

Вісник Харківського національного університету

Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

УДК 517.574

№ 475, 2000, с. 141–146

## Об одном обобщении неравенства Бенедикса для гармонической меры

Н. Г. Назарова

*Харьковский государственный политехнический университет, Украина*

Получена оценка типа Бенедикса-Содина гармонической меры в кубе.

*1991 Mathematics Subject Classification 31B05, 31B25.*

Множество точек пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$  будем обозначать  $z = (x, y)$ , где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\|z\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + y^2}$ ,  $Q_x(h)$  куб в  $\mathbb{R}^{n+1}$  с центром в точке  $x = (x, 0)$  и длиной ребра  $h$ ,  $Q(h) = Q_0(h)$ . Далее, через  $C$  обозначается произвольная константа (значение которой может меняться), через  $\text{mes} A$  —  $k$ -мерная лебегова мера множества  $A \subset \mathbb{R}^k$ , а через  $\text{cap} A$  — логарифмическая емкость множества  $A \subset \mathbb{R}^2$  или ньютонова емкость множества  $A \subset \mathbb{R}^k$ ,  $k > 2$ .

М. Бенедикс в [1] получил следующую важную в приложениях оценку гармонической меры множества  $E$ , лежащего в гиперплоскости пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Теорема А. (Бенедикс)** Пусть  $E \subset \{y = 0\} \cap Q(r)$  такое замкнутое множество, что

$$\text{mes}(E \cap Q_x(h)) \geq \delta h^n \quad (1)$$

для некоторых  $\delta > 0$ ,  $h < r$  и всех  $x$ ,  $|x| \leq r - h$ . Тогда

$$\omega(0) \leq \frac{Ch}{\delta^3 r}, \quad (2)$$

где  $\omega(z) = \omega(z, \partial Q(r), Q(r) \setminus E)$  гармоническая мера границы  $\partial Q(r)$  относительно  $Q(r) \setminus E$  в точке  $z$ .

М. Содин в [2] для случая  $n = 1$  доказывает некоторое усиление теоремы М. Бенедикса.

**Теорема В. (Содин)** Пусть  $E$  замкнутое подмножество вещественной оси  $\mathbb{R}$ , для некоторых  $\delta > 0$ ,  $h < r$ , и всех  $x \in \mathbb{R}$ , таких что  $|x| \leq r - h$ , выполняется неравенство

$$\text{cap} \left( \frac{1}{2h} (E \cap Q_x(h)) \right) \geq \delta.$$

Тогда гармоническая мера  $\omega(z) = \omega(z, \partial Q(r), Q(r) \setminus E)$  удовлетворяет неравенству

$$\omega(0) \leq \frac{Ch}{r \log(\frac{1}{\delta})}.$$

М. Седин отмечает, что результаты и методы доказательства, используемые в [2], могут быть перенесены на пространство  $\mathbb{R}^{n+1}$  с вещественной гиперплоскостью  $\mathbb{R}^n$  вместо вещественной оси.

В настоящей работе мы показываем, что условие  $E \subset \mathbb{R}^n$  в теореме В как в случае  $n = 1$ , так и в случае  $n > 1$  можно заменить на более слабое, состоящее в том, что  $E$  в определенном смысле "близко" к  $\mathbb{R}^n$ .

**Теорема 1.** Пусть  $E$  замкнутое множество, лежащее в области  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : |y| < \frac{r}{4}, y^2 < \alpha(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)\}$ , где  $\alpha$  достаточно мало, пусть для некоторых  $\delta > 0$ ,  $h < r$ , и всех  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $|x| \leq r-h$ , выполняется неравенство

$$\text{cap} \left( \frac{1}{2h}(E \cap Q_x(h)) \right) \geq \delta.$$

Тогда гармоническая мера  $\omega(z) = \omega(z, \partial Q(r), Q(r) \setminus E)$  удовлетворяет неравенству

$$\omega(0) \leq \frac{Ch}{\delta r} \quad (3)$$

Доказательство этой теоремы так же, как и доказательство теоремы В, использует следующий результат из [3] (который мы приводим в несколько иной формулировке).

**Теорема С.** (Левин-Логвиненко-Седин) Пусть  $E$  замкнутое подмножество вещественной гиперплоскости  $\mathbb{R}^n$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

a) существует  $\delta > 0$  такое, что для любого  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\text{cap} \left( \frac{1}{2h}(E \cap Q_x(h)) \right) \geq \delta \quad (4)$$

b) существует  $C = C(\delta, n)$  такая, что для всех функций  $u(z) \in K(E)$  оценка

$$u(x) \leq \frac{Ch}{\delta}$$

верна для всех  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Через  $K(E)$  здесь обозначается класс субгармонических в  $\mathbb{R}^{n+1}$  функций  $u(z)$  порядка не больше 1 и типа не превосходящего 1:

$$\limsup_{\|z\| \rightarrow \infty} \frac{u(z)}{\|z\|} \leq 1,$$

которые не положительны на  $E$ .

Данная теорема была доказана в [3] для случая пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$  и множества  $E \subset \mathbb{R}^n$ , а в [2] для случая  $n = 1$ , но произвольного множества  $E$  из слоя  $|y| \leq \frac{h}{2}$ . Однако последнее доказательство почти без изменений переносится на  $n$ -мерный случай, поэтому мы его опускаем.

При доказательстве теоремы 1 важную роль играет также следующая лемма.

**Лемма.** Пусть  $E \subset Q(1) \cap \{|y| < \frac{1}{4}\} \cap \{y^2 < \alpha(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)\}$ , где  $\alpha > 1$  достаточно малая константа, зависящая от размерности пространства, и пусть множество  $E$  является замкнутым, все точки которого регулярны относительно проблемы Дирихле для оператора Лапласа. Если  $\omega^*(z)$  гармоническая мера множества  $\{|y| = \frac{1}{2}\} \cap \partial Q(1)$  относительно  $Q(1) \setminus E$ , а  $\omega(z)$  гармоническая мера множества  $\partial Q(1)$  относительно  $Q(1) \setminus E$ , то

$$\omega(0) \leq (n+1)\omega^*(0) \quad (5)$$

Эта лемма была доказана Бенедиксом [1] для случая, когда множество  $E$  лежит на вещественной гиперплоскости  $\mathbb{R}^n$ . При  $n = 1$  доказательство, приведенное Бенедиксом, легко обобщается на множество  $E$ , лежащее в слое  $|y| \leq \frac{1}{4}$ . Однако при  $n > 1$  подобное обобщение существенно сложнее.

*Доказательство леммы.* Обозначим через  $\omega_i$  гармоническую меру  $\{|x_i| = \frac{1}{2}\} \cap \partial Q(1)$  относительно  $Q(1) \setminus E$ ,  $i = 1, \dots, n$ , тогда

$$\omega(x, y) = \omega_1(x, y) + \dots + \omega_n(x, y) + \omega^*(x, y) \quad (6)$$

Пусть  $\varphi^*(x, y)$  решение задачи Дирихле для оператора Лапласа в области  $Q(1)$  с граничными условиями  $\varphi^*(\xi) = 1$  при  $|y| = \frac{1}{2}$  и  $\varphi^*(\xi) = 0$  на остальной части границы, а  $\varphi_i(x, y)$  решение задачи Дирихле с граничными условиями  $\varphi_i(\xi) = 1$  при  $|x_i| = \frac{1}{2}$  и  $\varphi_i(\xi) = 0$  на остальной части границы,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда функции

$$w_i(x, y) = \varphi_i(x, y) - \omega_i(x, y), \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

$$w^*(x, y) = \varphi^*(x, y) - \omega^*(x, y), \quad (8)$$

решают задачи Дирихле в  $Q(1) \setminus E$  для оператора Лапласа со следующими краевыми условиями:

$$w_i(x, y) = \begin{cases} \varphi_i(x, y), & (x, y) \in E \\ 0, & (x, y) \in \partial Q(1) \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n \quad (9)$$

$$w^*(x, y) = \begin{cases} \varphi^*(x, y), & (x, y) \in E \\ 0, & (x, y) \in \partial Q(1) \end{cases} \quad (10)$$

Рассмотрим функции

$$\psi_i(z) = \varphi^*(z) - \varphi_i(z), \quad i = 1, \dots, n.$$

Заметим, что функция  $\varphi^*(x_1, \dots, x_n, y)$  четная по всем переменным и, так как

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = \varphi^*(y, x_2, \dots, x_n, x_1) \quad (11)$$

для любых  $(x_1, \dots, x_n, y) \in Q(1)$ , то  $\psi_1(z) = 0$  при  $|x_1| = |y|$ .

Положим

$$K_1 = \{z \in Q(1) : |x_1| < y\}, \quad K_2 = \{z \in Q(1) : y < -|x_1|\},$$

$$K_3 = \{z \in Q(1) : |y| < x_1\}, \quad K_4 = \{z \in Q(1) : x_1 < -|y|\}.$$

Функция  $\psi_1(z)$  неотрицательна на  $\partial K_1$  и  $\partial K_2$ , поэтому по принципу максимума  $\psi_1(z) > 0$  на  $K_1 \cup K_2$ . По формуле Пуассона для  $\|z\| < \frac{1}{2}$  имеем

$$\psi_1(z) = \frac{1}{4\pi} \int_{\|\zeta\|=\frac{1}{2}} \psi_1(\zeta) \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \|z\|^2}{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n + \eta y) + \|z\|^2\right)^{(n+1)/2}} d\sigma_\zeta,$$

где  $\zeta = (\xi_1, \dots, \xi_n, \eta)$ . Дифференцируя функцию  $\psi_1(z)$  по переменной  $y$ , получим

$$\frac{\partial^2 \psi_1(0)}{\partial y^2} = \frac{2^{n-1}(n+3)}{\pi} \int_{\|\zeta\|=\frac{1}{2}} \psi_1(\zeta)(4^{n+1}\eta^2 - 1) d\sigma_\zeta =$$

$$\frac{2^{n-1}(n+3)}{\pi} \int_{S_1} \psi_1(\zeta)(4^{n+1}\eta^2 - 1) d\sigma_\zeta +$$

$$\frac{2^{n-1}(n+3)}{\pi} \int_{S_2} \psi_1(\zeta)(4^{n+1}\eta^2 - 1) d\sigma_\zeta,$$

где

$$S_1 = \{\zeta : \|\zeta\| = \frac{1}{2}\} \cap (K_1 \cup K_2), \quad (7)$$

$$S_2 = \{\zeta : \|\zeta\| = \frac{1}{2}\} \cap (K_3 \cup K_4). \quad (8)$$

При преобразовании  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta) \rightarrow (\eta, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_1)$  множество  $S_2$  переходит в  $S_1$ , при этом ввиду (11) функция  $\psi_1(z)$  меняет знак. Таким образом,

$$\frac{\partial^2 \psi_1(0)}{\partial y^2} = \frac{120}{\pi} \int_{S_1} \psi_1(\zeta)(\eta^2 - \xi_1^2) d\sigma_\zeta,$$

и, так как  $\psi_1(z) > 0$  на  $S_1$ , то

$$\frac{\partial^2 \psi_1(0)}{\partial y^2} > 0.$$

Аналогично получаем

$$\frac{\partial^2 \psi_i(0)}{\partial y^2} > 0 \quad i = 2, \dots, n.$$

На плоскости  $y = 0$  функция  $\psi_1(z)$  неположительна и обращается в нуль только для  $\xi_1 = 0$ , и, аналогично, функции  $\psi_i(z)$   $i = 2, \dots, n$  неположительны и обращаются в нуль только при  $\xi_i = 0$ ,  $i = 2, \dots, n$ ; таким образом, функция

$$\varphi(z) = \frac{1}{n} (\psi_1(z) + \dots + \psi_n(z))$$

на плоскости  $\{y = 0\} \cap Q(1)$  строго отрицательна, кроме точки  $x = 0$ . Ввиду четности функций  $\varphi^*(z)$ ,  $\varphi_i(z)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , по каждой из переменных  $x_1, \dots, x_n, y$  получаем, что первые производные, а также все смешанные производные второго порядка равны нулю. Вследствие гармоничности  $\varphi(z)$  и симметрии относительно переменных  $x_1, \dots, x_n$  имеем

$$\frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial x_1^2} = \dots = \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial x_n^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial x_i^2} = -\frac{1}{n} \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial y^2} < 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

По формуле Тейлора

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial y^2} y^2 + \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial x_1^2} x_1^2 + \dots + \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial x_n^2} x_n^2 \right) + o(\|z\|),$$

поэтому  $\varphi(z) < 0$  при  $\|z\| < \delta$  и  $y^2 < \alpha(x_1^2 + \dots + x_n^2)$  для достаточно малых  $\alpha$ . Так как  $\varphi(z)$  непрерывна и строго отрицательна при  $y = 0$  и  $\|z\| > \delta$ , то можно выбрать  $\alpha$  таким, что  $\varphi(z) < 0$  при  $z \in Q(1)$  и  $y^2 < \alpha(x_1^2 + \dots + x_n^2)$ . Таким образом,

$$n\varphi^*(z) < \varphi_1(z) + \dots + \varphi_n(z)$$

в области

$$z \in \{z \in Q(1) : y^2 < \alpha(x_1^2 + \dots + x_n^2)\}.$$

Так как  $E$  лежит в этой области, то из (9) и (10) следует

$$nw^*(x, y) \leq w_1(x, y) + \dots + w_n(x, y).$$

Поэтому из (7), (8) и из того, что

$$\varphi^*(0) = \varphi_i(0) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

следует

$$nw^*(0) \geq \omega_1(0) + \omega_2(0) + \dots + \omega_n(0).$$

Отсюда и из (6) вытекает утверждение леммы.

*Доказательство теоремы 1.* Не уменьшая общности, будем считать, что каждая точка множества  $E$  является регулярной для задачи Дирихле относительно  $\Omega = \mathbb{R}^{n+1} \setminus E$ . Обозначим  $E_r = E \cup (\mathbb{R}^n \setminus Q(r))$  и рассмотрим верхнюю огибающую класса  $K(E_r)$

$$v_{E_r}(z) = \sup_{u \in K(E_r)} u(z).$$

Данная функция является субгармонической и неотрицательной во всем пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$ , гармонической вне множества  $E_r$  и принимает нулевые граничные значения на  $E_r$ . Так как множество  $E_r$  удовлетворяет условию (4), то, по теореме С, верно следующее неравенство

$$v_{E_r}(x) \leq \frac{Ch}{\delta}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (12)$$

Рассмотрим функцию  $\tau = \max\{|y| - \frac{r}{4}; 0\}$ . Очевидно, для всех точек пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ , функция  $\tau(z)$  является субгармонической и неотрицательной, имеет порядок не более 1 и тип, не превосходящий единицу, на множестве  $E_r$  принимает нулевые значения. Следовательно,  $\tau(z) \in K(E_r)$ , значит

$$\tau(z) \leq v_{E_r}(z), \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

В точках множества  $Q(r) \cap \{z : |y| = \frac{r}{2}\}$  имеем  $\tau(z) = \frac{r}{4}$ , при этом  $\tau(z) \geq 0$  всюду на  $\partial Q(r)$ , поэтому на  $Q(r) \setminus E$

$$\omega^*(z) \leq \frac{4}{r}\tau(z) \leq \frac{4}{r}v_{E_r}(z),$$

следовательно,

$$\omega^*(0) \leq \frac{Ch}{\delta r}.$$

Отсюда и из леммы следует неравенство (3). Теорема доказана.

Это исследование частично поддерживается грантом INTAS-99-00089.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Benedicks M. Positive harmonic functions vanishing on the boundary of certain domain in  $\mathbb{R}^n$ .// Arkiv for Math.,-1980.-18.-С. 53-72.
2. Содин М.Л. An elementary proof of Benedick's and Carleson's estimates of harmonic measure of linear sets.// Journal d'Analyse Mathematique,-1998.-74.-С. 325-345.
3. Levin В. Ya., Logvinenko V.N., Sodin M.L. Subharmonic functions of finite degree bounded on subset of the "real hyperplane".// Advan. Soviet. Math.,-1992.-11.-С. 181-197.

## Structure of Maximal Ideal Spaces of a Certain Class of Banach Algebras

Nazim Sadik

*Mugla University, Turkey*

Let  $E$  be the class of infinite dimensional semisimple Banach algebras with unit elements provided that their subalgebras generated by an arbitrary nonscalar element and the unit are isometrically isomorphic to the algebras themselves. In this paper, the structure of such algebras in  $E$  will be studied. It is shown that the disc algebra is in  $E$  and that the interiors of the maximal ideal spaces of algebras in  $E$  are not empty. Moreover, if an algebra in  $E$  is uniform then it is possible to give an analytical structure in its maximal ideal space.

*1991 Mathematics Subject Classification* 46J10, Secondary 30C

### 1. Introduction

Let  $A$  be an infinite dimensional semisimple Banach algebra such that its subalgebras generated by an arbitrary nonscalar and the unit element  $e$  are isometrically isomorphic to  $A$  itself and let  $E$  denote the set of algebras of this kind. In this paper, the topological structure of maximal ideal spaces of algebras in  $E$  will be studied. This paper consists of three sections. In the first section, it will be shown that the class  $E$  is not empty and that it includes the disc algebra which has already been the object of much study. To accomplish such a task, we will make use of the geometric function theory, especially of Caratheodory's theory of prime ends [1]. Secondly, the topological structure of the maximal ideal space  $M_A$  of a Banach algebra  $A$  in the class  $E$  is going to be examined and it will be proved that its interior is not empty. We will finally see that it is possible to give an analytical structure to the maximal ideal space of a uniform algebra from the class  $E$ .

### 2. Notations

Our notation and terminology are quite standard:  $\Delta$  denotes the open unit disc in the complex plane  $\mathbb{C}$  and  $\bar{\Delta}$  is the closure of  $\Delta$ .  $A(\bar{\Delta})$  denotes the set of functions which are analytic in  $\Delta$  and which are continuous in  $\bar{\Delta}$ .  $K$  denotes an arbitrary compact set in  $\mathbb{C}$  while  $\hat{K}$  is the polynomial convex hull of  $K$ . Details

about polynomial convex compact sets can be found in [2].  $A(\hat{K})$  denotes the set of functions which are analytic in the interior  $(\hat{K})^\circ$  of  $\hat{K}$  and which are continuous in  $\hat{K}$ . The subalgebra generated by  $a \in A$  and the unit  $e \in A$  is denoted by  $A(a)$ .  $A(a)$  is closed with respect to the norm and is the minimal subalgebra which includes  $a$  and  $e$ . Let  $D$  be a subset of  $\mathbb{C}$ . Then  $D^c$  and  $bdD$  denote the complement of  $D$  in  $\mathbb{C}$  and the boundary of  $D$  respectively. The spectrum of  $x \in A$  is denoted by  $sp(x)$  and  $sp_{A(a)}(y)$  is the spectrum of  $y \in A(a)$  due to  $A(a)$ . Let  $A$  be a commutative Banach algebra and  $\Psi \in A$ . We denote the image of  $\Psi$  under Gelfand transform with  $\hat{\Psi}$ .

### 3. On Nonemptiness of the Class $E$

To show that the disc algebra  $A(\Delta)$  is in  $E$ , we will use the geometric function theory. The concepts and information about Caratheodory's theory of prime ends may be obtained from the book [1]. However, it will be useful to go over some theorems in a form we need.

#### Riemann's Mapping Theorem:

Given any simply connected domain in  $D$  in the extended complex plane, whose boundary contains more than one point, there exists a function  $\omega = f(z)$  which maps conformally onto the disc  $\Delta$ .

This function  $\omega = f(z)$  defines a homeomorphism between  $D$  and  $\Delta$ , which we will call the Riemann homeomorphism. Many simple examples show that extending the Riemann homeomorphism to the closure of  $D$  (by uniting the Euclid boundary) preserving the homeomorphism is not always possible. However, a bounded and simply connected domain always has a compactification to which the Riemann homeomorphism has an extension. The works [3], [4] supply further information about other compactifications satisfying the referred condition.

#### Boundary Correspondence Theorem:

Let  $D$  be a bounded simply connected domain with Euclid boundary  $\Gamma$  and let  $\omega = f(z)$  be any function mapping  $D$  conformally onto the disc  $\Delta$ . Then  $\omega = f(z)$  establishes a homeomorphism between  $\bar{D}$  and the closed disc  $\bar{\Delta}$ , and hence between  $\Gamma$  and the circle  $|\omega| = 1$  if and only if  $\Gamma$  is a closed Jordan curve. (In this case,  $D$  is called a Jordan domain.)

**Theorem 1.** *If a nonscalar element  $f$  of  $A(\bar{\Delta})$ , then  $A(f)$  and  $A(f(\hat{\Delta}))$  are isometrically isomorphic.*

*Notice that  $p(f) \in A(\Delta)$  and  $\|p(f)\| = \max_{z \in f(\hat{\Delta})} |p(z)|$  where  $p$  is a polynomial.*

**Theorem 2.** *For every nonscalar  $f \in A(\bar{\Delta})$ , the boundary of  $f(\hat{\Delta})$  is a Jordan curve.*

*Sketch of Proof.*

a) The prime ends of the domain  $(f(\hat{\Delta}))^\circ$  are of the first kind that is, the impression of each prime end consists of a single point. In this case, these points

are accessible which is to say that for every boundary point  $z_0$  of compact  $f(\hat{\Delta})^\circ$ , there exists a Jordan curve in  $(f\hat{\Delta})^\circ$  such that  $z_0$  is its endpoint.

b) Every boundary point of  $f(\hat{\Delta})$  is simple that is, each boundary point of  $f(\hat{\Delta})$  defines only one prime end.

c) If each prime end of a bounded simply connected domain  $D$  is of the first kind and simple, then the boundary of  $D$  is a Jordan curve.

**Theorem 3.** *For an arbitrary nonscalar function  $f(z)$  in the disc algebra  $A(\bar{\Delta})$ ,  $A(f(\hat{\Delta}))$  and  $A(\bar{\Delta})$  are isometrically isomorphic.*

Let  $\omega = \Phi(z)$  be the Riemann homeomorphism from  $(f(\hat{\Delta}))^\circ$  to  $\Delta$ . Due to Theorem 2 and the Boundary Correspondence Theorem  $\Phi$  has an extension from  $f(\hat{\Delta})$  to  $\bar{\Delta}$ . Hence, the algebras  $A(\hat{\Delta})$  and  $A(f(\hat{\Delta}))$  are isometrically isomorphic.

Thus, it is understood, by virtue of Theorem 1 and Theorem 3, that the algebra  $A(\bar{\Delta})$  is included by the class  $E$ .

**Theorem 4.** *The disc algebra is in the class  $E$ .*

#### 4. Topological Structure of Maximal Ideal Spaces of Algebras in $E$

Concepts and information related to this section may be found in [5]. Let  $M_A$  denote the maximal ideal spaces of commutative Banach algebra  $A$ .

**Proposition 1.** *If the algebra  $A$  is in  $E$  then  $M_A$  is connected.*

*Proof.*  $A \in E$  implies that  $A$  doesn't have any idempotent elements different from the unit element and zero. Therefore, the proof is immediate by Shilov's theorem about idempotent elements, (see [5], proposition 12 p. 60)

**Proposition 2.** *If  $x$  is the generator of a Banach algebra  $A$  then  $M_A$  is homeomorphic to  $sp(x)$  and  $sp(x)$  polynomial convex compact set.*

*Proof.* The homeomorphism is defined by  $\pi : M_A \rightarrow sp(x)$   $\pi(f) = \hat{x}(f) = f(x)$ ,  $f \in M_A$ .

Let  $z \in sp(\hat{x})$ . From the definition of polynomial convexity, for every polynomial  $p$

$$|p(z)| \leq \sup_{\omega \in sp_A(x)} \{|p(\omega)|\} = \sup_{f \in M_A} \{p(\hat{x}(f))\} \leq \|p(x)\|$$

which implies that the functional  $\phi(p(x)) = p(z)$  defined on a dense subalgebra of  $A$ , has an extension to  $A$  just like a complex multiplicative linear functional. Hence,  $z \in sp(x)$ .

**Corollary 1.** *If  $A$  is a Banach algebra and  $y \in A$  then  $sp_{A(Y)}(y)$  is polynomial convex.*

**Corollary 2.** *If  $x$  is the generator of a Banach algebra  $A$  in  $E$ ,  $(sp_A(x))^\circ = \phi$  and  $B$  is an arbitrary subalgebra of  $A$  then for every  $y \in B$ ,  $sp_B(y) = sp_A(y)$  and therefore for every  $y \in sp_{A(y)}$  is polynomial convex.*

*Proof.* As  $A(y)$  is a subalgebra of any algebra including  $y$ ,  $sp_{A(y)}(y) \supset sp_B(y) \supset sp_A(y)$  [5, p. 28]. Besides  $bdsp_{A(y)}(y) \subset bdsp_B(y) \subset bdsp_A(y)$  [5, p. 28]. By the assumption,  $A \in E$ ,  $(sp_A(x))^\circ = \phi$ . Hence,  $bdsp_{A(y)}A(y) = sp_{A(y)}(y)$  and  $sp_A(y) \supset bdsp_B(y) \supset bdsp_{A(y)}(y) = sp_{A(y)}(y)$ . This completes the proof.

**Corollary 3.** For every Banach algebra  $A \in E$ ,  $sp_{A(y)}(y) = sp(\hat{y})$ .

The proof is obtained with the facts  $sp(y) \subset sp_{A(y)}(y)$  and  $bdsp_{A(y)}(y) \subset bdsp(y)$  [5, p. 28] and the definition of polynomial convex hulls.

Before advancing to the main theorem we should remind that there exist such connected compact sets with empty interiors (continua) containing no arcs [6, p. 207]. Therefore, the following theorem is not trivial.

### 5. Main Theorem

**Theorem 5.** If  $A \in E$  then the interior of the maximal ideal space of  $A$  is not empty.

*Sketch of Proof.* Assume that  $x$  is the generator of  $A$ . Let  $z_0, z_1 \in sp(x)$  so that  $diamsp(x) = |z_1 - z_0|$  and  $(sp(x))^\circ = \phi$ . If  $a = \exp\left(\frac{2\pi(x-z_0e)}{n(z_1-z_0)}\right)$  where  $n \in \mathbb{N}$  then  $(sp(a))^\circ = \phi$  and  $sp(a)$  are connected polynomial convex compact sets. The set  $sp(a)$  lies inside the angle  $0 \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{n}$  so that there is only  $z_0 = 1$  on the ray  $\arg z = 0$  and only  $z_1 = e^{(\frac{2\pi i}{n})}$  on the ray  $\arg z = \frac{2\pi}{n}$ . Let  $r(a)$  denote the spectral radius of the element  $a$  and  $r > r(a)$ . Then  $sp(a)$  separates  $z_1 = 0$  and  $z_2 = re^{(\frac{2\pi i}{n})}$  inside the angle  $0 \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{n}$ , i.e.  $z_1 = 0$  and  $z_2 = re^{(\frac{2\pi i}{n})}$  are on different components in  $(sp(a))^c \cap \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{n}\}$ . For  $(sp(a^n))^\circ = \phi$  and  $sp(a^n)$  is polynomial convex,  $(sp(a^n))^c$  is an open connected set in  $\mathbb{C}$ . Therefore, the points  $z_1 = 0$  and  $z_2^n = r$  can be joined (connected) with a polygonal line  $\Gamma$  in  $(sp(a^n))^c$ . (piecewise continuous path).

Let  $c_a = z \in \mathbb{C} : z^n \in sp(a^n)$  and  $a_k = ae^{\frac{2\pi ki}{n}}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$  then  $c_a \cap z \in \mathbb{C} : z^n \in \Gamma = \phi$  and  $c_a = \bigcup_{k=0}^{n-1} sp(a_k)$ .  $c_a$  is compact and connected for  $sp(a_k)$  and  $sp(a_{k+1})$  have a common point.

Let  $\Gamma'$  denote the branch of the function  $\sqrt[n]{z}$  on  $\Gamma$  joining the points  $z_1 = 0$  and  $z_2$ . Let  $\Delta_\delta = z \in \mathbb{C} : |y| \leq \delta$ ,  $\gamma = z \in \mathbb{C} : |z| = \delta$ . Let us choose  $\delta$  so that  $\Delta_\delta \subset (c_a)^c$  and assume that  $z_\delta$  is the last point of  $\Gamma'$  on  $\gamma$ . Without any loss of generality, let us assume that  $z_\delta$  is on one of the rays  $\arg z = \frac{2\pi k}{n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Let  $\Gamma''$  be the curve beginning from  $z_\delta$  and which is the part of the curve  $\Gamma'$  outside  $\Delta_\delta$ .

It is clear that it is sufficient to show that  $\Gamma''$  doesn't intersect any of rays  $\arg z = \frac{2\pi k}{n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$  at points satisfying the condition  $|z| > 1$ , in order to prove the theorem.

Let us assume that  $z_\delta = \delta e^{(\frac{2\pi k_0 i}{n})}$  and  $\Gamma''$  intersects the ray  $\arg z = \frac{2\pi k_0}{n}$  at the point  $z_m$ . Let  $|z_m| > 1$  and  $z_m$  be the first point satisfying these conditions. Besides, let the point  $z_{m-1}$  be the last point on which  $\Gamma''$  intersects  $\arg z = \frac{2\pi k_0}{n}$  and  $|z_{m-1}| < 1$ . Let us denote the part between  $z_m$  and  $z_{m-1}$  of  $\Gamma''$  with

$\Gamma'''$ . (We can suppose that  $\Gamma'''$  is a Jordan curve by eliminating some of its parts if necessary.)

Let  $P$  denote the line segment between  $z_m$  and  $z_{m-1}$ . Then  $\beta = \Gamma''' \cup P$  is a closed Jordan curve and with  $D$ , let us denote the domain bounded by  $\beta$ . Then  $sp(a_{k_0})$  is decomposed into three disjoint sets. The first set lies in  $D$ , the second is in  $(D \cup \beta)^c$  and the third is on  $\beta$ . The point  $z = e^{(\frac{2\pi k_0 i}{n})}$  can only be a limit point of  $sp(a_{k_0}) \cap D$ . According to this, the closed sets  $sp(a_{k_0}) \cap \bar{D}$  and  $sp(a_k) \cap (D^c \cup \beta)$  are disjoint. And this is contrary to the fact that  $sp(a_{k_0})$  is connected.

With the help of little modification, it can be shown that  $\Gamma''$  doesn't intersect the rays  $\arg z = \frac{2\pi k}{n}, k = 0, \dots, n-1$  at points  $|z| > 1$ .

## 6. The Structure of Uniform Algebras in the class $E$ :

In this section the structure of uniform algebras in the class  $E$  will be studied.

**Theorem 6.** *Let  $A$  be a uniform algebra in  $E$  and  $N$  be arbitrary component of  $(M_A)^\circ$ . Then there exists a homeomorphism  $\tau$  between  $\Delta = \{z \in C : |z| < 1\}$  and  $N$  such that for arbitrary  $\psi \in A$ ,  $\hat{\psi} \circ \tau$  is a holomorphic function on  $\Delta$ .*

*Sketch of Proof.* The facts that  $A \in E$  and that  $A$  is uniform, together, imply that  $A$  is a subalgebra of  $C(sp(a))$  where  $a$  is the generator of  $A$ . In other words,  $A$  consists of functions which can be uniformly approximated with polynomials. Because  $sp(a)$  is polynomial convex,  $A = A(sp(a))$ . An arbitrary component of  $(sp(a))^\circ$  is simply connected for  $sp(a)$  is polynomial convex. Therefore,  $\tau$  may be taken as the Riemann homeomorphism between  $\Delta$  and  $N$ .

## 7. Concluding Remark:

By virtue of the last theorem and the fact that the disc algebra is in  $E$ , we can now advance a conjecture.

**Conjecture:** If  $A \in E$  is uniform then  $A$  is isometrically isomorphic to the disc algebra. In order to prove this conjecture, it is sufficient to show that  $(M_A)^\circ$  is simply connected and that the boundary of  $M_A$  is a Jordan curve.

## REFERENCES

1. Collingwood E.F., Lohwater A.J. The Theory of Cluster Sets.—London: Cambridge University Press,—1966.
2. Gamelin T.W. Uniform Algebras. Prentice-Hall Inc.,—1969.
3. Suvorov G.D. Metric Theory of Prime Ends and Boundary Properties of Plane Mappings with Boundary Dirichlet Integrals.—Kiev: Naukova Dumka,—1981 (Russian).



Вісник Харківського національного університету  
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

УДК 539.3

№ 475, 2000, с. 153–161

## Асимптотические оценки канонических произведений по корням уравнений, содержащих функции Лежандра

В. И. Острик

Украинская академия банковского дела, г. Сумы, Украина

Решения некоторых смешанных осесимметричных задач теории упругости для конуса могут быть найдены в явном виде путем их сведения к краевой задаче Римана для аналитических функций. Факторизация коэффициента задачи Римана, являющегося дробно-линейной функцией относительно функций Лежандра, проведена в канонических произведениях. Получены асимптотические формулы для нулей и полюсов коэффициента задачи Римана, с помощью которых найдены асимптотические оценки канонических произведений.

1991 *Mathematics Subject Classification* 73C02.

Осесимметричная задача теории упругости о контактном взаимодействии с трением упругого и жесткого конусов, первоначально соприкасающихся своими вершинами, методом, описанным в работе [1], с использованием общего решения уравнений равновесия для упругого конуса [2], сводится к краевой задаче Римана [3]:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad (-\infty < t < \infty) \quad (1)$$

для функций  $\Phi^+(z)$ ,  $\Phi^-(z)$ , аналитических соответственно в верхней ( $\text{Im } z > 0$ ) и нижней ( $\text{Im } z < 0$ ) полуплоскости. Коэффициент  $G(t)$  и свободный член  $g(t)$  задачи (1) имеют вид

$$G(t) = \frac{(t-i)\Delta(-it)}{t\lambda(-it)}, \quad (2)$$

$$g(t) = -\frac{\pi - \alpha - \beta}{m_1\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{G(t)}{1-it},$$

$$\Delta(s) = (s(s-1) - m_1\text{ctg}^2\alpha) \cos\alpha (P_{s-1}(\cos\alpha))^2 +$$

$$(s - (2s-1)s \cos^2\alpha + 2m_1\text{ctg}^2\alpha) P_{s-1}(\cos\alpha)P_{s-2}(\cos\alpha) +$$

$$\begin{aligned}
 & (s(s-1) - m_1 \operatorname{cosec}^2 \alpha) \cos \alpha (P_{s-2}(\cos \alpha))^2, \\
 \lambda(s) = & (s+1) \operatorname{cosec} \alpha \cdot \left[ P_{s-1}(\cos \alpha) - \cos \alpha P_{s-2}(\cos \alpha) \right] \times \\
 & \left[ P_{s+1}(\cos \alpha) - \cos \alpha P_s(\cos \alpha) \right] + \mu_0 m_1^{-1} \left\{ (s^2 - 2s - m_2) \cos \alpha \left[ P_{s-1}(\cos \alpha) \right]^2 - \right. \\
 & \left. \left[ m_2(s-1) + (s-2-m_2)(2s-1) \cos^2 \alpha \right] \times \right. \\
 & \left. P_{s-1}(\cos \alpha) P_{s-2}(\cos \alpha) + (s-2-m_2)(s-1) \cos \alpha \left[ P_{s-2}(\cos \alpha) \right]^2 \right\}, \\
 & m_1 = 2(m-1)/m, \quad m_2 = (m-2)/m,
 \end{aligned}$$

где  $2\alpha, 2\beta$  – углы при вершине в осевом сечении упругого и жёсткого конусов,  $m$  – число Пуассона упругого материала,  $\mu_0$  – коэффициент трения,  $P_s(\cos \alpha)$  – функция Лежандра первого рода.

Можно доказать, что функция  $\Delta(s)$  удовлетворяет функциональному уравнению

$$\frac{\Delta(1-s)}{(1-s)^2} = \frac{\Delta(s)}{s^2}, \quad (3)$$

из которого, в силу условия  $\Delta(1) \neq 0$ , заключаем, что  $s = 0$  – двукратный нуль функции  $\Delta(s)$ , а также, что на комплексной плоскости остальные ее нули расположены симметрично относительно точки  $s = 1/2$ . Функция  $\lambda(s)$  имеет простой нуль в точке  $s = 0$ . Можно показать, что функции  $\Delta(s), \lambda(s)$ , кроме  $s = 0$ , не имеют нулей на мнимой оси, а функция  $\lambda(s)$  имеет один действительный отрицательный нуль  $s_0$ . Таким образом, коэффициент  $G(t)$  задачи (1) не имеет на действительной оси ни нулей, ни полюсов.

Для изучения асимптотического поведения корней трансцендентных уравнений  $\Delta(s) = 0, \lambda(s) = 0$  будем исходить из асимптотического разложения [4]:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad P_s(\cos \alpha) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi i \sin \alpha}} \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+3/2)} \times \\
 & \left[ e^{i(s+1/2)\alpha} F(1/2, 1/2; 3/2 + s; 1/2 - (i/2) \operatorname{ctg} \alpha) + \right. \\
 & \left. i e^{-i(s+1/2)\alpha} F(1/2, 1/2; 3/2 + s; 1/2 + (i/2) \operatorname{ctg} \alpha) \right], \operatorname{Res} \rightarrow \infty, \quad (4)
 \end{aligned}$$

где  $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$  – гипергеометрический ряд. Формула (4) позволяет записать двучленное асимптотическое разложение функции Лежандра:

$$\begin{aligned}
 P_s(\cos \alpha) = & \sqrt{\frac{2}{\pi s \sin \alpha}} \{ \cos((s+1/2)\alpha - \pi/4) + \\
 & (1/8)s^{-1} \operatorname{cosec} \alpha \cdot \left[ \sin((s+3/2)\alpha - \pi/4) - \right.
 \end{aligned}$$

$$3 \sin \alpha \cdot \cos((s + 1/2)\alpha - \pi/4) \Big] \Big\} + O\left(\frac{1}{\sqrt{s^5}}\right), \operatorname{Res} \rightarrow \infty. \quad (5)$$

С помощью формулы (5) получаем

$$\Delta(s) = -\pi^{-1} \Delta_\infty(s) + o(1), \quad \operatorname{Res} \rightarrow \infty,$$

$$\Delta_\infty(s) = \cos(2s - 1)\alpha - (s + 1/2) \sin 2\alpha, \quad (6)$$

$$\lambda(s) = -\pi^{-1} \lambda_\infty(s) + o(1), \operatorname{Res} \rightarrow \infty, \quad \lambda_\infty(s) = \sin(2s - 1)\alpha - \cos 2\alpha -$$

$$\mu_0 \left[ \frac{m-2}{2(m-1)} \cos(2s-1)\alpha + \left( \frac{m}{2(m-1)}(s-1/2) - 1 \right) \sin 2\alpha \right]. \quad (7)$$

Записав уравнение  $\Delta_\infty(s) = 0$  в виде

$$s = \frac{1}{2} - \frac{1}{2i\alpha} \operatorname{Ln} \left( (2s+1) \sin 2\alpha - e^{i(2s-1)\alpha} \right)$$

и взяв в качестве нулевого приближения корней  $s_n^{(0)} = 1/2 + (\pi n)/\alpha$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), получим асимптотику корней из I квадранта ( $\operatorname{Re} s > 0, \operatorname{Im} s > 0$ ) уравнения  $\Delta(s) = 0$ :

$$z_n = \frac{\pi}{\alpha} n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2i\alpha} \ln \left( \frac{2\pi n}{\alpha} \sin 2\alpha \right) + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Аналогично получаем асимптотическое поведение корней из I и II квадрантов уравнения  $\lambda(s) = 0$ :

$$s_n = \frac{\pi}{\alpha} \left( n + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2i\alpha} \ln(\bar{q}n) + o(1), \quad (9)$$

$$s'_n = -\frac{\pi}{\alpha} \left( n + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2i\alpha} \ln(qn) + o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

$$q = \frac{2\pi}{\alpha} \cdot \frac{\mu_0 m \sin 2\alpha}{2(m-1) - i\mu_0(m-2)}.$$

При нахождении асимптотики корней  $s'_n$  использовалось соотношение  $P_s(\cos \alpha) = P_{-s-1}(\cos \alpha)$ .

Для решения задачи (1) требуется факторизовать функцию  $G(z)$ , т.е. представить ее в виде

$$G(z) = \frac{X^+(z)}{X^-(z)}, \quad (10)$$

где  $X^+(z)$  и  $X^-(z)$  — функции, голоморфные и не обращающиеся в нуль соответственно в верхней и нижней полуплоскости.

Факторизацию (10) осуществим путем разложения мероморфной функции  $G(z)$  в бесконечное произведение по ее нулям и полюсам. Целые функции

$\Delta(s), \lambda(s)$  при  $|s| \rightarrow \infty$  имеют порядок роста, равный 1. Следовательно [5], их канонические произведения имеют род, равный 1, и записываются в виде

$$\Delta(s) = s^2 \exp\{a_1 s + a_2\} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{iz_n}\right) \exp\left\{-\frac{s}{iz_n}\right\} \left(1 - \frac{s}{i\bar{z}_n}\right) \exp\left\{\frac{s}{i\bar{z}_n}\right\} \times$$

$$\left(1 - \frac{s}{iz_n + 1}\right) \exp\left\{\frac{s}{iz_n + 1}\right\} \left(1 + \frac{s}{i\bar{z}_n - 1}\right) \exp\left\{-\frac{s}{i\bar{z}_n - 1}\right\},$$

$$\lambda(s) = s \exp\{a_3 s + a_4\} \left(1 - \frac{s}{s_0}\right) \exp\left\{\frac{s}{s_0}\right\} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{s_n}\right) \times$$

$$\exp\left\{\frac{s}{s_n}\right\} \left(1 - \frac{s}{\bar{s}_n}\right) \exp\left\{\frac{s}{\bar{s}_n}\right\} \left(1 - \frac{s}{s'_n}\right) \exp\left\{\frac{s}{s'_n}\right\} \left(1 - \frac{s}{\bar{s}'_n}\right) \exp\left\{\frac{s}{\bar{s}'_n}\right\},$$

где  $a_1, a_2, a_3, a_4$  – определенные постоянные. Выделяя в бесконечном произведении для функции  $G(z)$  множители с нулями и полюсами из верхней полуплоскости, получаем

$$X^-(z) = \left(1 + \frac{iz}{s_0}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iz}{s_n}\right) \left(1 + \frac{iz}{\bar{s}_n}\right) \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{z}{\bar{z}_n}\right)^{-1}. \quad (11)$$

Сходящееся бесконечное произведение экспонент, которое является аналитической на всей комплексной плоскости функцией  $e^{az}$  ( $a = const$ ), отнесено к функции  $X^+(z)$ . Асимптотики корней (8), (9) гарантируют сходимость бесконечного произведения (11).

**Теорема 1.** *Функция  $X^-(z)$ , представленная бесконечным произведением (11), имеет асимптотическую оценку*

$$X^-(z) = O(|z|^\rho), \quad |z| \rightarrow \infty \quad (\text{Im} z \leq 0)$$

$$\rho = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctg \frac{\mu_0(m-2)}{2(m-1)} \quad \left(0 < \rho < \frac{1}{2}\right). \quad (12)$$

*Доказательство.* Асимптотические формулы (8), (9) позволяют представить разложение функции  $X^-(z)$  (11) в виде

$$X^-(z) = \left(1 + \frac{iz}{s_0}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^2 \prod_{j=1}^2 \left(1 - \frac{z}{\frac{\pi i}{\alpha}(n+p_j) + \frac{i}{2} + (-1)^k \gamma_j(n)}\right)^{3-2j}, \quad (13)$$

где

$$\gamma_1(n) = \frac{1}{2\alpha} \ln(|q|n) + o(1), \quad \gamma_2(n) = \frac{1}{2\alpha} \ln\left(\frac{2\pi n}{\alpha} \sin 2\alpha\right) + o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

$$p_1 = p + \frac{1}{4}, \quad p_2 = 0, \quad p = \frac{1}{2\pi} \arg q = \frac{1}{2\pi} \arctg \frac{\mu_0(m-2)}{2(m-1)}. \quad (14)$$

Логарифмируя произведение (13), получим

$$\ln X^-(z) = \ln \left( 1 + \frac{iz}{s_0} \right) + \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \int_0^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{z}{\frac{\pi i}{\alpha}(t+p_j) + \frac{i}{2} + (-1)^k \gamma_j([t])} \right) d[t],$$

или, после интегрирования по частям,

$$\begin{aligned} \ln X^-(z) &= \ln \left( 1 + \frac{iz}{s_0} \right) + \\ &+ \frac{i\alpha z}{\pi} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \int_0^{\infty} [t] \left( 1 + (-1)^k \frac{\alpha}{\pi i} \frac{d}{dt} \gamma_j([t]) \right) \times \\ &\times \left( t + p_j + \frac{\alpha}{2\pi} + (-1)^k \frac{\alpha}{\pi i} \gamma_j([t]) - \frac{\alpha}{\pi i} z \right)^{-1} \times \\ &\times \left( t + p_j + \frac{\alpha}{2\pi} + (-1)^k \frac{\alpha}{\pi i} \gamma_j([t]) \right)^{-1} dt. \end{aligned}$$

Обозначая

$$\begin{aligned} f_{kj}(t, z) &= \left( t + p_j + \frac{\alpha}{2\pi} + (-1)^k \frac{\alpha}{\pi i} \gamma_j([t]) - \frac{\alpha}{\pi i} z \right)^{-1} \times \\ &\times \left( t + p_j + \frac{\alpha}{2\pi} + (-1)^k \frac{\alpha}{\pi i} \gamma_j([t]) \right)^{-1}, \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [t] \frac{d\gamma_j([t])}{dt} f_{kj}(t, z) dt &= \int_0^{\infty} [t] \gamma_j'([t]) \frac{d[t]}{dt} f_{kj}(t, z) dt = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \gamma_j'(n) f_{kj}(n, z) \sim \frac{1}{4\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} f_{kj}(n, z) \sim \frac{1}{4\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n - \frac{\alpha}{\pi i} z)} = \\ &= -\frac{\pi i}{4\alpha^2 z} \left( \psi \left( 1 - \frac{\alpha}{\pi i} z \right) - \psi(1) \right) \sim \frac{1}{4\alpha} \cdot \frac{\ln z}{z}, \quad |z| \rightarrow \infty, \\ \psi(z) &= \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \quad (k, j = 1, 2). \end{aligned}$$

Тогда

$$\ln X^-(z) = \ln |z| + \frac{i\alpha z}{\pi} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \int_0^{\infty} [t] f_{kj}(t, z) dt + o(\ln |z|), \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Ввиду того, что

$$\gamma_j([t]) = \frac{1}{2\alpha} \ln(|q_j|t) + o(1), \quad t \rightarrow \infty \quad (q_1 = q, q_2 = \frac{2\pi}{\alpha} \sin 2\alpha),$$

можем записать:

$$\ln X^-(z) = \ln |z| + \frac{i\alpha z}{\pi} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \int_0^{\infty} [t] \left( t + p_j + \frac{\alpha}{2\pi} + (-1)^k \frac{1}{2\pi i} \ln(|q_j|t) - \frac{\alpha}{\pi i} z \right)^{-1} \times \\ \left( t + p_j + \frac{\alpha}{2\pi} + (-1)^k \frac{1}{2\pi i} \ln(|q_j|t) \right)^{-1} dt + o(\ln |z|), \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Представляя целую часть  $t$  в виде  $[t] = t - b$  ( $0 \leq b < 1$ ) и выполняя замену переменной интегрирования  $t = izu$ , имеем

$$\ln X^-(z) = \ln |z| + \frac{i\alpha z}{\pi} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \int_{\frac{c}{iz}}^{\frac{1}{iz} - \infty} \left( u - \frac{b}{iz} \right) \left( u + \frac{p_j}{iz} + \frac{\alpha}{2\pi iz} - \right. \\ \left. (-1)^k \frac{\ln z}{2\pi z} + \frac{\alpha}{\pi} \right)^{-1} \left( u + \frac{p_j}{iz} + \frac{\alpha}{2\pi iz} - (-1)^k \frac{\ln z}{2\pi z} \right)^{-1} du + \\ o(\ln |z|), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad \forall c \in (0; 1). \quad (11)$$

Выполнив интегрирование, находим

$$\ln X^-(z) \sim (1 - 2(p_1 - p_2)) \ln |z| = \left( \frac{1}{2} - 2p \right) \ln |z|, \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Отсюда, с учетом выражения (14) для  $p$ , получаем асимптотическую оценку (12). Теорема 1 доказана.

Отметим некоторые известные результаты, касающиеся оценок бесконечных произведений. В работе [5] найдены асимптотические разложения канонических произведений нулевого рода с распределением нулей определённого вида. Там же изучены оценки сверху и снизу максимума модуля канонических произведений на окружности  $|z| = r$ . Асимптотическая оценка произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{\alpha_n} \right) \exp \left\{ -\frac{z}{\beta_n} \right\}, \quad \alpha_n = c_1 n + c_2 + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\beta_n = c_1 n + c_3 + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

получена в работе [6].

Применим описанный подход к исследованию асимптотики корней и бесконечного произведения для более общей осесимметричной задачи теории упругости. Контактная задача о взаимодействии с трением двух упругих конусов сводится также к задаче Римана (1) с коэффициентом  $G(t)$  (2). При этом функции  $\Delta(s)$ ,  $\lambda(s)$  записываются в виде

$$\Delta(s) = \Delta_1(s)\Delta_2(s), \quad \lambda(s) = \lambda_1(s)\Delta_2(s) + \lambda_2(s)\Delta_1(s), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Delta_k(s) &= (s(s-1) - m_1^{(k)} \operatorname{ctg}^2 \alpha_k) \cos \alpha_k (P_{s-1}(\cos \alpha_k))^2 + \\ & (s - (2s-1)s \cos^2 \alpha_k + 2m_1^{(k)} \operatorname{ctg}^2 \alpha_k) P_{s-1}(\cos \alpha_k) P_{s-2}(\cos \alpha_k) + \\ & (s(s-1) - m_1^{(k)} \operatorname{cosec}^2 \alpha_k) \cos \alpha_k (P_{s-2}(\cos \alpha_k))^2, \\ \lambda_k(s) &= m_1^{(k)} G_1 (m_1^{(1)} G_k)^{-1} (s+1) \operatorname{cosec} \alpha_k \times \\ & [P_{s-1}(\cos \alpha_k) - \cos \alpha_k P_{s-2}(\cos \alpha_k)] [P_{s+1}(\cos \alpha_k) - \cos \alpha_k P_s(\cos \alpha_k)] - \\ & (-1)^k \mu_0 G_1 (m_1^{(1)} G_k)^{-1} \left\{ (s^2 - 2s - m_2^{(k)}) \cos \alpha_k [P_{s-1}(\cos \alpha_k)]^2 - \right. \\ & \left. [m_2^{(k)}(s-1) + (s-2 - m_2^{(k)}) (2s-1) \cos^2 \alpha_k] P_{s-1}(\cos \alpha_k) P_{s-2}(\cos \alpha_k) + \right. \\ & \left. (s-2 - m_2^{(k)}) (s-1) \cos \alpha_k [P_{s-2}(\cos \alpha_k)]^2 \right\}, \\ m_1^{(k)} &= 2(m^{(k)} - 1) / m^{(k)}, \quad m_2^{(k)} = (m^{(k)} - 2) / m^{(k)}, \end{aligned}$$

где  $2\alpha_k$  - угол в осевом сечении,  $m^{(k)}$  - число Пуассона,  $G_k$  - модуль сдвига для  $k$ -го конуса ( $k = 1, 2$ ),  $\alpha_1 < \pi/2$ ,  $\alpha_2 > \pi/2$ .

Асимптотика корней из I квадранта уравнений  $\Delta_k(s) = 0$  получена в предыдущей задаче и имеет вид

$$-iz_n^{(k)} = \frac{\pi}{\alpha_k} n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2i\alpha_k} \ln \left( \frac{2\pi n}{\alpha_k} \sin 2\alpha_k \right) + o(1), \quad n \rightarrow \infty \quad (k = 1, 2). \quad (16)$$

Для функции  $\lambda(s)$  имеем:

$$\begin{aligned} \lambda(s) &= \pi^{-2} \lambda_\infty(s) + o(1), \quad s \rightarrow \infty, \quad \lambda_\infty(s) = (m_1^{(1)})^{-1} G_1 \sum_{k=1}^2 G_k^{-1} \left\{ m_1^{(k)} \times \right. \\ & \left. [\sin(2s-1)\alpha_k - \cos 2\alpha_k] - (-1)^k \mu_0 [m_2^{(k)} \cos(2s-1)\alpha_k + \right. \\ & \left. (s-1/2 - m_1^{(k)}) \sin 2\alpha_k \right\} [\cos(2s-1)\alpha_{3-k} - (s+1/2) \sin 2\alpha_{3-k}]. \quad (17) \end{aligned}$$

Асимптотическое поведение корней из I квадранта уравнения  $\lambda(s) = 0$  следующее:

$$s_n^{(k)} = \frac{\pi}{\alpha_k} \left( n + \frac{1-k}{4} \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2i\alpha_k} \ln(q^{(k)} n) + o(1), \quad n \rightarrow \infty \quad (k = 1, 2), \quad (18)$$

$$q^{(1)} = \frac{2\pi}{\alpha_1} \cdot \frac{q_0 \sin 2\alpha_1}{2\kappa + 2 - i\mu_0 \left( \frac{m^{(1)}-2}{m^{(4)}-1} - \kappa \frac{m^{(2)}-2}{m^{(2)}-1} \right)},$$

$$q^{(2)} = -\frac{2\pi}{\alpha_2} \cdot \frac{\mu_0(\kappa + 1)}{m_1^{(1)} q_0} \sin 2\alpha_2,$$

$$q_0 = 2\kappa + i\mu_0 \left( \frac{m^{(1)}}{m^{(1)} - 1} + \kappa \frac{m^{(2)} - 2}{m^{(2)} - 1} \right), \quad \kappa = \frac{G_1 m_1^{(2)}}{G_2 m_1^{(1)}}.$$

Проводя факторизацию (10) функции  $G(z)$ , согласно изложенному выше получаем

$$X^-(z) = \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{-1} \times$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^2 \left(1 + \frac{iz}{s_n^{(k)}}\right) \left(1 + \frac{iz}{\bar{s}_n^{(k)}}\right) \left(1 - \frac{z}{z_n^{(k)}}\right)^{-1} \left(1 + \frac{z}{\bar{z}_n^{(k)}}\right)^{-1}, \quad (19)$$

где  $z_0$  — наименьший по модулю (мнимый) корень уравнения  $\Delta_2(-iz) = 0$  из верхней полуплоскости.

**Теорема 2.** *Бесконечное произведение (19) имеет асимптотическую оценку*

$$X^-(z) = O(|z|^\rho), \quad |z| \rightarrow \infty \quad (\text{Im} z \leq 0), \quad (20)$$

$$\rho = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctg \left( \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{G_1 m^{(1)}(m^{(2)} - 2) - G_2 m^{(2)}(m^{(1)} - 2)}{G_1 m^{(1)}(m^{(2)} - 1) + G_2 m^{(2)}(m^{(1)} - 1)} \right) \quad (0 < \rho < 1).$$

*Доказательство.* Обозначив

$$p^{(k)} = \frac{1}{2\pi} \arg q^{(k)} \quad (k = 1, 2)$$

и повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 1, имеем:

$$p_1^{(1)} = p^{(1)}, \quad p_2^{(1)} = 0, \quad p_1^{(2)} = p^{(2)} - \frac{1}{4}, \quad p_2^{(2)} = \frac{1}{2},$$

$$\ln X^-(z) \sim (-1 - 2(p_1^{(1)} - p_2^{(1)} + p_1^{(2)} - p_2^{(2)})) \ln |z| =$$

$$\left(\frac{1}{2} - 2(p^{(1)} + p^{(2)})\right) \ln |z| = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arg(q^{(1)} q^{(2)})\right) \ln |z|, \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Отсюда, с учётом выражений для  $q^{(1)}$ ,  $q^{(2)}$  из формул (18), получаем асимптотическую оценку (20). Теорема 2 доказана.

Полученные асимптотические оценки (12), (20) обеспечивают существование интегралов, возникающих при решении задачи Римана (1).

Автор выражает признательность профессору Гришину А.Ф. за помощь, оказанную при выполнении данной работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Улітко А.Ф., Острик В.І. Контакт пружного і жорсткого клинів з урахуванням сил тертя.// Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки,-1999.-Вип. 3.-С. 129-137.
2. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости.-Киев: Наук. думка,-1979.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи.-М.: Физматгиз,-1963.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.-М.: Наука,-1.-1967.
5. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции.-М.: Наука,-1979.
6. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных.-М.: Иностран. лит.,-1962.

Plurisubharmonic functions with multicircled  
singularities

A. Yu. Rashkovskii

*Institute for Low Temperature Physics National Academy of Sciences, Ukraine*

Relations are studied between directional and partial Lelong numbers and residual Monge-Ampère measures for plurisubharmonic functions with multicircled singularities.

1991 Mathematics Subject Classification 32F05.

## 1. Introduction

There are several quantitative characteristics for behaviour of a plurisubharmonic function  $u$  near its singularity point (that is, a point  $x \in \mathbb{C}^n$  such that  $u(x) = -\infty$ ). The most famous one is the Lelong number  $\nu(u, x)$  introduced originally in [10] as the  $(2n - 2)$ -dimensional density of the Riesz measure of  $u$  at  $x$ . It can be defined equivalently as

$$\nu(u, x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t^{-1} \lambda(u, x, t),$$

where  $\lambda(u, x, t)$  is the mean value of  $u$  over the sphere  $|z - x| = e^t$ , see [6]. When  $u = \log |f|$ ,  $f$  being a holomorphic function with  $f(x) = 0$ ,  $\nu(u, x)$  is just the multiplicity of the zero of  $f$  at the point  $x$ . Various results on Lelong numbers and their applications to complex analysis can be found in [11], [13], [4], [5], [12].

Consideration of the mean values  $\lambda(u, x, a)$  over the sets

$$T_a(x) = \{z : |z_k - x_k| = \exp a_k, 1 \leq k \leq n\}, \quad a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n,$$

leads to the *refined*, or *directional*, Lelong numbers [7]

$$\nu(u, x, a) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t^{-1} \lambda(u, x, ta), \quad a \in \mathbb{R}_+^n.$$

When taking the mean values with respect to a part of the variables  $z_k$ , it produces the *partial Lelong numbers* [8], [17]. Namely, for a  $p$ -tuple  $J = (j_1, \dots, j_p)$ ,  $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_p \leq n$ , and  $a' \in \mathbb{R}_+^p$ ,

$$\nu_J(u, x, a') = \lim_{t \rightarrow -\infty} t^{-1} \lambda_J(u, x, ta'), \quad a' \in \mathbb{R}_+^p,$$

$\lambda_J(u, x, a')$  being the mean value of  $u$  over the set

$$T_{a'}(x) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_k - x_k| = \exp a'_j, j \in J, z_k = x_k, k \notin J\}, \quad a' \in \mathbb{R}^p.$$

In the above definitions, the mean values can be replaced with the suprema of  $u$  over  $T_a(x)$  and  $T_{a'}(x)$  without effecting the values of the Lelong numbers. Note that the standard and directional Lelong numbers are particular cases of the general notion of the Lelong number with respect to a plurisubharmonic weight due to J.-P. Demailly [3], and it is not the case for the partial numbers.

If  $u^{-1}(-\infty)$  is a discrete set, then the complex Monge-Ampère operator  $(dd^c u)^n$  is well defined, and the residual mass  $\tau(u, x) = (dd^c u)^n|_{\{x\}}$  is also an important characteristic of the behaviour of  $u$  near  $x$  (here  $d = \partial + \bar{\partial}$  and  $d^c = (\partial - \bar{\partial})/2\pi i$ ). For example, if  $x$  is an isolated zero of an equidimensional holomorphic mapping  $f$ , then  $\tau(\log |f|, x)$  is just the multiplicity of this zero.

Finally, a very useful information is given by the integrability index (or Arnold multiplicity)

$$I(u, x) = \inf \{r > 0 : e^{-u/r} \in L^2_{loc}(x)\},$$

see [16], [1], [8].

In the one-dimensional situation, all these values are equal (moreover, the three above types of the Lelong numbers coincide by definition), while for  $n > 1$  they are quite different that reflects a diversity in the behaviour of plurisubharmonic functions near singularity points. We recall some known relations:

- (i)  $\nu(u, x) = \nu(u, x, (1, \dots, 1))$  [7];
- (ii)  $\nu_J(u, x, a') \geq \nu(u, x, a) \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^n : a_j = a'_j, j \in J$ ;
- (iii)  $\tau(u, x) \geq [\nu(u, x)]^n$ ; more generally,  $\tau(u, x) \geq [\nu(u, x, a)]^n (a_1 \dots a_n)^{-1}$  for any  $a \in \mathbb{R}_+^n$  [15];
- (iv)  $\sup\{\nu(u, x, a) : \sum a_j = 1\} \leq I(u, x) \leq \nu(u, x)$  [8],

the strict inequalities in (ii)–(iv) being possible.

It was shown in [17] that if  $u$  satisfies certain regularity conditions near  $x$ , then  $\nu(u, x, a) \rightarrow \nu_J(u, x, a')$  as  $a_k \rightarrow +\infty, k \notin J$ , and  $a_j = a'_j, j \in J$ . A problem of such a relation for the general situation was posed by C.O. Kiselman [8].

A more precise relation than (iii) can be obtained by means of local indicators introduced in [14]. The local indicator  $\Psi_{u,x}$  of  $u$  at  $x$  is a plurisubharmonic function in the unit polydisk  $D_1^n = \{y \in \mathbb{C}^n : |y_k| < 1, 1 \leq k \leq n\}$  such that

$$\Psi_{u,x}(y) = -\nu(u, x, a)$$

with  $a = -(\log |y_1|, \dots, \log |y_n|)$  for  $y_1 \dots y_n \neq 0$ . It is the largest negative plurisubharmonic function in  $D_1^n$  whose directional Lelong numbers at 0 coincide with those of  $u$  at  $x$ , and the relation is

(iii')  $\tau(u, x) \geq N(u, x) := \tau(\Psi_{u,x}, 0)$ .

Since

$$\Psi_{u,x}(y) = \Psi_{u,x}(|y_1|, \dots, |y_n|) = c^{-1} \Psi_{v,x}(|y_1|^c, \dots, |y_n|^c) \quad \forall c > 0, \quad (1.1)$$

the right-hand side in (iii') can be effectively calculated, see [15]. In particular, for a holomorphic mapping  $f$  with isolated zeros,  $N(\log |f|, x)$  equals the Newton number of  $f$  at  $x$  as defined in [9].

For the indicators themselves (that is, nonpositive plurisubharmonic functions  $\Phi$  in  $D_1^n$  satisfying the homogeneity condition stated in (1.1) for  $\Psi_{u,x}$ ), we have

$$\nu(\Phi, 0, a) = -\Phi(e^{-a_1}, \dots, e^{-a_n}) \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^n$$

and

$$\nu_J(\Phi, 0, a') = -\Phi(e^{-a'_1}, \dots, e^{-a'_p}, 0, \dots, 0)$$

with  $J = (1, \dots, p)$ . By continuity of  $\Phi$ ,  $\nu(\Phi, 0, a) \rightarrow \nu_J(\Phi, 0, a')$  as  $a_j \rightarrow a'_j$ ,  $1 \leq j \leq p$ ,  $a_j \rightarrow +\infty$ ,  $j > p$ . Besides,  $\Psi_{\Phi,0} = \Phi$ , so  $\tau(\Phi, 0) = N(\Phi, 0)$ . And it is easy to see that  $I(\Phi, 0) = \sup\{\nu(\Phi, 0, a) : \sum a_j = 1\}$ .

All these relations easily extend to plurisubharmonic functions satisfying the regularity condition

$$\exists \lim_{z \rightarrow x} \frac{u(z)}{\Psi_{u,x}(z-x)} = 1. \quad (1.2)$$

In spite of the fact that there is always the equality

$$\liminf_{z \rightarrow x} \frac{u(z)}{\Psi_{u,x}(z-x)} = 1,$$

this condition seems to be too restricting, see Theorem 2.1 below.

In the present note we examine these relations for a wider class of plurisubharmonic functions whose behaviour near  $x$  is asymptotically independent of the arguments of  $z_k - x_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Namely, we will say that a plurisubharmonic function  $u$  on a domain  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$  has a *multicircled singularity* at a point  $x \in \Omega$  (or that  $u$  is *almost multicircled* near a point  $x \in \Omega$ ) if there exists a multicircled plurisubharmonic function  $v$  (i.e.  $v(z) = v(|z_1|, \dots, |z_n|)$ ) in a neighbourhood of the origin, such that

$$\exists \lim_{z \rightarrow x} \frac{u(z)}{v(z-x)} = 1. \quad (1.3)$$

In the terminology of [18], it means that  $u$  has a standard singularity generated by a multicircled function. It is easy to see that  $u$  has multicircled singularity at  $x$  if and only if it satisfies relation (1.3) with  $v$  equal to some "circularization" of  $u$ , say

$$u_x^c(z) = \sup\{u(x_1 + z_1 e^{i\theta_1}, \dots, x_n + z_n e^{i\theta_n}) : 0 \leq \theta_j \leq 2\pi\}. \quad (1.4)$$

It was shown by C.O. Kiselman [8] that for every multicircled plurisubharmonic function  $u$ ,  $I(u, x) = \sup\{\nu(u, x, a) : \sum a_j = 1\}$ . It follows immediately from

definition of almost multicircled functions that they keep this property, too. And the subject of this note is to study the relations between the Lelong numbers and the residual Monge-Ampère masses. It will be shown that there is a gap between the directional and partial Lelong numbers even for multicircled functions, while the residual measure  $\tau(u, x)$  of any almost multicircled function  $u$  always equals its Newton number  $N(u, x)$ .

In what follows we will assume  $x = 0 \in \Omega$ , and the collections of all multicircled and almost multicircled plurisubharmonic functions on  $\Omega$  will be denoted by  $PSH^c(\Omega)$  and  $PSH^{ac}(\Omega)$ , respectively. For the sake of brevity,  $\Psi_u$  will stand for  $\Psi_{u,0}$ ,  $\tau(u)$  for  $\tau(u,0)$ , and  $N(u)$  for  $N(u,0)$ .

### 2. Directional and partial Lelong numbers

**Theorem 2.1.** (a) For every plurisubharmonic function  $u$  in  $\Omega$  with  $\Psi_u \not\equiv 0$ ,

$$\liminf_{z \rightarrow 0} \frac{u(z)}{\Psi_u(z)} = 1;$$

(b) There exists  $u \in PSH^c(D_1^2)$  such that  $\Psi_u \not\equiv 0$  and

$$\limsup_{z \rightarrow 0} \frac{u(z)}{\Psi_u(z)} > 1.$$

*Proof.* (a) Let  $D_r^n = \{z : |z_k| < r, 1 \leq k \leq n\} \subset\subset \Omega, r \ll 1$ , then  $u(z) \leq \Psi_u(r^{-1}z) + C_r$  in  $D_r^n$  [14]. Take any  $\epsilon \in (0, 1)$ . If  $z \in D_{r_1/\epsilon}^n$  then  $\Psi_u(r^{-1}z) \leq (1 - \epsilon)\Psi_u(z)$  and hence

$$\frac{u(z)}{\Psi_u(z)} \geq \frac{(1 - \epsilon)\Psi_u(z) + C_r}{\Psi_u(z)} \rightarrow 1 - \epsilon$$

as  $z \rightarrow 0$ , that gives us

$$\liminf_{z \rightarrow 0} \frac{u(z)}{\Psi_u(z)} \geq 1.$$

If it equals  $1 + 2\delta > 1$ , then in a neighbourhood of the origin we have  $u(z) \leq (1 + \delta)\Psi_u(z)$ . Therefore,  $\Psi_u \leq (1 + \delta)\Psi_u$  and  $\Psi_u \equiv 0$ .

(b) Let

$$v_j(z) = j^{-3} \max\{-|\log |z_1||^{\frac{1}{2}}, j \log |z_2|\}, \tag{2.1}$$

then

$$v(z) := \sum_{j=1}^{\infty} v_j(z) \in PSH^c(D_1^2), \quad v \not\equiv -\infty. \tag{2.2}$$

For  $R > 1$  and  $z \in D_1^2$  with  $z_1 z_2 \neq 0$ , denote

$$\beta(R, z) = R^{-\frac{1}{2}} |\log |z_1||^{\frac{1}{2}} |\log |z_2||^{-1}.$$

By definition of the indicator,

$$\begin{aligned} \Psi_v(z) &= \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-1} v(|z_1|^R, |z_2|^R) \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[ \sum_{j \leq \beta(R,z)} j^{-2} \log |z_j| - R^{-\frac{1}{2}} \sum_{j > \beta(R,z)} j^{-3} |\log |z_1||^{\frac{1}{2}} \right] = 0 \end{aligned}$$

for all  $z$  with  $z_1 z_2 \neq 0$  and thus identically on  $D_1^2$ .

Now the function  $u(z) = v(z) + \max\{\log |z_1|, \log |z_2|\}$  has the indicator  $\Psi_u(z) = \max\{\log |z_1|, \log |z_2|\}$  and satisfies

$$\limsup_{z \rightarrow 0} \frac{u(z)}{\Psi_u(z)} \geq \limsup_{z_2 \rightarrow 0, z_1 = 0} \frac{u(z)}{\Psi_u(z)} = 1 + \sum_1^\infty N^{-2} > 1.$$

The proof is complete.

Such a non-regularity yields the negative answer to Kiselman's question (see Introduction) even in the class of multicircled functions:

**Corollary 2.1.** *There exists a function  $v \in PSH^c(D_1^2) \cap L_{loc}^\infty(D_1^2 \setminus \{0\})$  such that  $\lim \nu(v, 0, a) < \nu_1(v, 0, a')$  as  $a_1 \rightarrow a' > 0, a_2 \rightarrow +\infty$ .*

*Proof.* We just take the function  $v$  defined by (2.1)-(2.2). It was shown that  $\Psi_v \equiv 0$ , so  $\nu(v, 0, a) = 0$  for every  $a \in \mathbb{R}_+^2$ . On the other hand,

$$\nu_1(v, 0, a') = \lim_{t \rightarrow -\infty} t^{-1} \sum_1^\infty j^{-2} t a' > 0 \quad \forall a' > 0$$

which proves the assertion.

This phenomenon can be explained in the following way. Given a negative function  $u \in PSH^c(D_1^n)$ , the functions  $u_R(z) = R^{-1} u(|z_1|^R, \dots, |z_n|^R)$  increase in  $R \rightarrow +\infty$  to a function  $U(z)$  whose upper regularization  $U^*(z)$  coincides with the indicator  $\Psi_u(z)$ . If  $z_1 \dots z_n \neq 0$  then  $u(z)$  is convex in  $\log |z_k|$  and so is  $U(z)$ . Hence the exceptional set  $\{z : U(z) < U^*(z)\}$  is a subset of  $\{z : z_1 \dots z_n = 0\}$ . If  $z = (z_1, \dots, z_p, 0, \dots, 0), z_1 \dots z_p \neq 0$ , then  $U(z) = -\nu_J(u, 0, a')$  with  $J = (1, \dots, p)$  and  $a' = -(\log |z_1|, \dots, \log |z_p|) \in \mathbb{R}_+^p$ . In this case, the upper regularization of  $U$  with respect to the first  $p$  coordinates gives a function from  $PSH^c(D_1^p)$ , the partial indicator of  $u$ .

### 3. Residual measures of almost multicircled functions

In order that the Monge-Ampère operator  $(dd^c u)^n$  of  $u \in PSH^{ac}(\Omega)$  be well defined in a neighbourhood of the origin, the function  $u$  is assumed to have the only singular point 0 and thus, without restriction of generality, to belong to the class

$$PSH_*^{ac} = \{u \in PSH^{ac}(\mathbb{C}^n) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) : u < 0 \text{ on } D_1^n\}.$$

Besides, the collection of all multicircled functions from  $PSH_*^{ac}$  will be denoted by  $PSH_*^c$ .

**Proposition 3.1.** *Let a function  $u \in PSH_*^c$  have partial Lelong numbers  $\nu_j(u, 0, 1) = \nu_j > 0, 1 \leq j \leq n$ . Then  $\forall \epsilon > 0 \exists r \in (0, 1)$  such that*

$$u(z) \geq \sup_j (\nu_j + \epsilon) \log |z_j| \quad \forall z \in D_r^n.$$

*Proof.* Consider the function  $u_1(\zeta) = u(\zeta, 0, \dots, 0), \zeta \in D_1^1$ . Since the ratio  $u_1(\zeta)/\log|\zeta|$  decreases to  $\nu_1$  as  $|\zeta| \searrow 0$ , we have  $u_1(\zeta) \geq (\nu_1 + \epsilon) \log|\zeta|$  for all  $\zeta$  close enough to 0. Therefore,  $u(z) \geq u_1(z_1) \geq (\nu_1 + \epsilon) \log|z_1|, |z_1| < r_1$ . The same arguments for  $j = 2, \dots, n$  complete the proof.

**Theorem 3.1.**  $\tau(u) = N(u) \quad \forall u \in PSH_*^{ac}$ .

*Proof.* Due to Demailly's Comparison theorem ([4], Theorem 5.9), it suffices to prove the statement for multicircled functions  $u$  only. As was mentioned in the end of the previous section, the functions  $u_R(z) = R^{-1}u(|z_1|^R, \dots, |z_n|^R) \nearrow U(z)$  as  $R \rightarrow +\infty, z \in D_1^n$ , and  $U^* = \Psi_u$ . Let  $r \in (0, 1)$  be chosen as in Proposition 3.1 for  $\epsilon = 1/2$ , and  $L = (\sup_j \nu_j + 1) \log r$ . Denote  $v_R(z) = \max\{u_R(z), L\}, V = \max\{U, L\}, W = \max\{\Psi_u, L\}$ . By the choice of  $r$  and  $L, v_R = u_R$  near  $\partial D_r^n$  for all  $R \geq 1$ , and  $W = \Psi_u$  there. Then

$$\int_{D_r^n} (dd^c v_R)^n = \int_{D_r^n} (dd^c u_R)^n \geq \tau(u_R) = \tau(u) \tag{3.1}$$

since

$$\tau(u_R) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{D_r^n} (dd^c u_R)^n = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{D_{r,R}^n} (dd^c u)^n = \tau(u).$$

On the other hand,  $v_R \nearrow V, V^* = W$ , and by the convergence theorem for increasing sequences of bounded plurisubharmonic functions [2],

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{D_r^n} (dd^c v_R)^n = \int_{D_r^n} (dd^c W)^n = \int_{D_r^n} (dd^c \Psi_u)^n = N(u).$$

Being compared with (3.1) it gives us  $\tau(u) \leq N(u)$ . As the opposite inequality is true for every plurisubharmonic function with isolated singularity at 0 (see relation (iii') in Introduction), the proof is complete.

**Corollary 3.1.** *For every  $u \in PSH_*^{ac}, \tau(u) > 0 \iff \nu(u, 0) > 0$ .*

*Proof.* Theorem 3.1 yields  $\tau(u) > 0$  if and only if  $\tau(\Psi_u) > 0$ , and the latter relation is equivalent to the condition  $\Psi_u < 0$  on  $D_1^n$  and hence to  $\nu(u, 0) > 0$ .

**Corollary 3.2.** *Let  $u \in PSH_*^{ac}$  and  $\nu'_j$  be the limit of the values  $\nu(u, 0, a)$  as  $a_j \rightarrow 1, a_k \rightarrow +\infty, k \neq j$ . Then*

$$\tau(u) \leq \prod_{1 \leq j \leq n} \nu'_j.$$

*Proof.* As in the proof of Theorem 3.1 we may examine only the case of  $u \in PSH_*^c$ . Proposition 3.1 then gives us a lower bound for  $u$  which would imply, again by Demailly's Comparison theorem, a weaker conclusion

$$\tau(u) \leq \prod_{1 \leq j \leq n} \nu_j(u, 0, 1).$$

However an application of the Comparison theorem to  $\Psi_u$  instead of  $u$  yields the relation

$$N(u) \leq \prod_{1 \leq j \leq n} \nu_j(\Psi_u, 0, 1).$$

It has been already noticed that the partial Lelong numbers of the indicators are the limits of their corresponding directional numbers, so  $\nu_j(\Psi_u, 0, 1) = \nu'_j$ , and the assertion then follows from Theorem 3.1.

*Remark.* As can be seen from an example of the function

$$u(z) = \log \left[ |z_1|^k + |z_2|^k + |z_1 z_2|^\epsilon \right], \quad 0 < \epsilon \ll 1 \ll k,$$

no upper bound for  $\tau(u)$  is possible in terms of the standard Lelong numbers (in spite of the relation in Corollary 3.1).

Finally it is worth noting that the Newton number  $N(u, x)$  for any plurisubharmonic function  $u$  is just the residual measure of its circularization:

**Corollary 3.3.** *Let  $u \in PSH(\Omega)$  be such that  $\Psi_{u,x}$  is locally bounded on  $D_1^n \setminus \{0\}$ . Then  $N(u, x) = \tau(u_x^c, 0)$ ,  $u_x^c$  being the circularization of  $u$  defined by (1.4) (or in terms of the mean values of  $u$  over  $T_a(x)$ ).*

This investigation is partially supported by INTAS-99-00089.

## REFERENCES

1. Arnold V.I., Gusein-Zade S.M. and Varchenko A.N. Singularities of Differentiable Maps. Progress in Math.- Birkhäuser,-1985.
2. Bedford E. and Taylor B.A. A new capacity for plurisubharmonic functions.// Acta Math.,-1982.-149.-P. 1-40.
3. Demailly J.-P. Nombres de Lelong généralisés, théorèmes d'intégralité et d'analyticité.// Acta Math.,-1987.-159.-P. 153-169.
4. Demailly J.-P. Monge-Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory. In: V. Ancona and A. Silva (editors), Complex Analysis and Geometry. Univ. Series in Math.-New York: Plenum Press,-1993.-P. 115-193.
5. Hörmander L. Notions of Convexity. Progress in Mathematics.-Birkhäuser,-1994.

6. Kiselman C.O. Densité des fonctions plurisousharmoniques.// Bull. Soc. Math. France,-1979.-**107**.-P. 295-304.
7. Kiselman C.O. Un nombre de Lelong raffiné.// Séminaire d'Analyse Complexe et Géométrie 1985-87. Fac. Sci. Monastir Tunisie,-1987.-P. 61-70.
8. Kiselman C.O. Attenuating the singularities of plurisubharmonic functions.// Ann. Polon. Math.,-1994.-**LX.2**.- P. 173-197.
9. Kouchnirenko A.G. Polyèdres de Newton et nombres de Milnor.// Invent. Math.,-1976.-**32**.-P. 1-31.
10. Lelong P. Intégration sur un ensemble analytique complexe.// Bull. Soc. Math. France,-1957.-**85**.-P. 239-262.
11. Lelong P. Plurisubharmonic functions and positive differential forms.-New York: Gordon and Breach, and Paris: Dunod,-1969.
12. Lelong P. Remarks on pointwise multiplicities.// Linear Topologic Spaces and Complex Analysis.-1997.-**3**.-P. 112-119.
13. Lelong P. and Gruman L. Entire Functions of Several Complex Variables.-Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag,-1986.
14. Lelong P. and Rashkovskii A. Local indicators for plurisubharmonic functions.// J. Math. Pures Appl.,-1999.-**78**.- P. 233-247.
15. Rashkovskii A. Newton numbers and residual measures of plurisubharmonic functions.// Ann. Polon. Math. (to appear).
16. Skoda H. Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans  $\mathbb{C}^n$ .// Bull. Soc. Math. France,-1972.-**100**.-P. 353-408.
17. Wang X. Analyticity theorems for parameter-dependent currents.// Math. Scand.,-1991.-**69**.-P. 179-198.
18. Zaharjuta V.P. Spaces of analytic functions and Complex Potential Theory.// Linear Topological Spaces and Complex Analysis,-1994.-**1**.-P. 74-146.

Решение контактной задачи о взаимодействии  
жесткого клина с упругим слоем

Н. И. Танченко

*Украинская академия банковского дела, г. Сумы, Украина*

Изучается плоская задача теории упругости о контактом взаимодействии жёсткого клина с упругим слоем. Полученное интегральное уравнение задачи решено численно. Найдено распределение контактных напряжений.

1991 *Mathematics Subject Classification* 73C02.

Вдавливание жесткого кругового цилиндра в направлении, перпендикулярном его оси, в упругий слой рассматривалось многими авторами для случаев относительно толстого или тонкого (по сравнению с площадкой контакта) слоя. Обзор литературы по этому вопросу можно найти в книге [1]. Там же приводится решение задачи о внедрении жесткого клина в упругое полупространство. Контактное взаимодействие жёсткого и упругого клиньев исследовано в работе [2].

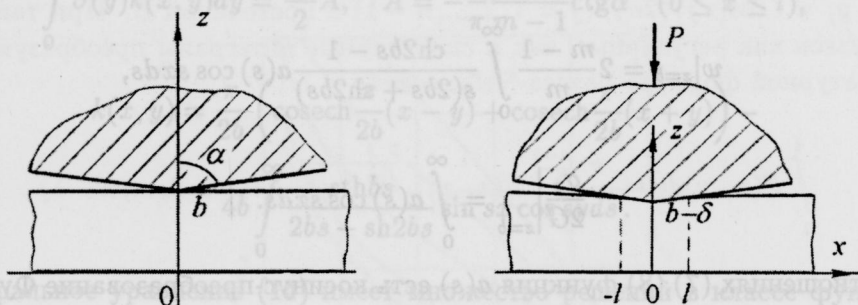
Рассмотрим упругий слой, который в недеформированном состоянии занимает область  $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $0 \leq z \leq b$  и покоится на жёстком основании  $z = 0$ . Предположим, что до нагружения жёсткий клин занимает область  $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $|x| \operatorname{ctg} \alpha + b \leq z < \infty$  ( $\alpha$  — угол полураствора клина) и касается слоя вдоль прямой  $x = 0$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $z = b$  (рис.1,а). Пусть жёсткий клин под действием силы  $P$ , направленной против оси  $Oz$ , вдавливается в упругий слой. В результате нагружения клин перемещается на некоторое расстояние  $\delta$  в отрицательном направлении оси  $Oz$ . Деформированная поверхность слоя входит в контакт с берегами клина вблизи его ребра. Образуется область контакта  $-l \leq x \leq l$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $z = |x| \operatorname{ctg} \alpha + b - \delta$  клина со слоем (рис.1, б), причём размер  $l$  области контакта ранее неизвестен и определяется решением задачи.

Вектор перемещения  $\vec{U} = (u, v, w)$  частиц упругого слоя удовлетворяет уравнению Ламе

$$(m - 2)\nabla^2 \vec{U} + m \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{U} = \vec{0}, \quad (1)$$

где  $m$  — число Пуассона упругой среды,  $\nabla^2$  — оператор Лапласа. В слое устанавливается плоская деформация, при которой компонента  $v$  вектора пе-

ремещения тождественно равна нулю, а компоненты  $u$  и  $w$  не зависят от координаты  $y$ . Компонента  $u$  есть нечётная по  $x$  функция, а компонента  $w$  — чётная по  $x$  функция.



а) до нагружения;

б) после нагружения.

Рис. 1: Контакт жесткого клина и упругого слоя.

Нормальное  $\sigma_z$  и касательное  $\tau_{xz}$  напряжения, действующие на площадке, перпендикулярной оси  $Oz$ , выражаются через компоненты вектора перемещения:

$$\frac{\sigma_z}{2G} = \frac{1}{m-2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{m-1}{m-2} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\tau_{xz}}{2G} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (2)$$

где  $G$  — модуль сдвига.  $\sigma_z$  является чётной по  $x$  функцией,  $\tau_{xz}$  — нечётной.

Предполагаем, что упругий слой плотно прилегает к основанию  $z=0$ , имея возможность свободно проскальзывать вдоль него, что соответствует следующим граничным условиям:

$$w|_{z=0} = 0, \quad \tau_{xz}|_{z=0} = 0. \quad (3)$$

На верхней границе  $z=b$  слоя в зоне контакта граничное условие на перемещение  $w$  определяется положением жёсткого клина и имеет вид

$$w|_{z=b} = |x| \operatorname{ctg} \alpha - \delta \quad (-l \leq x \leq l). \quad (4)$$

Вне зоны контакта поверхность слоя  $z=b$  свободна от напряжений:  $\sigma_z = 0$ ,  $\tau_{xz} = 0$ . В зоне контакта силы трения не учитываем, считая  $\tau_{xz} = 0$ . Таким образом получаем, что

$$\tau_{xz}|_{z=b} = 0 \quad (5)$$

как в зоне контакта, так и вне её и

$$\sigma_z|_{z=b} = 0 \quad (x < -l, x > l). \quad (6)$$

В зоне контакта  $-l \leq x \leq l$ ,  $z=b$  на границу слоя действует неизвестное напряжение  $\sigma_z$ , вызванное контактом с жёстким клином. Целью решения задачи является определение контактного напряжения  $\sigma_z|_{z=b}$  при  $-l \leq x \leq l$ .

Общее решение уравнения Ламе (1) для упругого слоя при произвольно заданном нормальном напряжении на границе  $z = b$ , удовлетворяющее граничным условиям (3), (5), может быть построено с помощью интегрального преобразования Фурье. В частности, на верхней границе слоя [3]

$$w|_{z=b} = 2 \frac{m-1}{m} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} 2bs - 1}{s(2bs + \operatorname{sh} 2bs)} a(s) \cos sx ds, \quad (7)$$

$$\frac{\sigma_z}{2G} \Big|_{z=b} = \int_0^{\infty} a(s) \cos sx ds. \quad (8)$$

В соотношениях (7), (8) функция  $a(s)$  есть косинус-преобразование Фурье напряжения  $\sigma_z/(2G)$  при  $z = b$ :

$$a(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^l \sigma(y) \cos sy dy, \quad (9)$$

где

$$\sigma(x) = \frac{\sigma_z}{2G} \Big|_{z=b} \quad (0 \leq x \leq l). \quad (10)$$

Выражение для  $a(s)$  из (9) подставим в соотношение (7), с помощью которого удовлетворим условию (4). После изменения порядка интегрирования получим интегральное уравнение

$$\int_0^l \sigma(y) k_0(x, y) dy = \frac{\pi}{4} \frac{m}{m-1} (x \operatorname{ctg} \alpha - \delta) \quad (0 \leq x \leq l), \quad (11)$$

где

$$k_0(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} 2bs - 1}{s(2bs + \operatorname{sh} 2bs)} \cos sx \cos sy ds. \quad (12)$$

Используя значение интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th} bs}{s} \cos sx \cos sy ds = -\frac{1}{2} \ln \left( \operatorname{th} \frac{\pi}{4b} |x - y| \operatorname{th} \frac{\pi}{4b} (x + y) \right),$$

ядро интегрального уравнения (11) представим в виде

$$k_0(x, y) = -\frac{1}{2} \ln \left( \operatorname{th} \frac{\pi}{4b} |x - y| \operatorname{th} \frac{\pi}{4b} (x + y) \right) - 2b \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th} bs}{2bs + \operatorname{sh} 2bs} \cos sx \cos sy ds. \quad (13)$$

Дифференцируя уравнение (11) с ядром (13), получаем сингулярное интегральное уравнение

$$\int_0^l \sigma(y)k(x, y)dy = \frac{\pi^2}{2}A, \quad A = -\frac{1}{\pi} \frac{m}{m-1} \operatorname{ctg} \alpha \quad (0 \leq x \leq l), \quad (14)$$

$$k(x, y) = \frac{\pi}{2b} \left( \operatorname{cosech} \frac{\pi}{2b}(x-y) + \operatorname{cosech} \frac{\pi}{2b}(x+y) \right) - \\ 4b \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sth}bs}{2bs + \operatorname{sh}2bs} \sin sx \cos sy ds. \quad (15)$$

Интегральное уравнение (14) имеет множество решений в классе функций, неограниченных в окрестности точки  $y = l$ . Решение  $\sigma(y)$ , ограниченное в точке  $y = l$ , единственно [4].

В случае полупространства ( $b \rightarrow \infty$ ) уравнение (14) принимает вид

$$\int_0^l \sigma(y) \left( \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} \right) dy = \frac{\pi^2}{2}A \quad (0 \leq x \leq l). \quad (16)$$

Его решение, ограниченное при  $y = l$ , известно [1]:

$$\sigma(y)|_{b \rightarrow \infty} = A \ln \frac{1 + \sqrt{1 - (y/l)^2}}{y/l}. \quad (17)$$

Учитывая поведение контактного напряжения  $\sigma(y)$  в окрестностях точек  $y = 0$ ,  $y = l$  [1], решение интегрального уравнения (14) ищем в виде

$$\frac{\sigma(y)}{A} = B \ln \frac{1 + \sqrt{1 - (y/l)^2}}{y/l} + \sqrt{1 - (y/l)^2} \Omega(y) \quad (0 < y \leq l), \quad (18)$$

где  $B$  — неизвестная постоянная,  $\Omega(y)$  — неизвестная функция, регулярная на отрезке  $[0; l]$ .

Соотношения (16)–(18) позволяют записать интегральное уравнение (14) в виде

$$\int_0^l \sqrt{1 - \left(\frac{y}{l}\right)^2} \Omega(y)k(x, y)dy + Bf(x) = \frac{\pi^2}{2} \quad (0 \leq x \leq l), \quad (19)$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi l}{2} \left( k(x, 0) - \frac{2}{x} \right) +$$

$$\int_0^l \ln \frac{1 + \sqrt{1 - (y/l)^2}}{y/l} \left( k(x, y) - k(x, 0) - \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} + \frac{2}{x} \right) dy.$$

При этом подынтегральная функция в последнем интеграле ограничена в интервале  $(0; l)$ .

Численная реализация сингулярного интегрального уравнения (19) проведена методом механических квадратур [5, 6]. Интегральное уравнение (19) сведено к системе линейных алгебраических уравнений в узлах  $x_i = l \cos(\pi(2i-1)/(4n))$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) относительно значений функции  $\Omega(y)$  в узлах  $y_j = l \cos(\pi j/(2n))$  ( $j = 1, 2, \dots, n-1$ ) и постоянной  $B$ . При таком выборе узлов как регулярные, так и сингулярные интегралы преобразуются по квадратурной формуле Гаусса-Чебышева

$$\int_0^l F(x_i, y) dy \approx \frac{\pi}{2n} \sum_{j=1}^{n-1} F(x_i, y_j) \sqrt{l^2 - y_j^2} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

которая имеет наивысшую алгебраическую степень точности.

Глубина проникновения жёсткого клина в упругий слой

$$\delta = -w|_{z=b, x=0} = -\frac{4}{\pi} \frac{m-1}{m} \int_0^l \sigma(y) k_0(0, y) dy. \quad (20)$$

После интегрирования по частям и выделения логарифмической особенности в подынтегральном выражении (20) имеем

$$\delta = \frac{4l}{\pi^2} \bar{\delta} \operatorname{ctg} \alpha, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \bar{\delta} = & B(k_0(0, l) + \ln 2) + \Omega(0) + \frac{1}{l} \int_0^l \left[ B \ln \left( 1 + \sqrt{1 - \left( \frac{y}{l} \right)^2} \right) + \right. \\ & \left. \sqrt{1 - \left( \frac{y}{l} \right)^2} \Omega(y) k_0(0, y) + (B \ln 2 + \Omega(0)) \ln \frac{y}{l} - \frac{1}{2} B \frac{y}{l} \left( \ln \frac{y}{l} - 1 \right) k(y, 0) \right] dy. \end{aligned}$$

Значение  $\Omega(0)$  определяется по формуле интерполяции

$$\Omega(0) \approx 2 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j-1} \left( 1 - \frac{y_j^2}{l^2} \right) \Omega(y_j).$$

Размер  $l$  области контакта связан с силой  $P$  условием равновесия

$$2 \int_0^l \sigma_z|_{z=b} dx = -P. \quad (22)$$

Результаты расчёта контактных напряжений при  $m = 10/3$  и различных значениях отношения  $l/b$  представлены на рис. 2. Значение  $l/b = 0$  соот-

ветствует случаю контакта жёсткого клина с упругим полупространством ( $b = \infty$ ).

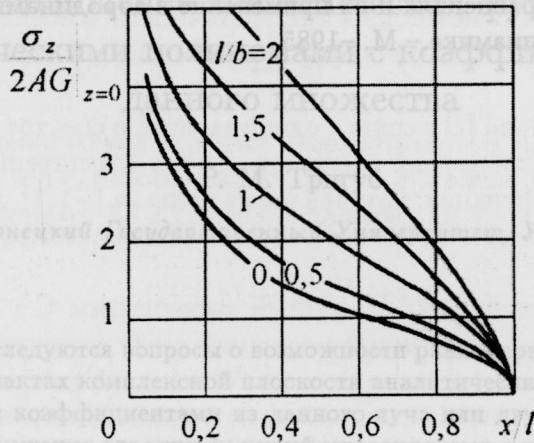


Рис. 2: Распределение контактных напряжений ( $m = 10/3$ ).

Значения величины  $\bar{\delta}$  при различных отношениях  $l/b$  даны в таблице 1.

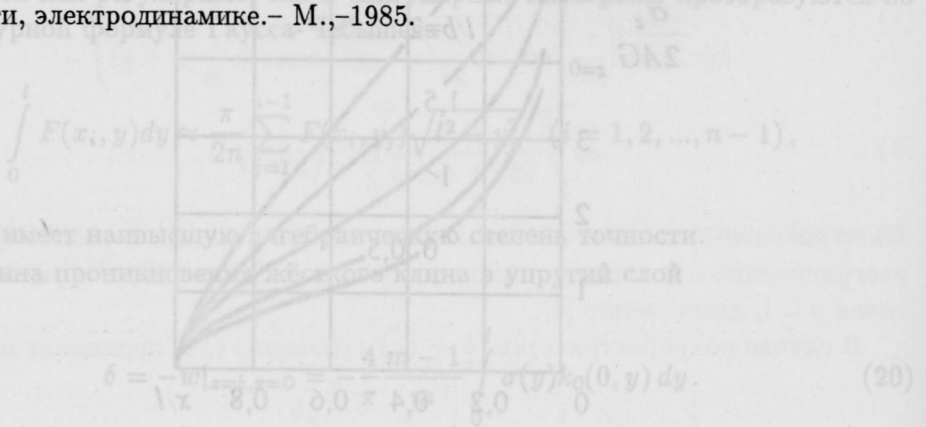
Таблица 1.

|                |          |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----------------|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $l/b$          | 0        | 0,01 | 0,02 | 0,05 | 0,1  | 0,2  | 0,5  | 1    | 1,5  | 2    | 3    |
| $\bar{\delta}$ | $\infty$ | 6,79 | 6,10 | 5,19 | 4,51 | 3,87 | 3,20 | 2,99 | 3,03 | 3,13 | 3,37 |

ЛИТЕРАТУРА

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия: Пер. с англ.-М.: Мир,-1989.
2. Улитко А.Ф., Качаловская Н.Е. Контактное взаимодействие жёсткого и упругого клиньев при первоначальном точечном касании в их общей вершине.// Докл. НАН Украины,-1995.-№ 1.-С. 51-54.
3. Снеддон И. Преобразование Фурье.-М.: ИЛ,-1955.
4. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.-М.: Наука,-1968.

5. Erdogan F.E., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations.// Mechanics of Fract.- Leyden: Int. Publ.,-1973.-1.-Р. 368-425.
6. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике.- М.,-1985.



После интегрирования по частям и выделения логарифмической особенности в подынтегральном выражении (20) получаем (21) (22) (23) (24) (25) (26) (27) (28) (29) (30) (31) (32) (33) (34) (35) (36) (37) (38) (39) (40) (41) (42) (43) (44) (45) (46) (47) (48) (49) (50) (51) (52) (53) (54) (55) (56) (57) (58) (59) (60) (61) (62) (63) (64) (65) (66) (67) (68) (69) (70) (71) (72) (73) (74) (75) (76) (77) (78) (79) (80) (81) (82) (83) (84) (85) (86) (87) (88) (89) (90) (91) (92) (93) (94) (95) (96) (97) (98) (99) (100) (101) (102) (103) (104) (105) (106) (107) (108) (109) (110) (111) (112) (113) (114) (115) (116) (117) (118) (119) (120) (121) (122) (123) (124) (125) (126) (127) (128) (129) (130) (131) (132) (133) (134) (135) (136) (137) (138) (139) (140) (141) (142) (143) (144) (145) (146) (147) (148) (149) (150) (151) (152) (153) (154) (155) (156) (157) (158) (159) (160) (161) (162) (163) (164) (165) (166) (167) (168) (169) (170) (171) (172) (173) (174) (175) (176) (177) (178) (179) (180) (181) (182) (183) (184) (185) (186) (187) (188) (189) (190) (191) (192) (193) (194) (195) (196) (197) (198) (199) (200) (201) (202) (203) (204) (205) (206) (207) (208) (209) (210) (211) (212) (213) (214) (215) (216) (217) (218) (219) (220) (221) (222) (223) (224) (225) (226) (227) (228) (229) (230) (231) (232) (233) (234) (235) (236) (237) (238) (239) (240) (241) (242) (243) (244) (245) (246) (247) (248) (249) (250) (251) (252) (253) (254) (255) (256) (257) (258) (259) (260) (261) (262) (263) (264) (265) (266) (267) (268) (269) (270) (271) (272) (273) (274) (275) (276) (277) (278) (279) (280) (281) (282) (283) (284) (285) (286) (287) (288) (289) (290) (291) (292) (293) (294) (295) (296) (297) (298) (299) (300) (301) (302) (303) (304) (305) (306) (307) (308) (309) (310) (311) (312) (313) (314) (315) (316) (317) (318) (319) (320) (321) (322) (323) (324) (325) (326) (327) (328) (329) (330) (331) (332) (333) (334) (335) (336) (337) (338) (339) (340) (341) (342) (343) (344) (345) (346) (347) (348) (349) (350) (351) (352) (353) (354) (355) (356) (357) (358) (359) (360) (361) (362) (363) (364) (365) (366) (367) (368) (369) (370) (371) (372) (373) (374) (375) (376) (377) (378) (379) (380) (381) (382) (383) (384) (385) (386) (387) (388) (389) (390) (391) (392) (393) (394) (395) (396) (397) (398) (399) (400) (401) (402) (403) (404) (405) (406) (407) (408) (409) (410) (411) (412) (413) (414) (415) (416) (417) (418) (419) (420) (421) (422) (423) (424) (425) (426) (427) (428) (429) (430) (431) (432) (433) (434) (435) (436) (437) (438) (439) (440) (441) (442) (443) (444) (445) (446) (447) (448) (449) (450) (451) (452) (453) (454) (455) (456) (457) (458) (459) (460) (461) (462) (463) (464) (465) (466) (467) (468) (469) (470) (471) (472) (473) (474) (475) (476) (477) (478) (479) (480) (481) (482) (483) (484) (485) (486) (487) (488) (489) (490) (491) (492) (493) (494) (495) (496) (497) (498) (499) (500) (501) (502) (503) (504) (505) (506) (507) (508) (509) (510) (511) (512) (513) (514) (515) (516) (517) (518) (519) (520) (521) (522) (523) (524) (525) (526) (527) (528) (529) (530) (531) (532) (533) (534) (535) (536) (537) (538) (539) (540) (541) (542) (543) (544) (545) (546) (547) (548) (549) (550) (551) (552) (553) (554) (555) (556) (557) (558) (559) (560) (561) (562) (563) (564) (565) (566) (567) (568) (569) (570) (571) (572) (573) (574) (575) (576) (577) (578) (579) (580) (581) (582) (583) (584) (585) (586) (587) (588) (589) (590) (591) (592) (593) (594) (595) (596) (597) (598) (599) (600) (601) (602) (603) (604) (605) (606) (607) (608) (609) (610) (611) (612) (613) (614) (615) (616) (617) (618) (619) (620) (621) (622) (623) (624) (625) (626) (627) (628) (629) (630) (631) (632) (633) (634) (635) (636) (637) (638) (639) (640) (641) (642) (643) (644) (645) (646) (647) (648) (649) (650) (651) (652) (653) (654) (655) (656) (657) (658) (659) (660) (661) (662) (663) (664) (665) (666) (667) (668) (669) (670) (671) (672) (673) (674) (675) (676) (677) (678) (679) (680) (681) (682) (683) (684) (685) (686) (687) (688) (689) (690) (691) (692) (693) (694) (695) (696) (697) (698) (699) (700) (701) (702) (703) (704) (705) (706) (707) (708) (709) (710) (711) (712) (713) (714) (715) (716) (717) (718) (719) (720) (721) (722) (723) (724) (725) (726) (727) (728) (729) (730) (731) (732) (733) (734) (735) (736) (737) (738) (739) (740) (741) (742) (743) (744) (745) (746) (747) (748) (749) (750) (751) (752) (753) (754) (755) (756) (757) (758) (759) (760) (761) (762) (763) (764) (765) (766) (767) (768) (769) (770) (771) (772) (773) (774) (775) (776) (777) (778) (779) (780) (781) (782) (783) (784) (785) (786) (787) (788) (789) (790) (791) (792) (793) (794) (795) (796) (797) (798) (799) (800) (801) (802) (803) (804) (805) (806) (807) (808) (809) (810) (811) (812) (813) (814) (815) (816) (817) (818) (819) (820) (821) (822) (823) (824) (825) (826) (827) (828) (829) (830) (831) (832) (833) (834) (835) (836) (837) (838) (839) (840) (841) (842) (843) (844) (845) (846) (847) (848) (849) (850) (851) (852) (853) (854) (855) (856) (857) (858) (859) (860) (861) (862) (863) (864) (865) (866) (867) (868) (869) (870) (871) (872) (873) (874) (875) (876) (877) (878) (879) (880) (881) (882) (883) (884) (885) (886) (887) (888) (889) (890) (891) (892) (893) (894) (895) (896) (897) (898) (899) (900) (901) (902) (903) (904) (905) (906) (907) (908) (909) (910) (911) (912) (913) (914) (915) (916) (917) (918) (919) (920) (921) (922) (923) (924) (925) (926) (927) (928) (929) (930) (931) (932) (933) (934) (935) (936) (937) (938) (939) (940) (941) (942) (943) (944) (945) (946) (947) (948) (949) (950) (951) (952) (953) (954) (955) (956) (957) (958) (959) (960) (961) (962) (963) (964) (965) (966) (967) (968) (969) (970) (971) (972) (973) (974) (975) (976) (977) (978) (979) (980) (981) (982) (983) (984) (985) (986) (987) (988) (989) (990) (991) (992) (993) (994) (995) (996) (997) (998) (999) (1000)

$$\delta = \frac{4b}{\pi} \delta \operatorname{ctg} \alpha, \quad (21)$$

Значения  $\delta$  при различных отношениях  $b/l$  приведены в таблице 1.

$$\delta = B(k_0(0, l) + \ln 2) + \Omega(0) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left[ B \ln \left( 1 + \sqrt{1 - \left( \frac{y}{l} \right)^2} \right) + \right.$$

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 3    | 2    | 1.5  | 1    | 0.5  | 0.2  | 0.1  | 0.05 | 0.02 | 0.01 | 0    | 0.5  | 1    | 1.5  | 2    | 3    |
| 0.27 | 0.33 | 0.39 | 0.45 | 0.51 | 0.57 | 0.63 | 0.69 | 0.75 | 0.81 | 0.87 | 0.93 | 0.99 | 1.05 | 1.11 | 1.17 |

Значение  $\Omega(0)$  определяется по формуле интерполяции

1. Джонсон К. Механика контактных взаимодействий. Пер. с англ.-М.: Мир, 1989.
2. Уткин А.Ф. Физико-математическое моделирование взаимодействия упругого клина с призматическим телом вращения. Докл. АН УССР, 1955, № 1.-С. 51-54.
3. Снегдон Н. Преобразование Фурье.-М.: Мир, 1955.

Значения  $\delta/b$  при различных отношениях  $b/l$  представлены на рис. 2. Значения  $\delta/b$  соответствуют

## Приближение аналитических функций алгебраическими полиномами с коэффициентами из данного множества

Р. М. Тригуб

*Донецкий Государственный Университет, Украина*

В статье исследуются вопросы о возможности равномерной аппроксимации на компактах комплексной плоскости аналитических функций многочленами с коэффициентами из данного луча или двух лучей и о порядке приближения гладких функций многочленами с положительными коэффициентами, целыми и натуральными.

*1991 Mathematics Subject Classification 41A60.*

### 1. Введение

В настоящей заметке приводятся утверждения о приближении функций полиномами с целыми коэффициентами, положительными, натуральными.

Эту тему для отрезка вещественной оси инициировал А. О. Гельфонд (см. [1]). Например, им доказаны прямые теоремы (аналоги теорем Джексона и Бернштейна) о приближении полиномами с целыми коэффициентами на  $[0, 1]$ . Приведем асимптотически точный результат.

**Теорема 1.**  $\forall r \in \mathbb{N} \exists$  константа  $\gamma = \gamma(r)$  такая, что для любой функции  $f$ , у которой производная  $f^{(r-1)}$  абсолютно непрерывна на  $[0, 1]$  и почти всюду  $|f^{(r)}(x)| \leq 1$ , числа  $\frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(0)$  и  $\frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(1)$  при  $0 \leq \nu \leq r-1$  целые (эти арифметические условия необходимы), для любого  $n \geq 4r+1$  можно построить полином  $q_n$  степени не выше  $n$  со всеми целыми коэффициентами, удовлетворяющий  $\forall x \in [0, 1]$  неравенству:

$$|f(x) - q_n(x)| \leq K_r \left( \frac{\sqrt{x(1-x)}}{n} \right)^r + \gamma \frac{(\sqrt{x(1-x)})^{r-1}}{n^{r+1}}.$$

При этом константу  $K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}$  в правой части неравенства уменьшить нельзя, вообще говоря.

Без ограничений на коэффициенты эта теорема получена в [2]. Общие прямые теоремы о целочисленных приближениях для любого отрезка длины

меньше четырех получены автором в диссертации [3], защищённой в ХГУ (см. также монографию [4]).

Общая теорема о возможности равномерной аппроксимации полиномами  $q_n$  на компактах комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  имеется в [5]. Компакт должен быть с трансфинитным диаметром меньше единицы, а функция должна дополнительно удовлетворять некоторым арифметическим условиям. А вот прямая теорема (типа В. К. Дзядыка) получена пока лишь для квадрата:  $0 \leq \operatorname{Re} z$ ,  $\operatorname{Im} z \leq 1$  [6].

Недавно J. F. Toland [7] в связи с одной задачей о спектре положительного оператора получил следующий результат. Любая вещественная непрерывная на  $[a, 1]$  при  $a < -1$  функция, которая равна нулю на  $[-1, 1]$ , допускает равномерное приближение полиномами с положительными коэффициентами. См. также [8].

Далее  $K$  — компакт в  $\mathbb{C}$  со связным дополнением  $\mathbb{C} \setminus K$ . Через  $A(K)$  обозначим множество непрерывных функций на  $K$  и аналитических во внутренних точках  $K$ , если таковые имеются. Через  $A_w(K)$  обозначим множество функций из  $A(K)$ , допускающих равномерное приближение полиномами с коэффициентами из данного замкнутого множества  $W \subset \mathbb{C}$ . Сначала будет идти речь об усилении известной аппроксимационной теоремы С. Н. Мергеляна. Имеет значение расположение нуля относительно  $K$ . Если  $0 \in K$ , то нужно предполагать, что  $f(0) \in W$ , а если  $0$  — внутренняя точка  $K$ , то и  $f^{(\nu)}(0) \in W$  для любого целого  $\nu \geq 0$ .  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ ,  $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+$ .

**Теорема 2.**  $K$  — компакт звездный относительно нуля.

I. Пусть еще компакт  $K = \overline{K}$  (симметричен относительно вещественной оси  $\mathbb{R}$ ) и состоит из единичного круга (с центром в нуле) и конечного числа отрезков вне него, а  $K \cap \mathbb{R}_+ = [0, 1]$ . Для того чтобы  $f \in A_{\mathbb{R}_+}(K)$ , необходимо и достаточно, чтобы  $f \in A(K)$ ,  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$   $\forall z \in K$  и  $f^{(\nu)}(0) \geq 0 \forall \nu \in \mathbb{Z}_+$ .

II. Пусть замкнутое множество  $W$  из  $\mathbb{C}$  удовлетворяет следующему условию:  $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \lambda W \subset W$ . Если  $0$  — внутренняя точка  $K$  и граница  $K$  не содержит ни одного отрезка, лежащего на луче, выходящем из нуля, то любая функция  $f \in A(K)$  с условием  $f^{(\nu)}(0) \in W \forall \nu \in \mathbb{Z}_+$  принадлежит  $A_w(K)$ .

**Теорема 3.** Пусть  $K \cap (0, +\infty) = \emptyset$ , а  $W_\alpha = \mathbb{R}_+ \cup e^{i\alpha} \mathbb{R}_+$ , где  $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Z}$  (два луча).

I. Если  $0 \notin K$ , то  $A_{W_\alpha}(K) = A(K)$ . Если  $0 \in K$ , то любая функция  $f$  из  $A(K)$  с условием  $f(0) \in W_\alpha$  принадлежит  $A_{W_\alpha}(K)$ .

II. Если еще  $K = \overline{K}$ , то для того чтобы функция  $f \in A_{\mathbb{R}_+}(K)$ , необходимо и достаточно, чтобы  $f \in A(K)$ ,  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \forall z \in K$ , а  $f(0) \in \mathbb{R}_+$ , если  $0 \in E$ .

Теоремы 2 и 3 вместе с доказательством уже опубликованы в [9]. Остальные теоремы настоящей заметки публикуются впервые.

Первые общие прямые теоремы о приближении гладких функций на отрезке отрицательной полуоси полиномами с положительными коэффициен-

тами, включая односторонние и комонотонные приближения, см. в [10]. Здесь рассмотрим приближения полиномами  $q_n^+$  с натуральными коэффициентами.

**Теорема 4.** Пусть  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $f \in \mathcal{C}^r[-2, 0]$ , а  $\frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(0) \in \mathbb{Z}_+$  ( $0 \leq \nu \leq r$ ),  $\frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(-1) \in \mathbb{Z}$  ( $0 \leq \nu \leq r$ ) и при ( $0 \leq \nu \leq r$ )

$$2^{\nu-r-1} \left( \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(-2) - \sum_{k=\nu}^r \frac{1}{k!} C_k^\nu (-2)^{k-\nu} f^{(k)}(0) \right) \in \mathbb{Z}$$

(все эти арифметические условия необходимы).  $\exists$  постоянная  $\gamma = \gamma(r)$ , зависящая лишь от  $r$ , такая, что  $\forall n \geq 3r + 3$  можно построить полином  $q_n^+$  с коэффициентами из  $\mathbb{Z}_+$ , удовлетворяющий  $\forall x \in [-2, 0]$  неравенству ( $0 \leq \nu \leq r$ )

$$|f^{(\nu)}(x) - (q_n^+)^{(\nu)}(x)| \leq \gamma \left( \frac{\sqrt{|x|(x+2)}}{n} \right)^{r-\nu} \left( \omega \left( f^{(\nu)}; \frac{\sqrt{|x|(x+2)}}{n} \right) + \frac{\sqrt{|x|(x+2)}}{n} \right),$$

где  $\omega(g; h)$  — модуль непрерывности функции  $g$ .

Для полиномов без ограничений на коэффициенты эта теорема получена независимо С. А. Теляковским ( $\nu = 0$ ) и И. Е. Гопенгаузом (общий случай).

Отметим еще только, что в доказательстве теоремы 4 существенную роль играет следующее предложение, основанное на некоторых арифметических свойствах коэффициентов полиномов Чебышева.

**Лемма 1.**  $\forall n \in \mathbb{N} \exists$  полином  $q_n^+$  такой, что  $\forall x \in [-2, 0]$

$$|2x + x^2 q_n^+(x)| \leq 16 \min \left\{ \frac{1}{n^2}, |x(x+1)(x+2)| \right\}.$$

Вернемся к общим компактам  $K \subset \mathbb{C}$ . Положим для  $f \in A(K)$

$$E_n(f; K, W) = \min_{c_k \in W (0 \leq k \leq n)} \max_{z \in K} \left| f(z) - \sum_{k=0}^n c_k z^k \right|.$$

**Теорема 5.** Пусть  $r(K) = \max\{|z|, z \in K\} < 1$ .

I. Пусть еще  $K \cap \mathbb{R}_+ = \{0\}$ , а  $W_\alpha = \mathbb{Z}_+ \cup e^{i\alpha} \mathbb{Z}_+$ , где  $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Z}$ . Если  $f \in A(K)$  и  $f(0) \in W_\alpha$ , то  $f \in A_{W_\alpha}(K)$ . А если  $K = \overline{K}$ ,  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \forall z \in K$ ,  $f \in A(K)$  и  $f(0) \in \mathbb{Z}_+$  то  $f \in A_{\mathbb{Z}_+}(K)$ .

II. Пусть  $K = \overline{K}$ , и  $0 \notin K$ .  $\exists$  постоянная  $\gamma = \gamma(r)$  такая, что  $\forall f \in A(K)$  и  $\forall n \geq 0$

$$E_n(f; K, \mathbb{Z}_+) \leq E_n(f; K, \mathbb{R}_+) + \gamma(n+1)^{3/2} \cdot \max \left\{ r^n(K), \frac{1}{|\phi(0)|^n} \right\},$$

где  $\phi$  — любая функция, отображающая конформно внешность  $K$  на внешность единичного круга с условием  $\phi(\infty) = \infty$ .

**Лемма 2.** При условиях теоремы 5(II)  $\exists$  постоянная  $\gamma = \gamma(K)$  такая, что  $\forall n \in \mathbb{N} \exists$  полином  $p_{n-1}^+$  (с положительными коэффициентами) такой, что

$$\max_{z \in K} |1 + zp_{n-1}^+(z)| \leq \gamma \sqrt{n} \frac{1}{|\phi(0)|^n}.$$

Доказательство леммы основано на некоторых свойствах полиномов Фабера компакта  $K$ .

Выведем теперь из леммы 2 теорему 5(II). Пусть

$$\max_{z \in K} |f(z) - \bar{p}_n^+(z)| = E_n(f; K, \mathbb{R}_+).$$

Тогда в силу леммы 2 (используется знак целой части)

$$|\bar{p}_n^+(0) - [p_n^+(0)] + (p_n^+(0) - [\bar{p}_n^+(0)])zp_{n-1}^+(z)| \leq \gamma \frac{\sqrt{n}}{|\phi(0)|^n},$$

и значит, при некоторых коэффициентах  $a_{1,k} \geq 0$  ( $1 \leq k \leq n$ )  $\forall z \in K$

$$\left| \bar{p}_n^+(z) - [\bar{p}_n^+(0)] + \sum_{k=1}^n a_{1,k} z^k \right| \leq \gamma \frac{\sqrt{n}}{|\phi(0)|^n}.$$

Повторяя этот же прием, имеем при  $a_{2,k} \geq 0$  ( $2 \leq k \leq n$ )

$$\left| \bar{p}_n^+(z) - [\bar{p}_n^+(0)] - [a_{1,1}]z + \sum_{k=2}^n a_{2,k} z^k \right| \leq \gamma \left( \frac{\sqrt{n}}{|\phi(0)|^n} + \frac{|z|\sqrt{n-1}}{|\phi(0)|^{n-1}} \right).$$

Таким образом, получаем полином  $q_n^+$  такой, что

$$|\bar{p}_n^+(z) - q_n^+(z)| \leq \gamma \sum_{\nu=0}^n \frac{|z|^\nu \sqrt{n-\nu+1}}{|\phi(0)|^{n-\nu}} \leq \gamma(n+1)^{3/2} \max\{r^n(K), |\phi(0)|^{-n}\}.$$

Это и есть искомый полином.

Приведем один пример. Пусть при  $r \in (0, 1)$  и  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$K = K_{r,\alpha} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r, \operatorname{Re} z \leq -r \cos \alpha\}$$

(сегмент круга), а  $f(z) \equiv \lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

Тогда при  $r \leq 2 \sin \frac{\pi\alpha}{2(2\pi-\alpha)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n^{\frac{1}{n}}(\lambda; K, \mathbb{Z}_+) = 2 \sin \frac{\pi\alpha}{2(2\pi-\alpha)}.$$

Если же  $r > 2 \sin \frac{\pi\alpha}{2(2\pi-\alpha)}$  и  $r = \frac{1}{2}$ , например, а  $\lambda$  не является двоично-рациональным числом, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n^{\frac{1}{n}}(\lambda; K, \mathbb{Z}_+) = \frac{1}{2}.$$

Для оценки приближения сверху применяем теорему 5(II), а для оценки снизу в первом случае — известную лемму Бернштейна о росте модуля полинома, а во втором при  $z = \frac{1}{2}$  — арифметическую природу числа  $\lambda$ .

Аналогично доказывается следующая теорема, в которой выделены случаи, когда порядок убывания наилучших приближений  $E_n(\lambda; [\alpha, \beta], \mathbb{Z}_+)$  константы  $\lambda \in (0, 1)$  полиномами  $q_n^+$  удалось найти.

**Теорема 6.** Пусть  $-1 < \alpha < \beta < 0$ , а  $\lambda \in (0, 1)$ .

I. Если  $|\beta| < |\alpha| \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2$  или  $\alpha + \beta = -\frac{1}{q}$  при  $q \in \mathbb{N}$  и  $\sqrt{|\alpha + \beta|}(\sqrt{|\beta|} + \sqrt{|\alpha|}) < 2(\sqrt{|\alpha|} - \sqrt{|\beta|})$ , то

$$E_n(\lambda; [\alpha, \beta], \mathbb{Z}_+) \asymp \left( \frac{\sqrt{|\alpha|} - \sqrt{|\beta|}}{\sqrt{|\alpha|} + \sqrt{|\beta|}} \right)^n$$

(двустороннее неравенство с положительными константами, не зависящими от  $n$ ).

II. Если  $|\beta| > |\alpha| \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2$  и  $\alpha = -\frac{1}{q}$ , то  $\forall \lambda \neq \frac{p}{q^s}$  ( $p, q$  и  $s \in \mathbb{N}$ ) при бесконечно многих  $n$

$$E_n(\lambda; [\alpha, \beta], \mathbb{Z}_+) \asymp |\alpha|^n$$

(оценка сверху справедлива  $\forall n$ ).

III. Если  $0, 1 < |\beta| < \frac{1}{2} \leq |\alpha| \leq 1 + \beta$  и  $\lambda \neq \frac{p}{q^s}$  то при бесконечно многих  $n$

$$E_n(\lambda; [\alpha, \beta], \mathbb{Z}_+) \asymp 2^{-n}$$

(оценка сверху справедлива  $\forall n$ ).

IV. Если  $\lambda = \frac{p}{q^s}$ ,  $\alpha + \beta = -\frac{2}{q}$ ,  $\beta = -\frac{r}{rq+1}$  ( $p, q$  и  $s \in \mathbb{N}$ ), то  $\forall n$

$$E_n(\lambda; [\alpha, \beta], \mathbb{Z}_+) \asymp \left( \frac{\beta - \alpha}{|\alpha + \beta|} \right)^n.$$

Один частный случай ( $\alpha + \beta = -1$ ), в котором содержится ответ на вопрос С.Н. Бернштейна о целочисленных приближениях константы, приведен в [3].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфонд А.О. Избранные труды.—М.: Наука,—1973.—С. 287–309, 407–411.
2. Тригуб Р.М. Прямые теоремы о приближении алгебраическими полиномами гладких функций на отрезке.// Матем. заметки,—1993.—54.—№ 6.—С. 113–121.
3. Тригуб Р.М. Приближение функций многочленами с целыми коэффициентами.// Изв. АН СССР, серия математика,—1962.—26.—№ 2.—С. 261–280.

4. Ferquson B.O. Approximation by polynomials with integral coefficients.// Math. surveys.- 1980.-№ 17.- Amer. Math. Soc. Providence Rhode (Island).- P. 160.
5. Альпер С.Я. О приближении функций многочленами с целыми коэффициентами на замкнутых множествах.// Изв. АН СССР, серия математика,- 1964.-28.-№ 5.-С. 1173-1186.
6. Волчков Вит.В. Приближение аналитических функций многочленами с целыми коэффициентами.// Матем. заметки,-1996.-59.-№ 2.-С. 182-188.
7. Toland J.F. Selp-adjoint operators and cones.// J. London Math. Soc.,- 1996.-53(2).-P. 167-183.
8. Nussbaum R.D., Walsh B. Approximation by polynomials with non-negative coefficients and the spectral theory of positive operators.// Trans. Amer. Math. Soc.-1998.-350.-P. 2367-2391
9. Trigub R.M. On the approximation of functions by polynomials with positive coefficients.// East Journal on Appr.-s.,-1998.-4.-№ 3.-P. 379-389.
10. Тригуб Р.М. Односторонние и комонотонные приближения гладких функций алгебраическими полиномами с положительными коэффициентами.// Докл. АН России,-2000.-370.-№ 2.

## On stabilizability of evolution systems of partial differential equations on $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ by feedback control

L. V. Fardigola

*Kharkov National University, Ukraine*

In this work the problem of stabilizability by feedback control is investigated for evolution systems of partial differential equations on  $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ . We obtain a criterion (a necessary and sufficient condition) for stabilizability of these systems. To prove the criterion, we use the Fourier transform method. To apply this method, we have to investigate deformations of algebraic hypersurfaces under some polynomial perturbations and have to obtain estimates of semi-algebraic functions on semi-algebraic sets by using of the Tarski—Seidenberg theorem and its corollaries. In the work we also analyse the obtained criterion and give some examples of stabilizable and nonstabilizable systems.

1991 Mathematics Subject Classification 93D15, 35B37, 35G30, 35A22.

### 1. Introduction

Consider a system of the form

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{A}w + \mathbf{B}u, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

where  $w(\cdot, t) \in \mathcal{H}$ ,  $u(\cdot, t) \in H$  ( $t \geq 0$ ),  $\mathcal{H}$ ,  $H$  are Banach spaces,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  are linear operators,  $u$  is a control (input).

The system (1.1) is said to be *stabilizable* if there exists a linear operator  $\mathbf{P}$  (satisfying some given conditions) such that every solution of this system with the feedback control  $u = \mathbf{P}w$  tends to 0 with respect to the norm of  $\mathcal{H}$  as  $t \rightarrow \infty$ .

A number of mathematicians have investigated questions of stabilizability and stability for systems of the form (1.1) ([1]–[5] and others). Most of them use methods of semigroup theory and harmonic analysis. As a rule, if operators  $\mathbf{A}$  considering in these works are differential ones then they are defined on spaces of functions on bounded domains and have only discrete spectrums. Such assumptions make it possible to represent the semigroup generated by  $\mathbf{A}$  in terms of eigenelements. Thus for such kind of differential operators  $\mathbf{A}$  the method of the Fourier-series expansion with respect to eigenelements is commonly used.

However, differential operators defined on spaces of functions on  $\mathbb{R}^n$  (and other unbounded domains) have continuous spectrums. Therefore solutions of systems of the form (1.1) cannot be represented by Fourier series for these operators. But for such systems we can use the continuous generalization of the Fourier-series expansion. On this way we have to study deformations of algebraic surfaces under some polynomial perturbations and have to obtain estimates for semi-algebraic functions on semi-algebraic sets to solve the stabilizability problem for systems of the form (1.1).

In the present paper we consider the following system

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = A(D_x)w(x, t) + b(D_x)u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \quad (1.2)$$

where  $D_x = (-i\partial/\partial x_1, \dots, -i\partial/\partial x_n)$ ,  $A(\sigma)$  is an arbitrary polynomial matrix ( $m \times m$ ),  $b(\sigma)$  is an arbitrary polynomial,  $w : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}^m$  is an unknown function,  $u : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}^m$  is a control (input). We assume that  $w(\cdot, t) \in C_\gamma^q = \{g \in C^q(\mathbb{R}^n) \mid \|g\|_\gamma^q < +\infty\}$  for all  $t > 0$ , where  $\|g\|_\gamma^q = \sup\{|D_x^\alpha g(x)| (1 + |x|)^{-\gamma} \mid x \in \mathbb{R}^n \wedge |\alpha| \leq q\}$ ,  $q, \gamma \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cap \{0\}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  is a multi-index,  $|\cdot|$  is the Euclidean norm of  $\mathbb{R}^k$ .

**Definition 1.1.** *The system (1.2) is said to be stabilizable in the class of functions with polynomial growth  $\gamma \in \mathbb{N}_0$  if there exists such a polynomial matrix  $P(\sigma)$  ( $m \times m$ ) that for each  $r \in \mathbb{N}_0$  there exists  $q \in \mathbb{N}_0$  such that for every solution of this system with the control*

$$u(x, t) \equiv P(D_x)w(x, t) \quad (1.3)$$

under the initial condition

$$w(\cdot, 0) \in C_\gamma^q \quad (1.4)$$

the following two assertions are true

$$\forall t \geq 0 \quad w(\cdot, t) \in C_\gamma^q, \quad (1.5)$$

$$\|w(\cdot, t)\|_\gamma^r \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow +\infty. \quad (1.6)$$

Such a matrix  $P$  is called a stabilizing matrix for the system (1.2), and such a control  $u$  is called a stabilizing control for this system.

To investigate the system (1.2), we use the Fourier transform method that was proposed by I.G.Petrowsky [6] to study the well-posedness property of the Cauchy problem for the evolution systems on a layer  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ . Later this method was generalized by I.M.Gel'fand and G.E.Shilov [7].

On using (formally) of the Fourier transform with respect to  $x$  to the system (1.2) with a control of the form (1.3), we obtain the system of ordinary differential equations

$$\frac{dv(\sigma, t)}{dt} = (A(\sigma) + b(\sigma)P(\sigma))v(\sigma, t), \quad t \geq 0, \quad (1.7)$$

where  $\sigma \in \mathbb{R}^n$  is a parameter.

In Section 4 we prove that the system (1.2) is stabilizable in the class of functions with polynomial growth  $\gamma \in \mathbb{N}_0$  iff there exists a polynomial matrix  $P(\sigma)$  ( $m \times m$ ) such that all the solutions of the system (1.7) tend to 0 as  $t \rightarrow +\infty$  for all  $\sigma \in \mathbb{R}^n$ .

Obviously, every solution of (1.7) tends to 0 as  $t \rightarrow +\infty$  for all  $\sigma \in \mathbb{R}^n$  iff

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^n \quad [\det(A(\sigma) + b(\sigma)P(\sigma) - \lambda I) = 0 \implies \Re \lambda < 0] \tag{1.8}$$

where  $I$  is the identity matrix.

Thus for a given polynomial matrix  $A(\sigma)$  ( $m \times m$ ) and a given polynomial  $b(\sigma)$  we can consider the problem of finding of a polynomial matrix  $P(\sigma)$  ( $m \times m$ ) such that (1.8) holds instead of the stabilizability problem for the system (1.2).

This new problem is rather complicated. Even in the case  $m = 1$  (the case when the system (1.2) contains only single equation), it is not evident whether it is solvable if  $n \geq 2$  ( $\sigma \in \mathbb{R}^n$ ).

In Section 2 we prove that this problem is solvable iff

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^n \quad [b(\sigma) = 0 \implies \Lambda_0(\sigma) < 0] \tag{1.9}$$

where  $\Lambda_P(\sigma) = \sup \{ \Re \lambda \mid \det(A(\sigma) + b(\sigma)P(\sigma) - \lambda I) = 0 \}$ . Necessity of (1.9) is evident. To prove sufficiency of (1.9) (i.e., to construct a polynomial matrix  $P(\sigma)$  ( $m \times m$ ) satisfying (1.8)), we use the Tarski—Seidenberg theorem [8] and its corollaries [9, 10].

We apply the same theorem and corollaries to get a sharp exponential estimate of  $\Lambda_P(\sigma)$  in Section 2. In Section 3 this estimate is used to obtain the following criterion for stabilizability of the system (1.2):

**Theorem 1.1.** *The system (1.2) is stabilizable in the class of functions with polynomial growth  $\gamma \in \mathbb{N}_0$  iff (1.9) hold.*

From this theorem we obtain

**Corollary 1.1.** *If for the system (1.2) we have*

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^n \quad b(\sigma) \neq 0 \tag{1.10}$$

*then this system is stabilizable in the class of functions with polynomial growth  $\gamma \in \mathbb{N}_0$ .*

In Section 4 we analyse the obtained criterion for stabilizability

In Section 5 we give some examples of stabilizable and nonstabilisable systems.

## 2. Auxiliary statements

**Lemma 2.1.** *Let  $A(\sigma)$  be an arbitrary polynomial matrix ( $m \times m$ ) and  $b(\sigma)$  be an arbitrary polynomial. Assume also that (1.9) holds. Then there exists a nonnegative polynomial  $r(\sigma)$  such that the matrix  $P(\sigma) \equiv \overline{b(\sigma)}r(\sigma)I$  satisfies the condition*

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^n \quad \Lambda_P(\sigma) < 0. \tag{2.1}$$

*Proof.* It is easy to see that if

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^n \quad \Lambda_0(\sigma) - |b(\sigma)|^2 r(\sigma) < 0 \tag{2.2}$$

where  $r(\sigma)$  is a nonnegative polynomial then for  $P(\sigma) \equiv \overline{b(\sigma)}r(\sigma)$  the estimate (2.1) is true.

Let us prove that there exists a nonnegative polynomial  $r(\sigma)$  satisfying the condition (2.2). Denote

$$\nu(r) \equiv \inf \{ |\xi - \eta| \mid \xi \in \mathbb{R}^n \wedge |\xi| = r \wedge \Lambda_0(\xi) \geq 0 \wedge b(\eta) = 0 \}.$$

From (1.9) it follows that  $\nu(r) > 0$  ( $r \geq 0$ ). It is clear that for every  $r_0 > 0$  there exists  $C(r_0) > 0$  such that

$$\forall r \in [0, r_0] \quad \nu(r) \geq C(r_0). \tag{2.3}$$

Due to the Tarski—Seidenberg theorem [8] and its corollaries [9, Appendix A] we obtain that

$$\nu(r) = +\infty \quad \text{as } r \longrightarrow +\infty \tag{2.4}$$

or

$$\nu(r) = Nr^{2q}(1 + o(1)) \quad \text{as } r \longrightarrow +\infty \tag{2.5}$$

where  $N > 0, q \in \mathbb{Q}$ . From (2.3)—(2.5) we have

$$\forall r \geq 0 \quad \nu(r) \geq 2Q(1 + r^2)^q \tag{2.6}$$

where  $Q > 0$  (if (2.4) holds then  $q$  is an arbitrary rational number). Hence for the set

$$\Omega = \left\{ \sigma \in \mathbb{R}^n \mid \exists \xi \in \mathbb{R}^n \left[ b(\xi) = 0 \wedge |\sigma - \xi| \leq Q(1 + |\sigma|^2)^q \right] \right\}$$

the estimate

$$\forall \sigma \in \Omega \quad \Lambda_0(\sigma) < 0$$

is true therefore for each nonnegative polynomial  $r(\sigma)$  the estimate

$$\forall \sigma \in \Omega \quad \Lambda_0(\sigma) - |b(\sigma)|^2 r(\sigma) < 0 \tag{2.7}$$

is also true.

Now let us estimate  $|b(\sigma)|^2$  on  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ . On using [10, Lemma 2], we get

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^n \quad |b(\sigma)|^2 \geq B(1 + |\sigma|^2)^\alpha (d[\sigma, N\{b\}])^\beta \tag{2.8}$$

where  $N\{b\} = \{\sigma \in \mathbb{R}^n \mid b(\sigma) = 0\}$ ,  $d[\sigma, N\{b\}]$  is the distance between  $\sigma$  and  $N\{b\}$ ,  $B > 0, \alpha \in \mathbb{Q}, \beta \in \mathbb{Q}$ , moreover,  $\beta > 0$  if  $N\{b\} \neq \emptyset$  and  $\beta = 0$  otherwise. Hence

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \quad |b(\sigma)|^2 \geq BQ^\beta (1 + |\sigma|^2)^{\alpha + \beta q}. \tag{2.9}$$

Obviously,

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^n \quad |\Lambda_0(\sigma)| \leq m \sqrt{\text{tr}(A^*(\sigma)A(\sigma))} \leq m(1 + \text{tr}(A^*(\sigma)A(\sigma))) \quad (2.10)$$

where  $A^*$  is the conjugate matrix for  $A$ . Denote

$$r(\sigma) = (1 + m)(1 + \text{tr}(A^*(\sigma)A(\sigma))) B^{-1} Q^{-\beta} (1 + |\sigma|^2)^l$$

where  $l \in \mathbb{N}_0$  and  $l + \alpha + \beta q \geq 0$ . With regard to (2.9), (2.10) that gives

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \quad \Lambda_0(\sigma) - |b(\sigma)|^2 r(\sigma) < 0.$$

Taking into account (2.7), we have from here that (2.2) holds. The lemma is proved.

**Lemma 2.2.** Assume that  $A(\sigma)$ ,  $b(\sigma)$ ,  $P(\sigma)$  satisfy the condition (2.1). Then there exist  $L > 0$  and  $l \in \mathbb{Q}$  such that

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^n \quad \Lambda_P(\sigma) < -L (1 + |\sigma|^2)^{l/2}. \quad (2.11)$$

*Proof.* On using the Tarski—Seidenberg theorem and its corollaries [9, Appendix A] we have

$$\forall r \geq 0 \quad \mu(r) \leq -L (1 + r^2)^{l/2} \quad (2.12)$$

for  $\mu(r) \equiv \sup \{ \Lambda_P(\sigma) \mid \sigma \in \mathbb{R}^n \wedge |\sigma| = r \}$  where  $L > 0$ ,  $l \in \mathbb{Q}$  (for obtaining this estimate we use the same reasonings as for obtaining the estimate (2.6) in the proof of the Lemma 2.1). Therefore (2.11) is true as was to be proved.

### 3. Conditions for stabilizability

**Statement 3.1.** If the system (1.2) is stabilizable in the class of functions with polynomial growth  $\gamma \in \mathbb{N}_0$  then (1.9) holds.

*Proof.* Assume that the system (1.2) is stabilizable in the class of functions with polynomial growth  $\gamma \in \mathbb{N}_0$ , but the condition (1.9) does not hold. Let  $\sigma \in \mathbb{R}^n$  be a point such that  $b(\sigma_0) = 0$  and  $\Lambda_0(\sigma_0) \geq 0$ . Let  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  be an eigenvalue of the matrix  $A(\sigma_0)$  such that  $\Lambda_0(\sigma_0) = \Re \lambda_0$  and  $v_0$ ,  $|v_0| = 1$ , be its eigenvector corresponding to this eigenvalue. Assume that  $P(\sigma)$  is a stabilizing matrix for the system (1.2). Consider this system with the control  $u = P(D_x)w$ :

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = (A(D_x) + b(D_x)P(D_x))w(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \quad (3.1)$$

under the following initial condition

$$w(x, 0) = v_0 \exp\{i\langle x, \sigma_0 \rangle\} \quad (3.2)$$

where  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  is the scalar product in  $\mathbb{R}^n$  corresponding to the Euclidean norm. It is clear that

$$w(x, t) \equiv \exp \{tA(\sigma_0)\} v_0 \exp \{i \langle x, \sigma_0 \rangle\} \equiv \exp \{t\lambda_0 + i \langle x, \sigma_0 \rangle\} v_0 \quad (3.3)$$

is a solution of the Cauchy problem (3.1), (3.2). Since  $|w(x, t)| \equiv \exp \{t\Re \lambda_0\} \equiv \exp \{t\Lambda_0(\sigma_0)\}$  then  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|w(\cdot, t)\|_\gamma^0 > 0$ , i.e., condition (1.6) is not satisfied. The obtained contradiction proves the statement.

**Statement 3.2.** Assume that (1.9) holds for the system (1.2). Then there exists such a polynomial matrix  $P(\sigma)$  ( $m \times m$ ) that for any  $\gamma \in \mathbb{N}_0$  and any  $r \in \mathbb{N}_0$  there exist  $q \in \mathbb{N}_0$  and a continuous function  $\nu(t)$  on  $[0, +\infty)$ ,  $\nu(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow +\infty$ , such that for each solution  $w$  of the system (1.2) with the control (1.3) under the initial condition (1.4) the following two assertions are true:

$$\forall t \geq 0 \quad w(\cdot, t) \in C_\gamma^r, \quad (3.4)$$

$$\|w(\cdot, t)\|_\gamma^r \leq \nu(t) \|w(\cdot, 0)\|_\gamma^q. \quad (3.5)$$

*Proof.* Due to Lemmas 2.1, 2.2 we have that there exists a polynomial matrix  $P(\sigma)$  ( $m \times m$ ) such that for  $\Lambda_P(\sigma)$  the estimate (2.11) is true for some  $L > 0$  and  $l \in \mathbb{Q}$ .

With regard to [7, Chapter 1, §6] we have

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^n \quad \|\exp \{t[A(\sigma) + b(\sigma)P(\sigma)]\}\| \leq K(1 + |\sigma|)^{(m-1)p} \exp \{t\Lambda_P(\sigma)\}$$

where  $K > 0$ ,  $p$  is the maximum of degrees of elements of the matrix  $A(\sigma) + b(\sigma)P(\sigma)$ . Here and further for a matrix  $G$  we denote by  $\|G\|$  the norm of the corresponding linear operator in  $\mathbb{C}^m$ . Applying (2.11), from here we obtain

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \mathbb{R}^n \quad & \|D_\sigma^\alpha \exp \{t[A(\sigma) + b(\sigma)P(\sigma)]\}\| \\ & \leq K_\alpha (1 + |\sigma|)^{(|\alpha| + m - 1)p - |\alpha|} \exp \{-tL(1 + |\sigma|)^l\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

where  $K_\alpha > 0$ .

Let  $S$  be the Schwartz space and let  $S'$  be the dual space [11]. Let  $\gamma \in \mathbb{N}_0$  and  $r \in \mathbb{N}_0$  be fixed. Assume that  $q \geq r + (n + \gamma + m)p + \gamma$ ,  $w^0 \in C_\gamma^q$ , and for the system (3.1) consider the Cauchy problem with the initial condition

$$w(x, 0) = w^0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.7)$$

Applying the Fourier transform (with respect to  $x$ ) to the problem (3.1), (3.7) in  $S'$ , we obtain the Cauchy problem in  $S'$  for the system (1.7) under the initial condition

$$v(\sigma, 0) = v^0(\sigma) \quad (3.8)$$

where  $v(\cdot, t) = \mathcal{F}w(\cdot, t)$ ,  $v^0 = \mathcal{F}w^0$ . Here and further  $\mathcal{F}$  is the Fourier transform operator. With regard to (3.6) we obtain that

$$v(\cdot, t) = \exp \{t[A + bP]\} v^0 \quad (S') \quad (3.9)$$

is a solution of (1.7), (3.8) in  $S'$ . Hence

$$w(\cdot, t) = \mathcal{F}^{-1}v(\cdot, t) \quad (S') \tag{3.10}$$

is a solution of (3.1), (3.7). This solution is unique in  $S'$  [11] therefore in  $C_\gamma^r$ .

It remains to prove that (3.4) and (3.5) are true. Further throughout the proof we assume that  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$ . Let  $e(x)$  be an infinite differentiable function on  $\mathbb{R}^n$ , let  $\text{supp } e \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ , and let  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e(x - k) \equiv 1$ . Denote  $w_k^0(x) \equiv e(x)w^0(x + k)$ ,  $v_k^0 = \mathcal{F}w^0$ . Then  $v_k(\sigma, t) \equiv \exp \{t[A(\sigma) + b(\sigma)P(\sigma)]\} v_k^0(\sigma)$  is a solution of (1.7), (3.8) with  $v^0 = v_k^0$  therefore

$$w_k(x, t) \equiv (\mathcal{F}v_k(\cdot, t))(x)$$

is a solution of (3.1), (3.7) with  $w^0 = w_k^0$ . Here  $k \in \mathbb{Z}^n$ .

Obviously,  $\|w_k^0\|_\gamma^q \leq M \|w^0\|_\gamma^q (1 + |k|)^\gamma$  where  $M > 0$  does not depend on  $k \in \mathbb{Z}^n$ . Then we have

$$\left| \sigma^\lambda D_\sigma^\alpha \left( \sigma^\beta v_k^0(\sigma) \right) \right| \leq C \|w^0\|_\gamma^q (1 + |k|)^\gamma$$

where  $C > 0$ ,  $|\beta| + |\lambda| \leq q$ ,  $|\alpha| = n + \gamma + 1$ . With regard to (3.6) that gives

$$\begin{aligned} & \left| D_\sigma^\alpha \left( \sigma^\beta v_k(\sigma, t) \right) \right| \\ & \leq C' \|w^0\|_\gamma^q (1 + |\sigma|)^{(|\alpha| + m - 1)p - |\alpha| - |\lambda|} \exp \left\{ -tL(1 + |\sigma|)^l \right\} (1 + |k|)^\gamma \end{aligned}$$

where  $C' > 0$ ,  $|\lambda| = (|\alpha| + m - 1)p - |\alpha| + n + 1$ ,  $|\beta| \leq r$ . Applying the inverse Fourier transform with respect to  $\sigma$ , we get

$$\left| D_x^\beta w_k(x, t) \right| \leq C^* \nu(t) \|w^0\|_\gamma^q (1 + |x|)^{-(n + \gamma + 1)} (1 + |k|)^\gamma$$

where  $C^* > 0$ ,  $\nu(t) = (1 + t)^{1/l}$  if  $l < 0$  and  $\nu(t) = \exp\{-tL\}$  otherwise. Since  $(1 + |k|) \leq (1 + |x + k|)(1 + |x|)$  that leads to

$$\left| D_x^\beta w_k(x, t) \right| \leq C^* \nu(t) \|w^0\|_\gamma^q (1 + |x + k|)^\gamma (1 + |x|)^{-n - 1}.$$

Hence

$$w(x, t) \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} w_k(x - k, t)$$

and the assertions (3.4), (3.5) are true. The statement is proved.

Statements 3.1 and 3.2 yield Theorem 1.1 and Corollary 1.1.

**Remark 3.1.** Note that if  $m$  is large enough then it is rather hard to calculate  $\Lambda_0(\sigma)$  for the system (1.2) therefore the finding of a stabilizing matrix  $P(\sigma)$  runs into great difficulties. But if the condition (1.10) holds then we can use the relation

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^n \quad m(1 + \text{tr}(A^*(\sigma)A(\sigma))) - |b(\sigma)|^2 r(\sigma) < 0 \tag{2.2'}$$

instead of (2.2) (because of (2.10)) to determine a stabilizing matrix  $P(\sigma)$  by the method of Lemma 2.1.

#### 4. Analysis of the conditions for stabilizability

From the proof of Statements 3.1 and 3.2 we see that the system (1.7) (that is a system of linear ordinary differential equations with polynomial with respect to a parameter  $\sigma \in \mathbb{R}^n$  coefficients) plays important role when we study stabilizability of the system (1.2).

The system (1.7) is said to be *polynomial stabilizable* if there exists a polynomial matrix  $P(\sigma)$  ( $m \times m$ ) such that for all  $\sigma \in \mathbb{R}^n$  every solution of this system with the feedback control  $u = Pv$  tends to 0 as  $t \rightarrow +\infty$ .

Statements 4.1 and 4.2 (see below) show that the stabilizability property of the system (1.2) and the polynomial stabilizability property of the system (1.7) are equivalent.

Reasoning as in the proof of Statement 3.1, we obtain the following

**Statement 4.1.** *Let  $P(\sigma)$  be a stabilizing matrix for the system (1.2). Then  $\Lambda_P(\sigma)$  satisfies the condition (2.1).*

**Statement 4.2.** *The system (1.2) is stabilizable in the class of functions with polynomial growth  $\gamma \in \mathbb{N}_0$  iff the system (1.7) is polynomial stabilizable.*

*Proof.* Let the system (1.2) be stabilizable in the class of functions with polynomial growth  $\gamma \in \mathbb{N}_0$ . Due to Statement 4.1 we obtain that there exists a matrix  $P(\sigma)$  satisfying the condition (2.1). Hence (1.8) holds and every solution of the system (1.7) tends to 0 as  $t \rightarrow +\infty$  for all  $\sigma \in \mathbb{R}^n$ .

Now let all the solutions of the system (1.7) tend to 0 as  $t \rightarrow +\infty$  for all  $\sigma \in \mathbb{R}^n$ . Therefore (1.8) is true. Hence (1.9) holds and according to Statement 3.2 the system (1.2) is stabilizable in the class of functions with polynomial growth  $\gamma \in \mathbb{N}_0$ . The statement is proved.

Statements 3.1 and 3.2 demonstrate that if the system (1.2) is stabilizable in the class of functions with polynomial growth  $\gamma \in \mathbb{N}_0$  (see Definition 1.1) then there exists such a polynomial matrix  $P(\sigma)$  ( $m \times m$ ) that the following assertion holds:

(ST) *For any  $r \in \mathbb{N}_0$  there exist  $q \in \mathbb{N}_0$  and a continuous function  $\nu(t)$  on  $[0, +\infty)$ ,  $\nu(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow +\infty$ , such that for each solution  $w$  of this system with the control (1.3) under the initial condition (1.4) the assertions (3.4) and (3.5) are true.*

Naturally, if the system (1.2) is stabilizable then the following question arises: *for which stabilizing matrix  $P(\sigma)$  the assertion (ST) holds?* Statement 4.3 answers on this question.

**Statement 4.3.** *Let  $P(\sigma)$  be a stabilizing matrix for the system (1.2). Then for any  $\gamma \in \mathbb{N}_0$  the assertion (ST) is true.*

*Proof.* According to Statement 4.1 the estimate (2.1) holds. Due to the proof of Statement 3.2 we obtain the required assertions.

5. Examples

Now we illustrate the obtained criterion for stabilizability (Theorem 1.1) by examples.

**Example 5.1.** Consider the system

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} = w_2(x, t) + b(D_x)u_1(x, t) \\ \frac{\partial w_2(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w_1(x, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_2(x, t)}{\partial x_2^2} + b(D_x)u_2(x, t) \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^2, t \geq 0,$$

where  $b(\sigma)$  is an arbitrary polynomial. Obviously,

$$A(\sigma) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma_1^2 - \sigma_2^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_0(\sigma) \equiv 0.$$

According to Theorem 1.1 this system is stabilizable iff  $b(\sigma)$  satisfies (1.10). Assume that (1.10) holds. Then  $r(\sigma) \equiv 1$  satisfies (2.1). Therefore

$$u(x, t) \equiv \overline{b(D_x)}w(x, t)$$

is a stabilizing control for this system.

**Example 5.2.** Consider the system

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^4 w_1(x, t)}{\partial x_1 \partial^3 x_2} - \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x_1 \partial x_2} + u_1(x, t) \\ \frac{\partial w_2(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w_1(x, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_2(x, t)}{\partial x_2^2} - w_2(x, t) - \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x_1 \partial x_2} + u_2(x, t) \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^2, t \geq 0. \quad (5.1)$$

It is easy to see that

$$A(\sigma) \equiv \begin{pmatrix} \sigma_1 \sigma_2^3 & 0 \\ -\sigma_1^2 - \sigma_2^2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b(\sigma) \equiv \sigma_1 \sigma_2 + 1, \quad \Lambda_0(\sigma) \equiv \begin{cases} -1 & \text{if } \sigma_1 \sigma_2^3 \leq -1 \\ \sigma_1 \sigma_2^3 & \text{if } \sigma_1 \sigma_2^3 \geq -1 \end{cases}.$$

We have

$$\Lambda_0(\sigma) \equiv \begin{cases} -1/\sigma_1^2 & \text{if } |\sigma_2| \geq 1 \\ -1 & \text{if } |\sigma_2| \leq 1 \end{cases} \quad \text{on } N\{b\}$$

therefore (1.9) holds. Applying Theorem 1.1 we conclude that (5.1) is stabilizable in the class of functions with polynomial growth  $\gamma \in \mathbb{N}_0$ .

Now we construct a stabilizing control for this system by the method described in Lemma 2.1. We have

$$\forall \sigma \in N\{b\} \quad \Lambda_0(\sigma) \leq -\left(1 + |\sigma|^2\right)^{-1}$$

therefore

$$\forall \sigma \in \Omega \quad \Lambda_0(\sigma) \leq -\frac{1}{2} (1 + |\sigma|^2)^{-1} \quad (5.2)$$

where  $\Omega = \left\{ \sigma \in \mathbb{R}^n \mid d[\sigma, N\{b\}] \leq \frac{1}{2} (1 + |\sigma|^2)^{-1} \right\}$ .

Let us obtain an estimate of the form (2.8) for  $b(\sigma) \equiv \sigma_1 \sigma_2 + 1$ . At first, assume that  $|\sigma_2| \geq |\sigma_1|$  and  $|\sigma| \geq 1/4$ . Then

$$\left| \sigma_1 + \frac{1}{\sigma_2} \right| \geq d[\sigma, N\{b\}].$$

Hence

$$|\sigma_1 \sigma_2 + 1|^2 \geq |\sigma_2|^2 \left| \sigma_1 + \frac{1}{\sigma_2} \right|^2 \geq |\sigma_2|^2 (d[\sigma, N\{b\}])^2.$$

Since

$$|\sigma_2| \geq \frac{1}{2} (|\sigma_1| + |\sigma_2|) \geq \frac{1}{2} |\sigma| \geq \frac{1}{10} (1 + |\sigma|^2)^{1/2}$$

it follows that

$$|\sigma_1 \sigma_2 + 1|^2 \geq \frac{1}{100} (1 + |\sigma|^2) (d[\sigma, N\{b\}])^2. \quad (5.3)$$

Obviously, if  $|\sigma_2| \leq |\sigma_1|$  and  $|\sigma| \geq 1/4$  the estimate (5.3) is also true. If  $|\sigma| \leq 1/4$  then  $d[\sigma, N\{b\}] \leq 2$  therefore

$$\frac{1}{100} (1 + |\sigma|^2) (d[\sigma, N\{b\}])^2 \leq \frac{2}{25}$$

and

$$|\sigma_1 \sigma_2 + 1| \geq 1 - |\sigma_1 \sigma_2| \geq \frac{15}{16}.$$

All this implies that (5.3) is true for all  $\sigma \in \mathbb{R}^2$ .

With regard to (5.2) that gives

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega \quad |\sigma_1 \sigma_2 + 1|^2 &\geq \frac{1}{100} (1 + |\sigma|^2) (d[\sigma, N\{b\}])^2 \\ &\geq \frac{1}{400} (1 + |\sigma|^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

On the other hand,

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^2 \quad |\Lambda_0(\sigma)| \leq (1 + |\sigma|^2)^2. \quad (5.5)$$

Denoting

$$r(\sigma) \equiv 800 (1 + |\sigma|^2)^3,$$

we obtain from (5.4), (5.5) that

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega \quad \Lambda_0(\sigma) - |b(\sigma)|^2 r(\sigma) \leq - (1 + |\sigma|^2)^2.$$

Taking into account (5.2), we conclude

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^2 \quad \Lambda_0(\sigma) - |b(\sigma)|^2 r(\sigma) < -\frac{1}{2} (1 + |\sigma|^2)^{-1}. \quad (5.6)$$

With regard to the proof of Statement 3.2 we obtain that

$$u(x, t) \equiv 800 \left( 1 - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)^3 w(x, t) \quad (5.7)$$

is a stabilizing control for (5.1) and for any  $\gamma \in \mathbb{N}_0$  and any  $r \in \mathbb{N}_0$  each solution of this system with the control (5.7) under the initial condition (1.4) satisfies the following estimate

$$\forall t \geq 0 \quad \|w(\cdot, t)\|_\gamma^r \leq C_{r,\gamma} (1+t)^{-1/2} \|w(\cdot, 0)\|_\gamma^q$$

where  $C_{r,\gamma} > 0$ ,  $q \geq r + 5\gamma + 16$ .

#### REFERENCES

1. Коробов В.И., Скляр Г.М. К вопросу о сильной стабилизируемости сжимающихся систем в гильбертовых пространствах. // Дифференц. уравнения, -1984.-20.-№ 11.-С. 1862-1869.
2. Curtain R.F., Pritchard A.J. "Robust stabilization of infinite-dimensional systems with respect to coprime factor perturbations". // Differential equations, dynamical systems, and control science. A Festschrift in Honor of Lawrence Markus. New York, NY: Marcel Dekker. Lect. Notes Pure Appl. Math., -1994.-152.-p. 437-456.
3. Levan N. The left shift semigroup approach to stability of distributed systems. // J. Math. Anal. Appl., -1990.-152.-No. 2.-P. 354-367.
4. Boyadzhiev K.N., Levan N. Strong stability of Hilbert space contraction semigroups. // Studia. Sci. Math. Hungar., -1995.-30.-No. 3-4.-P. 165-182.
5. Ammar Khodja F., Benabdallah A. Stabilisation de l'équation des ondes par un contrôleur dynamique. // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math., -1995.-321.-No. 2.-P. 195-198.
6. Петровский И.Г. О проблеме Cauchy для системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными в области неаналитических функций. // Бюл. МГУ. Секц. А, -1938.-1.-№ 7.-С. 1-72.
7. Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. -М.: Физматгиз, -1958.

8. Seidenberg A. A new decision method for elementary algebra.// Ann. Math.,-1954.-Ser. 2.-60.-No. 2.-P. 365-374.
9. Hörmander L. The analysis of linear differential operators. 2: Differential operators with constant coefficients.-Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo: Springer-Verlag,-1983.
10. Hörmander L. On the division of distributions by polynomials.// Ark. Mat.,-1958.-Bd. 3.-H. 6.-S. 555-568.
11. Schwartz L. Les équations d'évolution liées au produit de composition.// Ann. Inst. Fourier. Grenoble,-1950.-2.-P. 19-49.

Since

$$\|w(t)\|_{L^2} \leq C_{r_n} (1 + t)^{-1/2} \|w(0)\|_{L^2}$$

where  $C_{r_n} < 0, \forall \sigma_2 > 0, \forall \sigma_1 \geq \frac{1}{2}(\sigma_2 + 1)$

it follows that

$$\|w(t)\|_{L^2} \leq \frac{1}{2} (\sigma_2 + 1) \|w(0)\|_{L^2} \quad (5.5)$$

REFERENCES

1. Kobogor B.I., Kirap T.M. K voprosy o klyanone stacionarnykh i differentsialnykh uravneniyakh. // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 1984, No. 1, s. 1-10.
2. Curtain R.F., Pritchard A.J. "Robust stabilization of infinite-dimensional systems with respect to coprime factor perturbations." // Differential equations, dynamical systems, and control science. A Festschrift in Honor of Lawrence Markus. New York: Wiley-Interscience, 1983, p. 437-456. Math., 1984, 182-p. 437-456.
3. Levan N. The left shift semigroup approach to stability of distributed systems. // J. Math. Anal. Appl. 1980, 78, No. 2, p. 334-367.
4. Boyadzhiev K.N., Levan N. Strong stability of Hilbert space contraction semigroups. // Studia Sci. Math. Hungar., 1995, 30, No. 3-4, p. 163-182.
5. Ammar Khodja F., Benabdallah A. Stabilisation de l'équation des ordres par un contrôleur dynamique. // C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 1995, 321, No. 2, p. 193-198.
6. Petrovskiy N.T. O probleme Cauchy dlya sistem lineynykh differentsialnykh uravneniy s raznyimi poradyami v otnoshenii nezavisimyykh funktsiy. // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 1938, 1, No. 1, s. 1-75.
7. Lefschitz H.M., Illuzov E.E. Nekotorye voprosy teorii differentsialnykh uravneniy. M.: Fizmatgiz, 1988. 158 s.

Вісник Харківського національного університету  
 Серія "Математика, прикладна математика і механіка"  
 УДК 517.537.72 № 475, 2000, с. 195–203

## Topics in the theory of Dirichlet series

Håkan Hedenmalm

at Lund University, Sweden

We present the first fragments of a functional analytic treatment of classical Dirichlet series. The problems center around the Dirichlet series version of the Hardy space. We mention what the space of multipliers is, as well as the collection of bounded composition operators. Convergence issues are also mentioned. The focus in the paper is on open problems.

1991 Mathematics Subject Classification 30B50.

### 1. Introduction

The study of Dirichlet series of the form  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  has a long history beginning in the nineteenth century, and the interest was due mainly to the central role that such series play in analytic number theory. The general theory of Dirichlet series was developed by Hadamard, Landau, Hardy, Riesz, Schnee, and Bohr, to name a few. However, the main results were obtained before the central ideas of Functional Analysis became part of the toolbox of every analyst, and it would seem a good idea to insert this modern way of thinking into the study of Dirichlet series. Some effort has already been spent in this direction; we mention the papers by Helson [10, 11] and Kahane [12, 13]. However, the field did not seem to catch on. It is hoped that this paper can act as a catalyst by pointing at a number of natural open problems, as well as some recent advances. Fairly recently, in [7], Hedenmalm, Lindqvist, and Seip considered a natural Hilbert space  $\mathcal{H}^2$  of Dirichlet series and began a systematic study thereof. The elements of  $\mathcal{H}^2$  are analytic functions on the half-plane

$$\mathbb{C}_{\frac{1}{2}} = \left\{ s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \frac{1}{2} \right\}$$

of the form

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s} \quad (1.1)$$

where the coefficients  $a_1, a_2, a_3, \dots$  are complex numbers subject to the norm boundedness condition

$$\|f\|_{\mathcal{H}^2} = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

In a natural sense, this is the analogue of the Hardy space  $H^2$  for Dirichlet series. In [7], the pointwise multipliers of  $\mathcal{H}$  were characterized, and the result was applied to a problem of Beurling concerning 2-periodic dilation bases in  $L^2([0, 1])$ . The reader is referred to [8] for some historical comments on the topic. We need to introduce the right half plane

$$\mathbb{C}_+ = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 0\},$$

and the space  $\mathcal{H}^\infty$  of bounded analytic functions on  $\mathbb{C}_+$  which are given by a convergent Dirichlet series of the form (1.1) in some possibly remote half-plane  $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ . By a theorem of Schnee [17], which was later improved by Bohr [1], the Dirichlet series for a function in  $\mathcal{H}^\infty$  actually converges on  $\mathbb{C}_+$ .

## 2. Multipliers

We formulate the main result of [7]. We say that an analytic function on the half-plane  $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$  is a *multiplier* on  $\mathcal{H}^2$  if  $\varphi f \in \mathcal{H}^2$  whenever  $f \in \mathcal{H}^2$ .

**Theorem 2.1.** *The collection of multipliers on  $\mathcal{H}^2$  equals the space  $\mathcal{H}^\infty$ .*

The above theorem is analogous to the following well-known result for Hardy spaces: the (pointwise) multipliers of  $H^2$  are the functions in  $H^\infty$ . A noteworthy difference, however, is that the multipliers in the Dirichlet series case are defined as bounded and analytic on a bigger half-plane than the functions in the space. It should be mentioned that the proof of the above theorem in [7] is based on modelling  $\mathcal{H}^2$  as the Hardy space on the infinite-dimensional polydisk  $\mathbb{D}^\infty$ , an idea which goes back to a 1913 paper of Bohr.

## 3. Convergence issues

The convergence and analyticity of  $f \in \mathcal{H}^2$  given by the series (1.1) in the half-plane  $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$  is a simple consequence of the Cauchy-Schwarz inequality. A deeper fact is that the boundary values of  $f$  on the 'critical' line  $\partial\mathbb{C}_{\frac{1}{2}} = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\}$  are locally  $L^2$ -functions (see [15, formula (29), p. 140] or [7, Theorem 4.11]). It is well-known that functions in  $\mathcal{H}^2$  need not have any analytic continuations beyond the half-plane  $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ , and so the Dirichlet series need not converge in any strictly larger open half-plane. The question, then, is what happens precisely on the boundary  $\partial\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ . Here, we can compare with Carleson's theorem for Fourier series: given  $f \in L^2$  on the unit circle, the corresponding Fourier series converges almost everywhere [2]. Recently, Hedenmalm and Saksman [9] established the validity of the counterpart for Dirichlet series of Carleson's convergence theorem ( $\mathbb{R}$  is the set of all real numbers).

**Theorem 3.1.** *Let  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty$ . Then the series*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-\frac{1}{2}+it}$$

*converges for almost every  $t \in \mathbb{R}$ .*

The proof uses an equivalent dual formulation of the strong  $L^2$  maximal function estimate used to prove Carleson's theorem, in the form of a Strong Hilbert inequality.

**Problem 1.** *Suppose the function*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$$

*belongs to  $\mathcal{H}^\infty$ , so that the series converges on  $\mathbb{C}_+$ . Does the series then also converge almost everywhere on the imaginary axis?*

We mention another type of convergence theorem. Given a function  $f$  of the form (1.1), we form the functions

$$f_\chi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n) n^{-s}, \tag{3.1}$$

where  $\chi(n)$  is a *character*, which means that  $\chi(1) = 1$ ,  $\chi(n) \in \mathbb{T}$  for all  $n$ , and  $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$  for all  $m$  and  $n$ . The functions  $f_\chi$  are known as the *vertical limit functions* for  $f$ . The terminology is explained by the fact that  $f_\chi(s)$  is obtained from  $f$  as a limit of a sequence of vertical translates  $f(s-it)$ , with  $t \in \mathbb{R}$ . Each character is determined uniquely by its values on the set of primes  $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ , and the values at different primes may be chosen independently of each other. The set of all characters is denoted by  $\Xi$ , and we realize that it can be equated with the infinite-dimensional polycircle  $\mathbb{T}^\infty$  by identifying each dimension with a prime number (see [7] for details). The polycircle  $\mathbb{T}^\infty$  has a natural product probability measure defined on it, denoted  $d\varpi$ , the product of the normalized arc length measure  $d\sigma$  in each dimension. The set of characters  $\Xi$  constitutes the dual group of the multiplicative group of positive rationals  $\mathbb{Q}_+$ , if the latter is given the discrete topology. The Haar probability measure on the compact group  $\Xi$  coincides with  $d\varpi$ . A natural question arises: given  $f \in \mathcal{H}$ , what is the almost sure convergence behavior of the series (3.1) for  $f_\chi(s)$ , where  $s$  is a point in the complex plane, and  $\chi$  is a character? It is mentioned in [7] that for almost all  $\chi$ ,  $f_\chi(s)$  extends to a holomorphic function on the right half plane  $\text{Re } s > 0$ , and that this is best possible. The behavior of most of the vertical limit functions is thus in sharp contrast with that of individual functions! As a matter of fact, in [11] (see also [7], Theorem 4.4), Helson shows that for almost all  $\chi$ , the Dirichlet series (3.1) actually converges in the half-plane  $\text{Re } s > 0$ . By Theorem 4.1 of [7], the function  $f_\chi(it)$  makes sense as a locally  $L^2$  summable function on the real line, for almost all  $\chi$ . This makes us suspect that we have convergence in (3.1) for almost all  $s$  on the imaginary line  $\text{Re } s = 0$  and almost all  $\chi$ . In [9], the following theorem is obtained.

**Theorem 3.2.** *Let  $f \in \mathcal{H}$  be of the form (1.1), and let  $f_\chi \in \mathcal{H}$  be defined by (3.1). Then the series*

$$f_\chi(it) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n) n^{-it}$$

converges for almost all characters  $\chi$  and almost all reals  $t$ .

It is possible to use the above theorem to derive estimates of the almost sure growth behavior of partial sums of random characters. More precisely, we have, almost surely,

$$\sum_{n=1}^N \chi(n) = O\left(\sqrt{N \log N} (\log \log N)^{1/2+\varepsilon}\right), \quad \text{as } N \rightarrow +\infty.$$

**Problem 2.** Find the best possible growth bound for the almost sure behavior of the above partial sums.

This problem has an unmistakable Erdős-type flavor, in its combination of probability and number theory. And sure enough, in [3, pp. 251–252], Erdős states as a problem to determine the almost sure growth of the analogous sums, where the  $\chi(p)$  for prime indices  $p$  are replaced by independent random variables assuming the values  $\pm 1$  with equal probabilities  $\frac{1}{2}$ . Erdős looks to compare the growth of the partial sums with the classical law of the iterated logarithm (see [19]), where all the terms  $\chi(n)$  are independent and take values  $\pm 1$  with equal probabilities  $\frac{1}{2}$ . In Erdős' problem, as in ours, the characters have the multiplicative property  $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ , which reduces the randomness and introduces a number-theoretic ingredient. A complete solution should thus shed light on the multiplicative structure of the integers. Some progress on Erdős' problem was obtained by Halász [5].

#### 4. Composition operators

Let  $f \in \mathcal{H}^2$  be of the form

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}, \quad s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}.$$

Fix a  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Then

$$f_k(s) = f(ks) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-ks}, \quad s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}},$$

is another function in  $\mathcal{H}^2$ , of the same norm as  $f$ . In other words, if  $\Phi(s) = ks$ , and  $\mathcal{C}_\Phi$  is the associated composition operator,

$$\mathcal{C}_\Phi f(s) = f \circ \Phi(s), \quad s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}},$$

then  $\mathcal{C}_\Phi$  is an isometry on  $\mathcal{H}^2$ . One would tend to ask what other kinds of composition operators might be around. Recently, Gordon and Hedenmalm found a complete answer to this question. The space  $\mathcal{D}$  consists of somewhere convergent Dirichlet series.

**Theorem 4.1.** *An analytic function  $\Phi: \mathbb{C}_{\frac{1}{2}} \rightarrow \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$  generates a bounded composition operator  $C_\Phi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  if and only if:*

(a) *it is of the form*

$$\Phi(s) = ks + \phi(s),$$

where  $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  and  $\phi \in \mathcal{D}$ ; and

(b)  $\Phi$  has an analytic extension to  $\mathbb{C}_+$ , also denoted by  $\Phi$ , such that

(i)  $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$  if  $k > 0$ , and

(ii)  $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$  if  $k = 0$ .

This constitutes a genuine Dirichlet series analogue of Littlewood's subordination principle [14]. Indeed, in case  $\Phi$  fixes the point  $+\infty$ , which happens precisely when  $k > 0$ , the composition operator  $C_\Phi$  is a contraction on  $\mathcal{H}^2$ .

Note that we again have this dichotomy that sometimes the half-plane  $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$  is relevant, and sometimes we need the whole right half plane  $\mathbb{C}_+$  instead.

**Problem 3.** *Suppose  $\alpha = \Phi(+\infty) \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ . Find the optimal estimate of the norm  $\|C_\Phi\|$  in terms of  $\alpha$ . Note that it is clear that  $\zeta(2 \operatorname{Re} \alpha) \leq \|C_\Phi\|^2$ .*

**Problem 4.** *Characterize the compact composition operators on  $\mathcal{H}^2$ . Compare with Shapiro's characterization [18] of the compact composition operators on  $H^2$  in terms of the Nevanlinna counting function.*

### 5. Integral means

It is well-known that the norm on  $\mathcal{H}^2$  can be expressed in terms of integral means of the function itself, provided the function is "nice". Suppose

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s},$$

where the sum is finite, that is, all but finitely many of the  $a_n$ 's are 0. We might call such functions *Dirichlet polynomials*. Then

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(\sigma + it)|^2 dt \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}} \quad \text{as } T \rightarrow +\infty, \tag{5.1}$$

for each real  $\sigma$ . We can think of this as a Plancherel formula. However, it is not really useful for calculating the norm of functions in  $\mathcal{H}^2$ , as such functions need not even be defined along the imaginary axis where the integral mean should then be computed. In fact, functions in  $\mathcal{H}^2$  need only be defined in  $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ , which is quite far from the imaginary axis! We shall view (5.1) as a combination of two things:

- a Plancherel formula, and
- an ergodic theorem.

The “genuine” Plancherel formula involves the characters we met earlier:

$$\int_{\Xi} |f_{\chi}(\sigma)|^2 d\varpi(\chi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}},$$

where we recall the notation

$$f_{\chi}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \chi(n) n^{-s}$$

for the vertical limit function associated with the character  $\chi$ . The characters of the form

$$\chi_t(n) = n^{-it}, \quad t \in \mathbb{R},$$

constitute a dense “one-dimensional” subset of  $\Xi$ ; moreover, we can think of them as the result of a motion in  $\Xi$ . To make the latter idea precise, just think of the transformation  $T_t(\chi) = \chi_t \chi$  which moves the point  $\chi$  along the time flow parametrized by  $t$ . This flow is *ergodic*, because there are not subsets of  $\Xi$  of intermediate mass (that is, not equal to 0 or 1) which are preserved by it. The general ergodic theorem then says that the time average along the flow of a continuous function equals the space average, that is, the integral. And the limit

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(\sigma + it)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f_{\chi_t}(\sigma)|^2 dt$$

is exactly a time average, whereas

$$\int_{\Xi} |f_{\chi}(\sigma)|^2 d\varpi(\chi)$$

is the space average. Now, we see that (5.1) holds for more general Dirichlet series  $f$ ; what is needed is that  $f_{\chi}(\sigma)$  defines a continuous function of  $\chi \in \Xi$ . For instance, this is true for all  $\sigma$  with  $0 < \sigma < +\infty$  if  $f \in \mathcal{H}^{\infty}$ .

**Problem 5.** Suppose  $f \in \mathcal{H}^{\infty}$ , so that  $f$  has well-defined nontangential boundary values almost everywhere on the imaginary line. Is it true that

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(it)|^2 dt \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 \quad \text{as } T \rightarrow +\infty?$$

## 6. Hardy spaces for Dirichlet series

Suppose  $f$  is a Dirichlet polynomial (which means that the Dirichlet series is finite). Fix a  $p$ ,  $1 < p < +\infty$ . One can show that the limit

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(it)|^p dt$$

exists with ergodic methods like in the previous section; it equals the  $p$ -th power of the  $L^p(\Xi)$  norm of  $\chi \mapsto f_\chi(0)$ . As a consequence, we can use the above limit to define a norm on the Dirichlet polynomials, and then form the completion of the space with respect to it. The result is the space  $\mathcal{H}^p$ , the *Hardy space for Dirichlet series*. For each  $p$ , the elements of  $\mathcal{H}^p$  are Dirichlet series that define analytic functions on  $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ , and generally speaking, not on any other bigger domain.

**Problem 6.** Find another scale of spaces (perhaps of Orlicz type) which is able to resolve the jump from finite  $p$  when the functions are analytic on  $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ , to  $p = +\infty$ , when the functions are analytic on  $\mathbb{C}_+$ .

**Problem 7.** Study the properties of the spaces  $\mathcal{H}^p$  in more detail.

## 7. General Dirichlet series

The theorem of Schnee [17] (see also the book of Hardy and Riesz [6]) mentioned earlier says the following: if

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$$

converges in some (possibly remote) half-plane  $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ , and the function has an analytic continuation to the right half-plane  $\mathbb{C}_+$ , and satisfies the growth bound for each  $\varepsilon > 0$ ,

$$|f(s)| = O(|s|^\varepsilon), \quad \text{as } |s| \rightarrow +\infty,$$

in every half-plane  $\operatorname{Re} s > \delta$  with  $\delta > 0$ , then the Dirichlet series for  $f(s)$  converges on  $\mathbb{C}_+$ . Schnee's theorem also applies to more general Dirichlet series of the form

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

where  $\lambda_n \in \mathbb{R}$  for all  $n$ , and  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  as  $n \rightarrow +\infty$ ; the classical case corresponds to having  $\lambda_n = \log n$ . Schnee's theorem has certain regularity assumptions on the  $\lambda_n$ 's. So, for instance, it does not apply when this sequence of frequencies "clumps together" too much.

**Problem 8.** Is it possible to handle the case when we have "clumping together" of the frequencies by enforcing a stronger growth condition on the function?

**Problem 9.** To what extent are the results mentioned in the previous sections peculiar to  $\lambda_n = \log n$ ?

## REFERENCES

1. H. Bohr. Über die Gleichmässige Konvergenz Dirichletscher Reihen.// J. Reine Angew. Math.,-1913.-**143**.-p. 203-211.
2. L. Carleson. On convergence and growth of partial sums of Fourier series.// Acta Math.,-1966.-**116**-p. 135-157.
3. P. Erdős. Some unsolved problems.// Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.-1961.-**6**.-p. 221-254.
4. J. Gordon, H. Hedenmalm. The composition operators on the space of Dirichlet series with square summable coefficients.// Michigan Math. J.-1999.-**46**.-p. 313-329.
5. G. Halász. On random multiplicative functions, Hubert Delange colloquium (Orsay, 1982).-Publ. Math. Orsay, 83-4, Univ. Paris XI, Orsay,-1983.-p. 74-96.
6. G. H. Hardy, M. Riesz. The general theory of Dirichlet's series, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 18.-Stechert-Hafner, Inc., New York,-1964 (originally published in 1915).
7. H. Hedenmalm, P. Lindqvist, K. Seip. A Hilbert space of Dirichlet series and systems of dilated functions in  $L^2(0, 1)$ .// Duke Math. J.,-1997.-**86**.-p. 1-37.
8. H. Hedenmalm, P. Lindqvist, K. Seip. Addendum to "A Hilbert space of Dirichlet series and systems of dilated functions in  $L^2(0, 1)$ ".// Duke Math. J.,-1999.-**99**.-p. 175-178.
9. H. Hedenmalm, E. Saksman. Carleson's convergence theorem for Dirichlet series, preprint,-1999.
10. H. Helson. Foundations of the theory of Dirichlet series.// Acta Math.,-1967.-**118**.-p. 61-77.
11. H. Helson. Compact groups and Dirichlet series.// Ark. Mat.,-1969.-**8**.-p. 139-143.
12. J.-P. Kahane, S. Mandelbrojt. Sur l'équation fonctionnelle de Riemann et la formule sommatoire de Poisson.// Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.,-1958.-**75**.-No 3.-p. 57-80.
13. J.-P. Kahane. The last problem of Harald Bohr.// J. Austral. Math. Soc.,-1989.-**47**.-No. 1.-Ser. A.-p. 133-152.
14. J. E. Littlewood. On inequalities in the theory of functions.// Proc. London Math. Soc.,-1925.-**23**.-p. 481-519.

15. H. L. Montgomery. Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **84**; published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC.— American Mathematical Society, Providence, RI,—1994.
16. I. Niven, H. S. Zuckerman, H. L. Montgomery, *An introduction to the theory of numbers*, Fifth edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991.
17. W. Schnee. Zum Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen.// Math Ann.,—1909.—**66**.—p. 337–349.
18. J. H. Shapiro. The essential norm of a composition operator.// Ann. of Math.,—1987.—**125**.—No 2.—p. 375–404.
19. A. N. Shiryaev. Probability, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, **95**.— Springer-Verlag, New York,—1996.
20. A. Wintner. Random factorizations and Riemann's hypothesis.// Duke Math. J.,—1944.—**11**.—p. 267–275.

Про інтерполяційні послідовності деяких класів  
аналітичних функцій

І.Б. Шепарович

*Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка, Україна*

Вказано нові критерії існування розв'язку ітерполяційної задачі в класі цілих функцій із спеціальним обмеженням росту. Ми розглядаємо аналогічну задачу для функцій аналітичних у одиничному крузі.

1991 Mathematics Subject Classification 30E05.

Нехай  $\eta$  — зростаюча додатна на  $[0; +\infty)$  функція така, що  $\ln \eta(r) \in$  опуклою відносно  $\ln r$  на  $[1; +\infty)$  і  $\ln r = o(\eta(r))$  при  $r \rightarrow +\infty$ ,  $(\lambda_n)$  — послідовність різних комплексних чисел таких, що  $|\lambda_n| \nearrow \infty$ ;  $n_z(t)$  — кількість точок  $\lambda_n$ , які лежать в крузі  $\{\zeta : |\zeta - z| \leq t\}$ ;

$$N_z(r) = \int_0^r \frac{(n_z(t) - 1)^+}{t} dt, \quad (n_z(t) - 1)^+ = \max\{n_z(t) - 1; 0\};$$

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t) - n(0)}{t} dt + n(0) \ln r, \quad n(t) = n_0(t);$$

$$\Phi_{n,\delta}(z) = \prod_{|\lambda_i - \lambda_n| \leq \delta |\lambda_n|} (1 - z/\lambda_i), \quad \delta \in (0; 1).$$

Через  $c_1, c_2, \dots$  позначимо деякі додатні сталі, а через  $\tau_1, \tau_2, \dots$  — деякі сталі з проміжку  $(0, 1)$ .

Проблема опису інтерполяційних послідовностей різних підкласів аналітичних функцій досліджувалась в працях Б.Я. Левіна, А.Ф. Леонт'єва, О.С. Фірсакової, Л. Карлесона, К. Бернштейна і Б. Тейлора, К.Г. Малютіна, Г.П. Лапіна, А.В. Братищева, Ю.Ф. Коробейника, А.П. Грішина та багатьох інших (див. [1]). Зокрема, в [2] встановлено, що для того щоб інтерполяційна задача

$$f(\lambda_n) = b_n \tag{1}$$

мала розв'язок для кожної послідовності  $(b_n)$  комплексних чисел з властивістю

$$(\forall n) : |b_n| \leq \exp(c_3 \eta^{\tau_3}(c_3 |\lambda_n|)), \tag{2}$$

в класі цілих функцій  $f$  таких, що

$$(\forall z \in \mathbf{C}) : |f(z)| \leq \exp(c_1 \eta^{T_1}(c_1|z|)), \quad (3)$$

необхідно і досить, щоб

$$(\forall r \geq 0) N(r) \leq c_2 \eta^{T_2}(c_2 r) \quad (4)$$

і виконувалася одна з наступних умов:

- 1) для деякої цілої функції  $L$  з класу (3), що має прості нулі в точках  $\lambda_n$ ,  
 $(\forall n) : |\lambda_n L'(\lambda_n)| \geq \exp(-c_4 \eta^{T_4}(c_4 |\lambda_n|))$ ,
- 2)  $(\exists \delta \in (0, 1)) (\forall n) : |\lambda_n \Phi'_{n,\delta}(\lambda_n)| \geq \exp(-c_5 \eta^{T_5}(c_5 |\lambda_n|))$ .

Можна отримати й інші критерії існування розв'язку інтерполяційної задачі (1) і, зокрема, критерії в термінах, близьких до [3, 4].

**Теорема 1.** *Для того щоб для кожної послідовності  $(b_n)$  комплексних чисел з властивістю (2) існувала ціла функція  $f$ , що задовольняє умови (1) і (3), необхідно і досить, щоб виконувалася умова (4) і одна з наступних умов:*

- 3)  $(\exists \delta \in (0, 1)) (\forall n) : N_{\lambda_n}(\delta |\lambda_n|) \leq c_6 \eta^{T_6}(c_6 |\lambda_n|)$ ,
- 4)  $(\exists \delta_1 \in (0, 1)) (\forall z \in \mathbf{C}) : N_z(\delta_1 |z|) \leq c_7 \eta^{T_7}(c_7 |z|)$ ,
- 5)  $(\forall \delta' \in (0, 1)) (\forall n) : N_{\lambda_n}(\delta' |\lambda_n|) \leq c_8 \eta^{T_8}(c_8 |\lambda_n|)$ ,
- 6)  $(\forall \delta_1 \in (0, 1)) (\forall z \in \mathbf{C}) : N_z(\delta_1 |z|) \leq c_9 \eta^{T_9}(c_9 |z|)$ .

*Доведення.* Аналогічно як і в [3] з рівності

$$\sum_{\substack{i \neq n \\ |\lambda_i - \lambda_n| \leq \delta |\lambda_n|}} \ln \left| 1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} \right| = \int_0^{\delta |\lambda_n|} \ln \frac{x}{|\lambda_n|} d(n_{\lambda_n}(x) - 1) +$$

$$\sum_{\substack{i \neq n \\ |\lambda_i - \lambda_n| \leq \delta |\lambda_n|}} \ln \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_i|}$$

впливає рівносильність умов 2) і 3). Крім цього, з 3) впливає 5), бо при  $\delta' > \delta$

$$N_{\lambda_n}(\delta' |\lambda_n|) - N_{\lambda_n}(\delta |\lambda_n|) \leq c_{12} \eta^{T_2}(c_{12} |\lambda_n|).$$

Далі, щоб довести еквівалентність умов 3) і 4) досить показати, що з 3) впливає 4), оскільки імплікація  $4) \Rightarrow 3)$  є очевидною. Нехай  $\lambda_n$  — найближча

точка до  $z$ , що лежить в крузі  $\{\zeta : |\zeta - z| \leq t\}$ . Тоді  $\{\zeta : |\zeta - z| \leq t\} \subset \{\zeta : |\zeta - \lambda_n| \leq 2t\}$  і  $n_z(t) \leq n_{\lambda_n}(2t)$ . Тому при  $\delta_1 < 1/3$

$$N_z(\delta_1|z|) = \int_0^{\delta_1|z|} \frac{(n_z(t) - 1)^+}{t} dt \leq \int_0^{\frac{\delta_1}{1-\delta_1}|\lambda_n|} \frac{(n_{\lambda_n}(2t) - 1)^+}{t} dt =$$

$$N_{\lambda_n}(2\delta_1/(1-\delta_1)|\lambda_n|) \leq c_6\eta^{76}(c_6|\lambda_n|) \leq c_{11}\eta^{76}(c_{11}|z|),$$

імплікація 4)  $\Rightarrow$  6) доводиться аналогічно.

Такі ж результати можна отримати для функцій аналітичних в крузі  $D = \{z : |z| < 1\}$ . Нехай  $(\lambda_n)$  — послідовність різних комплексних чисел таких, що  $|\lambda_n| \nearrow 1$  і

$$G_{n,\delta}(z) = \prod_{|\lambda_i - \lambda_n| \leq \delta(1-|\lambda_n|)} \bar{\lambda}_i \frac{\lambda_i - z}{1 - \bar{\lambda}_i z}.$$

Справедливими є наступні твердження.

**Теорема 2.** Нехай

$$(\forall r \in (0, 1)) : N(r) \leq c_1\eta^{71}(c_1/(1-r)). \quad (5)$$

Тоді існує послідовність  $(p_n)$  — цілих невід'ємних чисел така, що функція

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{1 - |\lambda_n|^2}{1 - \bar{\lambda}_n z}, p_n\right) =$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1 - |\lambda_n|^2}{1 - \bar{\lambda}_n z}\right) \exp \sum_{\nu=1}^{p_n} \frac{1}{\nu} \left(\frac{1 - |\lambda_n|^2}{1 - \bar{\lambda}_n z}\right)^{\nu}$$

є аналітичною в крузі  $D = \{z : |z| < 1\}$  і задовольняє умову

$$(\forall z, |z| < 1) : |L(z)| \leq \exp(c_2\eta^{72}(c_2/(1-|z|))). \quad (6)$$

**Теорема 3.** Для того щоб для кожної послідовності  $(b_n)$  комплексних чисел з властивістю

$$(\forall n) : |b_n| \leq \exp(c_3\eta^{73}(c_3/(1-|\lambda_n|)))$$

існувала аналітична в одиничному крузі функція  $f$ , що задовольняє умови (1) і (6), необхідно і досить, щоб виконувалася умова (5) і одна з наступних умов:

а) для деякої функції  $L$  з класу (6), що має прості нулі в точках  $\lambda_n$ ,  
 $(\forall n) : |(1 - |\lambda_n|)L'(\lambda_n)| \geq \exp(-c_4\eta^{74}(c_4/(1 - |\lambda_n|))),$

б)  $(\exists \delta \in (0, 1)) (\forall n) : |(1 - |\lambda_n|)G'_{n,\delta}(\lambda_n)| \geq \exp(-c_5\eta^{75}(c_5/(1 - |\lambda_n|))),$

в)  $(\exists \delta \in (0, 1)) (\forall n) : N_{\lambda_n}(\delta(1 - |\lambda_n|)) \leq c_6\eta^{76}(c_6/(1 - |\lambda_n|)),$

$$z) (\forall \delta_1 \in (0, 1)) (\forall z \in \mathbf{C}) : N_z(\delta_1(1 - |z|)) \leq c_7 \eta^{\tau_7} (c_7 / (1 - |z|)),$$

Доведення цієї теореми проводиться аналогічно доведенню теореми 3 з [2] та теореми 1, зазначимо тільки, що функція  $f$  будується у вигляді

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n L(z)}{(z - \lambda_n) L'(\lambda_n)} \left( \frac{1 - |\lambda_n|^2}{1 - \bar{\lambda}_n z} \right)^{s_n},$$

де  $(s_n)$  — послідовність цілих невід'ємних чисел, вибір якої здійснюється як і в теоремі 2 з [2], а підбір послідовності  $(p_n)$  в теоремі 2 — як в теоремі 1 з [2].

Зауважимо, що у випадку  $\eta(t) = t^p$  із теореми 3 отримуємо критерій розв'язуваності інтерполяційної задачі (1) в класі аналітичних в одиничному крузі функцій скінченного порядку.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдберг А.А., Левин Б.Я., Островский И.В. Целые и мероморфные функции. Итоги науки и техн., Соврем. проблемы мат. Фундам. напр.—ВИНИТИ,—1991.—85.—С. 5–186.
2. Винницький Б.В., Шепарович І.Б. Про інтерполяційні послідовності деяких класів цілих функцій.// Матем. студії,—1999.—12,— № 1.—С. 76–84.
3. Братищев А.В. Один тип оценок снизу целых функций конечного порядка и некоторые приложения.// Изв. АН СССР, серия матем.,—1984.—48.—№ 3—С. 451–475.
4. Малютин К.Г. Об интерполяционной задаче в классе целых функций вполне регулярного роста.// Зап. научн. семин. ЛОМИ,—1984.—135.—С. 96–107.