f(\lambda, x),$$

$$u_0 = -\lambda f(\lambda, x) - i \int_x^1 f(\lambda, y) dy \quad (\text{случай } a(x) = 0).$$

Обозначим $h(x) = \int_x^1 f(\lambda, y) dy$. Тогда

$$ih + \lambda \frac{dh}{dx} = u_0(x), \quad h(1) = 0.$$

Отсюда

$$h(x) = \left(C_1 + \int_x^1 \frac{u_0(y)}{\lambda} e^{\frac{i}{\lambda}(1-y)} dy \right) e^{\frac{i}{\lambda}(1-x)}.$$

Учитывая начальное условие $h(1) = 0$, получаем $C_1 = 0$.

Итак,

$$-\frac{df(\lambda, x)}{dx} = h(x) = \left(\int_x^1 \frac{u_0(y)}{\lambda} e^{\frac{i}{\lambda}(1-y)} dy \right) e^{\frac{i}{\lambda}(1-x)},$$

$$f(\lambda, x) = - \int_0^x \left(\int_{\tau}^1 \frac{u_0(y)}{\lambda} e^{\frac{i}{\lambda}(1-y)} dy \right) e^{\frac{i}{\lambda}(1-\tau)} d\tau. \quad (12)$$

Снова опускаем окончательное выражение для (12) ввиду его громоздкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1971. – 160 с.
2. Когут Е.А., Черемская Н.В., Янцевич А.А. О представлении резольвент вольтеровых операторов // Сборник научных трудов. Краевые задачи для дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, – 1998. – С. 99-102.
3. Черемская Н. В., Янцевич А. А. Дифференциально-разностные последовательности в гильбертовом пространстве // Материалы международной научной конференции. Современные проблемы математики. – Киев: Ин-т математики НАН Украины. – 1998. – С. 198-200.

Вісник Харківського університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.968 № 458, 1999, с. 213–217

Граничные уравнения в задачах динамики тонких пластин

И.Ю. Чудинович

Харьковский государственный университет, Украина

Доказана однозначная разрешимость систем граничных уравнений, возникающих в задачах колебаний тонких упругих пластин с краевым условием смешанного типа.

В заметке представлены результаты о разрешимости систем нестационарных граничных уравнений, возникающих при решении задач колебаний тонких упругих пластин методами теории потенциалов. В отличие от классической модели Кирхгофа [1] рассматривается модель типа Рейсснера–Миндлина [2], учитывающая возникающие в пластине поперечные сдвиги. Приведем формальную постановку задачи.

Рассмотрим тонкую упругую пластину толщины $h_0 > 0$, занимающую область $\bar{\Omega} \times [-h_0/2, h_0/2]$ в $\mathbf{R}^3$, где Ω — область в $\mathbf{R}^2$. Вектор смещения точки x' пластины в момент $t \geq 0$ обозначим через $v(x', t) = (v_1(x', t), v_2(x', t), v_3(x', t))^T$, где верхний индекс T — знак транспонирования матрицы. Пусть $x' = (x, x_3)$, где $x = (x_1, x_2) \in \Omega$. В модели поперечного сдвига [2] предполагается, что

$$v(x', t) = (x_3 u_1(x, t), x_3 u_2(x, t), u_3(x, t))^T,$$

в этом случае $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ удовлетворяет уравнению движения

$$B \partial_t^2 u(x, t) + A u(x, t) = q(x, t), \quad (x, t) \in G = \Omega \times (0, \infty), \quad (1)$$

где $B = \text{diag}\{\rho h^2, \rho h^2, \rho\}$, $h^2 = h_0^2/12$, ρ — плотность материала пластины, $\partial_t = \partial/\partial t$, A — (3×3) -матричный дифференциальный оператор, определенный матрицей

$$\begin{pmatrix} -h^2 \mu \Delta - h^2(l + \mu) \partial_1^2 + \mu & -h^2(l + \mu) \partial_1 \partial_2 & \mu \partial_1 \\ -h^2(l + \mu) \partial_1 \partial_2 & -h^2 \mu \Delta - h^2(l + \mu) \partial_2^2 + \mu & \mu \partial_2 \\ -\mu \partial_1 & \mu \partial_2 & -\mu \Delta \end{pmatrix},$$

$\partial_i = \partial/\partial x_i$, $i = 1, 2$, λ и μ — постоянные Ламе, q — комбинация сил и моментов, действующих на пластину. К уравнению (1) добавим начальные

условия $u(x, +0) = \partial_t u(x, +0) = 0$, $x \in \Omega$. Пусть $\Gamma = \partial\Omega$ — замкнутая C^2 -кривая, $\Sigma^+ = \Gamma \times (0, \infty)$. Переходя к формулировке граничных условий, предположим, что Γ разбита на две части Γ_i , $i = 1, 2$ ненулевой меры: $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. В задаче M на $\Sigma_1^+ = \Gamma_1 \times (0, \infty)$ известны предельные значения смещений $u(x, t) = f(x, t)$, на $\Sigma_2^+ = \Gamma_2 \times (0, \infty)$ — усилия и моменты, действующие на кромку пластины, $(Tu)(x, t) = g(x, t)$, где T — граничная матричная дифференциальная операция [2] с элементами

$$\begin{aligned} T_{11} &= h^2(\lambda + 2\mu)n_1\partial_1 + h^2\mu n_2\partial_2, & T_{12} &= h^2\mu n_2\partial_1 + h^2\lambda n_1\partial_2 \\ T_{21} &= h^2\lambda n_2\partial_1 + h^2\mu n_1\partial_2, & T_{22} &= h^2\mu n_1\partial_1 + h^2(\lambda + 2\mu)n_2\partial_2 \\ T_{13} &= T_{23} = 0, & T_{31} &= \mu n_1, & T_{32} &= \mu n_2, \\ & & T_{33} &= \mu(n_1\partial_1 + n_2\partial_2), \end{aligned}$$

$n = (n_1, n_2)^T$ — вектор единичной внешней нормали к Γ .

Для того, чтобы ввести динамические потенциалы простого и двойного слоев, нам понадобится матрица фундаментальных решений уравнения колебаний пластины, то есть (3×3) — матрица $\Phi(x, t)$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} B\partial_t^2\Phi(x, t) + A\Phi(x, t) &= \delta(x, t)I, & (x, t) &\in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, \\ \Phi(x, t) &= 0, & (x, t) &\in \mathbf{R}^2 \times (-\infty, 0), \end{aligned}$$

где δ — функция Дирака, I — единичная (3×3) — матрица. Явный вид этой матрицы в терминах преобразования Лапласа по переменной времени можно найти в [3]. Пусть α и β — C^2 — функции, заданные на $\Sigma = \Gamma \times \mathbf{R}$ с носителями $\text{supp } \alpha, \text{supp } \beta \subset \Gamma$.

Введем динамические потенциалы простого и двойного слоев $V\alpha$ и $W\beta$ соответственно формулами

$$\begin{aligned} (V\alpha)(x, t) &= \int_0^\infty \int_\Gamma \Phi(x - y, t - \tau) \alpha(y, \tau) ds_y d\tau, & (x, t) &\in \mathbf{R}^2 \times (0, \infty), \\ (W\beta)(x, t) &= \int_0^\infty \int_\Gamma [T_y \Phi(y - x, t - \tau)]^T \beta(y, \tau) ds_y d\tau, & (x, t) &\in G. \end{aligned}$$

Легко убедиться в том, что, по крайней мере, для гладких плотностей α и β , равных нулю при $t < 0$, имеющих компактный по t носитель, оба потенциала обладают теми же формулами скачков, что и аналогичные потенциалы в статическом случае [2], удовлетворяют однородному уравнению колебаний и нулевым начальным условиям. Введенные потенциалы порождают следующие граничные операторы, действующие в пространствах вектор-функций, заданных на Σ^+ : оператор потенциала простого слоя V , сопоставляющий плотности α значение потенциала простого слоя на Σ^+ , оператор W^+ , сопоставляющий плотности β предельные значения вектор-функции $(W\beta)(x, t)$, когда $(x, t) \rightarrow \Sigma^+$ из G , оператор K^+ , ставящий в соответствие плотности

α предельные из G значения операции T , примененной к $(V\alpha)(x, t)$ и, наконец, оператор F , сопоставляющий плотности β предельные значения той же операции T , примененной к потенциалу двойного слоя.

Представляя решение задачи M потенциалом простого слоя $u(x, t) = (V\alpha)(x, t)$ приходим к системе граничных уравнений

$$\begin{aligned}(\pi_1 V\alpha)(x, t) &= f(x, t), & (x, t) \in \Sigma_1^+, \\(\pi_2 K^+ \alpha)(x, t) &= g(x, t), & (x, t) \in \Sigma_2^+, \end{aligned}$$

где π_i ($i = 1, 2$) — операции сужения вектор-функций с Σ^+ на Σ_i^+ . Запишем эту систему символически в виде $Q_1 \alpha = \{f, g\}$. Решая эти же задачи потенциалом двойного слоя $u(x, t) = (W\beta)(x, t)$, придем к системе уравнений

$$\begin{aligned}(\pi_1 W^+ \beta)(x, t) &= f(x, t), & (x, t) \in \Sigma_1^+, \\(\pi_2 F\beta)(x, t) &= g(x, t), & (x, t) \in \Sigma_2^+ \end{aligned}$$

или $Q_2 \beta = \{f, g\}$. Представим решение задачи M в виде

$$u(x, t) = (V\alpha)(x, t) + (W\beta)(x, t), \quad (x, t) \in G, \quad (2)$$

где α сосредоточена на Σ_1^+ , β — на Σ_2^+ . Возникающая при этом система граничных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}(\pi_1 (V\alpha + W^+ \beta))(x, t) &= f(x, t), & (x, t) \in \Sigma_1^+, \\(\pi_2 (K^+ \alpha + F\beta))(x, t) &= g(x, t), & (x, t) \in \Sigma_2^+ \end{aligned}$$

или $Q_3 \{\alpha, \beta\} = \{f, g\}$. Если же в (2) β сосредоточена на Σ_1^+ , α — на Σ_2^+ , то соответствующая система обозначается через $Q_4 \{\beta, \alpha\} = \{f, g\}$. Для формулировки теорем о разрешимости полученных систем нестационарных граничных уравнений нам понадобятся следующие функциональные пространства.

Для любого фиксированного $\kappa \geq 0$ обозначим через $W_{m, \kappa}^2(\Sigma)$, $m \in \mathbb{R}$ пространство Соболева функций, заданных на Σ , с весом $\exp(-2\kappa t)$. Пусть $H_{m, \kappa}(\Sigma) = [W_{m, \kappa}^2(\Sigma)]^3$, $H_{r; m, \kappa}(\Sigma^+)$ — его подпространство, состоящее из вектор-функций, равных нулю при $t \leq 0$. Через $H_{r; m, k, \kappa}(\Sigma^+)$ обозначим пространство, состоящее из вектор-функций $u(x, t)$, равных нулю при $t \leq 0$, таких, что $\partial_t^k u \in H_{r; m, \kappa}(\Sigma^+)$ (∂_t^k — оператор дробного дифференцирования). Пространства $H_{r; m, k, \kappa}^0(\Sigma_i^+)$, $i = 1, 2$ — подпространства в $H_{r; m, k, \kappa}^0(\Sigma^+)$, состоящие из элементов u , таких что $\text{supp } u \in \overline{\Sigma_i^+}$. Пространства $H_{r; m, k, \kappa}(\Sigma_i^+)$ образованы сужениями на Σ_i^+ элементов пространств $H_{r; m, k, \kappa}(\Sigma^+)$, их нормы индуцированы нормами пространств $H_{r; m, k, \kappa}(\Sigma^+)$ [5]. Через $H_{r; 1, \kappa}(G)$ обозначим пространства Соболева, состоящие из равных нулю при $t \leq 0$ трехкомпонентных вектор-функций, квадратично суммируемых в G со своими первыми обобщенными производными с весом $\exp(-2\kappa t)$. Назовем решением задачи M

вектор-функцию $u(x, t) \in H_{r;1,\kappa}(G)$, след которой на Σ_1^+ равен f , удовлетворяющую уравнению:

$$\int_0^\infty \{a(u, v) - (B\partial_t u, \partial_t v)_{0,\Omega}\} dt = \int_0^\infty (g, v)_{0,\Gamma_2} dt,$$

в котором $(\cdot, \cdot)_{0,\Omega}$ и $(\cdot, \cdot)_{0,\Gamma_2}$ — скалярные произведения в пространствах $[L^2(\Omega)]^3$ и $[L^2(\Gamma_2)]^3$ соответственно, $a(u, v) = 2 \int_\Omega E(u, v) dx$,

$$2E(u, v) = h^2 E_0(u, v) + h^2 \mu (\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2)(\partial_2 \bar{v}_1 + \partial_1 \bar{v}_2) + \\ + \mu [(u_1 + \partial_1 u_3)(\bar{v}_1 + \partial_1 \bar{v}_3) + (u_2 + \partial_2 u_3)(\bar{v}_2 + \partial_2 \bar{v}_3)],$$

$$E_0(u, v) = (\lambda + 2\mu)(\partial_1 u_1 \partial_1 \bar{v}_1 + \partial_2 u_2 \partial_2 \bar{v}_2) + \lambda(\partial_1 u_1 \partial_2 \bar{v}_2 + \partial_2 u_2 \partial_1 \bar{v}_1).$$

для любой финитной вектор-функции $v \in [C^\infty(\bar{G})]^3$.

Перейдем к формулировке полученных результатов.

Теорема 1. При всех $k \in \mathbf{R}$, $\kappa \geq 0$ системы нестационарных граничных уравнений однозначно разрешимы. Разрешающие операторы этих систем осуществляют непрерывные отображения

$$Q_1^{-1} : H_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma_1^+) \times H_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma_2^+) \rightarrow H_{r;-1/2,k-1,\kappa}(\Sigma^+),$$

$$Q_2^{-1} : H_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma_1^+) \times H_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma_2^+) \rightarrow H_{r;1/2,k-2,\kappa}(\Sigma^+),$$

$$Q_3^{-1} : H_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma_1^+) \times H_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma_2^+) \rightarrow$$

$$\rightarrow H_{r;-1/2,k-1,\kappa}^0(\Sigma_1^+) \times H_{r;1/2,k-1,\kappa}^0(\Sigma_2^+)$$

$$Q_4^{-1} : H_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma_1^+) \times H_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma_2^+) \rightarrow$$

$$\rightarrow H_{r;1/2,k-2,\kappa}^0(\Sigma_1^+) \times H_{r;-1/2,k-2,\kappa}^0(\Sigma_2^+)$$

Решив системы граничных уравнений, построим потенциалы простого и двойного слоев с найденными плотностями.

Теорема 2. Пусть $f \in H_{r;1/2,1,\kappa}(\Sigma_1^+)$, $g \in H_{r;-1/2,1,\kappa}(\Sigma_2^+)$. Построим решения четырех систем граничных уравнений, существование которых следует из теоремы 1. Соответствующие линейные комбинации потенциалов с найденными плотностями дают решение задачи M .

Доказательство обеих теорем проводится по схеме, предложенной в [4]. После перехода к преобразованию Лапласа по переменной времени задача M превращается в эллиптическую краевую задачу со смешанным краевым условием. Изучив зависимость решений этой задачи и систем граничных уравнений от параметра преобразования Лапласа p и вернувшись в пространства оригиналов, получаем утверждения теорем.

Литература

1. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
2. Constanda C., A mathematical analysis of bending of plates with transverse shear deformation. – New York: Pitman Res. Notes Math. Ser., Longman, Harlow. – 1991. – 186 p.
3. Chudinovich I., Constanda C. Integral methods for time-dependent bending of plates.//Strathclyde Mathematics Research Report, – 1997. – 33. – 26 p.
4. Чудинович И. Ю. Граничные уравнения в задачах динамики упругих сред. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1991. – 135 с.

АНОТАЦІЇ

УДК 517.977.1

Про множину позиційних керувань, що розв'язують задачу синтезу в гільбертових просторах.

С к л я р Г. М., С к о р и к В. О. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 458. Математика, прикладна математика і механіка, с. 3–14 .

Розглянуто розв'язок задачі синтезу позиційного керування для керованого процесу, який описується лінійним диференціальним рівнянням з обмеженими операторами в гільбертовому просторі. А саме, дано опис множини обмежених позиційних керувань таких, щоб усі розв'язки відповідного рівняння з довільною початковою умовою наближались до нуля за скінченний час. На основі методу функціоналу керованості одержано конструктивний розв'язок цієї задачі. Показано, що люба незростаюча невід'ємна на півосі $[0, \infty)$ функція, яка має достатню кількість точок спадання, породжує шукане керування, яке розв'язує розглянуту задачу.

Бібліогр.: 9 найм.

УДК 533.6.011.72

Про один метод розрахунку збіжних ударних хвиль

П о с л а в с ь к и й С. О., М і л л е р О. О. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 458. Математика, прикладна математика і механіка, с. 15–21 .

Розглянуто нове застосування відомого наближеного методу Честера-Чізнелла-Уїзема для розрахунку еволюції збіжних ударних хвиль. Показано, що в межах цього методу можливе приведення нестационарної задачі про рух фронту хвилі до задачі про сталий надзвуковий потік газу із спеціальним показником політропи. Використання змінних годографа дозволило отримати розв'язок в аналітичній формі. Для збіжної ударної хвилі, яка спочатку мала форму еліптичного циліндру, проведено чисельні розрахунки.

Мал.: 1. Бібліогр.: 5 найм.

УДК 517.5

До алгоритмічних питань для обернених та прямих задач теорії струни Стілтєса та ортогональних многочленів.

Л и с е н к о Ю. В., О в ч а р е н к о І. Є. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 458. Математика, прикладна математика і механіка, с. 22–42 .

В статті надаються поступові алгоритми, засновані на рекурсії Чебишева для відновлення струни Стілтєса за послідовністю моментів її спектральних функцій та покрокові алгоритми для перевірки, чи є послідовність моментів додатньо визначена у сенсі Стілтєса.

Бібліогр.: 11 найм.

УДК 517.977.1

Знаходження в явному вигляді керування та траєкторій, що розв'язують задачу керованості для деяких нелінійних систем.

Скляр К. В. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 458. Математика, прикладна математика і механіка, с. 43–52.

В роботі розглядається задача керованості для спеціального класу трикутних систем. Основний результат полягає в знаходженні явного вигляду керування та траєкторій, по яким проходить рух із заданої точки в задану. Розглянуті випадки як керування без обмежень так і обмеженого керування.

Бібліогр.: 3 найм.

УДК 539.3:533.6

Непряме формулювання методу граничних елементів у двовимірних пружно-пластичних задачах.

Кантор Б. Я., Науменко В. В., Стрельнікова О. О. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 458. Математика, прикладна математика і механіка, с. 53–61.

Запропоновано засіб рішення крайових задач для непружних тіл, заснований на використанні непрямого формулювання методу граничних елементів. Для визначення полів пружно-пластичних напружень і деформацій застосовано метод ітерацій. На кожній ітерації вирішується лінійна крайова задача теорії пружності, що описується системою сингулярних інтегральних рівнянь. Проведено чисельне дослідження концентрації пружно-пластичних напружень в тілах з отворами.

Мал.: 2. Бібліогр. 9 найм.

УДК 517.948

Про поліноміальні послідовності у гільбертовому просторі.

Загороднюк С. М. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 458. Математика, прикладна математика і механіка, с. 62–78.

У роботі вивчаються властивості поліноміальних послідовностей у сепарабельному гільбертовому просторі. Наведено критерій належності послідовності до класу поліноміальних. Розглянуто ряд послідовностей, відповідаючих класичним ортогональним поліномам. Досліджуються ергодичні властивості, розклад міри представлення в ряд, тощо.

Бібліогр.: 8 найм.

УДК 517.912

Про один метод розв'язання крайової задачі N-го порядку.

Сузіков Г. В., Воробйов І. В., Розуменко О. В. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 458. Математика, прикладна математика і механіка, с. 79–90.

У роботі вивчається метод розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь ступеня N , який полягає у тому, що розв'язок "складної" крайової задачі може бути представлений у вигляді межі розв'язків "простих" задач – задач Коші для того же рівняння. Основний результат полягає у тому, що, по суті, додання усього одного циклу до програми розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння з простим переліком після кожного проходження, перетворює її у програму розв'язання крайової задачі. Метод надзвичайно простий та ефективний, має широку область застосування.

Бібліогр.: 4 найм.

УДК 517.56

До теореми Вимана-Валірона.

Марченко І. І. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 458. Математика, прикладна математика і механіка, с. 91–93.

Досліджується вплив числа розділених точок максимуму модуля цілої функції на колі $\{z : |z| = r\}$ на нерівність Вимана-Валірона.

Бібліогр.: 8 найм.

УДК 539.3

Застосування методу суперелементів до розрахунку напружено-деформованого стану оболонок обертання

Левицька Т. І. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 458. Математика, прикладна математика і механіка, с. 94–100.

Застосування методу суперелементів для складених оболонок обертання дозволило розробити ефективний алгоритм знаходження їх напружено-деформованого стану. Побудова локальної матриці жорсткості для елемента кільцевого типу дало змогу розглядати як шпангоути оболонкового типу, так і шпангоути кільцевого типу, розміри поперечного перерізу яких малі порівняно з їх радіусом. Проведено ряд розрахунків для порівняння впливу форми шпангоутів на напружений стан оболонок.

Мал.: 2. Бібліогр.: 4 найм.

УДК 517.98

Розв'язність задачі Коші й оцінки початкового многовиду для одного неявного операторно-диференціального рівняння.

Півень О. Л. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 458. Математика, прикладна математика і механіка, с. 101–108.

Розглядається задача Коші $\sum_{j=0}^n A_j u^{(j)}(t) = 0, t > 0; u^{(j)}(0) = u_j, j = 0, \dots, n-1$ з лінійними замкненими операторами A_j , що діють із банахового простору X у банахів простір Y . Оператор A_n може мати нетривіальне ядро. За допомогою теореми про розв'язність цієї задачі Коші оцінюється початковий многовид і встановлюються умови його нетривіальності. Надається приклад мішаної задачі для одного рівняння з частинними похідними, що задовольняє умовам доведених теорем.

Бібліогр.: 13 найм.

УДК 517.948

Багатовимірні трикутні моделі систем лінійних операторів з нільпотентними комутаторами.

Черновол Н. М. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 458. Математика, прикладна математика і механіка, с. 109–118.

Побудовано трикутну модель несамопряженої системи лінійних обмежених операторів A_1, A_2 , діючих у гільбертовому просторі H , для якої комутатори $D = [A_1, A_2]$ та $C = [A_1^*, A_2]$ є нільпотентними. Виділено спеціальний клас систем операторів A_1, A_2 , для якого знайдена модельна реалізація операторами інтегрування за незалежними змінними x_1 та x_2 (відповідно) у просторі $L^2(\Omega)$, де Ω — область в R^2 , яка визначається властивостями нільпотентності комутаторів D та C .

Бібліогр.: 4 найм.

УДК 517.948

Нормальний метричний вузол.

Золотарьов В. О., Воробйов І. В. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 458. Математика, прикладна математика і механіка, с. 119–129.

Операторні вузли дозволяють вивчати спектральні властивості різних сімейств операторів. Такі вузли були побудовані для операторів, що близькі до ермітових та унітарних. У даній статті подана модель такого вузла для операторів, що близькі до нормальних і показано, що характеристична функція вузла є унітарним інваріантом цих вузлів, а також описано клас функцій, що являються характеристичними.

Бібліогр.: 6 найм.

УДК 517.934

Глобальна нуль керованість лінійних дискретних систем.

Луценко А. В., Скорик В. О. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 458. Математика, прикладна математика і механіка, с. 130–142.

Розглядається проблема глобальної нуль керованості лінійної неавтономної дискретної системи. Отримано необхідні та достатні умови глобальної нуль

керованості як при обмеженнях на керування, так і без них. Отримано також достатні умови збереження глобальної нуль керованості при малих збуреннях.

Бібліогр.: 9 найм.

УДК 517.5

Мультиплікативна структура резольвентних матриць інтерполяційних задач у класі Стілтєса.

Д ю к а р е в Ю. М. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 458. Математика, прикладна математика і механіка, с. 143–153.

У цій статті впроваджуються спеціальні зображення резольвентних матриць інтерполяційних задач у класі. Вивчена мультиплікативна структура резольвентних матриць та розглянуті приклади.

Бібліогр.: 8 найм.

УДК 519.2

Зауваження про векторне інтегрування.

Ц е й т л і н Л. М. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 458. Математика, прикладна математика і механіка, с. 154–158.

Стаття анонсує деякі результати кандидатської дисертації автора та представляє нове визначення інтеграла для функцій зі значеннями в банахових просторах. Показано, що це визначення є досить загальним (інтеграли Бохнера та Римана є його частими випадками) та корисним у вивченні банахових просторів.

Бібліогр.: 2 найм.

УДК 517.9

Початкова задача для деяких квазілінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь.

Х у д о ш и н І. Г. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 458. Математика, прикладна математика і механіка, с. 159–164.

В статті отримані достатні умови розв'язності початкової задачі для рівняння $A \frac{dx}{dt} + Bx(t) = f(t, x)$, $a \leq t \leq b$ в гільбертових просторах, у випадку, коли пучок $\lambda A + B$ є регулярним, точка $\lambda = \infty$ є полюсом резольвенти $(\lambda A + B)^{-1}$ і відповідний корневий підпростір X_2 є скінченновимірним. Отримано подання спектральних проекторів за допомогою біортогональних ланцюжків власних та приєднаних векторів прямого та спряженого пучків.

Бібліогр.: 7 найм.

УДК 517.958

Існування та єдиність базисних розв'язків електродинамічної системи.

П о п о в а О. В. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 458. Математика, прикладна математика і механіка, с. 165–176.

Немонохроматичні поля в циліндричному хвильоводі з неоднорідним не-стаціонарним середовищем розкладаються в ряд по счисленній системі спеціальних модових полей. Наведені умови існування та єдиності базисних розв'язків мішаної задачі для рівнянь Максвелла.

Бібліогр.: 9 найм.

УДК 517.53

Асимптотичні розвинення нерегулярно зростаючих інтегралів.

М а л ю т і н а Т. І. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 458. Математика, прикладна математика і механіка, с. 177–184.

Вивчається асимптотична поведінка при $r \rightarrow \infty$ інтегралів

$$\int_a^b f(t) \exp(i|\ln rt|^\sigma) dt.$$

Відзначимо такі особливості розглядуваного випадку. По-перше, асимптотичні формули різко відрізняються при $\sigma \in (0, 1)$, $\sigma = 1$, $\sigma \in (1, \infty)$. По-друге, інтеграли зображають нерегулярно зростаючі функції. При $\sigma > 1$ маємо аналогію з класичним інтегралом Фур'є.

Бібліогр.: 3 найм.

УДК 537.84

Плоский МГД-підшипник із вдувом або відсмоктуванням на стінках та розподіленими джерелами маси.

Л е г е й д а Д. В., Т а р а п о в І. Є. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 458. Математика, прикладна математика і механіка, с. 185–193.

Досліджується вплив вдува (відсмоктування), а також розподілених джерел маси на характеристики плоского МГД – підшипника. У наближенні гідродинамічної теорії змащення знайдено розподілення швидкості по перерізу змащувального шару і обчислені сила тертя на підшипниках та підйомна сила. Отримані графіки залежності коефіцієнта підшипника від числа Альфвена, швидкості продува, нахила струї вдува. Встановлено вплив джерел та стоків маси рідини і ефективність підшипника.

Мал.: 4. Бібліогр.: 2 найм.

УДК 517.948

Про векторні неоднорідні поля у гільбертових просторах.

А х і є з е р Е. Б. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 458. Математика, прикладна математика і механіка, с. 194–204.

Стаття присвячена вивченню неоднорідних векторних полів у гільбертових просторах. Введено поняття еволюційного зображення векторного поля та одержано критерій еволюційного зображення у термінах кореляційної матриці. Введена також інфінітезимальна кореляційна матриця, яка характеризує відхилення поля від однорідного. Доказана теорема про скінченний ранг для поля, яке має еволюційне зображення.

Бібліогр.: 3 найм.

УДК 517.948

Про один клас нестаціонарних послідовностей, який породжується диференціально-різницеви́ми керуваннями у гільбертовому просторі.

Ч е р е м с ь к а я Н. В. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 458. Математика, прикладна математика і механіка, с. 205–212.

В статті за допомогою диференціально-різницевого рівняння у гільбертовому просторі будується кореляційна теорія деякого класу нестаціонарних послідовностей. За допомогою трикутних моделей несамоспряжених операторів вдається встановити, як часовий спектр перетворюється у просторовий.

Бібліогр.: 3 найм.

УДК 517.968

Граничні рівняння у задачах динаміки пружних пластин.

Ч у д і н о в и ч І. Ю. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 458. Математика, прикладна математика і механіка, с. 213–217.

Доведено однозначну розв'язність систем граничних рівнянь, що виникають у задачах коливань тонких пружних пластин з крайовою умовою змішаного типу.

Бібліогр.: 4 найм.

ЗМІСТ

Скляр Г. М., Скорик В. А. О множестве позиционных управлений, решающих задачу синтеза в гильбертовых пространствах	3
Пославский С. А., Миллер Е. А. Об одном методе расчета сходящихся ударных волн	15
Лысенко Ю. В., Овчаренко И. Е. Об алгоритмических вопросах для обратных и прямых задач теории струны Стильеса и ортогональных многочленах	22
Скляр Е. В. Нахождение в явном виде управления и траекторий, решающих задачу управляемости для некоторых нелинейных систем	43
Кантор Б. Я., Науменко В. В., Стрельникова Е. А. Метод граничных элементов в непрямой формулировке для решения двумерных упруго-пластических задач	53
Загороднюк С. М. О полиномиальных последовательностях в гильбертовом пространстве.	62
Сузилов Г. В., Воробьев И. В., Розуменко О. В. Об одном методе решения краевой задачи N-го порядка	79
Марченко И. И. К теореме Вимана-Валирона	91
Левицкая Т. И. Использование метода суперэлементов для расчета напряженно-деформированного состояния оболочек вращения	94
Пивень А. Л. Разрешимость задачи Коши и оценки начального многообразия для одного неявного операторно-дифференциального уравнения	101
Черновол Н. Н. Многомерные треугольные модели систем линейных операторов с нильпотентными коммутаторами	109
Золотарев В. А., Воробьев И. В. Нормальный метрический узел	119
Луценко А. В., Скорик В. А. Глобальная нуль управляемость линейных дискретных систем	130

Дюкарев Ю. М. Мультипликативная структура резольвентных матриц интерполяционных задач в классе Стильтеса	143
Tseytlin L. M. Notes on Vector Integration	154
Худошин И. Г. Начальная задача для некоторых квазилинейных дифференциально-алгебраических уравнений	159
Попова Е. В. Существование и единственность базисных решений электродинамической системы	165
Малютина Т. И. Асимптотическое разложение нерегулярно рас- тущих интегралов	177
Легейда Д. В., Тарапов И. Е. Плоский МГД-подшипник с вду- вом или отсосом на стенках и распределенными источниками массы	185
Ахиезер Е. Б. О векторных неоднородных полях в гильбертовых пространствах	194
Черемская Н. В. Об одном классе нестационарных последователь- ностей, порождаемом дифференциально-разностными уравне- ниями в гильбертовом пространстве	205
Чудинович И. Ю. Граничные уравнения в задачах динамики тон- ких пластин	213
АНОТАЦІЇ	218

CONTENTS

Sklyar G. M., Skoryk V. A. On a set of positional controls solving the synthesis problem in the Hilbert spaces	3
Poslavsky S. A., Miller H. A. Some calculation method for convergent shock waves	15
Lysenko Ju. V., Ovcharenko I.E. On Algorithmic questions of the inverse and direct problems for Stieltjes's string and orthogonal polynomials	22
Sklyar E. V. The determination of the explicit form of the control and trajectories solving the controllability for certain non-linear systems	43
Kantor B. J., Naumenko V. V., Strelnikova E. A. Indirect formulation of Boundary Element Method in 2D elasto-plastic problems	53
Zagorodniuk S. M. On polynomial sequences in Hilbert space	62
Suzikov G. V., Vorobyov I. V., Rozumenko O. V. About one method of the solving the N-th order boundary problem	79
Marchenko I. I. On Wiman-Valiron theorem	91
Levitskaya T. I. The Usage of Superelement Method for Stress-Strain Calculation of the Shell of Revolution	94
Piven A. L. Solvability of Cauchy problem and estimates of initial manifold for a nonimplicit operator differential equation	101
Chernovol N. Many-dimensional triangular models of linear operators systems with nilpotent commutators	109
Zolotaryov V. A., Vorobyov I. V. Normal metrical knot	119
Lutsenko A. V., Skoryk V. A. Global null controllability of linear discrete systems	130
Dyukarev Yu. M. The multiplicative structure of resolvent matrix of interpolation problem in Stieltjes class	143

Tseytlin L. M. Notes on Vector Integration	154
Khudoshin I. G. Initial value problem for some quasilinear differential-algebraic equations.	159
Popova H.V. Existence and uniqueness of basic solutions for electrodynamic system.	165
Malyutina T. I. Asymptotic expansions of integrals with nonregular growth	177
Legeyda D. V., Tarapov I. Ye. The flat MHD-bearing with an injection or suction on walls and distributed source of mass	185
Ahiezer E. B. On inhomogeneous vector fields in Hilbert spaces	194
Cheremskaja N. V. Nonstationary sequences generated by differential-difference equations in Hilbert space	205
Chudinovich I. Boundary equations in dynamic problems for thin plates	213
SUMMARY	218

ОПЕЧАТКИ

К "Вестнику ХГУ", серия: "Математика, прикладная математика и механика" № 444.

Стр. 10: В конце последней строки пропущено следующее:
"... имеем

$$|f_i(t, x^1, u^1) - f_i(t, x^2, u^2)| \leq L(|x^1 - x^2| + |u^1 - u^2|), \quad i = 1, \dots, n."$$

Tseytlin L. M. Notes on Vector Analysis	151
Khramov A. I. "Bessinnyye" (Infinite) Matrices and Algebraic Equations	154
Popov V. H. On the Problem of the Existence of Solutions of the System of Equations of Electrodynamics	157
Malyutina T. I. On the Problem of the Existence of Solutions of the System of Equations of Electrodynamics	177
Legayda D. V., Tarapov I. Ye. The Fat MHD-Flow with an Injection or Suction on Walls and Distributed Source of Mass	185
Ableser E. B. On inhomogeneous vector fields in Hilbert spaces	194
Cheremskaja N. V. Nonstationary sequences generated by differential-difference equations in Hilbert space	205
Chudinovich I. Boundary equations in dynamic problems for thin plates	213
<i>Збірник наукових праць</i>	218

Вісник Харківського державного університету

№ 458

Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

Сдано у виробництво 28.10.99. Підписано до друку 15.10.99.

Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. 20.3 умовн.- друк. арк.

11.31 обл.- вид. арк.

Наклад 400 прим. 10-00 =

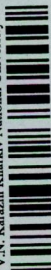
310077, Харків, пл. Свободи, 4, Харківський державний університет

Видавничий центр ХДУ

Різо ХДУ

10-00

V.N. Karazin Kharkiv National University



00296193 0