УДК 517.522.2

К. Г. МАЛЮТИН

КРАТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В ПОЛУПЛОСКОСТИ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Ранее [1] была решена задача кратной интерполяции в классе целых функций конечного порядка. Аналогичная задача для класса функций конечного порядка в верхней полуплоскости $C^+ = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ рассматривалась в работе [2]. Там же были найдены условия необходимые и условия достаточные для ее разрешимости. Трудности, возникающие при переходе от задач интерполяции в классах целых функций к задачам в классах функций аналитических в полуплоскости C^+, обусловлены возможностью накопления узлов интерполяции к точкам вещественной оси. Достаточные условия, найденные в [2], исключают возможность такого накопления и позволяют применять методы теории целых функций. В данной работе, рассматривая более общую задачу, чем в [2], устраним отмеченный выше недостаток и найдем необходимые и достаточные условия для ее разрешимости. По постановке наша задача близка к задачам свободной интерполяции в H^∞, так как на значения производной функции в узлах интерполяции накладываются естественные ограничения. При ее решении использованы идеи из работ [1, 2] и идеи П. Джонса [3] для решения задачи свободной интерполяции в H^∞.

Обозначим через $[\rho, \infty]^+$ класс функций аналитических в C^+ и порядка $\leqslant \rho$, $\rho \geqslant 1$.

Определение. *Дивизор* $D=\{a_n, q_n\}$ *(т.е. множество различных комплексных чисел* $a_n \in C^+$, $n=1, 2, \ldots$, *все предельные точки которого принадлежат вещественной оси, вместе с их кратностями* q_n, $q_n \geqslant 1$ — целое число), *называется интерполяционным в классе* $[\rho, \infty]^+$, *если для любой последовательности чисел* $\{b_{nk}\}$, $k=1, \ldots, q_n$, $n=1, 2, \ldots$, *удовлетворяющей условиям:*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+ \ln \max\limits_{1\leqslant k\leqslant q_n} \dfrac{(\operatorname{Im} a_n)^{k-1} |b_{nk}|}{(k-1)!}}{\ln |a_n|} < \infty; \tag{1}$$

$$\varlimsup_{|a_n|\to\infty} \frac{\ln^+ \ln \max\limits_{1\leqslant k\leqslant q_n} \dfrac{(\operatorname{Im} a_n)^{k-1} |b_{nk}|}{(k-1)!}}{\ln |a_n|} \leqslant \rho,$$

цествует функция $f(z) \in [\rho, \infty]^+$ со свойствами:

$$f^{(k-1)}(a_n) = b_{nk}, \ (n=1, 2, \ldots; \ k=1, \ldots, q_n). \tag{2}$$

Пусть $a_n = r_n e^{i\theta_n}$. Положим

$$C(r) = \sum_{r_n \leqslant r} q_n \sin\theta_n,$$

$$E(z) = \prod_{r_n \leqslant 1} \left(\frac{z-a_n}{z-\bar{a}_n}\right)^{q_n} \prod_{r_n>1} E_p^{q_n}(z, a_n),$$

где $p=[\rho]$, $E_p(z, u)$ — канонический множитель Неванлинны.

Пусть далее

$$\gamma_{nk} = \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} \frac{(z-a_n)^{q_n}}{E(z)}\Bigg|_{z=a_n}, \ n=1, 2, \ldots; \ k=1, \ldots, q_n.$$

Основным результатом нашей работы является следующая

Теорема. *Для того, чтобы дивизор* D *был интерполяционным в классе* $[\rho, \infty]^+$, *необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условиям:*

$$\text{А)} \ \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln C(r)}{\ln r} \leqslant \rho;$$

$$\text{Б)} \ \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln r_n} \ln^+ \ln \frac{|\gamma_{n1}|}{(\operatorname{Im} a_n)^{q_n}} < \infty;$$

$$\text{В)} \ \varlimsup_{r_n\to\infty} \frac{1}{\ln r_n} \ln^+ \ln \frac{|\gamma_{n1}|}{(\operatorname{Im} a_n)^{q_n}} \leqslant \rho.$$

Заметим, что из условий [1] следует существование числа C_1 и последовательности $\{\varepsilon_n^{(1)}\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n^{(1)} = 0$, при которых

$$\sup_{1\leqslant k\leqslant q_n} (\operatorname{Im} a_n)^{k-1} [(k-1)!]^{-1} |b_{nk}| \leqslant C_1 e^{r_n^{\rho+\varepsilon_n^{(1)}}}. \tag{4}$$

Необходимость условия А) доказывается как и в работе [2]. Докажем необходимость условия В) (Б) доказывается аналогично). Пусть В) не выполнено и $\{\lambda_n\} \subset \{a_n\}$ такова, что

$$\varlimsup_{|\lambda_n|\to\infty} (\ln|\lambda_n|)^{-1} \ln^+\ln \frac{|\tilde{\gamma}_{n1}|}{(\operatorname{Im} a_n)^{p_n}} = \rho_1 > \rho, \tag{1.1}$$

где p_n — кратности чисел λ_n в дивизоре D, а $\tilde{\gamma}_{n1}$ построены для λ_n, $n = 1, 2, \ldots$. Множество $\{\lambda_n\}$, в силу известных теорем об интерполяции в H^∞ (см., например, [4]), можно считать столь «редким», что

$$|\operatorname{Im} \lambda_n H'(\lambda_n)| \geqslant \delta > 0, \ n = 1, 2, \ldots, \tag{1.2}$$

где $H(z)$ — произведение Бляшке, построенное по последовательности $\{\lambda_n\}$.

Пусть далее $f(z) \in [\rho, \infty]^+$ такова, что

$$f^{(k-1)}(a_n) = 0, \ a_n \neq \lambda_n, \ k = 1, \ldots, q_n;$$

$$f^{(k-1)}(\lambda_n) = 0, \ k = 1, \ldots, p_n - 1; \ f^{(p_n-1)}(\lambda_n) = \frac{(p_n-1)!}{(\operatorname{Im} \lambda_n)^{p_n-1}}.$$

Тогда функция $g(z) = f(z) H(z) [E(z)]^{-1} \in [\rho, \infty]^+$.

Имеем $g(\lambda_n) = f^{(p_n-1)}(\lambda_n) H'(\lambda_n) p_n [E^{(p_n)}(\lambda_n)]^{-1} = \operatorname{Im} \lambda_n H'(\lambda_n) \times \tilde{\gamma}_{n1} (\operatorname{Im} \lambda_n)^{-p_n}$.

Учитывая (1.2), находим отсюда, что

$$\varlimsup_{|\lambda_n|\to\infty} (\ln|\lambda_n|)^{-1} \ln^+\ln \frac{\tilde{\gamma}_{n1}}{(\operatorname{Im} a_n)^{p_n}} \leqslant \varlimsup_{|\lambda_n|\to\infty} (\ln|\lambda_n|)^{-1} \times$$

$$\times \ln^+\ln \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda_n H'(\lambda_n)|} + \varlimsup_{|\lambda_n|\to\infty} (\ln|\lambda_n|)^{-1} \ln^+\ln |g(\lambda_n)| \leqslant \rho,$$

т. е. получим противоречие с (1.1).

Получим из необходимых условий некоторые утверждения.

Лемма. *Если дивизор D является интерполяционным в классе $[\rho, \infty]^+$, то существуют число $C_2 > 0$ и последовательность $\{\varepsilon_n^{(2)}\}$, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n^{(2)} = 0$ такие, что*

$$q_n \leqslant C_2 r_n^{\rho+\varepsilon_n^{(2)}}, \ n = 1, 2, \ldots. \tag{1.3}$$

Доказательство. Обозначим

$$E_n(z) = \left(\frac{a_n}{\bar{a}_n} \frac{z - \bar{a}_n}{z - a_n}\right)^{q_n} E(z).$$

Стандартными методами можно доказать, что $\forall \varepsilon > 0$ при $|z| > r_\varepsilon$ и некотором $K_1 > 0$:

$$\ln|E_n(z)| \leqslant K_1 |z|^{\rho+\varepsilon}, \ n = 1, 2, \ldots. \tag{1.4}$$

Так как $2^{q_n} = E_n(a_n) \gamma_{n1} (\operatorname{Im} a_n)^{-q_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, утверждение леммы следует из (1.4) и из условий Д) и В) основной теоремы.

Лемма 2. *Пусть дивизор D является интерполяционным в се* $[\rho, \infty]^+$. *Тогда при любом* $\varepsilon > 0$

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k \operatorname{Im} a_k \operatorname{Im} a_n}{|a_n - \bar{a}_k|^2 r_k^{\rho+\varepsilon}} < \infty. \tag{1.5}$$

Доказательство. Положим

$$A_n(z) = \prod_{0<|a_n-a_k|<\frac{r_n}{2}} [(1 - z/a_k)/(1 - z/\bar{a}_k)]^{q_k};$$

$$B_n(z) = E_n(z) A_n^{-1}(z).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — фиксированное число. Для функций $B_n(z)$ справедлива оценка, аналогичная (1.4):

$$\ln |B_n(z)| \leqslant K_2 |z|^{\rho+\varepsilon}, \ |z| > r_\varepsilon, \ K_2 > 0. \tag{1.6}$$

Так как $E_n(a_n) = 2^{q_n} (\operatorname{Im} a_n)^{q_n}/\gamma_{n1}$, из (1.3), (1.6) и из условий Б) и В) теоремы получаем $\ln |A_n(a_n)| \geqslant \ln |E_n(a_n)| - \ln |B_n(a_n)| \geqslant -C_\varepsilon |r_n|^{\rho+\varepsilon}$, при некотором $C_\varepsilon > 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

Используя далее утверждение, аналогичное утверждению нашей леммы для функций класса H^∞ [5, с. 243], получим

$$\sum_{0<|a_n-a_k|<r_n/2} \frac{\operatorname{Im} a_n \, q_k \operatorname{Im} a_k}{|a_n - \bar{a}_k|^2} \leqslant \frac{1}{2} C_\varepsilon r_n^{\rho+\varepsilon}. \tag{1.7}$$

Из условия А) теоремы следует, что $\forall \varepsilon > 0$:

$$K_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n \operatorname{Im} a_n}{r_n^{\rho+1+\varepsilon}} < \infty \tag{1.8}$$

Из (1.7), (1.8) находим далее

$$\sum_{k \neq n} \frac{\operatorname{Im} a_n q_n \operatorname{Im} a_k}{|a_n - \bar{a}_k|^2 r_k^{\rho+\varepsilon}} = \sum_{0<|a_n-a_k|<\frac{r_n}{2}} + \sum_{|a_n-a_k|>\frac{r_n}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\rho+\varepsilon-1} C_\varepsilon + 4 \sin \theta_n K_\varepsilon.$$

При $k = n$ слагаемое в сумме (1.5) имеет вид $q_n/4r_n^{\rho+\varepsilon}$, поэтому для завершения доказательства осталось применить (1.3).

§ 2. Доказательство достаточности

Заметим, что если $r_n \leqslant 1$, то в силу (1.3) кратности q_n, $n = 1, 2, \ldots$ ограничены. Поэтому существует функция $\varphi(z) \in H^\infty$, решающая интерполяционную задачу (2) (см. [5]). Обозначим $b'_{nk} = b_{nk} - \varphi^{(k-1)}(a_n)$, п

>1, $k=1, \ldots, q_n$. Ясно, что b'_{nk} удовлетворяют условиям (1). При >1, $\operatorname{Im} a_n \leqslant 1$ положим

$$\alpha_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1+a_k z}{-i(z-\bar{a}_k)} \frac{q_k \operatorname{Im} a_k}{r_k^{\rho+3}}, \quad \operatorname{Im} a_k \leqslant 1; \tag{2.1}$$

$$\alpha_{nm} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \sum_{i=0}^{q_n-m} \frac{1}{i!} \gamma_{nq_n+1-m-i} b'_{ni+1}, \tag{2.2}$$

$$m = 1, \ldots, q_n.$$

Ряд, определяющий функцию $\alpha_n(z)$, сходится равномерно в каждой области $\{z: |z| \leqslant r, \operatorname{Im} z > \delta\}$ (и, следовательно, является функцией аналитической в C^+), так как

$$\left| \frac{1+a_k z}{-i(z-\bar{a}_k)} \frac{q_k \operatorname{Im} a_k}{r_k^{\rho+3}} \right| \leqslant \frac{2rq_k \operatorname{Im} a_k}{\delta r_k^{\rho+2}}.$$

В силу сходимости ряда (1.8) (перенумеровав, если есть необходимость, точки a_n, $r_n > 1$) можно считать, что

$$\frac{\operatorname{Im} a_n}{r_n^2} \geqslant \frac{\operatorname{Im} a_{n+1}}{r_{n+1}^2}. \tag{2.3}$$

Оценим теперь $\operatorname{Re} \alpha_n(z)$. Имеем

$$\operatorname{Re} \alpha_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2 r_k^2} + \frac{\operatorname{Im} a_k}{r_k^2} + \frac{\operatorname{Im} a_k}{|z|^2 r_k^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2} \right) \frac{|z|^2 r_k^2 q_k \operatorname{Im} a_k}{r_k^{\rho+3} |z-\bar{a}_k|^2}, \quad \operatorname{Im} a_k \leqslant 1, \ r_k > 1,$$

где суммирование распространяется на такие k, что

$$\operatorname{Im} a_k \leqslant 1, \ r_k > 1.$$

Учитывая предположение (2.3) и (1.5), отсюда получаем

$$\operatorname{Re} \alpha_n(a_n) \leqslant K_3, \ K_3 > 0, \ n = 1, 2, \ldots, \tag{2.4}$$

а также

$$\operatorname{Re} \alpha_n(z) \geqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{q_k (\operatorname{Im} a_k)^2}{r_k^{\rho+3} |z-\bar{a}_k|^2}. \tag{2.5}$$

Положим далее при $r_n > 1$

$$P_n(z) = \sum_{m=1}^{q_n} \alpha_{nm} \left[\frac{1}{z-a_n} \left(\frac{z}{a_z}\right)^{S_n} \varphi_n(z) \right]^{(m-1)},$$

где выбор чисел S_n будет осуществлен ниже, а

$$\varphi_n(z) = \begin{cases} 1, \text{ если } \operatorname{Im} a_n > 1, \\ \left(\frac{z\bar{a}_n}{r_n^2}\right)^{\rho+3} \left(\frac{2\operatorname{Im} a_n}{z-\bar{a}_n}\right)^2 \exp\{\alpha_n(a_n) - \alpha_n(z)\}, \\ \text{если } \operatorname{Im} a_n \leqslant 1. \end{cases}$$

Покажем, что формальная функция $f(z) = E(z) \sum_{r_n > 1} P_n(z) + \varphi($

решает интерполяционную задачу (2). Покажем, что $f_1^{(k-1)}(a_n) = b_n$ $r_n > 1$, $k = 1, \ldots, q_n$, где $f_1(z) = f(z) - \varphi(z)$.

Имеем

$$\frac{(z-a_n)^{q_n} f_1(z)}{E(z)} = (z-a_n)^{q_n} P_n(z) + \\ + (z-a_n)^{q_n} \sum_{k \neq n} P_k(z). \tag{2.6}$$

Далее

$$(z-a_n)^{q_n} P_n(z) = \sum_{m=1}^{q_n} \alpha_{nm} \{(-1)^{m-1}(m-1)!(z-a_n)^{q_n-m} \times \\ \times \left(\frac{z}{a_n}\right)^{S_n} \varphi_n(z) + (z-a_n)^{q_n-m+1} \Phi_n(z)\},$$

где $\Phi_n(z)$ — функция, аналитическая в C^+.

Дифференцируя обе части (2.6) $q_n - m$ раз в точке $z = a_n$, получим

$$\sum_{i=0}^{q_n-m} C_{q_n-m}^{i} f_1^{(i)}(a_n) \left(\frac{d}{dz}\right)^{q_n-m-i} \frac{(z-a_n)^{q_n}}{E(z)}\bigg|_{z=a_n} = \\ = (-1)^{m-1}(m-1)!(q_n-m)!\,\alpha_{nm}, \quad m = 1, \ldots, q_n.$$

Или

$$\sum_{i=0}^{q_n-m} \frac{1}{i!} \gamma_{nq_n+1-m-i} f_1^{(i)}(a_n) = \sum_{i=0}^{q_n-m} \frac{1}{i!} \gamma_{nq_n+1-m-i} b'_{ni+1}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{q_n-m} \frac{1}{i!} \gamma_{nq_n+1-m-i} \left(f_1^{(i)}(a_n) - b'_{ni+1}\right) = 0, \\ m = 1, \ldots, q_n, \ r_n > 1. \end{cases} \tag{2.7}$$

Матрица, составленная из коэффициентов при $f_1^{(i)}(a_n) - b'_{ni+1}$, $i = 0, \ldots, q_n - 1$, в системе (2.7) имеет вид

$$A_n = \begin{pmatrix} \gamma_{nq_n}, & \frac{1}{1!}\gamma_{nq_n-1}, & \ldots, & \frac{1}{(q_n-2)!}\gamma_{n2}, & \frac{1}{(q_n-1)!}\gamma_{n1} \\ \gamma_{nq_n-1}, & \frac{1}{1!}\gamma_{nq_n-2}, & \ldots, & \frac{1}{(q_n-2)!}\gamma_{n1}, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n1}, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

Ясно, что $\det A_n \neq 0$, а следовательно, $f_1^{(k-1)}(a_n) = b'_{nk}$, $k = 1, \ldots, q_n$, $r_n > 1$.

Покажем теперь, что при надлежащем выборе последовательности натуральных чисел S_n, $f_1(z) \in [\rho, \infty]^+$.

Из результатов А. М. Руссаковского [6, с. 48] и леммы 1 следует, что существуют число $K_4 > 0$ и последовательность $\{\varepsilon_n^{(3)}\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n^{(3)} = 0$, для которых

$$\ln \sup_{1 \leqslant k \leqslant q_n} \frac{|\gamma_{nk}|}{(\operatorname{Im} a_n)^{q_n - k + 1}} \leqslant K_4 r_n^{\rho + \varepsilon_n^{(3)}}. \tag{2.8}$$

Из (4) и (2.8) получаем тогда при некотором $K_5 > 0$:

$$|\alpha_{nm}| \leqslant \frac{q_n - m + 1}{(m-1)!} (\operatorname{Im} a_n)^m \exp\left(K_5 r_n^{\rho + \varepsilon_n^{(4)}}\right), \tag{2.9}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n^{(4)} = 0$.

Представим $f_1(z)$ в виде $f_1(z) = f_2(z) + f_3(z) = E(z) \sum\limits_{\operatorname{Im} a_n > 1} P_n(z) + E(z) \sum\limits_{\operatorname{Im} a_n \leqslant 1} P_n(z)$ $(r_n > 1)$.

Оценим $f_2(z)$, представив ее в виде $f_2(z) = f_{21}(z) + f_{22}(z) = E(z) \sum\limits_{r_n \leqslant e^2 |z|} P_n(z) + E(z) \sum\limits_{r_n > e^2 |z|} P_n(z)$.

Обозначим

$$u_{nm}(z) = \left[\frac{1}{z - a_n} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{S_n} \varphi_n(z) \right]^{(m-1)}, \quad r = |z|.$$

При $r_n > e^2 r$ имеем

$$|u_{nm}(z)| \leqslant \frac{(m-1)!}{2\pi} \left| \int\limits_{|\xi - z| = e^{-2} r_n} \left(\frac{\xi}{a_n}\right)^{S_n} \frac{d\xi}{(\xi - a_n)(\zeta - z)^m} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2(m-1)!\, e^{2m}}{r_n^m} \left(\frac{2}{e^2}\right)^{S_n} < (m-1)!\, 2 r_n^{-m} e^{2m - S_n}. \tag{2.10}$$

Из (2.9) и (2.10) получаем оценку

$$|f_{22}(z)| \leqslant |E(z)| \sum_{r_n > e^2 r} \sum_{m=1}^{q_n} |\alpha_{nm}| \frac{(m-1)!}{r_n^m} e^{2m - S_n} \leqslant$$

$$\leqslant |E(z)| \sum_{r_n > e^2 r} \frac{q_n (q_n + 1)}{2} \exp\left\{(K_5 + 2C_2) r_n^{\rho + \varepsilon_n^{(5)}} - S_n\right\}. \tag{2.11}$$

Используя лемму 1, из (1.3) и (2.11) имеем при некотором $K_6 > 0$:

$$|f_{22}(z)| \leqslant |E(z)| \sum_{r_n > e^2 r} \exp\left\{K_6 r_n^{\rho + \varepsilon_n^{(5)}} - S_n\right\}, \tag{2.12}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n^{(5)} = 0$.

Оценим теперь $f_{21}(z)$. Если

$$z \notin \Omega = \bigcup_{r_n>1} \{\xi : |\xi - a_n| \leqslant \operatorname{Im} a_n/2\},$$

то, интегрируя по окружности $|\xi - z| = \operatorname{Im} a_n/2$, получим как и в (2.10

$$|u_{nm}(z)| \leqslant (\operatorname{Im} a_n)^{-m} r_n^{-S_n} [r(1+2^{-1}e^2)]^{S_n} (m-1)!\, 2^m \tag{2.13}$$

Откуда при некотором $K_7 > 0$ имеем

$$|f_{22}(z)| \leqslant \sum_{r_n < e^2 r} |E(z)| \frac{q_n(q_n+1)\, 2^{q_n} [r(1+2^{-1}e^2)]^{S_n}}{2 r_n^{S_n}} \leqslant$$

$$\leqslant |E(z)| \exp(2 \ln r \max_{r_n < e^2 r} S_n) \sum_{r_n < e^2 r} \exp[K_7 r_n^{\rho+\varepsilon_n^{(6)}} - S_n \ln r_n],$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n^{(6)} = 0$.

Заметим, что при любом $\delta > 0$ ряд

$$\sum_{\operatorname{Im} a_n > 1} \exp(-\delta r_n) < \infty. \tag{2.14}$$

Положим

$$S_n = \max\{[K_6 r_n^{\rho+\varepsilon_n^{(5)}}] + 1,\ [K_7 r_n^{\rho+\varepsilon_n^{(6)}}] + 1\},$$

поэтому $\forall \varepsilon > 0$:

$$\max_{r_n < e^2 r} S_n \leqslant K_8 r^{\rho+\varepsilon},\ r > r_\varepsilon,\ K_8 > 0,$$

а следовательно из (2.13) следует, что при $\Omega \not\ni z$, $r > r_\varepsilon$:

$$|f_{21}(z)| \leqslant K_9 \exp\{r^{\rho+\varepsilon} + 2 \ln r\, K_8 r^{\rho+\varepsilon}\}.$$

Функция $f_{21}(z)$ аналитическая в C^+, поэтому по принципу максимума модуля имеем при $z \in \Omega$:

$$|f_{21}(z)| \leqslant K_{10} \exp\{((1+e^2) r)^{\rho+\varepsilon} (1 + 2 \ln(2r) K_8)\}. \tag{2.15}$$

Из (2.12), (2.15) следует, что $f_2(z) \in [\rho, \infty]^+$.

Оценим теперь $f_3(z)$. Как и выше имеем при $z \notin \Omega$:

$$|u_{nm}(z)| \leqslant \frac{(m-1)!\, 2^m r^{S_n} (1+2^{-1}e^2)^{S_n}}{(\operatorname{Im} a_n)^m r_n^{S_n}} \times$$

$$\times \max_{|\xi - z| = (\operatorname{Im} a_n)/2} |\varphi_n(\xi)|,\ r_n \leqslant e^2 r,\ \operatorname{Im} a_n \leqslant 1 \tag{2.16}$$

$$|u_{nm}(z)| \leqslant \frac{(m-1)!\, 2^m e^{-S_n}}{(\operatorname{Im} a_n)^m} \max_{|\xi - z| = (\operatorname{Im} a_n)/2} |\varphi_n(\xi)|, \tag{2.17}$$

$$r_n > e^2 r,\ \operatorname{Im} a_n \leqslant 1.$$

Так как если $|\xi - z| = (\operatorname{Im} a_n)/2$, то

$$\frac{|z - \bar{a}_n|}{2} \leqslant |\xi - \bar{a}_n| \leqslant \frac{3}{2} |z - \bar{a}_n|.$$

Поэтому и (2.4), (2.5). (2.16) и (2.17) имеем

$$|u_{nm}(z)| \leqslant \frac{(m-1)!\, 2^m [r(1+2^{-1}e^2)]^{S_n} (r+1)^{\rho+3} 16 K_3}{q_n (\operatorname{Im} a_n)^m r_n^{S_n}} \times$$

$$\times \frac{q_n (\operatorname{Im} a_n)^2}{r_n^{\rho+3} |z-\bar{a}_n|^2} \exp\left\{-\frac{1}{4}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{q_k (\operatorname{Im} a_k)^2}{r_k^{\rho+3}|z-\bar{a}_k|^2}\right\},$$

$$r_n \leqslant e^2 r, \ \operatorname{Im} a_n \leqslant 1 \tag{2.18}$$

и

$$|u_{nm}(z)| \leqslant \frac{(m-1)!\, 2^m e^{-S_n} 16 K_3 (r+1)^{\rho+3}}{q_n (\operatorname{Im} a_n)^m} \times$$

$$\times \frac{q_n (\operatorname{Im} a_n)^2}{|z-\bar{a}_n|^2 r_n^{\rho+3}} \exp\left\{-\frac{1}{4}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{q_k (\operatorname{Im} a_k)^2}{r_k^{\rho+3}|z-\bar{a}_k|^2}\right\}, \tag{2.19}$$

$$r_n > e^2 r, \ \operatorname{Im} a_n \leqslant 1.$$

Как и при оценке $f_2(z)$, имеем, если $z \notin \Omega$:

$$|f_3(z)| \leqslant C_3 \exp(K_{11} r^{\rho+\varepsilon}) \sum_{\operatorname{Im} a_n < 1} \frac{q_n (\operatorname{Im} a_n)^2}{|z-\bar{a}_n|^2 r_n^{\rho+3}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{4}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{q_k (\operatorname{Im} a_k)^2}{r_k^{\rho+3}|z-\bar{a}_k|^2}\right\}, \ r > r_\varepsilon, \tag{2.20}$$

при некоторых $C_3 > 0$ и $K_{11} > 0$.

Положим $\lambda_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{q_k (\operatorname{Im} a_k)^2}{r_k^{\rho+3}|z-\bar{a}_k|^2}$ так, что $\frac{q_n (\operatorname{Im} a_n)^2}{r_n^{\rho+\varepsilon}|z-\bar{a}_n|^2} =$
$= \lambda_n(z) - \lambda_{n+1}(z)$.

Из (2.3) имеем $\lambda_n(z) \downarrow 0$, $z \bar{\in} C^+$.

Возвращаясь к (2.20), получим при $z \notin \Omega$

$$|f_3(z)| \leqslant C_3 \exp(K_{11} r^{\rho+\varepsilon}) \sum_{\operatorname{Im} a_n < 1} [\lambda_n(z) - \lambda_{n+1}(z)]\, e^{-\frac{1}{4}\lambda_n(z)}.$$

Воспользовавшись элементарным неравенством $t \leqslant e^t - 1$, при $t =$
$= \frac{1}{4}[\lambda_n(z) - \lambda_{n+1}(z)]$, получим

$$|f_3(z)| \leqslant 4C_3 \exp(K_{11} r^{\rho+\varepsilon}) \sum_{\operatorname{Im} a_n < 1} [e^{\frac{1}{4}(\lambda_n(z) - \lambda_{n+1}(z))} - 1]\, e^{-\frac{1}{4}\lambda_n^{(z)}} =$$

$$= 4C_3 e^{K_{11} r^{\rho+\varepsilon}} \sum_{\operatorname{Im} a_n < 1} \left(e^{-\frac{1}{4}\lambda_{n+1}(z)} - e^{-\frac{1}{4}\lambda_n(z)}\right) \leqslant 4C_3 e^{K_{11} r^{\rho+\varepsilon}}. \tag{2.21}$$

Чтобы оценить $f_3(z)$ при $z \bar{\in} \Omega$ воспользуемся принципом максимума модуля и (2.21).

Список литературы: 1. *Лапин Г. П.* Интерполирование в классе целых функций конечного порядка // Изв. вузов. Сер. мат. 1959. **5**, № 12. С. 146—153. 2. *Нгуен Тхыонг Уен.* Интерполирование с кратными узлами в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1978. **29**. С 109—117. 3. *Jones P.* Bounded holomorphic functions with all level sets of infinite length // Michigan Math J. 1978. **27**. P. 75—79. 4. *Виноградов С. А., Хавин В. П.* Свободная интерполяция в H^∞ и некоторых других классах функций // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1974. **47**. С. 15—54. 5. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. М., 1984. 368 с. 6. *Руссаковский А. М.* Задача кратной интерполяции в классе функций, аналитических в полуплоскости и имеющих индикатор не выше данного // Рук. деп. в ВИНИТИ. М., 1982. 63 с. № 5087-82.

Поступила в редколлегию 08.08.91