

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В. Н. КАРАЗИНА

Серия «Проблемы теоретической
и математической физики»

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Научные труды

Выпуск 2

Харьков – 2017

УДК 53.01
ББК 22.3
П 78

**Серия «Проблемы теоретической и математической физики. Научные труды»
под общей редакцией академика А. Г. Загороднего, академика Н. Ф. Шульги**

Рецензенты:

академик НАН Украины **Локтев В. М.**;
член-корр. НАН Украины **Пашицкий Э. А.**

*Утверждено к печати решением Ученого совета
Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина
(протокол № 13 от 31.10.2016 г.)*

Проблемы теоретической физики. Научные труды. Выпуск 2 / В. А. Буц, А. Г. Загородний, А. В. Киричок, В. М. Конторович, В. М. Куклин, А. А. Рухадзе, В. П. Силян, А. В. Тур, В. В. Яновский ; под общей редакцией А. Г. Загороднего, Н. Ф. Шульги, ред. вып. В. М. Куклин. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2017. – Вып. 2. – 376 с. (Сер. «Проблемы теоретической и математической физики»; под общ. ред. А. Г. Загороднего, Н. Ф. Шульги).

ISBN 978-966-285-377-5

Представлены становление теоретических представлений о бесстолкновительной плазме. Показано, что обнаруженный В. Е. Захаровым механизм нелинейного поглощения ленгмювских колебаний в плазме имеет место и в случае параметрической неустойчивости интенсивных полей в холодной плазме, описываемых уравнениями В. П. Силяна. Рассмотрено применение кинетических уравнений слабой турбулентности, в частности, в астрофизических приложениях. Обсуждается описание регулярной и хаотической динамики частиц в очень сильных полях внешнего, в основном лазерного излучения в многоволновых режимах генерации и усиления. Рассматриваются особенности динамики частиц и объектов с дополнительными степенями свободы в различных приложениях.

Для ученых в области естествознания, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов физических факультетов.

**УДК 53.01
ББК 22.3**

ISBN 978-966-285-144-1 (вып. 1)

© Национальная академия наук Украины, 2014
© Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, 2014

ISBN 978-966-285-377-5 (вып. 2)

© Национальная академия наук Украины, 2017
© Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, 2017
© В. А. Буц, А. Г. Загородний, А. В. Киричок, В. М. Конторович, В. М. Куклин, А. А. Рухадзе, В. П. Силян, А. В. Тур, В. В. Яновский, 2017
© Дончик И. Н., макет обложки, 2017

О Г Л А В Л Е Н И Е

От редакторов научных трудов 7

ЧАСТЬ I. ПУТЬ СОЗДАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О ПЛАЗМЕ БЕЗ СТОЛКНОВЕНИЙ 9

А. А. Рухадзе, В. П. Силин

1. Введение 10

2. Становление теоретических представлений
о бесстолкновительной плазме..... 14

3. Кинетическое уравнение Больцмана
и интеграл столкновений Ландау 17

4. Кинетическое уравнение А. А. Власова
с самосогласованным полем 19

5. Завершение построения физической кинетики плазмы
без столкновений..... 23

Список литературы..... 24

ЧАСТЬ II. ОДНОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ЗАХАРОВА И СИЛИНА МОДУЛЯЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕНСИВНЫХ ЛЕНГМЮРОВСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ПЛАЗМЕ..... 27

А. Г. Загородний, А. В. Киричок, В. М. Куклин

1. Введение 29

1.1. Неизотермическая плазма 31

1.2. Холодная плазма 34

1.3. О сравнении моделей Захарова и Силина 36

2. Холодная плазма, одномерные уравнения Силина 37

2.1. Уравнения гидродинамической модели Силина в условиях
 $W = |E_0|^2 / 4\pi \gg n_0 T_e$ 45

2.2. Уравнения гибридной модели Силина в условиях
 $W = |E_0|^2 / 4\pi \gg n_0 T_e$ 45

3. Неизотермическая плазма, одномерные уравнения Захарова 46

3.1. Гидродинамическая модель Захарова (сверхзвуковой режим) в условиях $W = E_0 ^2 / 4\pi \ll n_0 T_e$	53
3.2. Гибридная модель Захарова в условиях $W = E_0 ^2 / 4\pi \ll n_0 T_e$	53
4. Линейная теория	54
5. Модуляционная неустойчивость ленгмюровской волны в холодной плазме	56
5.1. Гидродинамическая модель Силина	56
5.2. Гибридная модель Силина	58
5.3. Сравнение гидродинамической и гибридной моделей Силина	60
6. Модуляционная неустойчивость ленгмюровской волны в неизотермической плазме	60
6.1. Кинетическая (Власова–Пуассона) модель	61
6.2. Комбинированная модель Власова–Пуассона	61
6.3. Сравнение кинетических (Власова–Пуассона) моделей и гидродинамической модели Захарова	62
6.4. Сравнение гидродинамической и гибридной моделей Захарова	63
7. Сравнение гибридных моделей Захарова и Силина	65
7.1. Условия моделирования	65
7.2. Результаты моделирования	67
8. Заключение	73
Список литературы	75

ЧАСТЬ III. ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ С ПРИМЕНЕНИЯМИ К ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ И АСТРОФИЗИКЕ. СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД	81
В. М. Конторович	
1. Введение	82
2. Кинетические уравнения	82
3. Слабая турбулентность и распределения с потоками по спектру	87
4. Взаимосвязь равновесных и потоковых слаботурбулентных распределений	91
4.1. Распределения с потоком и температурой (на примере взаимодействия электронов и излучения)	93
4.2. Плазменный турбулентный реактор (ПТР) – пример турбулентной системы с потоком по спектру	95
4.3. Направление потоков по спектру и нормировка распределений	96
5. Кинетическое уравнение Смолуховского и слияния галактик	97
5.1. Вероятность слияния галактик	98
5.2. Функция масс	99
5.3. «Взрывная» эволюция галактик	100

5.4. Активность и слияния	102
6. Степенные спектры в природе	103
Приложение I. Преобразования симметрии кинетических уравнений	105
Приложение II. Развитое волнение	108
Приложение III. Эволюция далеких галактик. Кинетическое описание	113
Заключение. Даунсайзинг	117
Список литературы	117

**ЧАСТЬ IV. РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ
ТИПА ВОЛНА-ЧАСТИЦА**

В. А. Буц Введение	124
1. Регулярная динамика взаимодействия типа волна-частица	128
1.1. Динамика заряженных частиц в поле электромагнитных волн большой напряженности в отсутствие внешнего магнитного поля	128
1.2. Роль сил трения (в том числе радиационного трения) при лазерном ускорении заряженных частиц	145
1.3. Движение заряженных частиц в поле электромагнитной волны произвольной поляризации и в постоянном магнитном поле	151
1.4. Особенности движения частиц в условиях авторезонанса	160
1.5. Самосогласованная нелинейная теория МЦР. (Приближение изолированного нелинейного циклотронного резонанса	165
2. Хаотическая динамика частиц при взаимодействиях типа волна-частица	170
2.1. Динамика частиц в поле нескольких поперечных электромагнитных волн	171
2.2. Возникновение хаотической динамики частиц, движущихся в постоянном магнитном поле и в поле одной электромагнитной волны	180
2.3. Самосогласованная нелинейная теория МЦР.	184
2.4. Авторезонанс	188
2.5. Парадигмы динамического хаоса	194
Заключение	236
Список литературы	238

**ЧАСТЬ V. ЧАСТИЦЫ С ВНУТРЕННИМИ
СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ**

В. В. Яновский, А. В. Тур	
1. Введение	243
2. Структурно-сложная частица с внутренними степенями свободы	246

3. Кинематика структурно-сложной частицы с одной внутренней степенью свободы.....	248
4. Биллиардный формализм.....	251
5. Частица с двумя и более внутренними степенями свободы	255
6. Взаимодействие структурно-сложной частицы с барьером	260
7. Рассеяние структурно-сложных частиц.....	271
8. Столкновение наночастиц с барьером	294
9. Биллиардный формализм заряженной структурно-сложной частицы во внешних полях	304
10. Движение частицы с одной внутренней степенью свободы в постоянном электрическом поле.....	306
11. Обобщение принципа спрямления траекторий	311
12. Режимы движения структурно-сложной частицы с двумя степенями свободы	320
13. Излучение структурно-сложной частицы	327
14. Обобщение структурно-сложных частиц на трехмерный случай	332
15. Режимы движения	336
Список литературы	349

О Т Р Е Д А К Т О Р О В Н А У Ч Н Ы Х Т Р У Д О В

Предлагаемый читателю второй выпуск научных трудов представляет собой освещение основных результатов, полученных в последние годы учеными, сформировавшимися в период золотого века советской теоретической физики, и содержит значительный вклад украинской теоретической школы физики.

Обзорные работы, как правило, более продуманы, формируются в течение десятков лет, в наибольшей степени свободны от поспешных и неапробированных временем решений, являют собой весьма ценный для науки материал, на основе которого постепенно и основательно строится величественное здание науки. Можно надеяться, что представленные в данных сборниках научных трудов обзорные работы найдут свое место в этом процессе.

Во второй выпуск научных трудов включен ряд обзоров результатов научных исследований, полученных в последние годы в области теоретической физики в направлениях, которые на протяжении многих лет интенсивно развиваются в Украине и соседних странах и получили всемирную известность.

Сборник начинается с обзорной работы патриархов советской теоретической физики А. А. Рухадзе и В. П. Силина, где обсуждается становление современных представлений о бесстолкновительной плазме. Показано, как происходило осознание основных теоретических представлений физики бесстолкновительной плазмы, как пример модели среды, свойства которой в основном определяются коллективными явлениями в системе заряженных частиц.

В работе А. Г. Загороднего, А. В. Киричка и В. М. Куклина показано, что обнаруженный В. Е. Захаровым механизм нелинейного поглощения ленгмюровских колебаний в плазме оказывается применимым и для интенсивных полей в холодной плазме, описываемых

уравнениями В. П. Силина. Показано, что уравнения модели Захарова (описывающие процессы в неизотермической плазме, в условиях, когда плотность энергии поля меньше плотности тепловой энергии среды) могут быть получены из уравнений модели Силина (справедливых для описания параметрических неустойчивостей интенсивных колебаний в низкотемпературной плазме). Определена доля энергии, которая передается ионному компоненту, и в обоих случаях можно говорить о температуре ионов, причем в холодной плазме оказывается почти в два раза больше быстрых ионов, чем в плазме неизотермической.

Обзор В. М. Конторовича посвящен кинетическим уравнениям слабой турбулентности, включая точные методы получения неравновесных распределений. Особое место уделяется астрофизическим приложениям, в частности, процессу слияния галактик и формированию спектров масс в космосе.

Материалы работы В. А. Буца содержат описание регулярной и хаотической динамики частиц в очень сильных полях внешнего, в основном лазерного излучения, часто представляющего собой пакеты волн. Обсуждаются эффекты авторезонансов, перекрытия резонансов, вопросы чувствительности регулярных режимов взаимодействия частиц и волн к внешним воздействиям, появление областей хаотической динамики в многоволновых режимах генерации и усиления. Рассмотрены причины ослабления взаимодействия и срыва генерации, обусловленные ростом влияния хаотической динамики.

В обзоре В. В. Яновского и А. В. Тура рассмотрены новые эффекты и явления, возникающие при отказе от концепции точечной бесструктурной частицы и при рассмотрении структурно-сложных частиц с небольшим числом внутренних степеней свободы. Эта часть насыщена необычными явлениями, сопровождающими кинематику и динамику таких частиц.

В заключении редакционная коллегия поздравляет выдающегося ученого современности, члена-корреспондента РАН, профессора В. П. Силина с его 90-летним юбилеем и желает ему здоровья, в частности и для реализации новых достижений в области теоретической физики. Также мы искренне поздравляем с юбилеем ректора Харьковского университета академика НАН Украины профессора В. С. Бакирова и желаем ему благополучия и успехов вместе с руководимым им коллективом старейшего на Украине двухвекового классического университета г. Харькова.

Академик НАН Украины
Академик НАН Украины

А. Г. Загородний
Н. Ф. Шульга

ЧАСТЫ I

ПУТЬ СОЗДАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О ПЛАЗМЕ БЕЗ СТОЛКНОВЕНИЙ

А. А. Рухадзе

*Институт общей физики им. А. М. Прохорова РАН,
ул. Вавилова 38, Москва, 119991, Россия.
Московский Физико-технический Институт, Государственный университет,
Институтская 9, Долгопрудный, Московская обл. 141700, Россия.*

В. П. Сялян

*Физический Институт им. П.Н. Лебедева РАН,
Ленинский пр. 53, Москва, 119991, Россия.
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
Каширское шоссе, д.31, Москва, 115409, Россия.*

Кратко излагается история создания современных представлений физики бесстолкновительной (власовской) плазмы, начиная от предсказания лорда Дж. Рэлея в 1906 г. того, что электроны, находящиеся на поверхности нейтрализующей их заряд положительно заряженной сферы (модель атома Дж.Дж. Томсона 1903 г.), могут совершать колебания в электрическом поле, создаваемом ими же. Он не только предсказал, но и получил уравнения колебаний и определил их частоту. Спустя 20 лет (в 1924 г.) И. Ленгмюр (возможно независимо от Дж. Рэлея), начав последовательное исследование спектров колебаний плазмы газового разряда, действительно обнаружил такие колебания с частотой, совпадающей с предсказанной Дж. Рэлеем. Опираясь на свои экспериментальные результаты, И. Ленгмюр вместе с Л. Тонксом развили простую механическую модель электронно-

ионной плазмы с полным самосогласованным электромагнитным полем, которая качественно объяснила эксперименты И. Ленгмюра. Для количественного объяснения эксперимента требовалось использование кинетической теории. Существующая в то время кинетическая теория Больцмана, однако, для описания плазмы была не пригодной из-за расходимости интеграла столкновений при кулоновском взаимодействии частиц. Первый, кто сделал уравнение Больцмана применимым для описания плазмы, был Л. Д. Ландау, который в 1937 г. учел дебаевскую экранировку кулоновского поля в плазме и, тем самым, интеграл столкновений в уравнении Больцмана оказался конечным. Однако поля, фигурирующие в уравнении Больцмана, Л. Д. Ландау считал заданными (внешними) и поэтому полученное им уравнение было непригодным для описания волновых процессов в плазме. Смелый шаг при построении кинетической теории бесстолкновительной плазмы сделал А. А. Власов, который в 1938 г. записал кинетическое уравнение с самосогласованными полями, уравнениями Максвелла и силой Лоренца. Это уравнение было в 1946 г. признано Л. Д. Ландау пригодным для плазмы, и даже, основываясь на нем, он получил свое знаменитое «затухание Ландау» плазменной волны в максвелловской бесстолкновительной плазме. В этом же 1946 г. вышла книга Н. Н. Боголюбова, в которой развит общий метод вывода кинетических уравнений для газов со слабым взаимодействием частиц. В частности, для газа с экранированным кулоновским взаимодействием частиц в первом приближении по взаимодействию он получил уравнение Власова, а во втором – интеграл столкновений Ландау. Дальнейшее развитие кинетической теории плазмы связано с именами В. П. Силина, А. Ленарда и Р. Балеску, которые развили метод Боголюбова и получили интегралы столкновений в виде, пригодном для описания быстропеременных процессов в плазме и наличия сильного магнитного поля, а также волнового взаимодействия частиц, обусловленного учетом динамической поляризации плазмы. В. П. Силин со своими сотрудниками показали, что учет такого взаимодействия кардинально меняют наши представления о процессах переноса и релаксации в неизотермической плазме с горячими электронами.

1. В В Е Д Е Н И Е

Настоящий раздел посвящен краткому изложению истории развития фундаментальных представлений о бесстолкновительной плазме как о газе с кулоновским взаимодействием частиц. В таком газе для целого ряда явлений главную роль играют коллективные процессы взаимодействия частиц с самосогласованными полями. По-видимому, первым, кто предсказал колебания нейтрализованной по заряду систе-

мы электронов и создаваемого ими же электрического поля (что теперь именуют самосогласованным полем) в 1906 году был лорд Дж. Рэлей [1] (см. также [2]). Ссылка на его работу приведена на первой странице работы А. А. Власова 1938 года [3]. В работе Дж. Рэрея [1] изучались свойства модели атома, предложенной в 1903 году Дж. Дж. Томсоном [4] (см. также [5]), состоящего из положительно заряженной тяжелой сферы с вкрапленными в нее легкими электронами. Дж. Рэлей получил уравнение колебаний электронов в такой сферической системе и дал правильную оценку частоты колебаний. Возможно, как полагают, независимо от лорда Дж. Рэрея И. Ленгмюр [6-8] в 1924 году начал последовательное экспериментальное исследование свойств электрического разряда в газах вдали от электродов, на расстояниях, больших дебаевской длины. Он полагал, что на таких расстояниях поля, создаваемые электродами, согласно П. Дебаю и Е. Хюккелю [9] (см. также [10]), экранируются, и электроны и ионы образуют плотный однородный нейтрализованный по заряду газ заряженных частиц, который И. Ленгмюр назвал плазмой. Начал он эту работу с исследования спектров колебаний плотности заряда с помощью созданного им высокочастотного зонда (зонд Ленгмюра) [6]. При этом он обнаружил в пределе длинных волн предельную частоту конечной величины, такую, какую еще в начале века предсказал лорд Дж. Рэлей [1]. Эта частота, как заметил в 1928 году И. Ленгмюр [8], оказалась зависящей от плотности электронов плазмы, что позволило ему сделать важный вывод о коллективной природе колебаний. Впоследствии такие колебания получили название плазменных колебаний (часто их называют ленгмюровскими, хотя можно было бы их называть колебаниями Рэрея–Ленгмюра). В 1929 году И. Ленгмюр и Л. Тонкс [11, 12] с помощью простейшей механической модели движения электронов в самосогласованных электромагнитных полях, описываемых уравнениями Максвелла, количественно объяснили найденный И. Ленгмюром спектр продольных (потенциальных) колебаний. Более того, с помощью этой же модели им удалось также качественно объяснить как наблюдаемую ими дисперсию ленгмюровских волн, так и наличие в плазме низкочастотной (с участием ионов) звуковой ветви колебаний, а также возможность распространения в плазме поперечных электромагнитных волн.

Следующий важный этап развития фундаментальной науки о плазме можно видеть в работе Л. Д. Ландау 1938 года [13], который сделал кинетическое уравнение Больцмана пригодным для описания газа с кулоновским взаимодействием частиц, для которых, как известно, полное сечение упругого рассеяния пары заряженных частиц является бесконечным. В этом случае интеграл столкновений Больцмана, естественно, теряет смысл. Он, независимо от И. Ленгмюра, воспользовался известным с 1923 года результатом П. Дебая и П. Хюккеля [9] и учел дебаевскую экранировку кулоновского потенциала взаимодействия заряженных частиц в плазме, ослабляющую взаимодействие частиц на больших расстояниях и делающую сечение кулоновского рассеяния

в плазме конечным. Ранее такое конечное значение сечения кулоновского рассеяния электронов в плазме было получено И. Ленгмюром в 1928 году [8]. В итоге, Л. Д. Ландау учел статическое самосогласованное электрическое поле для получения имеющего смысл интеграла парных кулоновских столкновений в уравнении Больцмана. Хотя эта проблема, на первый взгляд, и выходит за рамки рассматриваемой нами проблематики бесстолкновительной плазмы, но её решение было большим практическим достижением. Именно учет по Дебаю влияния коллективных эффектов на парные кулоновские столкновения позволил Ландау правильно предложить описывать многие важные явления (а именно, процессы переноса) в плазме, подобные тем, которые к тому времени были изучены и поняты в физике газов. Однако к таким явлениям нельзя было отнести электромагнитные колебания и волны, открытые Рэлеем и Ленгмюром.

Смелый шаг, во многом определивший развитие фундаментальной теории бесстолкновительной плазмы как физики коллективных явлений, был сделан А. А. Власовым в работах [3, 14, 15]. В своей работе 1938 года [3] А. А. Власов подчеркивает, что плазма не обычный газ и дает свое определение: «плазма – это среда частиц с дальним взаимодействием, в которой для понимания ее свойств учет только парного взаимодействия частиц явно недостаточен; необходим учет взаимодействия посредством создаваемых частицами электромагнитных полей». В соответствии с этим, А. А. Власов как альтернативу больцмановской кинетики для описания полностью ионизованной плазмы вводит в употребление кинетическое уравнение, в котором полностью пренебрегает парными столкновениями частиц, а взаимодействие частиц считается обусловленным самосогласованными электромагнитными полями. Для описания такого самогласования уравнение Власова, подобно моделям Дж. Рэлея, И. Ленгмюра и Л. Тонкса в работах [11, 12], дополнялось системой уравнений поля, в которых источниками поля служат сами частицы плазмы, движущиеся в электромагнитных полях. Тем самым, А. А. Власов внес идею самосогласованного поля Дж. Рэлея, Л. Тонкса и И. Ленгмюра в физическую кинетику плазмы. Такая модель плазмы получила название приближения самосогласованного поля бесстолкновительной плазмы, или плазмы Власова. Эта модель не только подтвердила идейную сторону теории Л. Тонкса и И. Ленгмюра, но и дала количественно правильное описание качественно обсуждавшейся И. Ленгмюром и Л. Тонксом [11, 12] дисперсии ленгмюровских колебаний. А. А. Власов в 1945 году [14] получил приближенную формулу для предсказанного им нового явления – бесстолкновительного затухания плазменной волны. При этом воспользовался выбранной им модельной функцией распределения (распределения Лоренца) электронов по скоростям. Он первый отметил, что полученное им бесстолкновительное затухание обусловлено поглощением волн электронами плазмы. Л. Д. Ландау [16] в 1946 году впервые дал признанное самим Власовым аналитическое выражение для декремента бесстолкновительного затухания.

хания в плазме с максвелловским распределением электронов по скоростям. Следует согласиться с Власовым, что приближение Ландау является более точным, чем приближение Власова для интересовавшего обоих, и Власова, и Ландау, случая плазмы с максвелловской функцией распределения частиц по скоростям. Слова А. Власова в его книге [15] на стр. 206 выглядят как признание успеха Л. Д. Ландау, когда читаем, что «Ландау в 1946 году уточнил его результат 1945 года». Впоследствии модель плазмы Власова стала базой широкого круга исследований плазменных явлений и прикладных разработок, породив громадное количество научных работ.

Следующее важное достижение, математически обосновывающее физическую кинетику плазмы и газов, было сделано в 1946 году и представлено в книге Н. Н. Боголюбова [17]. В ней он впервые изложил созданный им общий метод получения кинетических уравнений газов, который, в частности, нацелен на обоснование кинетики плазмы. Это было сформулировано в варианте его теории газа со слабым взаимодействием частиц. На этом материале Боголюбов обосновал как уравнение Власова, так и использование кинетического уравнения Больцмана с интегралом столкновений Ландау. С помощью книги [17] В. П. Силин в 60-е годы построил интеграл столкновений для быстропеременных процессов в плазме, в том числе при наличии сильного магнитного поля и с учетом динамической поляризации плазмы [18-20] (см. также [21]). Примерно в это же время железный занавес между западными странами и Советским Союзом был ослаблен. В 1956 году в СССР была проведена первая международная конференция по физике и западные ученые начали осваивать метод Боголюбова. А. Ленард в 1960 году [22] решил определяющее интеграл столкновений уравнение Боголюбова для парной корреляционной функции заряженных частиц плазмы, взаимодействующих по закону Кулона. Найденный им интеграл столкновений явился обобщением интеграла столкновений Ландау на случай динамической поляризации плазмы. Р. Балеску в 1960 году [23] такой же интеграл столкновений получил с помощью диаграммной техники, разработанной им совместно с И. Пригожиным [24]. Последователи Ленарда и Балеску получили обобщение интеграла столкновений Ландау с мало кем поначалу понятым намеком на то, что в ими найденном интеграле «парных» столкновений поляризационные свойства плазмы могут играть определяющую роль. Именно в их интеграле столкновений поляризационные свойства плазмы непосредственно проявляются во входящем в знаменатель выражении для продольной комплексной диэлектрической постоянной плазмы, могущей быть резонансно малой в смысле черенковского описания взаимодействия частиц и волн в плазме. Это увидел первым В. П. Силин [25], усмотрев в таком взаимодействии реальный путь увеличения роли столкновительных эффектов в процессах релаксации и переноса в неизотермической плазме с $T_e \gg T_i$. Для реализации своей надежды, завершившейся успехом, он привлек своих учени-

ков. С помощью интеграла столкновений Ленарда–Балеску кинетика плазмы впервые засвидетельствовала условия, в которых роль плазменных волн может быть существеннее при описании явлений переноса по сравнению с ролью парных бальцмановских столкновений [21, 26-29] (см. также [30]).

С другой стороны, особо следует отметить работу Б. И. Давыдова 1958 года [31]. В ней автор, применив к тому времени широко известный метод, использованный им в работе [31], ввел в физическую кинетику плазмы в квазиклассическом приближении квантовый аппарат, обобщающий классическую кинетику Л. Больцмана кинетикой волн. Это было ранее освоено, например, в теории твердого тела с расчетом вероятностей излучения и поглощения, характерных для твердого тела волн электронами и ионами. Конкретно, он в 1958 году [31] рассмотрел поправку ко времени релаксации импульса электрона, обусловленную обменом электронами слабозатухающих высокочастотных плазменных волн (поправка оказалась малой). Тем самым, Б. И. Давыдов ввел в кинетику плазмы, обобщающую классическую кинетику Больцмана, известный в квантовой теории твердого тела (см., например, [31-36]) метод кинетического описания волн с его расчетом вероятностей излучения и поглощения плазменных волн электронами и ионами плазмы.

2. СТАНОВЛЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

Первые теоретические представления о плазме как о газе заряженных частиц сформулированы в работах [8, 11, 12]. Они основаны на простых соображениях Дж. Рэлея [1] и экспериментах И. Ленгмюра [6, 7, 8]. В этих экспериментах исследовались спектры колебаний плазмы тлеющих разрядов в парах ртути и в воздухе при давлениях $P_0 \approx 10^{-4} - 10^{-3} \text{tor}$ и вдали от электродов, на расстояниях много больших дебаевского радиуса экранирования поля. И. Ленгмюр, зная работу П. Дебая и Х. Хюккеля [9], понимал, что влияние поля электродов в разряде простирается до расстояний порядка дебаевского радиуса. Этим достигалась высокая однородность плазмы и ее квазинейтральность. Использовались два метода экспериментальных исследований: метод собственных частот колебаний плазмы по спектрам резонансного поглощения внешнего излучения и зондовый метод измерения как собственных частот, так и температуры электронов и плотности плазмы. Впоследствии созданный для этих экспериментов зонд Ленгмюра получил широкое распространение в научных лабораториях. Первый экспериментальный результат, обнаруженный

И. Ленгмюром [8]: наличие в плазме высокочастотных колебаний со спектром частот, зависящим от плотности электронов плазмы, как это и предсказывалось Дж. Рэлеем [1]. Частота колебаний менялась с изменением тока разряда, т. е. зависела от плотности электронов. Для такой частоты И. Ленгмюр предложил приближенную формулу, описывающую главные зависимости от экспериментально измеренных всех существенных физических параметров, характеризующих наблюдаемую им частоту ν как новое явление. Эта приближенная формула имела следующий вид [8]:

$$\nu^2 \approx \frac{e^2 n_e}{m}. \quad (1)$$

Зависимость частоты колебаний от заряда e и массы m электронов согласно формуле (1) позволила Ленгмюру считать наблюдаемые им колебания электронными, а зависимость от плотности числа электронов n_e (число электронов в 1 см^3) он посчитал проявлением коллективных явлений. Выше отмечалось, что формула для частоты колебаний электронов еще в 1906 году была предсказана лордом Дж. Рэлеем [1], который предсказал коллективные колебания электронов в модели Дж. Томсона [4]. Простую модель атома Дж. Томсона лорд Дж. Рэлей рассматривал как положительно заряженную тяжелую сферу с вкрапленными в нее электронами и получил уравнение однородных колебаний электронов: $d^2s/dt^2 + 4\pi\gamma\rho_0 s = 0$. Здесь s — расстояние между элементарными объемами электронной жидкости, ρ_0 — плотность однородной покоящейся электронной жидкости, а γ — величина, характеризующая взаимодействие элементов жидкости. (В современных обозначениях: $\rho_0 \sim n_0/m$, где n_0 — плотность, m — масса, а $\gamma \sim e^2$, где e — заряд электрона и, как следствие, частота колебания $\omega = \sqrt{4\pi\gamma\rho_0}$, оказывается равной Ленгмюровской частоте (1)). Позже в работах [11, 12] формула (1) обрела точные численные коэффициенты. В результате формула получила вид, совпадающий с приведенным в работе Дж. Рэля [1]:

$$\omega = \omega_{Le} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m}} \approx \sqrt{3 \cdot 10^9 n_e}. \quad (2)$$

Зависимость частоты (2) от плотности электронов плазмы привела авторов работ [11, 12] И. Ленгмюра и Л. Тонкса, оперирующих с понятием упругости как причиной колебаний, к мысли о том, что упругость плазмы обусловлена «большим числом» электронов. Однако, именно в работах [11, 12] её авторы вступили на путь последовательного отказа от таких примитивных представлений. Свой переход на позицию понимания плазменных волн как волн электромагнитного поля и вещества

плазмы они продемонстрировали, представив свою новую, могущую быть названной электромагнитной, модель плазмы. В этой модели исходными были уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi n \rho, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad (3)$$

и необходимые материальные уравнения:

$$-m \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{H} \right), \quad \vec{j} = en_e \vec{V}, \quad \rho = en_e. \quad (4)$$

Если в предложенной модели пренебречь внешними электрическим и магнитным полями, то плазма может считаться изотропной, в которой уравнение для продольного поля, ($\operatorname{rot} \vec{E} = 0$), и уравнение для поперечного поля, ($\operatorname{div} \vec{E} = 0$), разделяются, и из системы (3), (4) следуют два уравнения:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}^l}{\partial t^2} + \left(\frac{4\pi e^2 n_e}{m} \right) \vec{E}^l = 0, \quad \frac{\partial^2 \vec{E}^{tr}}{\partial t^2} + \left(\frac{4\pi e^2 n_e}{m} \right) \vec{E}^{tr} = c^2 \Delta \vec{E}^{tr}, \quad (5)$$

а условия существования решений этих уравнений в виде плоских монохроматических волн, $\vec{E} \sim \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r})$, сводятся к следующим дисперсионным уравнениям для продольной и поперечной волн:

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2, \quad \omega^2 = \omega_{Le}^2 + k^2 c^2, \quad (6)$$

которые полностью совпадают с дисперсионными уравнениями для продольных и поперечных волн современной модели холодной электронной плазмы [30]. Экспериментально полученные [6, 7, 8] спектры поглощения и коэффициенты отражения и преломления электромагнитных волн в плазме паров ртути при плотности электронов $n_e \approx 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ также согласуются с их расчетными значениями, полученными с учетом соотношений (6).

В работах [6, 7, 8, 11, 12] экспериментально и теоретически изучались также и низкочастотные колебания, природа которых существенно определяется движением ионов. Поэтому спектр частот может зависеть от сорта газа, в котором создается плазма. Для описания низкочастотных колебаний авторы предлагают следующую модель: возмущение плотности электронов определяется больцмановским распределением электронов в потенциале поля волны Φ в квазинейтральной ($n_e = n_i = n$) плазме с бесконечно тяжелыми ионами. Учитывая уравнение Пуассона, уравнение движения ионов и уравнение непрерывности, для потенциала поля колебаний авторы получают уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{4\pi e^2 n}{M} \Phi \right) - \frac{4\pi e^2 n}{\kappa T_e} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (7)$$

Для решения уравнения (7) в виде плоской монохроматической волны, $\Phi \sim \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r})$, откуда следует дисперсионное уравнение для ионно-звуковой волны (см., например, книгу [30]):

$$\omega^2 = \frac{\omega_{Li}^2}{1 + \omega_{Le}^2 m / k^2 \kappa T_e}. \quad (8)$$

В длинноволновой области авторы работы [12] видят линейную зависимость частоты $\omega(k)$ спектра (8) от волнового вектора \vec{k} . В коротковолновом пределе частота (8) стремится к постоянной, соответствующей ионной ленгмюровской частоте $\omega = \omega_{Li} = \sqrt{4\pi e^2 n_i / M}$. Эксперименты Ленгмюра [8] подтвердили этот вывод, также как и зависимость спектра частот от массы ионов. Эксперименты проводились в парах ртути и в воздухе при комнатной температуре окружающего газа. При этом частоты колебаний в парах ртути при одной и той же плотности плазмы оказывались в 4,5 раз меньше, чем в воздухе, в соответствии с отношением масс ионов.

Таким образом, можно утверждать, что их простая механическая модель Ленгмюра–Тонкса позволила им вполне удовлетворительно объяснить результаты эксперимента и, тем самым, полностью оправдала использование идеи самосогласованного поля при описании поведения плазмы.

3. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА И ИНТЕГРАЛ СТОЛКНОВЕНИЙ ЛАНДАУ

Все сказанное выше указывало на необходимость развития кинетической теории для описания колебательных свойств плазмы. В то время людям со строгим мышлением было затруднительно использовать применительно к плазме обычную для их времени физическую кинетику газов, базирующуюся на кинетическом уравнении с интегралом столкновений Больцмана. Основой такого интеграла было, например, сечение упругого рассеяния двух сталкивающихся частиц. В случае столкновения двух заряженных частиц это сечение из-за медленного спадания с расстоянием кулоновского потенциала является бесконечным. Иными словами, соответствующий интеграл столкновений не имеет смысла.

С другой стороны, был известен эффект Дебая–Хюккеля [9] в электролите, когда кулоновский потенциал заряда экранируется, экспоненциально спадая на расстояниях, больших радиуса Дебая. В работе [13] Ландау продемонстрировал возможность введения такого многочастичного эффекта, как дебаевское экранирование, в теорию Больцмана, учитывая лишь взаимодействие пары сталкивающихся частиц. Для этого он повторил вывод интеграла столкновений в рамках исходных положений Больцмана, дополнив их положением о малости передаваемого при столкновении импульса, что отвечает рассеянию частиц на малые углы, или, что то же самое, столкновениям при больших прицельных параметрах. Полученный при этом результат совпадает с результатом, полученным непосредственно из интеграла столкновений Больцмана. Он оказывается пропорциональным логарифмически расходящемуся по передаваемому импульсу Δp интегралу (интеграл в (1)):

$$\Lambda = \int \frac{d\Delta p}{\Delta p} = \ln \frac{r_{De}}{r_{\min}} = \ln \left[\frac{\kappa T \sqrt{\mu}}{\hbar \sqrt{4\pi e^2 n}} \right]. \quad (9)$$

В связи с формулой (9) необходимо сделать несколько замечаний. Во-первых, при её написании учтена обратная пропорциональность передаваемого при столкновении импульса и соответствующего прицельного параметра. Во-вторых, возникновение минимального прицельного параметра порождено отнюдь не дефектностью интеграла столкновений Больцмана, несуществующей при малых прицельных параметрах, а отражает ограничение применимости приближения Ландау о малости передаваемого при столкновении импульса. При этом нами использована известная оценка, даваемая соотношением Гейзенберга. Выражение (9) пригодно при высоких температурах, когда $\kappa T > e^4 \mu / \hbar^2$. Если принять эффективную массу μ равной массе электрона, то последнее неравенство гласит, что квантовое обрезание при малых прицельных параметрах становится определяющим при температуре выше 27 эВ. Наконец, в-третьих, самое главное для нашего изложения то, что Ландау использовал в качестве максимального прицельного параметра r_D радиус дебаевского экранирования. Последнее делает кулоновский логарифм L зависящим от плотности числа электронов. Тем самым, для наших целей главное состоит в том, что благодаря обрезанию расходимости кулоновского логарифма при больших прицельных параметрах из-за дебаевского экранирования по Ландау сам кулоновский логарифм оказывается зависящим от плотности числа электронов. Эта зависимость согласно мышлению, прививаемому нам Ленгмюром, свидетельствует хоть о логарифмически слабой, но коллективной многочастичной природе кулоновского логарифма Ландау. Именно поэтому говорят о том, что Ландау совершил прорыв за ограничивающие до него мышление парные столкновения ранней кинетики Больцмана. Помимо этого, главного

для нашего текста события, не следует упускать из виду полезную Фоккер–Планковскую форму:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} + e_\alpha \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V}_\alpha \times \vec{B}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{p}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial p_{\alpha i}} \left[D^{\alpha}_{ij} \frac{df_\alpha}{dp_{\alpha j}} - A^{\alpha}_i f_\alpha \right], \quad (10)$$

$$D^{\alpha}_{ij} = \sum_{\beta} \int d\vec{p}_{\beta} I_{ij}^{\alpha\beta}(\vec{p}_\alpha, \vec{p}_{\beta}) f_{\beta}(\vec{p}_{\beta}), \quad A^{\alpha}_i = \sum_{\beta} \int d\vec{p}_{\beta} I_{ij}^{\alpha\beta}(\vec{v}_\alpha, \vec{v}_{\beta}) \frac{\partial f_{\beta}}{\partial p_{\beta j}}.$$

Здесь $I_{ij}^{\alpha\beta} = 2\pi e_{\alpha}^2 e_{\beta}^2 L(u^2 \delta_{ij} - u_i u_j) / u^3$, где $\vec{u} = \vec{v}_\alpha - \vec{v}_\beta$, $\vec{v}_\alpha = d\vec{r}_\alpha / dt$, а $f_\alpha(\vec{p}_\alpha, \vec{r}_\alpha, t)$ – одночастичная функция распределения частиц сорта α ($\alpha = e, i$). Наконец, L – кулоновский логарифм (логарифм Ландау), который Ландау сделал конечным, обрезав взаимодействие на больших расстояниях, как следствие дебаевского экранирования, а на малых расстояниях на $r_{\min} = e^2 / T$, на котором нарушается использованное им приближение рассеяния на малые углы. В результате он оказался равным $L = \ln r_D / r_{\min} = \ln r_D T / e^2$. Именно такой логарифм был получен И. Ленгмюром в 1928 году [8]. Заслуга Л. Д. Ландау в том, что он сделал кинетическое уравнение Больцмана пригодным для описания плазмы и этим во многом упростил вычисления коэффициентов переноса, времен релаксаций и других величин, характеризующих столкновительную кинетику плазмы.

4. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

А. А. ВЛАСОВА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ПОЛЕМ

Вскоре, однако, произошло возвращение в русло представлений И. Ленгмюра и Л. Тонкса с введением в физическую кинетику электродинамики Максвелла. Смелый шаг, во многом определивший развитие физики плазмы как физики коллективных явлений, составили прорывные работы А. А. Власова [3, 14, 15]. В 1938 году А. А. Власов [3] дает свое определение плазмы: «для системы заряженных частиц учет только парного взаимодействия частиц является аппроксимацией, строго говоря, неудовлетворительной, в теории таких совокупностей существенную роль должны играть силы взаимодействия и на далеких дистанциях и, следовательно, система заряженных частиц есть, по существу, не газ, а своеобразная система, стянутая далекими силами». Этому высказыванию А. А. Власова отвечает использование силы Лоренца в кинетиче-

ском уравнении, в котором электромагнитные поля определяются как самосогласованные. При записи кинетического уравнения он пренебрег столкновениями частиц и представил его в виде:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}} + e_\alpha \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V}_\alpha \times \vec{B}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{p}_\alpha} = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) следует дополнить системой уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi \sum_\alpha e_\alpha \int f_\alpha d\vec{p}, \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha e_\alpha \int \vec{V}_\alpha f_\alpha d\vec{p}, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнение (11) совместно с уравнениями (12) были записаны А. А. Власовым в 1938 году [3] и получили название системы уравнений с самосогласованным взаимодействием, а уравнение (11) называется уравнением Власова. Такая модель плазмы получила название бесстолкновительной плазмы, или, другими словами, плазмой Власова. Она не только дала количественную интерпретацию экспериментов И. Ленгмюра по наблюдению плазменных волн, но и стала базой широкого круга исследований новых плазменных явлений и прикладных разработок.

Одним из результатов работы А. А. Власова [3] является дисперсионное уравнение для стационарных колебаний плазмы:

$$1 - \frac{4\pi e^2}{k^2} P \int d\vec{p} \frac{\vec{k} \partial f_0 / \partial \vec{p}}{\omega - \vec{k} \vec{v}} = 0. \quad (13)$$

Здесь символ P означает, что несобственный интеграл в этом уравнении следует вычислять в смысле главного значения, что соответствует требованиям стационарности колебаний. Именно с помощью этого уравнения был получен спектр плазменных колебаний (2) и найдена дисперсия в условиях, когда электронная функция распределения максвелловская и фазовая скорость волны намного превосходит тепловую скорость электронов, $\omega \gg kv_T$:

$$\omega = \omega_{Le} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{k^2 V_{Te}^2}{\omega_{Le}^2} \right). \quad (14)$$

Формула (14) количественно правильно описывает резонансы Тонкса–Датнера [37, 38, 39], если принимается $k = \pi s / l$, где l – линейный размер плазмы, а $s = 1, 2, 3, \dots$ – целые числа. Следует отметить, что формула (14) была получена теоретически, а дискретность волнового числа,

$k = \pi s / l$, показана экспериментально. Именно дисперсионное уравнение (13), опубликованное в работе [3] в 1938 году и связывающее действительные частоту ω и волновой вектор \vec{k} , было признано Л. Д. Ландау несуществующим [16]. В работе [16] утверждалось, что «вычислять несобственный интеграл в смысле главного значения нет никаких оснований. В действительности вообще не существует никакой определенной зависимости между ω и k ». Еще более резкой критике подверглись работы А. А. Власова [3, 14] в работе 4-х академиков [40], в которой отрицалось не только существование дисперсионного соотношения, связывающего действительные частоту и волновой вектор, но и высказано сомнение в применимости приближения самосогласованного поля. А. А. Власов в работе [3] решал стационарную задачу на собственные колебания и искал решения вида $\exp(-i\omega + i\vec{k}\vec{r})$ с действительными значениями ω и \vec{k} , и такие решения существуют. В частности, таким решением является и найденный им спектр колебаний (14), полученный А. А. Власовым из уравнения (13) и подтвержденный экспериментом [37, 38, 39]. Такие решения всегда существуют в случаях, когда равновесная функция не содержит захваченных частиц, ибо фазовая скорость волны больше скорости света в вакууме. Более подробно об условиях существования незатухающих власовских колебаний можно познакомиться по работам [41-43] (см. также приложения в книге В. П. Силина [21] и обсуждение в сборнике [44]).

За год до работы Ландау [11], А. А. Власов в 1945 году [14] решил начальную задачу релаксации плазменных колебаний плазмы, т.е. воспользовался преобразованием Лапласа. При этом, решая уравнение (13), он использовал распределение Лоренца:

$$f_{\alpha}(\vec{V}) = \frac{n_{\alpha} / \pi}{V^2 + v_{Te}^2}. \quad (15)$$

Поступая в соответствии со стандартной теорией функции комплексной переменной, он получил следующую формулу для временной динамики возмущения равновесной функции распределения (15):

$$\varphi(t) = \varphi(0) \exp(-k v_{Te} t) \cos(\omega_{Le} t). \quad (16)$$

Отсюда видно, что ленгмюровская волна со временем затухает; у частоты имеется отрицательная мнимая часть, т.е. декремент затухания, $\text{Im } \omega = -k v_{Te}$. А. А. Власов найденное бесстолкновительное затухание связывал с поглощением волны электронами плазмы¹.

¹Отметим, что результат А.А.Власова (16) следует из дисперсионного уравнения для продольной волны

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{(\omega + i k v_{Te})^2} = 0,$$

Л. Д. Ландау, решая эту же задачу, но уже для максвелловской функции распределения, обобщает стандартную теорию функции комплексного переменного и интегрирует несобственный интеграл в (13) выбором специального контура для обхода полюса на действительной оси. В несобственном интеграле выбранный Ландау контур эквивалентен использованию формулы Сохоцкого в современном ее виде только в самом интересном случае слабого поглощения, пригодном для стандартной теории [45]:

$$\frac{1}{\omega - \vec{k}\vec{v}} = \frac{P}{\omega - \vec{k}\vec{V}} - i\pi\delta(\omega - \vec{k}\vec{V}). \quad (17)$$

Для случая сильного поглощения волн Л. Ландау в [16] решил новую задачу в теории функций комплексного переменного, показав, что коротковолновые колебания при выполнении условия $\omega_{Le} < kv_{Te}$ сильно затухают. В случае максвелловского распределения электронов по скоростям в пределе $\omega_{Le} \gg kv_{Te}$ Л. Ландау получил частоту ленгмюровских волн; мнимая часть частоты, определяющая слабое затухание волны, выглядит так:

$$\text{Im } \omega = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Le}}{k^3 r_{De}^3} \exp\left(-\frac{1}{2k^2 r_{De}^2} - \frac{3}{2}\right). \quad (18)$$

Механизм затухания в рассматриваемом случае обусловлен черенковским поглощением волны электронами плазмы, но и Л. Д. Ландау этого не замечает. Декремент затухания волны в случае (18) мал по сравнению с частотой по предположению вычисления формулы (17), а частота волны равна ленгмюровской частоте электронов. Другими словами, слабозатухающие плазменные колебания в случае максвелловского распределения существуют только в длинноволновой области, и их фазовая скорость намного превосходит тепловую скорость электронов. Иное положение имеет место в случае формулы (16), полученной А. Власовым для функции распределения (15); она верна при произвольном соотношении между частотой волны и декрементом затухания.

Таким образом, А. А. Власов в работе [3] никаких ошибок не допускал: он решал задачу существования стационарных колебаний, а что

которое, в свою очередь, получается из решения линеаризованного кинетического уравнения Власова с равновесной функцией (15). Может возникнуть возражение, что эта функция приводит к бесконечной энергии электронов и по этой причине не пригодна. На это можно возразить, что любая функция

$$f_a(\vec{V}) = \frac{A_n}{(V^2 + v_{Te}^2)^n},$$

где A_n – постоянная нормировки, $\int f_0(v)dV = n_e$, а $n \geq 1$ – произвольное целое число, приводит к тому же дисперсионному уравнению.

касается термина «затухания Ландау», то бесстолкновительное затухание плазменных волн открыл А. А. Власов (см. обсуждение работ А. А. Власова в сборнике [44]). Л. Д. Ландау в работе [16] обобщил или, как пишет сам А. А. Власов, «уточнил результат А. А. Власова на случай максвелловского распределения частиц».

5. ЗАВЕРШЕНИЕ ПОСТРОЕНИЯ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ ПЛАЗМЫ БЕЗ СТОЛКНОВЕНИЙ

Блестящим завершением второго и третьего этапов, в которых сформировались современные теоретические представления физики плазмы как особого газа из заряженных частиц, обосновавшим ее существенные коллективные свойства, была классическая книга 1946 года Н. Н. Боголюбова [17]. Как уже отмечалось выше, именно в этой работе Н. Н. Боголюбов представил общий метод вывода кинетических уравнений для газов со слабым взаимодействием между частицами как с помощью самосогласованных полей, так и парных столкновений. Для газов с короткодействующими силами между частицами этим методом Н. Н. Боголюбов получил обычное кинетическое уравнение Больцмана. Для газов же с кулоновским взаимодействием частиц в первом приближении получил как уравнение Власова, так и интеграл парных столкновений Ландау, что дало им строгое обоснование. Дальнейшее развитие теоретическая физика плазмы получила в работах А. Ленарда [22], Р. Балеску [23] и В. П. Силина [18, 19, 20]. Разными методами эти авторы учли диэлектрические свойства самой плазмы в интеграле столкновений. В работе А. Ленарда [22] было решено уравнение Н. Н. Боголюбова для парной корреляционной функции в случае кулоновского взаимодействия частиц и получен интеграл столкновений, учитывающий динамическую поляризацию плазмы. Результат сводится к следующей замене в интеграле столкновения:

$$I_{ij}^{\alpha\beta} = 2\pi e_{\alpha}^2 e_{\beta}^2 L(u^2 \delta_{ij} - u_i u_j) / u^3 \rightarrow I_{ij}^{\alpha\beta} = 2\pi e_{\alpha}^2 e_{\beta}^2 \int d\vec{k} \frac{k_i k_j \delta(\vec{k}\vec{u})}{|k_i k_j \varepsilon_{ij}(\vec{k}\vec{V}, k)|^2}. \quad (19)$$

Все обозначения, такие как в (10). В книге В. П. Силина [21] такой же интеграл столкновений был получен с помощью использования понятия условной вероятности, введенной в физику плазмы Н. Ростокером [46]. Р. Балеску [23] для вычисления взаимодействия частиц и полей воспользовался диаграммной техникой, разработанной им совместно с И. Пригожиным [24], и получил кинетическое уравнение с самосогла-

сованным полем и с интегралом столкновений Ландау с заменой (19). Такой интеграл часто называют интегралом столкновений Ленарда–Балеску. Наличие диэлектрической проницаемости в знаменателе (19) может оказаться резонансно малой величиной в смысле черенковского взаимодействия частиц и волн в плазме, что резко увеличит вклад в интеграле столкновений. Первым на это обратил внимание В. П. Силин [25], усмотрев в таком взаимодействии реальный путь увеличения роли столкновительных эффектов в процессах релаксации и переноса в неизотермической плазме с $T_e \gg T_i$. Для реализации своей идеи он привлек своих учеников. В большом цикле работ [21, 26-29] (см. также [30]) было показано, что при условии $T_e/T_i > L \gg 1$ (напомним, $L \geq 20$ – логарифм Ландау) вклад во взаимодействие электронов посредством обмена ионно-звуковыми волнами превосходит чисто кулоновское взаимодействие в процессах релаксаций и переноса. С помощью интеграла столкновений Ленарда–Балеску кинетика плазмы в этих работах впервые засвидетельствовала условия, в которых роль плазменных волн может быть существеннее при описании явлений переноса по сравнению с ролью парных больцмановских столкновений. Заметим, что замена (19) эквивалентна учету самосогласованного поля в парных столкновениях при кулоновском взаимодействии частиц и укрепила убежденность в необходимости использования самосогласованного поля для описания плазмы, как это сделал А. А. Власов.

Что касается Б. И. Давыдова [31], то, как уже отмечалось выше, следуя квантовомеханическому описанию излучения и поглощения излучения частицами плазмы, он ввел в физику плазмы квантовые подходы, хорошо разработанные в физике твердого тела [32-36]. Тем самым, Б. И. Давыдов обобщил подход Больцмана на взаимодействие волн и частиц. В своей работе [31] он решил конкретную задачу: исследовал роль ленгмюровских колебаний в электрон-ионных столкновениях и показал их малую эффективность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lord Rayleigh J. W. On Electrical Vibrations and the Constitution of the Atom // *Philosophical magazine* –1906. – Volume 6th ser. –Vol. 11 Jan–June. – P.117–122.
2. Говард Дж., Стрэтт Джон Уильям (Лорд Рэлей) // УФН. –1966. – Т. 88. – Вып. 1. – С.149–160 (см. также Храмов Ю. А. История физики. – К.: Феникс, 2006. – статья «Рэлей (Стрэтт) Джон Уильям». – С. 787).
3. Власов А. А. О вибрационных свойствах электронного газа // ЖЭТФ. –1938. – Т. 8, № 3. – С. 291–318.
4. Thomson J. J. On the structure of the atom: an investigation of the stability and periods of jscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the circumference of a circle; with application of the results to the theory of atomic structures // *Phil. Mag.* –1904. – XXVI Ser. 6 7 (39). – P. 237–265.
5. Дж. Томсон. Электричество и материя. – М. – Л.: ОГИЗ, 1928. – 264 с. (см. также Храмов Ю. А. История физики. – К.: Феникс, 2006. – статья «Томсон Джозеф Джон». – С. 844).
6. Langmuir I. Probe Response to Periodic Waveforms ... // *Gen. Elec. Rev.* – 1924. – Vol. 27, N7. – P. 449-455; N8. – P.538-548; N9. – P.616-623; N11. – P.762-771, 810.

7. Langmuir I. Scattering of Electrons in Ionized Gases // *Phys. Rev.* – 1925. – Vol. 26. – P. 585.
8. Langmuir I. Oscillations in Ionized Gases // *Proc. Nat. Akad. Sci. USA.* – 1928. – Vol. 14. – P. 627.
9. Debye P. and Huckel E. On the theory of electrolytes. I. Freezing point depression and related phenomena // *Phys. Zeit.* – 1923. – Vol. 24. – P. 185, 305.
10. Дебай П. Избранные труды: Статьи, 1909–1965. – Л.: Наука, 1987. – 559 с. (см. также Ю. А. Храмов. История физики. – К.: Феникс, 2006. – статья «Дебай Петер Иосиф Вильгельм». – С. 516).
11. Tonks L., Langmuir I. Oscillations in ionized gases // *Phys. Rev.* – 1929. – Vol. 33. – P. 195.
12. Tonks L., Langmuir I. General theory of the plasma of an arc. // *Phys. Rev.* – 1929. – Vol. 34. – P. 876.
13. Ландау Л. Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия // *ЖЭТФ.* – 1937. – Т. 7. – С. 203–209; *Phys. Ztschr. Sow.* – 1936. – Bd. 10. – S. 154.
14. Власов А. А. Теория вибрационных свойств электронного газа и ее приложения // *Ученые записки МГУ им. М. В. Ломоносова.* – В. 75. – Физика, книга 2. – Часть I. – С. 3.
15. Власов А. А. Теория многих частиц. – М.: ГИТТЛ, 1950. – 348 с.
16. Ландау Л. Д. О колебаниях электронной плазмы // *ЖЭТФ.* – 1946. – Т. 16. – С. 574–581.
17. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. – М.: Гостехиздат, 1946. – 96 с.
18. Силин В. П. Кинетическое уравнение для быстропеременных процессов // *ЖЭТФ.* – 1960. – Т. 38, Вып. 6. – С. 1771–1777.
19. Silin V. P. Collision Integral for Charged Particles // *JETP.* – 1961. – V.13, N6. – P.1244–1248.
20. Силин В. П. Проводимость плазмы в сильных электрическом и магнитном полях // *ДАН СССР.* – 1965. – Т. 161. – С. 1328.
21. Силин В. П. Введение в кинетическую теорию газов. – М.: Наука, 1971. – 331 с.; 2-е изд. – М.: ФИАН, 1998; 3-е изд. – М.: URSS, 2013.
22. Lenard A. On Bogoliubov's Kinetic Equation for a Spatially Homogeneous Plasma // *Ann. Phys.* – 1960. – Vol.10. – P. 390.
23. Balescu R. Irreversible processes in ionized gase // *Phys. Fluids* – 1960. – Vol. 3. – P. 52.
24. Prigogine I., Balescu R. The diagram technique // *Physica.* – 1959. – Vol. 25. – P. 281-301; *The equations of evolution // Physica.* – 1959. – Vol. 25. – P. 302.
25. Силин В. П. К теории процессов переноса в плазме поперек магнитного поля // *Ядерный синтез.* – 1962. – В. 2. – С. 125–133.
26. Рамазашвили Р. Р., Рухадзе А. А., Силин В. П. О скорости выравнивания температур заряженных частиц в плазме // *ЖЭТФ.* – 1962. – Т. 42, N4. – С. 1323–1330.
27. Горбунов Л. М., Силин В. П. К кинетике неизотермической плазмы // *ДАН СССР.* – 1962. – Т. 145, №6. – С. 1265.
28. Горбунов Л. М., Силин В. П. Теория явлений переноса в неизотермической плазме // *ЖТФ.* – 1964. – Т. 34, №3. – С. 385–394.
29. Горбунов Л. М. Некоторые вопросы кинетической теории полностью ионизованной плазмы. Диссертация, ФИАН, 1964.
30. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. – М.: Атомиздат, 1961. – 244 с.; 2-е и 3-е изд. – М.: ЛИБРЕКОМ (2012, 2013).
31. Давыдов Б. И. сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», изд. АН СССР – 1958. – Т. 1. – С. 77.
32. Давыдов Б. И., Шмушкевич И. М. Электропроводность полупроводников с ионной решёткой в сильных электрических полях // *ЖЭТФ.* – 1940. – В. 9–10. – С. 1043–1051.
33. Ландау Л., Компанеев А. Электропроводность металлов. – Харьков: Госнаучтехиздат, 1935.
34. Пайерлс Р. Квантовая теория твердых тел. – М.: ИЛ, 1956. – 259 с.
35. Киттель Ч. Квантовая теория твердых тел. – М.: Наука, 1967. – 111 с.
36. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела: Учебное руководство. – М.: Наука, 1978. – 792 с.
37. Tonks L. The High Frequency Behavior of a Plasma // *Phys. Rev.* – 1931. – Vol. 37. – P. 1458; *Plasma-electron resonance, plasma resonance and plasma shape // Phys. Rev.* – 1931. – Vol. 38. – P. 1219.
38. Dattner A. The plasma resonator // *Ericsson Technics.* – 1957. – V. 13, N 2. – P. 309–350.
39. Dattner A. Resonance densities in a cylindrical plasma column // *Phys. Rev. Lett.* – 1963. – V. 10. – P. 205.

40. Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д., Леонтович М. А., Фок В. А. О несостоятельности работ А. А. Власова по обобщенной теории плазмы и теории твердого тела // ЖЭТФ. – 1946. – Т. 16. – С. 246.
41. Van Kampen N. G. On the theory of stationary waves in plasmas // Physica. – 1955. – V. 21. – P. 949–963.
42. Силин В. П. Затухание Ландау плазменных волн / Прикладная физика. – 2012. – № 6. – С. 5–9.
43. Попов В. Ю., Силин В. П. Миф об ошибках А. А. Власова в книге 1945 г. // Физика плазмы. – 2014. – Т. 40, В. 4. – С. 368–375.
44. Сб. об основополагающих работах А. А. Власова по физике плазмы и их обсуждение / под ред. А. А. Рухадзе. – ООО «Мир журналов». – 2014.
45. Сохоцкий Ю. А. Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды. Докт. дисс. СПб. – 1873.
46. Rostoker N. Test particle method in kinetic theory // Phys. Fluids. – 1964. – V. 7, No 4. – P. 491–498.

ЧАСТЬ II

ОДНОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ МОДУЛЯЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕНСИВНЫХ ЛЕНГМЮРОВСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ПЛАЗМЕ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ЗАХАРОВА И СИЛИНА²

А. Г. Загородний,

*Институт теоретической физики имени Н. Н. Боголюбова,
ул. Метрологическая, 14-б; г. Киев, 03680, Украина*

А. В. Каричок

*Институт теоретической физики имени Н. Н. Боголюбова,
ул. Метрологическая, 14-б; г. Киев, 03680, Украина
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
пл. Свободы, 4; г. Харьков, 61022, Украина*

В. М. Куклян

*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
пл. Свободы, 4; г. Харьков, 61022, Украина*

Н а примере одномерного представления показано, что обнаруженный В. Е. Захаровым [1] механизм нелинейного поглощения ленгмюровских колебаний в плазме оказы-

² Материал является расширенным вариантом обзорной статьи [61].

вается применимым и для интенсивных полей в холодной плазме, описываемых моделью, разработанной В. П. Силиным [2, 3]. Процессы модуляционной неустойчивости длинноволновых ленгмюровских колебаний в неизотермической и в холодной плазме, для представления которых используют соответственно уравнения Захарова и Силина, оказываются подобны. Показано, что уравнения модели Захарова (применимые для неизотермической плазмы, в условиях, когда плотность энергии поля меньше плотности тепловой энергии среды) могут быть получены из уравнений модели Силина (справедливых для низкотемпературной плазмы, когда плотность энергии поля существенно превышает плотность тепловой энергии среды) при уменьшении интенсивности поля накачки. Отмечается, что гидродинамическое описание не вполне корректно представляет поведение частиц в неоднородном в пространстве поле, фактически пренебрегая их инерцией, что формирует не только весьма мелкомасштабные и глубокие каверны плотности плазмы, но и режимы с обострением. Так как особый интерес представляет прямой механизм передачи энергии поля ионам, то детально рассматриваются так называемые гибридные модели (электроны описаны уравнениями квазигидродинамики, а ионы – частицами), что позволяет увидеть появление групп быстрых ионов и преждевременное разрушение во множестве возникающих различных каверн плотности из-за выгорания ВЧ поля и пересечения траекторий ионов. Подобные модели позволяют найти энергию, передаваемую ионам и коллективным НЧ степеням свободы. Использование для 1D моделирования ионов $2 \div 5 \times 10^4$ частиц (что в 3D модели соответствовало бы $10^{13} \div 10^{14}$ частиц) позволяет без применения приближенных методов корректно рассматривать взаимодействие ионов с полем (и кстати, дает возможность проверить эффективность приближенных методов). Проводится сравнение гибридных моделей Захарова и Силина, причем особое внимание уделяется обсуждению динамики нагрева ионов при неустойчивости интенсивных ленгмюровских колебаний в неизотермической (модель Захарова) и холодной (модель Силина) плазме. В неизотермической плазме в условиях, когда плотность энергии поля меньше плотности тепловой энергии среды, доля энергии поля, которая передается ионам, пропорциональна отношению энергии поля к тепловой энергии плазмы. В холодной плазме доля энергии поля, которая передается ионам, порядка отношения инкремента к частоте, или, что практически то же самое, пропорциональна кубическому корню из отношения масс электрона и иона. В случае тяжелых ионов энергия, переданная ионному компоненту, заметно меньше, чем для случая легких ионов. Причем доля энергии, переданная ионам, в случае холодной плазмы обратно пропорциональна кубическому корню из отношения массы электрона к массе иона, а в случае горячей плазмы с ростом массы ионов падение доли энергии, переданной ионам, значительно. Показано, что в обоих случаях можно говорить о температуре ионов, причем в модели Силина оказывается почти в два раза больше быстрых ионов, чем в модели Захарова. Интенсивность НЧ спектра (ионно-звуковые волны) в случае неизотермической плазмы (модель Захарова)

одного порядка в широком интервале волновых чисел. В холодной плазме (модель Силина) в НЧ спектре доминируют длинноволновые колебания. Уменьшение уровня поглощения ВЧ поля соответствует замедлению выгорания ВЧ поля в кавернах и уширяет спектр ВЧ мод, что приводит к углублению каверн плотности плазмы, к увеличению кинетической энергии выталкиваемых из каверн ионов и росту температуры ионов.

1. В В Е Д Е Н И Е

Легко возбуждаемые различными источниками в плазме [4–12] интенсивные ленгмюровские волны оказываются параметрически неустойчивыми. Эта неустойчивость ведет к возбуждению коротковолнового спектра колебаний, синхронизированного по частоте с интенсивной ленгмюровской волной (накачки), и к образованию глубоких каверн плотности плазмы, заполненных ВЧ полем. Интерес к этим процессам был обусловлен, в частности, открывшимися возможностями нагрева электронов и ионов. Корректный аппарат описания параметрической неустойчивости длинноволновых ленгмюровских колебаний фактически был создан в основополагающих работах В. П. Силина [2] и В. Е. Захарова [13]. Уже в первых численных 1D экспериментах по параметрическому распаду ленгмюровских колебаний [14] эти теоретические представления были подтверждены [10] (см. также [15, 16] и обзор [17]). Полная теория параметрического распада плазменных колебаний была позднее представлена в книге [3].

Однако наибольший интерес у научной общественности вызвал обнаруженный и поясненный В. Е. Захаровым эффективный механизм диссипации волновой энергии – коллапс ленгмюровских волн в неизотермической плазме [1]. Это процесс формирования коротковолнового спектра возмущений и образования каверн плотности плазмы, который может быть описан с помощью уравнений Захарова [1], полученных с использованием гидродинамических уравнений для электронной и ионной жидкостей при плотности энергии длинноволнового ленгмюровского поля меньшей плотности тепловой энергии электронов плазмы. В гидродинамической модели Захарова возникают области локализации коротковолновых ленгмюровских колебаний. Из этих областей (каверн) плазма выталкивается под действием ВЧ-давления, так что плотность плазмы оказывается заметно ниже средней по объему. Дальнейшая эволюция может привести к так называемому коллапсу – сужению и углублению каверны плотности (т.н. режим с обострением). В этом случае сужение каверны, как может быть замечено в более общих моделях описания этого явления, должно сопровождаться затуханием мелкомасштабных мод ВЧ спектра на

электронах и «схлопыванием» каверны из-за выгорания ВЧ поля (так называемый «физический коллапс»).

Аналитические исследования, аппаратные и численные эксперименты еще на ранней стадии изучения этих процессов подтвердили [18–21] тот факт, что заметная часть энергии интенсивных ленгмюровских колебаний в неизотермической плазме в результате модуляционной неустойчивости переходит в энергию коротковолнового ленгмюровского спектра. Подобное явление было обнаружено и в более сильных полях в холодной плазме [22, 23], где, как показано ниже, механизм передачи энергии поля частицам плазмы оказался подобным. То есть механизм нелинейного поглощения ленгмюровских колебаний при превышении плотности тепловой энергии плазмы плотности ВЧ поля, обнаруженный В. Е. Захаровым [1], оказался применимым и для полей, плотность энергии которых существенно превышает тепловую энергию плазмы. В дальнейшем изучению этого крайне важного для физики плазмы феномена было посвящено множество работ (см. в частности [24–34]). Особо следует отметить работу Е. А. Кузнецова [35], где наиболее корректно получены уравнения модели Захарова, описывающие модуляционную неустойчивость ленгмюровской волны в неизотермической плазме. Представление о масштабах и эффективности этих исследований можно составить, обращаясь к обзорам [36, 37].

Обнаруженное В. Е. Захаровым явление поглощения волновой энергии в результате развития мелкомасштабных модуляционных неустойчивостей получило новое развитие в целом ряде приложений. Многие модели, которые описывают эти процессы, отличаются от прежних традиционных, обнаруживаются все новые особенности и вскрываются новые последствия развития модуляционных неустойчивостей.

Понятно, что в гидродинамической модели учет ряда кинетических эффектов (например, затухания Ландау) невозможен. Поэтому обычно применяется феноменологическое описание этого явления за счет введения в систему гидродинамических уравнений соответствующих слагаемых. Это в определенной степени допустимо, ибо природа затухания Ландау достаточно хорошо изучена. С другой стороны, чисто гидродинамическое описание не вполне корректно определяет поведение захваченных частиц неоднородным в пространстве полем, фактически пренебрегая их инерцией (существенной именно для ионов), что приводит к формированию не только весьма мелкомасштабных и глубоких каверн плотности плазмы, но и к режимам с обострением, которые не всегда адекватны физической реальности.

Для корректного учета затухания Ландау на электронах часто используется кинетическое уравнение для функции их распределения. Но следует иметь в виду, что при определенных условиях кинетическое затухание на электронах способно нарушить условия развития модуляционной неустойчивости за счет подавления поля еще на этапе формирования каверн, которые при этом могут искажать свою форму. То есть существуют трудности в интерпретации процесса модуляционной

неустойчивости, характер которой может довольно заметно изменяться при включении сильного кинетического затухания. Кроме того, кинетический подход, как и гидродинамический, описывает движение сплошной среды, позволяя существовать не имеющим физической перспективы решениям с обострениями вплоть до сколь угодно малых масштабов.

Ниже обсудим различные модели описания модуляционной неустойчивости интенсивных ленгмюровских колебаний в плазме, используя одномерное представление. Выбор одномерных моделей процессов, как отметил Дж. Доусон, сохраняет основные черты процессов, существенно упрощая описание и понимание физических явлений [38]. Кроме того, основной трудностью описания плазмы в трехмерных моделях является не только разница масс электронов и ионов, но и весьма большое число частиц – электронов и ионов, порядка $10^{12} \div 10^{15}$ в единице объема и более того, что вынуждает использовать достаточно сложные модели, которые тем не менее пока остаются приближенными. Это затрудняет сравнение гидродинамических, кинетических моделей и моделей, использующих частично или полностью описание с помощью крупных частиц, частиц в ячейках и т.п., моделирующих поведение ионов и электронов.

Так как в одномерных моделях, соответствующих вышеприведенному трехмерному случаю, число частиц, отвечающих ионам и электронам, порядка $10^4 \div 10^5$ в единице объема, то эти частицы по своим характеристикам близки электронам и ионам плазмы. Потому описание с помощью частиц может оказаться более корректным в рамках одномерных моделей, чем гидродинамическое или основанное на кинетических уравнениях для функции их распределения. Что может позволить внести ясность в вопрос адекватности различных способов описания процессов.

1.1. Неизотермическая плазма

Наибольший прогресс был достигнут в исследованиях модуляционной неустойчивости интенсивного ленгмюровского поля в неизотермической плазме при плотности энергии поля существенно меньшей плотности тепловой энергии электронов.

В одномерном случае в неизотермической плазме формируется мелкомасштабная солитоноподобная каверна, где ВЧ давление уравновешивается давлением плазменных электронов (см., например, [39]). Однако и в этих низкоразмерных случаях можно наблюдать процесс «схлопывания» каверн плотности плазмы, если ВЧ давление уменьшается в результате выгорания поля за счет затухания Ландау [40]. Вообще говоря, поддерживает разрушение каверны нагрев не только электронов, но и ионов, повышающий общее давление плазмы, что также разрушает

равновесное состояние этих образований. В сверхзвуковом режиме движения стенок каверны вероятность физического коллапса даже в одномерном случае может возрасти. Модуляционная неустойчивость интенсивной ленгмюровской волны в неизотермической плазме приводила также к коллективным ионным возбуждениям, в частности к генерации ионно-звуковых волн [41–44].

Сравнение одномерной кинетической модели (Власова–Пуассона), которая описывает поведение электронов и ионов с помощью кинетических уравнений для функций распределения, с гидродинамической моделью Захарова для одних и тех же значений параметров и одинаковых начальных условий было проведено, например, в работе [45], где амплитуда длинноволнового поля (накачки) со временем не изменялась. Наиболее корректным было сравнение для случая неизотермической плазмы. При формировании каверны, на начальной стадии нелинейного процесса в режиме постоянной накачки заметны отличия в формировании каверн плотности, форма которых в кинетической модели не соответствует структуре возмущений, характерных для модуляционной неустойчивости. Хотя в обоих случаях вытеснение ВЧ полем плазмы приводит к образованию областей с пониженной плотностью, величина изменений последней в модели Захарова оказалась значительно больше, чем в модели Власова–Пуассона. То есть было показано, что кинетическое затухание поля на частицах способно искажать процесс модуляционной неустойчивости, возможно приводя к иным последствиям, в частности к появлению групп быстрых частиц и преждевременному разрушению каверн плотности.

Весьма интересно сравнение гидродинамической модели Захарова с моделью, в которой использовано описание электронов с помощью кинетических уравнений для функции их распределения и гидродинамическое для ионов [46]. Здесь также рассматривался случай постоянной накачки. Данная модель значительно лучше описывает формирование каверн, характерных для развитой модуляционной неустойчивости, которые на начальной стадии нелинейного процесса практически не отличаются от подобных образований в гидродинамической модели Захарова. Надо отметить, что модели, которые используют такое кинетическое описание электронного компонента плазмы, а ионы описаны гидродинамически, позволяют не только увидеть формирование каверн плотности плазмы, но и способны более точно определить характеристики распределения электронов по скоростям, в частности их температуру, хотя не способны ответить на вопросы о распределении ионов по энергиям.

При представлении ионов частицами в рамках так называемых гибридных моделей³ (электроны описаны гидродинамически, а ионы – крупными частицами) флуктуации ионной плотности оказываются весьма значительными [47–49], по крайней мере в рассматриваемых одномерных

³ Это название было предложено авторами [49].

моделях неизотермической плазмы Захарова. Это ускоряет процесс развития модуляционной неустойчивости настолько, что линейная стадия роста возмущений практически выпадает из наблюдения (хотя это, как будет отмечено ниже, обусловлено тем, что инкремент неустойчивости в широкой области значений волнового числа оказался практически одинаковым для обсуждаемых сверхзвуковых режимов процесса).

Рассмотрение в рамках таких гибридных моделей позволяло бы учесть инерцию ионов при формировании и эволюции каверн плотности плазмы, в частности механизм их разрушения. Именно прямое моделирование коллапса методом частиц, по мнению, высказанному В. Е. Захаровым и его коллегами (см. [50]), является «наиболее последовательным». Действительно, кинетическое и гидродинамическое описания оперируют объектами, которые представляют собой не частицы, а малые фазовые объемы, и в классическом пределе эти фазовые объемы сколь угодно малы. Это приводит к меньшей инерционности вещества, чем при его описании частицами.

Что касается методов описания с помощью крупных частиц в высокоразмерных моделях, то здесь другая крайность. Крупные частицы обладают излишне большой инерционностью, потому их часто заменяют локальными объектами областями-ячейками, где происходит осреднение внутреннего содержимого. Это приближает такой подход на малых масштабах к гидродинамическому описанию, сохраняя на больших масштабах особенности метода крупных частиц и их осредненную инерционность. Можно увеличивать число модельных частиц в описании, уменьшая удельную долю (заряд и массу) каждой, хотя приблизиться к реальным физическим параметрам в трехмерном пространстве вряд ли удастся.

Ниже основное внимание уделим одномерным гибридным моделям. Используем для одномерного моделирования $2 \div 5 \times 10^4$ модельных частиц-ионов (что в трехмерной модели соответствовало бы $10^{13} \div 10^{14}$ таких объектов в объеме рассмотрения), причем эти частицы уже по своим характеристикам отвечают отдельным ионам. Потому динамика моделирующих ионы частиц в этом случае в значительной степени адекватна динамике ионов плазмы, более того механизмы обмена энергией между полем и частицами отвечают реальному взаимодействию ионов со спектром НЧ колебаний. Это означает, что в одномерных гибридных моделях с большим числом частиц можно обеспечить корректное описание нелинейного затухания Ландау медленных возмущений плотности плазмы на ионах, оставляя за рамками этого подхода проблемы описания деталей функции распределения электронов. Учет нерезонансного взаимодействия частиц-ионов с модами НЧ спектра, захват ионов в потенциальные ямы таких колебаний приводит к дополнительной неустойчивости каверн плотности, возникающих в результате модуляционной неустойчивости, а также к появлению групп быстрых частиц.

В работе [49] было проведено сравнение двух моделей – гидродинамической и гибридной моделей Захарова при одинаковых значениях параметров и одинаковых начальных условиях. За счет большего уровня флуктуаций ионной плотности количество каверн в гибридной модели оказалось заметно больше, и они менее глубокие, чем в модели Захарова. Интегральные показатели обеих моделей оказались практически одинаковыми. Недостатком работы этих авторов является несамосогласованное описание, то есть отсутствие учета возбуждаемого спектра на волну накачки. Подчеркнем, что в случаях описания в гидродинамической модели Захарова [49] и описания в рамках кинетических уравнений для функции распределения электронов и гидродинамического для ионов [51] каверны оставались неподвижными, что не наблюдалось в гибридной модели.

1.2. Холодная плазма

С появлением мощных источников энергии, которые возбуждали весьма интенсивные ленгмюровские колебания, плотность энергии поля которых существенно превосходила плотность тепловой энергии электронов, оказалась востребована разработанная В. П. Силиным [2, 3] и развитая им и его сотрудниками модель описания параметрической неустойчивости интенсивного поля в холодной плазме. При таких условиях дисперсионный член в уравнении для поля ленгмюровской волны, обусловленный тепловым движением плазмы, достаточно мал и во многих случаях им можно пренебречь, считая плазму холодной.

Действительно, если плотность энергии поля заметно превосходит плотность тепловой энергии плазмы, развитие модуляционной неустойчивости по крайней мере на начальной стадии процесса происходит по сценариям, предложенным В. П. Силиным [2, 22]. В моделях В. П. Силина мощная ленгмюровская волна в холодной плазме приводит к интенсивным осцилляциям скорости электронов, амплитуда которых сравнима с длиной волны мод возбуждаемого спектра. В этом случае, вообще говоря, неустойчивость следовало бы называть параметрической [3]. Тем не менее, обе модели Захарова и Силина оказываются физически подобны [52]. Именно из-за этого термин модуляционная неустойчивость применим для описания процесса неустойчивости мощного ленгмюровского поля и в модели Силина.

В частности, даже в одномерном численном моделировании процесса на базе обобщенных в работах [53, 54] гидродинамических уравнений Силина развивалась модуляционная неустойчивость и происходил частичный обмен энергией между ее коротковолновым спектром и интенсивной волной накачки. Результаты такого моделирования процесса качественно и количественно согласовывались с ранее проведенными в ФИАНе численными экспериментами [22]. Можно было

наблюдать режим с обострением, который характеризовался уменьшением масштаба каверны и срывом счета. Именно это последнее обстоятельство и вынудило перейти к описанию ионов частицами.

В гибридной модели Силина (электроны описаны гидродинамически, а ионы – крупными частицами) также точно формировались каверны плотности, которые затем разрушались [48], что было обусловлено не только неравновесным начальным состоянием каверн (из-за нарушения баланса между ВЧ давлением и давлением плазмы) и эффектом выгорания поля, но и учетом инерции моделирующих ионы частиц, число которых в численном эксперименте было недостаточно велико. При этом ионная каверна «схлопывалась», ионный компонент переходил в режим пересечения траекторий частиц [47, 48]. Энергия, которую отбирали ионы, оказалась порядка $(m_e / M)^{1/3}$ начальной энергии волны накачки [48] (здесь m_e и M – массы электронов и ионов, соответственно). Для электронов переход в режим пересечения траекторий мог сдерживаться существованием ионной каверны, что способно было синхронизовать выброс быстрых электронов и ионов в момент её разрушения. Эксперименты по созданию вблизи плазменного резонанса в неоднородной плазме значительной плотности энергии поля W , превышающей плотность тепловой энергии плазмы $n_{e0}T_{e0}$, с частотой, близкой к ленгмюровской, демонстрировали на фоне нагрева электронов вблизи плазменного резонанса появление коротких импульсов быстрых частиц. Причем наряду с электронами имел место вынос энергии из области плазменного резонанса ионами [55–57] с достаточно большими энергиями (см., например, обзорную работу [57]). Область источников электронных импульсов соответствовала малым размерам каверн плотности. Соотношение энергии, запасенной в быстрых ионах после разрушения каверны, примерно отвечало приведенным в теории [48, 58–60] значениям.

Часто в литературе процесс неустойчивости колебательного движения электронов с ленгмюровской частотой относительно неподвижных ионов называли осцилляторной бунемановской неустойчивостью. О подобии процессов бунемановской неустойчивости и неустойчивости ленгмюровской волны в холодной плазме свидетельствует примерное равенство инкрементов и начальной скорости относительного движения электронов и ионов. Анализ развития бунемановской неустойчивости был приведен в книге [9], где на нелинейной стадии процесса наблюдалось снижение скорости (срыв тока) относительного движения и нарастание возмущений электронного и ионного компонента, что качественно соответствует протекаемым процессам при развитии параметрической неустойчивости интенсивной ленгмюровской волны в холодной плазме.

Обсуждение процессов параметрической неустойчивости ленгмюровских волн в условиях применимости уравнений Захарова и уравнений Силина обычно проводилось теоретиками отдельно, хотя экспери-

менты часто не различали эти процессы. Поэтому представляет интерес сравнить характер протекания модуляционной неустойчивости интенсивных ленгмюровских колебаний в горячей и холодной плазме в рамках гибридных самосогласованных моделей. Основное внимание было обращено на поведение ионного компонента плазмы. Оказалось, что доля энергии ВЧ поля, передаваемая ионам в случае неизотермической плазмы порядка W/n_0T_e , а в случае холодной плазмы были подтверждены оценки [48] порядка $(m_e/M)^{1/3}$, причем в последнем случае доля быстрых частиц в распределении их по энергиям оказалась выше [58–60].

Особое внимание в данной работе уделено также сравнению характера возбуждения коллективных степеней свободы низкочастотных движений, в частности, генерация ионных волн в гибридных моделях Захарова и Силина. Важно было также выяснить, как влияет скорость выгорания ВЧ поля в кавернах на характер динамики ионов. Эти и другие вопросы обсуждаются ниже.

1.3. О с р а в н е н и и м о д е л е й З а х а р о в а и С и л и н а

Основной целью данной работы является обсуждение различных 1D моделей описания процесса модуляционной неустойчивости интенсивных длинноволновых ленгмюровских колебаний и выяснение особенностей передачи энергии ионам и коллективным ионным возмущениям в неизотермической и холодной плазме [59, 60].

Как будет показано ниже, предложенное В. П. Силичиным [2, 3] описание параметрической неустойчивости интенсивного длинноволнового ленгмюровского поля в плазме с возбуждением коротковолнового спектра ленгмюровских колебаний является универсальным как для холодной плазмы (то есть при превышении плотности энергии поля плотности тепловой энергии среды $W = |E_0|^2/4\pi \gg n_0T_e$), так и для плазмы неизотермической (при плотности тепловой энергии плазмы, превышающей плотность энергии поля, $W = |E_0|^2/4\pi \ll n_0T_e$, где E_0 – начальная напряженность поля длинноволновой ленгмюровской волны, n_0 – невозмущенная плотность плазмы, T_e – температура электронов, ионы полагаем холодными). Поэтому для получения систем уравнений каждой из моделей Силина и Захарова ниже воспользуемся подходом, который изложен в книге В. П. Силина [3].

2. ХОЛОДНАЯ ПЛАЗМА, ОДНОМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ СИЛИНА

Рассмотрим прежде случай параметрической неустойчивости внешнего длинноволнового ленгмюровского поля большой интенсивности для холодной плазмы, то есть в условиях превышения плотности энергии поля плотности тепловой энергии среды $W = |E_0|^2 / 4\pi \gg n_0 T_e$. Уравнения квазигидродинамики для частиц сорта α , как известно, имеют вид [3]

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + u_{0\alpha} \frac{\partial}{\partial x} v_\alpha - \frac{e_\alpha}{m_\alpha} E = -v_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x} v_\alpha, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + u_{0\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial x} n_\alpha + n_{\alpha 0} \frac{\partial}{\partial x} v_\alpha = -\left\{ \frac{\partial}{\partial x} (n_\alpha \cdot v_\alpha) \right\}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E = 4\pi \sum_\beta e_\beta \cdot n_\beta, \quad (2.3)$$

где $\alpha = e$ и $\alpha = i$ соответствуют электронам и ионам.

Частицы находятся в поле внешней волны, длину которой для упрощенных расчетов положим равной бесконечности, осциллируя со скоростью

$$u_{0\alpha} = -(e_\alpha |E_0| / m_\alpha \cdot \omega_0) \cdot \cos \Phi.$$

Компоненты напряженности поля внешней волны определяются следующим образом:

$$E_0 = -i(|E_0| \exp\{i\omega_0 t + i\phi\} - |E_0| \exp\{-i\omega_0 t - i\phi\}) / 2. \quad (2.4)$$

В Фурье-представлении, исключая $E_n = -4\pi i e (n_{in} - n_{en}) / k_0 n$, перепишем первое уравнение системы (2.1)–(2.3) в следующем виде:

$$\frac{\partial v_{\alpha n}}{\partial t} + u_{0\alpha} \cdot ik_0 n \cdot v_{\alpha n} + \frac{4\pi e_\alpha i}{k_0 n \cdot m_\alpha} \sum_\beta e_\beta \cdot n_{\beta n} = -ik_0 \sum_m m \cdot v_{\alpha n-m} \cdot v_{\alpha m}. \quad (2.5)$$

Используем ниже следующие переменные:

$$v_{\alpha n} = e_\alpha \cdot n_{\alpha n} \cdot \exp\{-ia_{\alpha n} \cdot \sin \Phi\}, \quad (2.6)$$

$$\theta_{\alpha n} = v_{\alpha n} \cdot \exp\{-ia_{\alpha n} \cdot \sin \Phi\}, \quad (2.7)$$

где

$$a_{\alpha n} = ne_{\alpha} k_0 E_0 / m_{\alpha} \cdot \omega_0^2, \quad (2.8)$$

$$\Phi = \omega_0 t + \phi. \quad (2.9)$$

При этом первые два уравнения системы (2.1)–(2.3) можно записать в виде

$$\frac{\partial v_{\alpha n}}{\partial t} + \theta_{\alpha n} \cdot ik_0 n \cdot e_{\alpha} n_{\alpha 0} = -ik_0 \cdot n \cdot \sum_m v_{\alpha n-m} \cdot \theta_{\alpha m}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \theta_{\alpha n}}{\partial t} + \frac{4\pi e_{\alpha} i}{k_0 n \cdot m_{\alpha}} \sum_{\beta} v_{\beta n} \cdot \exp\{i(a_{\beta n} - a_{\alpha n}) \cdot \sin \Phi\} = -ik_0 \cdot \sum_m m \theta_{\alpha n-m} \cdot \theta_{\alpha m}.$$

Очевидно, что

$$a_{in} - a_{en} = n(ek_0 E_0 / M \cdot \omega_0^2) + n(ek_0 E_0 / m_e \cdot \omega_0^2) \approx n(ek_0 E_0 / m_e \cdot \omega_0^2) = a_n,$$

где величина $k_n = nk_0$ определяет дискретный набор волновых чисел мод коротковолнового спектра. Для электронов уравнения (2.9)–(2.10) можно записать как

$$\frac{\partial v_{en}}{\partial t} - \theta_{en} \cdot ik_0 n \cdot en_0 = -ik_0 \cdot n \cdot \sum_m v_{en-m} \cdot \theta_{em}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \theta_{en}}{\partial t} - \frac{4\pi e i}{k_0 n \cdot m_e} (v_{en} + v_{in} \cdot \exp\{ia_n \cdot \sin \Phi\}) = -ik_0 \cdot \sum_m m \theta_{en-m} \cdot \theta_{em}. \quad (2.12)$$

Используем представление

$$v_{en} = \sum_s u_n^{(s)} \cdot \exp\{is\omega_0 \cdot t\} = u_n^{(0)} + u_n^{(1)} \cdot e^{i\omega_0 t} + u_n^{(-1)} \cdot e^{-i\omega_0 t} + u_n^{(2)} \cdot e^{i2\omega_0 t} + u_n^{(-2)} \cdot e^{-i2\omega_0 t}, \quad (2.13)$$

$$\theta_{en} = \sum_s v_n^{(s)} \cdot \exp\{is\omega_0 \cdot t\} = v_n^{(0)} + v_n^{(1)} \cdot e^{i\omega_0 t} + v_n^{(-1)} \cdot e^{-i\omega_0 t} + v_n^{(2)} \cdot e^{i2\omega_0 t} + v_n^{(-2)} \cdot e^{-i2\omega_0 t} \quad (2.14)$$

и известное разложение

$$\exp\{ia \cdot \sin \Phi\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(a) \cdot \exp\{im\Phi\}, \quad (2.15)$$

где $J_m(x)$ – функция Бесселя, причем $J_0(x) = J_0(-x)$, $J_1(x) = -J_1(-x) = J_{-1}(-x)$, $J_2(x) = J_{-2}(x) = J_2(-x)$ [39], после чего

найдем нерезонансные величины возмущений плотности $u_n^{(0)}, u_n^{(2)}, u_n^{(-2)}$ и скорости $v_n^{(0)}, v_n^{(2)}, v_n^{(-2)}$ в осциллирующей системе отсчета:

$$v_n^{(0)} = \frac{k_0}{\omega_0} \sum_m (n-m) [v_{n-m}^{(+1)} \cdot v_m^{(-1)} - v_{n-m}^{(-1)} \cdot v_m^{(+1)}] = \frac{1}{i\omega_0} \left[\frac{\partial v^{(+1)}}{\partial x} v^{(-1)} - \frac{\partial v^{(-1)}}{\partial x} v^{(+1)} \right]_n, \quad (2.16)$$

$$u_n^{(0)} = -v_{in} \cdot J_0(a_n) + \frac{k_0^2 n^2 \cdot m_e}{4\pi e} \cdot \sum_m v_{n-m}^{(+1)} \cdot v_m^{(-1)} = -v_{in} \cdot J_0(a_n) - \frac{m_e}{4\pi e} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (v^{(+1)} v^{(-1)}) \right]_n, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} v_n^{(\pm 2)} &= \pm \frac{2\omega_0}{3k_0 n \cdot en_0} v_{in} \cdot J_{\pm 2}(a_n) \exp[\pm 2i\phi] \mp \frac{k_0}{\omega_0} \sum_m m v_{n-m}^{(\pm 1)} \cdot v_m^{(\pm 1)} = \\ &= \pm \frac{2\omega_0}{3k_0 n \cdot en_0} v_{in} \cdot J_{\pm 2}(a_n) \exp[\pm 2i\phi] \mp \frac{1}{i\omega_0} \left[\frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right]_n, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} u_n^{(\pm 2)} &= \frac{1}{3} v_{in} \cdot J_{\pm 2}(a_n) \exp[\pm 2i\phi] - \frac{k_0^2 n \cdot en_0}{\omega_{pe}^2} \sum_s s v_s^{(\pm 1)} \cdot v_{n-s}^{(\pm 1)} = \\ &= \frac{1}{3} v_{in} \cdot J_{\pm 2}(a_n) \exp[\pm 2i\phi] + \frac{en_0}{\omega_{pe}^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right) \right]_n. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Выражения (2.16) и (2.17), пропорциональные $J_0(a_n)$, отвечают медленным движениям, а выражения (2.18) и (2.19), пропорциональные $J_{\pm 2}(a_n)$, определяются вкладом в нелинейность второй гармоники.

Для резонансных величин справедливо уравнение

$$\begin{aligned} \pm 2i\omega_0 \left[\frac{\partial u_n^{(\pm 1)}}{\partial t} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} u_n^{(\pm 1)} \mp i v_{i,n} \frac{\omega_{pe}^2 J_{\pm 1}(a_n) \exp(\pm i\phi)}{2\omega_0} \right] = \\ = k_0^2 n e n_0 \sum_m m \left[v_{n-m}^{(0)} v_m^{(\pm 1)} + v_{n-m}^{(\pm 1)} v_m^{(0)} \right] - ik_0 n (\pm i\omega_0) \sum_m \left[u_{n-m}^{(0)} v_m^{(\pm 1)} + u_{n-m}^{(\pm 1)} v_m^{(0)} \right] + \\ + k_0^2 n e n_0 \sum_m m v_{n-m}^{(\mp 1)} v_m^{(\pm 2)} - ik_0 n (\pm i\omega_0) \sum_m \left[u_{n-m}^{(\pm 2)} v_m^{(\mp 1)} \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

В работах [52–53] было использовано представление $u_n^{(\pm 1)} = \pm k_0 n \cdot en_0 v_n^{(\pm 1)} / \omega_0 = ik_0 n \cdot E_n^{(\pm 1)} / 4\pi$ (где $v_n^{(\pm 1)} = \pm ieE_n^{(\pm 1)} / m\omega_0$). В этом случае, выделяя в правую часть (2.20) слагаемые, ответственные только за электронную нелинейность, перепишем это уравнение для коротковолновых возмущений в виде

$$\begin{aligned} & \pm 2i\omega_0 \left\{ \frac{\partial u_n^{(\pm 1)}}{\partial t} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} u_n^{(\pm 1)} \mp iv_{in} \cdot \frac{\omega_{pe}^2 J_{\pm 1}(a_n) \cdot \exp(\pm i\phi)}{2\omega_0} \right\} \cdot e^{\pm i\omega_0 t} + \\ & + \frac{\omega_0^2}{en_0} n \cdot e^{\pm i\omega_0 t} \sum_m \frac{v_{in-m}}{m} [u_m^{(\mp 1)} \cdot J_{\pm 2}(a_{n-m}) \exp[\pm 2i\phi] + u_m^{(\pm 1)} \cdot J_0(a_{n-m})] = (k_0 n \cdot en_0 / \omega_0) \cdot I, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где вклад электронной нелинейности I можно представить в виде

$$\begin{aligned} I = & - \frac{\partial}{\partial x} \left(v^{(\pm 1)} \left[\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} v^{(-1)} - \frac{\partial v^{(-1)}}{\partial x} v^{(1)} \right] \right) \mp v^{(\pm 1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [v^{(1)} v^{(-1)}] - \\ & - \frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} \left[\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} v^{(-1)} - \frac{\partial v^{(-1)}}{\partial x} v^{(1)} \right] \pm v^{(\mp 1)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right] \pm \\ & \pm v^{(\mp 1)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right]. \end{aligned}$$

Очевидно, что правая часть уравнения (2.21), отвечающая вкладу электронной нелинейности в рассматриваемом одномерном случае, оказывается равной нулю, что прежде независимо отмечалось в работах В. П. Силина [2, 17] и В. Е. Захарова [13].

Перепишем (2.21) в виде [52]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_n^{(\pm 1)}}{\partial t} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} u_n^{(\pm 1)} \mp iv_{in} \cdot \frac{\omega_{pe}^2 J_{\pm 1}(a_n) \cdot \exp(\pm i\phi)}{2\omega_0} \mp \\ & \mp i \frac{\omega_0 n}{2en_0} \sum_m \frac{v_{in-m}}{m} [u_m^{(\mp 1)} \cdot J_{\pm 2}(a_{n-m}) \exp[\pm 2i\phi] + u_m^{(\pm 1)} \cdot J_0(a_{n-m})] = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Если использовать представление для резонансного поля в виде $(E_n^{(1)} \cdot e^{i\omega_0 t} + E_n^{(-1)} \cdot e^{-i\omega_0 t}) / 2$, как это было сделано в работе Е. А. Кузнецова [35] (см. ниже (3.10)), тогда $E_n^{(\pm 1)} \rightarrow E_n^{(\pm 1)} / 2 = -4\pi i u_n^{(\pm 1)} / k_0 n$, и уравнение (2.22) можно записать иначе:

$$\frac{\partial E_n^{(\pm 1)}}{\partial t} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} E_n^{(\pm 1)} \mp \frac{8\pi\omega_{pe} v_{in}}{2k_0 n} J_{\pm 1}(a_n) \cdot \exp(\pm i\phi) \mp \quad (2.23)$$

$$\mp i \frac{\omega_0}{2en_0} \sum_m v_{in-m} [E_m^{(\mp 1)} \cdot J_{\pm 2}(a_{n-m}) \exp[\pm 2i\phi] + E_m^{(\pm 1)} \cdot J_0(a_{n-m})] = 0.$$

Приведем также уравнение для волны накачки

$$\frac{\partial E_0^{(\pm 1)}}{\partial t} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} E_0^{(\pm 1)} \mp \quad (2.24)$$

$$\mp \frac{8\pi\omega_0}{2en_0 k_0} \sum_m \frac{v_{i,-m}}{m} [u_m^{(\mp 1)} \cdot J_{\pm 2}(a_{-m}) \exp[\pm 2i\phi] + u_m^{(\pm 1)} \cdot J_0(a_{-m})] = 0.$$

Из представления волны накачки, соответствующего выбранной скорости осцилляций $u_{0\alpha} = -(e_\alpha E_0 / m_\alpha \cdot \omega_0) \cdot \cos \Phi$ (2.4), получим⁴ $E_0 \rightarrow -iE_0$, $E_0^* \rightarrow iE_0^*$, и для E_0 уравнение (2.24) можно переписать [52]:

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} - i\Delta E_0 = \frac{8\pi i \omega_0}{2en_0 k_0} \sum_m \frac{v_{i,-m}}{m} [u_m^{(-1)} \cdot J_2(a_{-m}) \exp[+2i\phi] + u_m^{(+1)} \cdot J_0(a_{-m})], \quad (2.25)$$

где $\Delta = (\omega_{pe}^2 - \omega_0^2) / 2\omega_0$, или, выражая возмущения плотности через напряженности электрического поля мод,

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} - i\Delta E_0 = -\frac{\omega_0}{2en_0} \sum_m v_{i,-m} [E_m^{(-1)} \cdot J_2(a_m) \exp[2i\phi] + E_m^{(+1)} \cdot J_0(a_m)]. \quad (2.26)$$

Здесь члены в правой части (2.25) и (2.26), пропорциональные $J_0(a_n)$, отвечают медленным движениям, а члены, пропорциональные $J_{\pm 2}(a_n)$, определяются вкладом в нелинейность второй гармоники. Медленно изменяющаяся во времени напряженность электрического поля

⁴ Фактически это означает, что $|E_0| \exp\{i\phi\} = E_0 \exp\{i\pi/2\}$, ибо фаза $\phi_0 = i\pi/2$ связана с выбором вида скорости осцилляций.

$$\begin{aligned}
\bar{E}_n &= \left(-\frac{4\pi i}{k_0 n} \right) (\langle \{v_{en} \cdot \exp\{-ia_n \cdot \sin \phi\}\rangle + v_{in}) = \\
&= \left(-\frac{4\pi i}{k_0 n} \right) \{v_{in}[1 - J_0^2(a_n) + \frac{2}{3}J_2^2(a_n)] + [u_n^{(1)}J_1(a_n) \cdot e^{-i\phi} + u_n^{(-1)} \cdot J_{-1}(a_n) \cdot e^{i\phi}] - \\
&\quad - \frac{n^2}{en_0} J_0(a_n) \sum_m \frac{u_{n-m}^{(1)} \cdot u_m^{(-1)}}{(n-m)m} - \frac{n}{en_0} J_2(a_n) \cdot \sum_m \frac{1}{m} [u_{n-m}^{(1)} \cdot u_m^{(1)} e^{-2i\phi} + u_{n-m}^{(-1)} \cdot u_m^{(-1)} e^{2i\phi}]\}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

может быть представлена иначе:

$$\begin{aligned}
\bar{E}_n &= \left(-\frac{4\pi i}{k_0 n} \right) v_{in} [1 - J_0^2(a_n) + \frac{2}{3}J_2^2(a_n)] + \frac{1}{2} [E_n^{(1)} J_1(a_n) \cdot e^{-i\phi} + E_n^{(-1)} \cdot J_{-1}(a_n) \cdot e^{i\phi}] - \\
&\quad - \frac{ink_0}{16\pi en_0} J_0(a_n) \sum_m E_{n-m}^{(1)} \cdot E_m^{(-1)} - \\
&\quad - \frac{ik_0}{16\pi en_0} J_2(a_n) \cdot \sum_m (n-m) [E_{n-m}^{(1)} \cdot E_m^{(1)} e^{-2i\phi} + E_{n-m}^{(-1)} \cdot E_m^{(-1)} e^{2i\phi}],
\end{aligned} \tag{2.28}$$

что позволяет описывать ионы крупными частицами, уравнения движения для которых

$$\frac{d^2 x_s}{dt^2} = \frac{e}{M} \sum_n \bar{E}_n \cdot \exp\{ik_0 n x_s\}, \tag{2.29}$$

а плотность ионов определяется выражениями

$$v_{in} = en_{in} = en_0 \cdot \frac{k_0}{2\pi} \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp[-ink_0 \cdot x_s(x_{s_0}, t)] \cdot dx_{s_0}. \tag{2.30}$$

Заметим, что описание ионов крупными частицами, кроме всего прочего, как показано в [48], позволяет увеличить устойчивость расчетной схемы. Используя уравнения (2.9)–(2.10), в которых правыми частями можно пренебречь вследствие их малости, можно перейти к гидродинамическому описанию ионов. Уравнение для ионной плотности при этом [52]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v_{in}}{\partial t^2} &= -\Omega_i^2 \{v_{in}[1 - J_0^2(a_n) + \frac{2}{3}J_2^2(a_n)] + [u_n^{(1)}J_1(a_n) \cdot e^{-i\phi} + u_n^{(-1)} \cdot J_{-1}(a_n) \cdot e^{i\phi}] - \\
&\quad - \frac{n^2}{en_0} J_0(a_n) \sum_m \frac{u_{n-m}^{(1)} \cdot u_m^{(-1)}}{(n-m)m} - \frac{n}{en_0} J_2(a_n) \cdot \sum_m \frac{1}{m} [u_{n-m}^{(1)} \cdot u_m^{(1)} e^{-2i\phi} + u_{n-m}^{(-1)} \cdot u_m^{(-1)} e^{2i\phi}]\},
\end{aligned} \tag{2.31}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_{in}}{\partial t^2} = & -\Omega_i^2 \{v_{in}[1 - J_0^2(a_n) + \frac{2}{3} J_2^2(a_n)] + \frac{ik_0 n}{8\pi} [E_n^{(1)} J_1(a_n) \cdot e^{-i\phi} + E_n^{(-1)} \cdot J_{-1}(a_n) \cdot e^{i\phi}] + \\ & + \frac{n^2 k_0^2}{64\pi^2 e n_0} \sum_m J_0(a_n) \cdot E_{n-m}^{(1)} \cdot E_m^{(-1)} + \\ & + \frac{nk_0^2}{64\pi^2 e n_0} J_2(a_n) \cdot \sum_m (n-m) [E_{n-m}^{(1)} \cdot E_m^{(1)} e^{-2i\phi} + E_{n-m}^{(-1)} \cdot E_m^{(-1)} e^{2i\phi}] \}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Можно убедиться в том, что комплексно сопряженное уравнение (2.24) при нижнем знаке принимает вид (при суммировании можно заменить немой индекс $m \rightarrow -m$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial (E_{-n}^{(-1)})^*}{\partial t} - i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} (E_{-n}^{(-1)})^* - \frac{4\pi\omega_{pe} (v_{i,-n})^*}{k_0 n} J_1(a_n) \cdot \exp(i\phi) - \\ - i \frac{\omega_0}{2en_0} \sum_m (v_{i,-n+m})^* \cdot [(E_{-m}^{(1)})^* \cdot J_{-2}(a_{-n+m}) \exp[2i\phi] + (E_{-m}^{(-1)})^* \cdot J_0(a_{-n+m})] = 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

В то же время для положительных индексов это же уравнение может быть записано

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_n^{(1)}}{\partial t} - i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} E_n^{(1)} - \frac{4\pi\omega_{pe} v_{in}}{k_0 n} J_{\pm 1}(a_n) \cdot \exp(i\phi) - \\ - i \frac{\omega_0}{2en_0} \sum_m v_{in-m} \cdot [E_m^{(-1)} \cdot J_2(a_{n-m}) \exp[2i\phi] + E_m^{(1)} \cdot J_0(a_{n-m})] = 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Легко видеть, что при $E_{-n}^{(-1)} = (E_n^{(1)})^*$ и $v_{i,-n} = (v_{i,n})^*$ уравнения (2.33) и (2.34) идентичны. Точно также можно убедиться, что из подобных преобразований следует $E_n^{(-1)} = (E_{-n}^{(1)})^*$ и $v_{i,n} = (v_{i,-n})^*$. То есть возмущения заряда ионов обладают симметрией $n_{i,-n} = (n_{i,n})^*$. При этом для корректного описания процесса неустойчивости достаточно использовать компоненты ВЧ поля $E_n^{(1)}$, $E_{-n}^{(1)}$ и $E_0^{(1)}$, а также возмущения заряда ионов $v_{i,n}$ при положительно определенных значениях индекса n . Так как остальные величины выражаются через них, то есть можно отказаться от

использования верхнего индекса. Система уравнений (2.23), (2.32) в этих условиях может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_n}{\partial t} - i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} E_n - \frac{4\pi\omega_{pe}v_{in}}{k_0 n} J_1(a_n) \cdot \exp(i\phi) - \\ - i \frac{\omega_0}{2en_0} \sum_m v_{in-m} [E_{-m}^* \cdot J_2(a_{n-m}) \exp[2i\phi] + E_m \cdot J_0(a_{n-m})] = 0, \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_{in}}{\partial t^2} = -\Omega_i^2 \{v_{in} [1 - J_0^2(a_n) + \frac{2}{3} J_2^2(a_n)] + \frac{ik_0 n}{8\pi} J_1(a_n) [E_n \cdot e^{-i\phi} - E_{-n}^* \cdot e^{i\phi}] + \\ + \frac{n^2 k_0^2}{64\pi^2 en_0} \sum_m J_0(a_n) \cdot E_{n-m} \cdot E_{-m}^* + \\ + \frac{nk_0^2}{64\pi^2 en_0} J_2(a_n) \cdot \sum_m (n-m) [E_{n-m} \cdot E_m \cdot e^{-2i\phi} + E_{m-n}^* \cdot E_{-m}^* \cdot e^{2i\phi}]\}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

или, при описании ионов частицами, можно воспользоваться уравнениями движения (2.29) и выражением для ионной плотности (2.30), где напряженность медленно меняющегося электрического поля

$$\begin{aligned} \bar{E}_n = \left(-\frac{4\pi i}{k_0 n}\right) v_{in} [1 - J_0^2(a_n) + \frac{2}{3} J_2^2(a_n)] + \frac{1}{2} J_1(a_n) [E_n \cdot e^{-i\phi} - E_{-n}^* \cdot e^{i\phi}] - \\ - \frac{ink_0}{16\pi en_0} J_0(a_n) \sum_m E_{n-m} \cdot E_{-m}^* - \\ - \frac{ik_0}{16\pi en_0} J_2(a_n) \cdot \sum_m (n-m) [E_{n-m} \cdot E_m \cdot e^{-2i\phi} + E_{m-n}^* \cdot E_{-m}^* \cdot e^{2i\phi}]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Для E_0 также можно записать уравнение

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} - i\Delta E_0 = -\frac{\omega_0}{2en_0} \sum_m v_{i,-m} [E_{-m}^* \cdot J_2(a_m) \exp[2i\phi] + E_m \cdot J_0(a_m)]. \quad (2.38)$$

Отметим, что величины, отвечающие разному знаку нижнего индекса, при этом независимы, что приводит к пространственному искажению интегральных возмущений, не только из-за изменения амплитуды, но и за счет пространственного сдвига отдельных компонент пакета.

2.1. Уравнения гидродинамической модели

Силина в условиях $W = |E_0|^2 / 4\pi \gg n_0 T_e$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial E_n}{\partial t} - i \left(\frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} + \beta n^2 \right) E_n + \theta \cdot \frac{n^6}{n_M^6} \cdot E_n - \frac{4\pi\omega_{pe}v_{in}}{k_0 n} J_1(a_n) \cdot \exp(i\phi) - \\
 & - i \frac{\omega_0}{2en_0} \sum_m v_{in-m} \cdot [E_{-m}^* \cdot J_2(a_{n-m}) \exp[2i\phi] + E_m \cdot J_0(a_{n-m})] = 0, \\
 & \frac{\partial^2 v_{in}}{\partial t^2} = -\Omega_i^2 \{ v_{in} [1 - J_0^2(a_n)] + \frac{2}{3} J_2^2(a_n) \} + \frac{ik_0 n}{8\pi} J_1(a_n) [E_n \cdot e^{-i\phi} - E_{-n}^* \cdot e^{i\phi}] + \\
 & + \frac{n^2 k_0^2}{64\pi^2 en_0} \sum_m J_0(a_n) \cdot E_{n-m} \cdot E_{-m}^* + \\
 & + \frac{nk_0^2}{64\pi^2 en_0} J_2(a_n) \cdot \sum_m (n-m) [E_{n-m} \cdot E_m \cdot e^{-2i\phi} + E_{m-n}^* \cdot E_{-m}^* \cdot e^{2i\phi}], \\
 & \frac{\partial E_0}{\partial t} - i\Delta E_0 = -\frac{\omega_0}{2en_0} \sum_m v_{i,-m} \cdot [E_{-m}^* \cdot J_2(a_m) \exp[2i\phi] + E_m \cdot J_0(a_m)].
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

2.2. Уравнения гибридной модели Силина

в условиях $W = |E_0|^2 / 4\pi \gg n_0 T_e$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial E_n}{\partial t} - i \left(\frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} + \beta n^2 \right) E_n + \theta \cdot \frac{n^6}{n_M^6} \cdot E_n - \frac{4\pi\omega_{pe}v_{in}}{k_0 n} J_1(a_n) \cdot \exp(i\phi) - \\
 & - i \frac{\omega_0}{2en_0} \sum_m v_{in-m} \cdot [E_{-m}^* \cdot J_2(a_{n-m}) \exp[2i\phi] + E_m \cdot J_0(a_{n-m})] = 0, \\
 & \bar{E}_n = \left(-\frac{4\pi i}{k_0 n} \right) v_{in} [1 - J_0^2(a_n)] + \frac{2}{3} J_2^2(a_n) + \frac{1}{2} J_1(a_n) [E_n \cdot e^{-i\phi} - E_{-n}^* \cdot e^{i\phi}] - \\
 & - \frac{ink_0}{16\pi en_0} J_0(a_n) \sum_m E_{n-m} \cdot E_{-m}^* - \\
 & - \frac{ik_0}{16\pi en_0} J_2(a_n) \cdot \sum_m (n-m) [E_{n-m} \cdot E_m \cdot e^{-2i\phi} + E_{m-n}^* \cdot E_{-m}^* \cdot e^{2i\phi}],
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\frac{d^2 x_s}{dt^2} = \frac{e}{M} \sum_n \bar{E}_n \cdot \exp\{ik_0 n x_s\},$$

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} - i\Delta E_0 = -\frac{\omega_0}{2en_0} \sum_m v_{i,-m} [E_{-m}^* \cdot J_2(a_m) \exp[2i\phi] + E_m \cdot J_0(a_m)]$$

$$v_{in} = en_{in} = en_0 \cdot \frac{k_0}{2\pi} \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp[-ink_0 \cdot x_s(x_{s0}, t)] \cdot dx_{s0},$$

где слагаемое $\theta \cdot \frac{n^6}{n_M^6} \cdot E_n$ в первых уравнениях систем (2.39) и (2.40) моделирует затухание ВЧ мод спектра на электронах, причем $n_M = 20$,

$\Delta = \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0}$, кроме того в первые уравнения (2.39) и (2.40) добавлен

дисперсионный член, пропорциональный $\beta = \frac{k_0^2 v_{Te}^2}{2\omega_0}$.

3. НЕИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ ПЛАЗМА, ОДНОМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАХАРОВА

Получим уравнения, описывающие неустойчивость интенсивного длинноволнового ленгмюровского поля в неизотермической плазме с возбуждением коротковолнового спектра ленгмюровских колебаний в условиях, когда плотность тепловой энергии плазмы превышает плотность энергии поля $W = |E_0|^2 / 4\pi \ll n_0 T_e$ (так называемая модель Захарова). Описание поведения электронов плазмы в условиях, когда фазовые скорости ленгмюровских волн превосходят их тепловую скорость, может быть гидродинамическим. Ионы также можно описывать как гидродинамически, так и с помощью крупных частиц. Наиболее корректный вывод этих уравнений, как было отмечено выше, сделан в работе [35]. Однако ниже для общности рассмотрения воспользуемся подходом В. П. Силина, изложенном в книге [3] и использованном в [52, 53] для описания параметрической неустойчивости интенсивного длинноволнового ленгмюровского поля в плазме.

Ниже ограничимся одномерным случаем. При этом для скорости v_e и плотности n_e электронов справедливы следующие уравнения:

$$\frac{\partial v_e}{\partial t} + \frac{e}{m_e} E + \frac{1}{m_e n_e} \frac{\partial P_e}{\partial x} = -\left\{v_e \cdot \frac{\partial}{\partial x} v_e\right\}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + n_0 \frac{\partial}{\partial x} v_e = -\frac{\partial}{\partial x} (n_e \cdot v_e), \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E = 4\pi e \cdot (n_i - n_e), \quad (3.3)$$

где $E = -\partial\phi/\partial x$, ϕ – напряженность и потенциал электрического поля колебаний, $P_e = n_e T_e$ – давление, T_e – температура электронов в энергетических единицах и $v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e}$ – тепловая скорость электронов, n_i – плотность ионов плазмы, n_0 – невозмущенная плотность как электронов, так и ионов плазмы.

Представим электрическое поле в виде $E = \sum_n E_n \exp\{ik_n x\} = \sum_n E_n \exp\{ink_0 x\}$, где величина $k_n = nk_0$, как отмечено выше, определяет дискретный набор волновых чисел мод спектра. Перепишем уравнения (3.1) – (3.2) в виде

$$\frac{\partial v_{en}}{\partial t} - \frac{e}{m_e} E_n + \frac{v_{Te}^2}{n_0} \cdot ik_0 n \cdot n_e = -ik_0 \sum_m m \cdot v_{en-m} \cdot v_{em}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial n_{en}}{\partial t} + n_0 \cdot ik_0 n \cdot v_{en} = -ik_0 \cdot n \cdot \sum_m n_{en-m} \cdot v_{em}, \quad (3.5)$$

$$ik_0 n \cdot E_n = 4\pi e (n_{in} - n_{en}). \quad (3.6)$$

Исключим $E_n = -4\pi i e (n_{in} - n_{en}) / k_0 n$, и (3.4) примет вид

$$\frac{\partial v_{en}}{\partial t} = \frac{4\pi e^2 i}{k_0 n \cdot m_e} (n_{in} - n_{en}) - \frac{v_{Te}^2}{n_0} \cdot ik_0 n \cdot n_e - ik_0 \sum_m m \cdot v_{en-m} \cdot v_{em}. \quad (3.7)$$

Представим, следуя [16], подобно тому, как это сделано в [35], плотность и скорость электронов в виде

$$-en_{en} = \sum_s u_n^{(s)} \cdot \exp\{is\omega_0 \cdot t\} = u_n^{(0)} + u_n^{(1)} \cdot e^{i\omega_0 t} + u_n^{(-1)} \cdot e^{-i\omega_0 t} + u_n^{(2)} \cdot e^{i2\omega_0 t} + u_n^{(-2)} \cdot e^{-i2\omega_0 t}, \quad (3.8)$$

$$v_{en} = \sum_s v_n^{(s)} \cdot \exp\{is\omega_0 \cdot t\} = v_n^{(0)} + v_n^{(1)} \cdot e^{i\omega_0 t} + v_n^{(-1)} \cdot e^{-i\omega_0 t} + v_n^{(2)} \cdot e^{i2\omega_0 t} + v_n^{(-2)} \cdot e^{-i2\omega_0 t}, \quad (3.9)$$

$$E_n = \sum_s E_n^{(s)} \cdot \exp\{is\omega_0 \cdot t\} = \bar{E}_n + \frac{1}{2}(E_n^{(1)} \cdot e^{i\omega_0 t} + E_n^{(-1)} \cdot e^{-i\omega_0 t}) + E_n^{(2)} \cdot e^{i2\omega_0 t} + E_n^{(-2)} \cdot e^{-i2\omega_0 t}. \quad (3.10)$$

Воспользуемся линейными соотношениями $u_{n-m}^{(\pm 1)} = \pm k_0(n-m) \cdot en_0 \omega_0^{-1} v_{n-m}^{(\pm 1)}$ и найдем нерезонансные величины

$$v_n^{(0)} = \frac{1}{en_0} \sum_m (u_{n-m}^{(1)} \cdot v_m^{(-1)} + u_{n-m}^{(-1)} \cdot v_m^{(1)}) = \frac{1}{i\omega_0} \left[\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} v^{(-1)} - \frac{\partial v^{(-1)}}{\partial x} v^{(1)} \right]_n, \quad (3.11)$$

$$u_n^{(0)} + en_n = -\frac{m_e}{4\pi e} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (v^{(1)} v^{(-1)}) \right]_n, \quad (3.12)$$

$$v_n^{(\pm 2)} = \mp \frac{k_0}{\omega_0} \sum_m m v_{n-m}^{(\pm 1)} \cdot v_m^{(\pm 1)} = \mp \frac{1}{i\omega_0} \left[\frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right]_n, \quad (3.13)$$

$$u_n^{(\pm 2)} = -\frac{k_0^2 n \cdot en_0}{\omega_{pe}^2} \sum_s s v_s^{(\pm 1)} \cdot v_{n-s}^{(\pm 1)} = +\frac{en_0}{\omega_{pe}^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right) \right]_n. \quad (3.14)$$

Уравнение для резонансных величин принимает вид

$$\begin{aligned} & \pm 2i\omega_0 \left[\frac{\partial u_n^{(\pm 1)}}{\partial t} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} u_n^{(\pm 1)} \mp i \frac{\omega_0 n}{2n_0} \sum_m n_{in-m} \frac{u_m^{(\pm 1)}}{m} \right] = \\ & + k_0^2 n \cdot en_0 \sum_m m [v_{n-m}^{(0)} \cdot v_m^{(\pm 1)} + v_{n-m}^{(\pm 1)} \cdot v_m^{(0)}] - \\ & - ik_0 \cdot n \cdot (\pm i\omega_0) \sum_m [(u_{n-m}^{(0)} + v_{in-m}) \cdot v_m^{(\pm 1)} + u_{n-m}^{(\pm 1)} \cdot v_m^{(0)}] + \\ & + k_0^2 n \cdot en_0 \sum_m m v_{n-m}^{(\mp 1)} \cdot v_m^{(\pm 2)} - ik_0 \cdot n \cdot (\pm i\omega_0) \sum_m u_{n-m}^{(\pm 2)} \cdot v_m^{(\mp 1)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Правая часть (3.15) определяет так называемую электронную нелинейность, которая в одномерном случае, как было показано в работе В. Е. Захарова [13], обращается в нуль (см. также [35]). Действительно, правая часть (3.15) равна $(k_0 n e n_0 / \omega_0) I$, где для I справедливо тождество

$$\begin{aligned} I = & \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ v^{(\pm 1)} \left[\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} v^{(-1)} - \frac{\partial v^{(-1)}}{\partial x} v^{(1)} \right] \mp v^{(\pm 1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [v^{(1)} v^{(-1)}] - \frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} \left[\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} v^{(-1)} - \frac{\partial v^{(-1)}}{\partial x} v^{(1)} \right] \pm \right. \right. \\ & \left. \left. \pm v^{(\mp 1)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right] \pm v^{(\mp 1)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Таким образом, для резонансных возмущений плотности справедливо уравнение

$$\frac{\partial u_n^{(\pm 1)}}{\partial t} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} u_n^{(\pm 1)} \mp \frac{\omega_0}{2n_0} n \cdot \sum_m \frac{n_{in-m}}{m} u_m^{(\pm 1)} = 0 \quad (3.17)$$

или, переходя к напряженности электрического поля,

$$E_n^{(\pm 1)} = 4\pi e u_n^{(\pm 1)} / 2k_0 n, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial E_n^{(\pm 1)}}{\partial t} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} E_n^{(\pm 1)} \mp i \frac{\omega_0}{2n_0} \cdot \sum_m n_{in-m} E_m^{(\pm 1)} = 0. \quad (3.19)$$

Ионы можно описывать крупными частицами, уравнение движения для которых (2.29) и плотность ионов (2.30). Компонента медленно меняющегося электрического поля может быть определена следующим образом. Так как для медленных движений справедливо приближение [35]

$$n_e = n_0 \cdot \exp\left(\frac{e\bar{\phi} - U}{T}\right), \quad (3.20)$$

то, удерживая в уравнении Пуассона первые члены разложения, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{\phi} = 4\pi e \cdot \left(\frac{e\bar{\phi} - U}{T} n_0 - n_i\right), \quad (3.21)$$

где $\bar{\phi}$ и $\bar{E}_n = -ik_0 n \bar{\phi}_n$ потенциал и напряженность усредненного по быстрым осцилляциям поля. Для ВЧ потенциала

$$U = \sum_n U_n \exp\{ik_0 n x\}, \quad (3.22)$$

причем

$$U_n = \frac{e^2}{4m\omega_{pe}^2} \sum_m E_{n-m}^{(1)} E_m^{(-1)}. \quad (3.23)$$

Очевидно, левой частью уравнения (3.23) можно пренебречь в условиях $k_0^2 n^2 v_{Te}^2 / \omega_{pe}^2 = v_{Te}^2 / v_{\Phi}^2 \ll 1$, и тогда напряженность усредненного по быстрым осцилляциям поля

$$\bar{E}_n = -ik_0 n \bar{\phi}_n = \frac{-ik_0 n n_i T}{en_0} + \frac{-ik_0 n e}{4m\omega_p^2} \sum_m E_{n-m}^{(1)} E_m^{(-1)}. \quad (3.24)$$

Описывать ионы можно и гидродинамически. Уравнения для медленных возмущений плотности и скорости ионов имеют вид

$$\frac{\partial n_{in}}{\partial t} + v_{in} \cdot ik_0 n \cdot n_0 = -ik_0 \cdot n \cdot \sum_m n_{in-m} \cdot v_{im}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial v_{in}}{\partial t} - \frac{e}{M} \bar{E} = -ik_0 \cdot \sum_m m v_{i,n-m} \cdot v_{i,m}. \quad (3.26)$$

Правыми частями (3.25) и (3.26) пренебрежем, полагая их малыми. Тогда для возмущений плотности справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2 n_{in}}{\partial t^2} + k_0^2 n^2 c_s^2 n_{in} = -\frac{k_0^2 n^2}{16\pi M} \sum_m E_{n-m}^{(1)} E_m^{(-1)}, \quad (3.27)$$

где скорость звука $c_s = \sqrt{T_e / M}$.

Уравнения (3.19) и (3.27) при $\omega_0 = \omega_{pe}$ в виде

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{v_{Te}^2}{2\omega_{pe}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} E - \frac{\omega_{pe}}{2n_0} \cdot n_i E = 0, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial^2 n_i}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} = \frac{1}{16\pi M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |E|^2 \quad (3.29)$$

известны как уравнения Захарова [11] в одномерном случае.

Можно убедиться в том, что комплексно сопряженное уравнение (3.19) при верхнем знаке принимает вид

$$\frac{\partial (E_n^{(1)})^*}{\partial t} + i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} (E_n^{(1)})^* + i \frac{\omega_0}{2n_0} \cdot \left[n_{i,n}^* (E_0^{(1)})^* + \sum_{m \neq 0} n_{i,n-m}^* (E_m^{(1)})^* \right] = 0. \quad (3.30)$$

В то же время для отрицательных индексов это же уравнение может быть записано (при суммировании можно заменить немой индекс $m \rightarrow -m$)

$$\frac{\partial E_{-n}^{(-1)}}{\partial t} + i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} E_{-n}^{(-1)} + i \frac{\omega_0}{2n_0} \cdot \left[n_{i,-n} E_0^{(-1)} + \sum_{m \neq 0} n_{i,-n+m} E_{-m}^{(-1)} \right] = 0. \quad (3.31)$$

Легко видеть, что при $E_{-n}^{(-1)} = (E_n^{(1)})^*$ и $n_{i,-n} = (n_{i,n})^*$ уравнения (3.30) и (3.31) идентичны. Точно также можно убедиться, что из подобных преобразований следует $E_n^{(-1)} = (E_{-n}^{(1)})^*$ и $n_{i,-n} = (n_{i,n})^*$. То есть возмущение плотности ионов обладает симметрией $n_{i,-n} = (n_{i,n})^*$. При этом для корректного описания такой ионной каверны достаточно использовать компоненты ВЧ поля $E_n^{(1)}$, $E_{-n}^{(1)}$ и $E_0^{(1)}$, а также возмущения плотности ионов $n_{i,n}$, так как остальные величины выражаются через них, то есть можно отказаться от использования верхнего индекса. Система уравнений (3.18), (3.27) в этих условиях может быть записана в виде

$$\frac{\partial E_n}{\partial t} - i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} E_n - i \frac{\omega_0}{2n_0} \cdot \sum_m n_{i,n-m} E_m = 0, \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial^2 n_{i,n}}{\partial t^2} + k_0^2 n^2 c_s^2 n_{i,n} = - \frac{k_0^2 n^2}{16\pi M} \sum_m E_{n-m} E_{-m}^*, \quad (3.33)$$

или, при описании ионов частицами, можно воспользоваться уравнениями движения (2.29) и выражением для ионной плотности (2.30), где напряженность медленно меняющегося электрического поля

$$\bar{E}_n = -ik_0 n \bar{\phi}_n = \frac{-ik_0 n n_m T}{en_0} + \frac{-ik_0 n e}{4m\omega_{pe}^2} \sum_m E_{n-m} E_{-m}^*. \quad (3.34)$$

Для поля накачки, которой является длинноволновая ленгмюровская волна большой амплитуды, получим

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} - i \frac{\omega_0}{2n_0} \cdot \sum_m n_{i,-m} E_m = 0. \quad (3.35)$$

Дозвуковой режим. В условиях, когда $\partial^2 n_{i,n} / n_{i,n} \partial t^2 \ll k_n^2 c_s^2$, где k_n – волновой вектор колебаний, уравнение (3.33) упрощается:

$$n_{in} = - \frac{1}{16\pi M c_s^2} \sum_m E_{n-m}^{(1)} E_m^{(-1)}. \quad (3.36)$$

Подставляя значения n_{in} в уравнение (3.28), представим его в виде

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{v_{Te}^2}{\omega_{pe}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} E + \frac{\omega_{pe}}{32Mc_s^2 n_0} |E|^2 E = 0. \quad (3.37)$$

В другой форме может быть записано в виде

$$\frac{\partial E_n}{\partial t} - i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} E_n + \frac{i\omega_0}{32\pi M n_0 c_s^2} \cdot \sum_m \sum_p E_{n-m-p} E_{-p}^* E_m = 0. \quad (3.38)$$

Сверхзвуковой режим. При $\partial^2 n_{i,n} / n_{i,n} \partial t^2 \gg k_n^2 c_s^2$ возможно развитие сверхзвукового режима процесса. В этом случае уравнение (3.27) для медленных возмущений принимает вид

$$\frac{\partial^2 n_{in}}{\partial t^2} = -\frac{k_0^2 n^2}{16\pi M} \sum_m E_{n-m} E_{-m}^* \quad (3.39)$$

или

$$\frac{\partial^2 n_i}{\partial t^2} = \frac{1}{16\pi M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |E|^2. \quad (3.40)$$

Для волны большой амплитуды (волны накачки), волновой вектор которой стремится к нулю, справедливо уравнение (3.35), а для коротковолновых возмущений

$$\frac{\partial E_n}{\partial t} - i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} E_n - i \frac{\omega_0}{2n_0} \cdot \left[n_{in} E_0 + \sum_{m \neq 0} n_{in-m} E_m \right] = 0, \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial^2 n_{in}}{\partial t^2} = -\frac{k_0^2 n^2}{16\pi M} \left[E_n E_0^* + E_0 E_{-n}^* + \sum_{m \neq 0, n} E_{n-m} E_{-m}^* \right]. \quad (3.42)$$

Приведем также значение для медленно меняющейся напряженности поля с учетом волны накачки

$$\bar{E}_n = -ik_0 n \bar{\phi}_n = \frac{-ik_0 n n_{in} T}{en_0} + \frac{-ik_0 n e}{4m\omega_p^2} \left[E_n E_0^* + E_0 E_{-n}^* + \sum_{m \neq 0, n} E_{n-m} E_{-m}^* \right]. \quad (3.43)$$

Ниже ограничимся рассмотрением так называемого сверхзвукового режима неустойчивости, при котором $\partial^2 n_{i,n} / n_{i,n} \partial t^2 \gg k_n^2 c_s^2$.

3.1. Гидродинамическая модель Захарова

(сверхзвуковой режим) в условиях

$$W = |E_0|^2 / 4\pi \ll n_0 T_e$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_n}{\partial t} - i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} E_n + \theta \cdot \frac{n^6}{n_M^6} \cdot E_n - i \frac{\omega_0}{2n_0} \cdot \left[n_{in} E_0 + \sum_{m \neq 0} n_{in-m} E_m \right] &= 0, \\ \frac{\partial^2 n_{i,n}}{\partial t^2} &= - \frac{k_0^2 n^2}{16\pi M} \left[E_n E_0^* + E_0 E_{-n}^* + \sum_{m \neq 0, n} E_{n-m} E_{-m}^* \right], \\ \frac{\partial E_0}{\partial t} - i \frac{\omega_0}{2n_0} \cdot \sum_m n_{i,-m} E_m &= 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

3.2. Гибридная модель Захарова

в условиях $W = |E_0|^2 / 4\pi \ll n_0 T_e$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_n}{\partial t} - i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} E_n + \theta \cdot \frac{n^6}{n_M^6} \cdot E_n - i \frac{\omega_0}{2n_0} \cdot \left[n_{in} E_0 + \sum_{m \neq 0} n_{in-m} E_m \right] &= 0, \\ \bar{E}_n = -ik_0 n \tilde{\phi}_n &= \frac{-ik_0 n n_{i,n} T}{en_0} + \frac{-ik_0 n e}{4m\omega_p^2} \left[E_n E_0^* + E_0 E_{-n}^* + \sum_{m \neq 0, n} E_{n-m} E_{-m}^* \right], \\ \frac{d^2 x_s}{dt^2} &= \frac{e}{M} \sum_n \bar{E}_n \cdot \exp\{ik_0 n x_s\}, \\ n_{im} &= n_0 \cdot \frac{k_0}{2\pi} \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp[-ink_0 \cdot x_s(x_{s0}, t)] \cdot dx_{s0}, \\ \frac{\partial E_0}{\partial t} - i \frac{\omega_0}{2n_0} \cdot \sum_m n_{i,-m} E_m &= 0, \end{aligned} \quad (3.45)$$

где слагаемое $\theta \cdot E_n \cdot n^6 / n_M^6$ в первых уравнениях систем (3.44) и (3.45) моделирует затухание ВЧ мод спектра на электронах, причем $n_M = 20$.

При $a_n \ll 1$ уравнения гидродинамической модели (2.39) и гибридной модели (2.40) Силина с учетом представления $J_1(a_n) \approx a_n / 2$, $J_0(a_n) \approx 1$, $J_2(a_n) \approx a_n^2 / 8$ совпадают с полученными для неизотерми-

ческой плазмы гидродинамической модели (3.44) и гибридной модели (3.45) Захарова, соответственно, с точностью до величины расстройки и с учетом замен $E_0 \rightarrow -iE_0$ и $E_0^* \rightarrow iE_0^*$.

4. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

Ограничимся ниже рассмотрением наиболее интересного случая длинноволновой накачки. Из уравнений Захарова (3.44) в линейном случае, используя представление $\partial E / E \partial t \Rightarrow i\Omega$, можно получить дисперсионное уравнение для неизоэнтальпического случая в сверхзвуковом пределе $\partial^2 n_{in} / n_{in} \partial t^2 \gg k_0^2 c_s^2 n^2$

$$-\Omega^2 \{ \Omega^2 - \Delta^2 \} + \Delta \cdot A = 0, \quad (4.1)$$

где расстройка равна $\Delta = v_{Te}^2 n^2 k_0^2 / 2\omega_p$, $A = \frac{1}{2} \frac{m_e}{M} \frac{k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_{pe}} \frac{|E_0|^2}{4\pi n_0 T_e} \omega_{pe}^3$.

С другой стороны, линеаризуя уравнения (2.39), получим точно такое же дисперсионное уравнение для случая холодной плазмы, где, однако,

$\Delta = \Delta_0 = \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0}$, а величина $A = J_1^2(a_n) \omega_{pe}^3 \frac{m}{M}$. Заметим, что дис-

персионные уравнения (4.1) при $a_n \ll 1$ и с учетом замен $E_0 \rightarrow -iE_0$ и $E_0^* \rightarrow iE_0^*$ при соответствующем выборе расстройки в этих двух случаях совпадают. Положительная определенность расстройки $\Delta = v_{Te}^2 n^2 k_0^2 / 2\omega_p$ в модели Захарова очевидна, а что касается расстройки $\Delta = (\omega_{pe}^2 - \omega_0^2) / 2\omega_0$ в модели Силина, то в книге [12] показано, что она также положительно определена и порядка δ , по крайней мере в случае возбуждения длинноволновых ленгмюровских колебаний сильноточным релятивистским пучком электронов.

Для нормированных величин $\delta' = \Omega / \omega_{pe}$ и $A' = A / \omega_{pe}^3$ в таблице 1 приведены значения, отвечающие двум моделям описания модуляционной неустойчивости ленгмюровских волн.

В модели Захарова нормированная на ленгмюровскую частоту поправка $\delta' = \Omega / \omega_{pe}$, вообще говоря, должна быть записана в виде

$$(\delta')^2 = \frac{(\Delta')^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\Delta')^4}{4} + B(\Delta')^2}, \quad (4.2)$$

где

$$B = \frac{1}{2} \frac{m_e}{M} \frac{|E_0|^2}{4\pi n_0 T_e}. \quad (4.3)$$

Таблица 1

Значения	Модель Захарова	Модель Силина
Квадрат поправки к нормированной частоте	$(\delta')_1^2 = \frac{(\Delta')^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\Delta')^4}{4} + A'(\Delta')}$	
Расстройки	$(\Delta')_n = \frac{\omega_{pe}^2 + v_{Te}^2 k_0^2 n^2 - \omega_0^2}{2\omega_{pe}^2} \approx \frac{v_{Te}^2 k_0^2 n^2}{2\omega_{pe}^2}$	$\Delta' = \Delta'_0 = \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_{pe}^2}$
Коэффициент А	$A' = A'(n) = \frac{1}{2} \frac{m_e}{M} \frac{k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_{pe}} \frac{ E_0 ^2}{4\pi n_0 T_e}$	$A' = A'(n) = \frac{m_e}{M} J_1^2(a_n)$

Так как $[(\Delta')^4 + 4B(\Delta')^2]^{1/2} - (\Delta')^2$ с ростом Δ' монотонно растет, не имея выраженного максимума, то при малых $(\Delta')^2 \ll B$, $\Omega^2 \approx -(\Delta')\sqrt{B}$, при этом $|\Omega^2| < B$, а инкремент неустойчивости равен

$$\text{Im} \Omega = |\Omega| \approx \left(\frac{k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_{pe}^2} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} \frac{|E_0|^2}{4\pi n_0 T_e} \frac{m_e}{M} \right)^{1/4} \omega_{pe}. \quad (4.4)$$

В случае больших $(\Delta')^2 \gg B$, $\Omega^2 \approx -B$, при этом инкремент неустойчивости

$$\text{Im} \Omega = |\Omega| \approx \left(\frac{1}{2} \frac{|E_0|^2}{4\pi n_0 T_e} \frac{m_e}{M} \right)^{1/2} \omega_{pe}. \quad (4.5)$$

То есть инкремент увеличивается с ростом волнового числа возмущений, выходя при больших значениях волнового числа на свое наибольшее значение (4.5).

В модели Силина при значениях расстройки $(\Delta')^3 = A'/2$ или, что то же самое, $\Delta' = (m_e/2M)^{1/3} J_1^{2/3}(a_{n_m})$, относительный инкремент достигает значений [16]

$$\delta' = \pm \frac{i}{\sqrt[3]{2}} \cdot (A')^{1/3} = \pm \frac{i}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{m_e}{M} \right)^{1/3} J_1^{2/3}(a_n). \quad (4.6)$$

Возмущения с волновым числом $k_m = k_0 n_m$, для которых $a_{n_m} = 1.84$, значение функции Бесселя максимально и величина относительного инкремента для таких возмущений достигает своего наибольшего значения

$$\delta'_{\max} = \pm 0.44i \left(\frac{m_e}{M} \right)^{1/3}. \quad (4.7)$$

Таким образом, в модели Силина наибольшим инкрементом обладают волновые вектора, для которых $a_{n_m} = 1.84$. При развитии неустойчивости амплитуда волны накачки падает и максимум инкремента перемещается в коротковолновую область.

Важно отметить, что значения максимальных инкрементов параметрической неустойчивости в модели Захарова для сверхзвуковых возмущений подрастают при уменьшении их масштаба. Причем если в модели Захарова уменьшение амплитуды поля накачки приводит к снижению инкрементов во всей области неустойчивости, то в модели Силина подобный процесс сдвигает максимум инкремента в коротковолновую область, не уменьшая его значения (4.7). Таким образом, процесс движения энергии в коротковолновую часть спектра в двух моделях в значительной степени обусловлен линейными механизмами роста возмущений.

Кроме того, следует отметить взрывной рост амплитуд мод спектра неустойчивости в сверхзвуковом режиме процесса распада интенсивного ленгмюровского поля в неизотермической плазме в условиях $W = |E_0|^2 / 4\pi n_0 T_e$, который обусловлен большими значениями инкремента практически во всей области неустойчивости. Именно этот взрывной рост амплитуд спектра на начальной стадии процесса наблюдали во многих численных экспериментах.

5. МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЛЕНГМЮРОВСКОЙ ВОЛНЫ В ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЕ

5.1. Гидродинамическая модель Силина

Неустойчивость мощной длинноволновой (длину волны полагаем равной бесконечности) ленгмюровской волны (волны накачки) с возбуждением коротковолнового спектра ленгмюровских колебаний может быть описана уравнениями гидродинамической модели Силина (2.39) при

$W = |E_0|^2 / 4\pi \gg n_0 T_e$. Воспользуемся следующими переменными и па-

раметрами $\beta = \frac{k_0^2 v_{Te}^2}{2\omega_0}, \quad \Delta_0 = \frac{\omega_0}{2} (1 - \omega_{pe}^2 / \omega_0^2), \quad \delta = (m_e / M)^{1/3} \omega_{pe},$

$a = ek_0 E_0 / m_e \omega_0^2, \quad \tau = \delta t, \quad N_n = \frac{u_{en}^{(1)}}{en_0 n}, \quad M_n = \frac{v_{in}}{en_0} \frac{\omega_0}{\delta},$ v_{in} – Фурье-

компонент ионной плотности, с волновым числом nk_0 ,

$E_n = |E_n| \cdot \exp\{i\Psi_n\}$ – медленно меняющаяся комплексная амплитуда напряженности электрического поля плазменных электронных колебаний, волновое число которых равно $k_n = nk_0$, k_0 – выбранный достаточно

малый масштаб в пространстве волновых чисел, $a_n = a \cdot n$, n – целые

числа, не равные нулю и ± 1 , то есть $n(ek_0 E_0 / m_e \cdot \omega_0^2) = nk_0 b = a_n$. Связь между возмущениями плотности и электрического поля определяется

соотношением $E_n = 4\pi e N_n / 2k_0 n$, слагаемое $\theta \cdot \frac{n^6}{n_M^6} \cdot E_n$ в первом урав-

нении (2.39) моделирует затухание ВЧ мод спектра на электронах, при-

чем $n_M = 20$. Начальные условия: $\beta = 10^{-2} \delta$, $-n_{\max} < n < n_{\max} = 40 \div 100$,

$a|_{\tau=0} = 6 \cdot 10^{-2}$, $\Psi_n|_{\tau=0} = 0$, $M_n|_{\tau=0} = 3 \cdot 10^{-4}$, $N_n|_{\tau=0} = 10^{-4} / n$. Поведение

спектра мод неустойчивости как функция времени представлено на рис. 1.

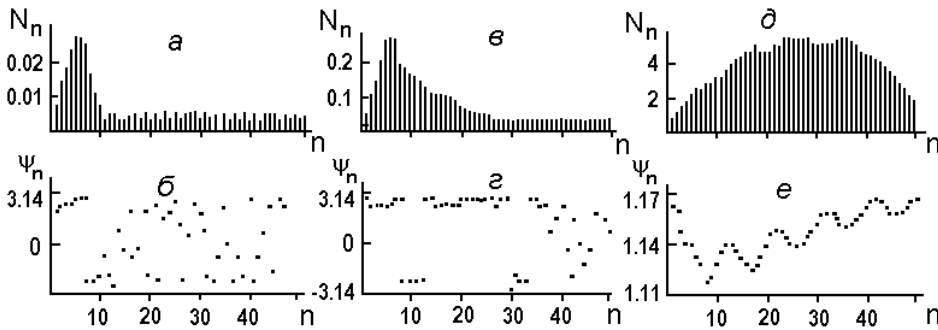


Рис.1. Процесс формирования волнового пакета ленгмюровских волн при неустойчивости [54].

Видны синхронизация фаз (нижние рисунки) и уширение спектра $N_n = N_n \exp(i\Psi_n)$ (верхние рисунки) для моментов времени

$\tau = 4$ (а, б); $\tau = 7$ (в, г); $\tau = 8$ (д, е) [46]

Важно отметить, что быстрое расширение спектра возмущений в коротковолновую область обусловлено в значительной степени неустойчивостью волны накачки, что следует из рассмотрения линейного инкремента. Действительно, расстройка $\Delta = (\omega_{pe}^2 - \omega_0^2) / 2\delta\omega_{pe}$ достигает величины $(m_e/2M)^{1/3} J_1^{2/3}(a_{n_m})$, в случае максимального инкремента линейной неустойчивости, нормированного на частоту ленгмюровской волны [16],

$$\delta / \omega_{pe} = \frac{i}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{m_e}{M} \right)^{1/3} J_1^{2/3}(a_n). \quad (5.1)$$

С уменьшением амплитуды волны накачки максимум инкремента смещается в сторону больших волновых чисел, не меняя своего значения. Кроме этого, волна накачки способствует синхронизации фаз растущих мод спектра, формируя тем самым пространственную структуру каверны (ямки плотностей электронов и ионов плазмы, формы которых, вообще говоря, не совпадают) и ВЧ наполнения. Решая систему уравнений (3.19), можно убедиться [54] в том, что энергия, заключенная в коротковолновом быстро уширяющемся в пространстве волновых чисел спектре ленгмюровских волн, возбуждаемых волной накачки, растет. Неустойчивость приводит к сужению линейных размеров каверны в конфигурационном пространстве, формированию достаточно резких перепадов плотности, «опрокидывание» которых должно, вообще говоря, приводить к интенсивной передаче энергии спектра электронам плазмы. Однако в рамках данной модели этот процесс описать не представляется возможным. Поведение ионной плотности также демонстрирует склонность к переходу к режиму с обострением. Неустойчивость расчетной схемы при этом вынудила перейти к описанию ионов частицами.

5.2. Гибридная модель Силина

В гибридной модели Силина электроны описаны гидродинамически, а ионы – крупными частицами. Уравнения модели (2.40) решались при выборе тех же переменных параметров, что и уравнения гидродинамической модели. При расчетах использовалось соотношение $k_0 x_s = 2\pi\xi_s$, частицы, моделирующие ионы (число которых выбиралось из соотношения «50 частиц на длине самой коротковолновой моды»), равномерно располагались на интервале $-0.5 < \xi_s < 0.5$. Анализ динамики процесса показал [48], что и в этой модели также формировались каверны плотности, которые затем разрушались. Причем процесс разрушения уже не сопровождался срывом счета. Причиной разрушения

каверн было выгорание поля и инерция моделирующих ионы частиц, число которых в численном эксперименте не превышало $5 \cdot 10^3$, число мод спектра $40 \div 100$.

При этом ионная каверна «схлопывалась», ионный компонент переходил в режим пересечения траекторий частиц [47, 48]. Энергия, которую отбирали ионы, оказалась порядка $(m_e / m_i)^{1/3}$ начальной энергии волны накачки [48] (здесь m_e и m_i – массы электронов и ионов, соответственно). При малых уровнях поглощения и малых начальных флуктуациях поведение волны накачки представлено на рис. 2. Большая часть энергии поля накачки в результате неустойчивости переходит в энергию коротковолнового ленгмюровского спектра, затем можно наблюдать частичный обмен энергией между спектром и волной накачки и при $\tau > 40$ ионная каверна «схлопывается», то есть переходит в режим пересечения траекторий частиц.

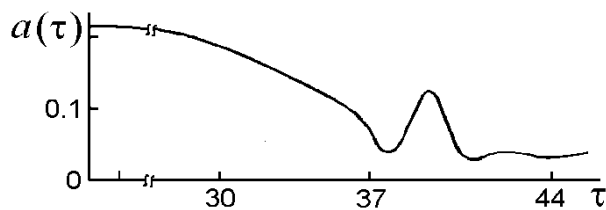


Рис. 2. Амплитуда поля накачки $a(\tau)$ как функция времени τ в гибридной модели в случае слабого поглощения энергии коротковолновых колебаний [48]

Развитие неустойчивости в гибридных моделях (2.40) детально было позднее рассмотрено в работах [58–59]. Основное внимание было уделено режимам сильного поглощения энергии коротковолнового спектра за счет затухания Ландау, которое было введено феноменологически. Темп затухания ВЧ мод определял скорость выгорания поля в кавернах плотности, откуда ВЧ поле вытесняло частицы. Основная энергия неустойчивости сначала была сосредоточена в ВЧ поле коротковолнового ленгмюровского спектра, при этом формировался НЧ спектр возмущений. Затем энергия ВЧ спектра в значительной степени передавалась электронам. Сформированные каверны плотности при этом «схлопывались», траектории ионов пересекались, возмущения ионной плотности сглаживались, их масштаб увеличивался. Связь между ионными возмущениями и ВЧ полем ослаблялась, и неустойчивость насыщалась. Амплитуда основной волны, испытав несколько небольших осцилляций, стабилизировалась на достаточно низком уровне. Основная энергия теперь содержалась в возмущениях электронного компонента плазмы. Некоторая небольшая часть энергии порядка $(m_e / m_i)^{1/3}$ начальной энергии волны переходила в кинетическую энергию ионов.

5.3. Сравнение гидродинамической и гибридной моделей Силина

Поведение спектра убеждает в том, что в области взаимодействия формируется каверна плотности, причем ее размеры быстро уменьшаются [48]. В дальнейшем при слабых уровнях поглощения энергии в системе неустойчивость переходит в режим частичного обмена энергией между возбужденным спектром модуляционной неустойчивости и волной накачки. Однако дальнейшее уменьшение размеров каверны, то есть возникающий в отсутствие электронного давления в холодной плазме коллапс, приводит в гидродинамической модели к срыву счета.

С другой стороны, инерция ионов, которая в гибридной модели учитывается естественным образом, позволяет избежать срыва счета, который наблюдается в гидродинамической модели при критическом уменьшении размеров каверны. Ионы, переходя в режим пересечения траекторий, разрушают каверну, и неустойчивость насыщается. При этом можно выяснить характер распределения ионов по скоростям. Энергия, которую отбирают ионы, оказывается порядка $(m_e/m_i)^{1/3}$ начальной энергии волны накачки [48]. Запасенная в коротковолновом ленгмюровском спектре энергия скорее всего также должна быть в значительной степени передана электронам плазмы, причем для электронов переход в режим пересечения траекторий (в этом случае гидродинамические уравнения не применимы для описания электронов) может сдерживаться существованием ионной каверны, что способно синхронизировать выброс быстрых электронов и ионов в момент её разрушения.

6. МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЛЕНГМЮРОВСКОЙ ВОЛНЫ В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

Неустойчивость мощной длинноволновой ленгмюровской волны с возбуждением коротковолнового спектра ленгмюровских колебаний может быть описана уравнениями гидродинамической модели Захарова (3.44) или гибридной модели (3.45) в условиях $W = |E_0|^2 / 4\pi \ll n_0 T_e$. Однако прежде обсудим результаты изучения подобной неустойчивости с помощью уравнений Власова для функций распределения электронов и ионов.

6.1. Кинетическая (Власова–Пуассона) модель

Рассмотрим кинетическую модель (Власова–Пуассона), которая описывает поведение электронов и ионов с помощью кинетических уравнений для функций распределения [45].

$$\frac{\partial f_e}{\partial \tau} + v_e \frac{\partial f_e}{\partial x} - [E(t) + E(x, t)] \frac{\partial f_e}{\partial v_e} = 0, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial \tau} + \sqrt{\mu \alpha} \cdot v_i \frac{\partial f_i}{\partial x} + \sqrt{\mu / \alpha} \cdot [E(t) + E(x, t)] \frac{\partial f_i}{\partial v_i} = 0, \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial \tau} = n_i - n_e, \quad (6.3)$$

где возмущенная плотность частиц $n_\beta = \int_{-\infty}^{\infty} dv_\beta \cdot f_\beta(x, v_\beta, \tau)$, $\tau = \omega_{pe} t$,

$\mu = m_e / m_i$, $\alpha = T_{i0} / T_{e0}$, координата нормирована на $\lambda_{de} = \sqrt{T_e / 4\pi e^2 n_0}$, скорость – на $v_{T\beta} = \sqrt{T_\beta / m_\beta}$. Данная модель может быть названа как кинетическая (Власова–Пуассона) модель [45].

6.2. Комбинированная модель Власова–Пуассона

Если описывать модуляционную неустойчивость с помощью кинетического уравнения для функции распределения электронов, а для ионов использовать гидродинамическое представление [46], то к уравнениям для возмущений плотности и скорости ионов

$$\frac{\partial n_i}{\partial \tau} - \frac{\partial(n_i v_i)}{\partial \tau} = 0, \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial \tau} - v_i \frac{\partial(v_i)}{\partial \tau} = \mu [E(t) + E(x, t)] \quad (6.5)$$

следует добавить уравнения для функции распределения электронов и уравнение Пуассона (6.1) и (6.3) [37]. В двух последних случаях авторы [45, 46] амплитуду E_0 интенсивной ленгмюровской волны $E(t) = E_0 \cos \omega_0 t$ (здесь волны накачки) полагали постоянной [37] или медленно затухающей [38] вследствие столкновительных механизмов поглощения энергии в плазме. Учет влияния спектра $E(x, t)$ неустойчивости на волну накачки не проводился.

6.3. Сравнение кинетических (Власова–Пуассона) моделей и гидродинамической модели Захарова [45]

Кинетическая модель (Власова–Пуассона), которая описывает поведение электронов и ионов с помощью кинетических уравнений для функций распределения (6.1)–(6.3), рассматривалась для области $L \approx 105\lambda_{de}$, отношение начальной плотности энергии к тепловой энергии плазмы $W/n_0T_e \approx 3.125 \cdot 10^{-2}$, отношение масс электрона и иона $\mu = m_e/m_i = 1/1836$, количество позиций в реальном и фазовом пространстве – по 256. Гидродинамическая модель Захарова (3.44) применялась для тех же условий. Амплитуда длинноволнового поля (накачки) E_0 со временем не изменялась. Для наиболее корректного сравнения двух моделей был выбран случай неизотермической плазмы $\alpha = T_i/T_e = 0.1$. Ниже на рис. 3 показан профиль плотности энергии коротковолнового поля $|E(x,t)|^2$ (рис. 3а) и плотности плазмы n_{in} (рис. 3б).

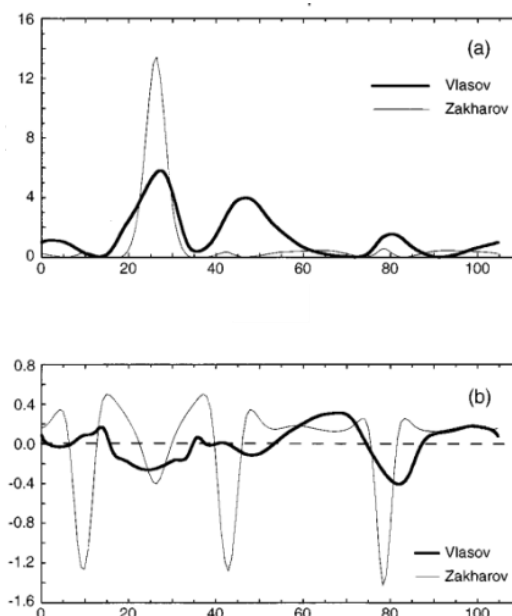


Рис. 3. Профиль плотности энергии коротковолнового поля в пространстве $|E(x,t)|^2$ (а) и отклонений плотности плазмы n_{in} (б) в момент времени $t = 1600\omega_{pe}^{-1}$ для двух моделей [37]

Можно видеть, что учет кинетического затухания на частицах в модели Власова–Пуассона приводит к деформации каверны, максимальные значения плотности энергии коротковолнового поля и возмущения плотности плазмы при этом заметно меньше, чем в модели Захарова. Формирование каверны на начальной стадии нелинейного процесса в режиме постоянной накачки (который лишь в некоторой степени подобен эволюции начального состояния) обнаруживает отличия в формировании каверн плотности, форма которых в кинетической модели не соответствует структуре возмущений, характерных для модуляционной неустойчивости. Хотя в обоих случаях вытеснение ВЧ полем плазмы происходит в областях с пониженной плотностью. Это свидетельствует о том, что выбор начальных условий способен повлиять на развитие неустойчивости, которая может принимать характер, несколько отличающийся от модуляционной. Причиной такого отличия в степени влияния кинетического поглощения энергии поля частицами, возникновение при этом групп быстрых частиц, что способно нарушить топологию каверн.

Если модифицировать модель Власова–Пуассона, сохранив представление электронов с помощью кинетического уравнения для функции распределения (6.1), а для ионов воспользоваться уравнениями квазигидродинамики (6.4), (6.5) и уравнением Пуассона (6.3), то поведение этой модели и гидродинамической модели Захарова в значительной степени становится подобным. Каверны плотности и характер распределения плотности коротковолнового спектра практически не отличаются, однако модифицированная модель Власова–Пуассона способна определить характеристики распределения электронов по скоростям, в частности их температуру, хотя не дает представления о распределении ионов по энергиям.

Отметим, что описания динамики процесса развития коротковолнового спектра и формирования каверн плотности в рамках моделей Власова–Пуассона и гидродинамической модели Захарова [45, 46] были не самосогласованными, то есть обратное влияние возбуждаемого спектра на волну накачки не было учтено. Тем не менее, подобные сравнения позволили обнаружить сильные и слабые стороны подходов, выявить особенности развития процессов в условиях различных моделей.

6.4. Сравнение гидродинамической и гибридной моделей Захарова

Обсудим далее две модели: традиционную гидродинамическую модель Захарова (3.44) и гибридную модель Захарова (3.45). Последнее уравнение для накачки двух этих систем уравнений авторы [49] заменили простой динамикой слабого затухания накачки. Для этого авторы [49] положили все параметры одинаковыми, отношение масс $m_e/M = 1/(16 \cdot 1836)$, плазма изотермическая, область рассмотрения $L = 1,8 \cdot 10^3 \lambda_{de}$, для гидродинамического описания использовано 600 мод

спектра, для гибридного – 3000 позиций, то есть координатная область разбита именно на такое количество участков. Так же, как и в предыдущих работах [45–46], авторы [49] рассмотрели не самосогласованный случай постоянного или слабо меняющегося поля интенсивной ленгмюровской волны, влиянием на которую спектра возбуждаемых коротковолновых возмущений пренебрегалось. Однако, как и в предыдущем случае, важным итогом такого сравнения является выявление отличий в динамике процесса, описываемого разными моделями.

Прежде всего, авторы [49] отметили значительно более быстрый рост возмущений в гибридной модели, который они пояснили большими значениями возмущений ионной плотности в выбранной ими координатной сетке. Интегральные показатели – энергия ВЧ коротковолнового спектра на начальной стадии модуляционной неустойчивости – оказались подобны (рис. 4).

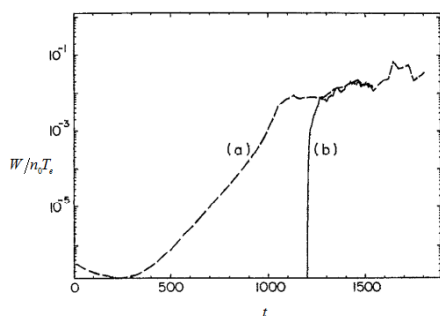


Рис. 4. Отношение плотности энергии поля к плотности тепловой энергии электронов для случаев гидродинамической (а) и гибридной (б) моделей Захарова [41] (по оси ординат) от времени t

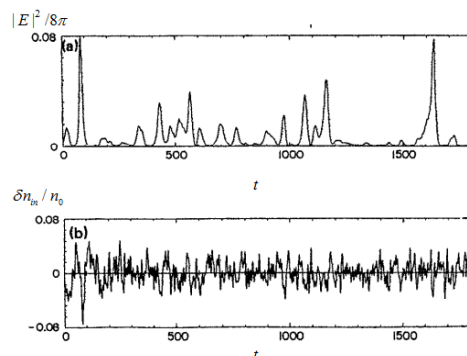


Рис. 5. Огибающая ВЧ поля $|E|^2 / 8\pi$ (а) и относительные отклонения плотности ионов $\delta n_{in} / n_0$ (б) в гибридной модели в момент времени $340 \omega_{pe}^{-1}$ [49]

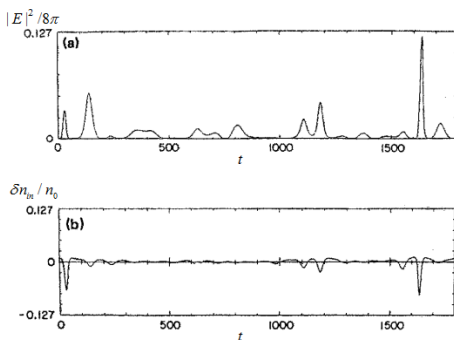


Рис. 6. Огибающая ВЧ поля $|E|^2 / 8\pi$ (а) и относительные отклонения плотности ионов $\delta n_{in} / n_0$ (б) в гидродинамической модели в момент времени $1363 \omega_{pe}^{-1}$ [49]

На начальной стадии развитого режима процесса было обнаружено, что выполняется соотношение между относительными возмущениями плотности ионов $\delta n_{in} / n_0$ и плотностью энергии коротковолнового поля $|E|^2 = \sum_n |E_n|^2$ (рис. 5, 6).

$$\delta n_{in} / n_0 \propto |E|^2 / 8. \quad (6.6)$$

Здесь для удобства сравнения выбраны подобные режимы неустойчивости, которые характеризуются примерно равными максимальными амплитудами поля и возмущений плотности. Прежде всего, следует отметить заметно большее число каверн плотности плазмы, значительные флуктуации плотности ионов. Соответственно, количество солитонобразных возмущений плотности коротковолнового поля также больше в гибридной модели. Максимальная глубина каверн в гибридной модели всегда меньше, характерные размеры вдоль системы подобны. Оценки нагрева ионов в условиях постоянной величины или медленного изменения поля накачки вряд ли представляют интерес, ибо влияние коротковолнового спектра на накачку авторы не учитывали.

7. СРАВНЕНИЕ ГИБРИДНЫХ МОДЕЛЕЙ ЗАХАРОВА И СИЛИНА

Ниже проведем сравнение динамики развития модуляционной неустойчивости интенсивной ленгмюровской волны для двух представляющих значительный интерес случаев. В первом случае, описываемом моделью Силина, плотность энергии поля значительно превышает плотность тепловой энергии холодной плазмы. Во втором случае, описываемом моделью Захарова, плотность энергии поля заметно меньше тепловой энергии неизотермической плазмы, где температура ионов много меньше температуры электронов.

Основное внимание обратим на эффективность передачи энергии ионам и ионным возмущениям в результате развития модуляционных неустойчивостей в случаях неизотермической и холодной плазмы в рамках гибридных моделей.

7.1. У с л о в и я м о д е л и р о в а н и я

Для каждой модели рассмотрены также два случая легких и тяжелых ионов. Параметры для этих случаев представлены в таблице 2. Также представляет интерес выяснить, как влияет затухание ВЧ спект-

ра и соответственно выгорание поля в кавернах плотности на характер передачи энергии ионам плазмы.

Таблица 2

Параметры легких и тяжелых ионов в гибридных моделях Силина и Захарова

Модели /ионы	Легкие ионы	Тяжелые ионы
		$\frac{M}{m_e} = 2 \cdot 10^3$
Гибридная модель Силина	$\frac{m_e}{M} \frac{\omega_p^2}{\delta^2} = 0.43$ $\frac{\delta}{\omega_0} = 0.44 \left(\frac{m_e}{M} \right)^{1/3} = 0.034$ $\frac{\omega_0}{\delta} \approx \frac{\omega_{pe}}{\delta} = 29.4$	$\frac{m_e}{M} \frac{\omega_p^2}{\delta^2} = 0.1$ $\frac{\delta}{\omega_0} = 0.44 \left(\frac{m_e}{M} \right)^{1/3} = 0.0088$ $\frac{\omega_0}{\delta} \approx \frac{\omega_{pe}}{\delta} = 113.6$
Гибридная модель Захарова	$\frac{m_e}{M} \frac{\omega_p^2}{\delta^2} = 2 \frac{n_0 T_e}{W} = 2 \cdot 10$ $\frac{\omega_0}{\delta} = 2 \left(\frac{n_0 T_e}{W} \right)^{1/2} \left(\frac{M}{m_e} \right)^{1/2} = 282.6$ $\frac{\delta}{\omega_0} = \frac{\delta}{\omega_{pe}} = 3.5 \cdot 10^{-3}$	$\frac{m_e}{M} \frac{\omega_p^2}{\delta^2} = 2 \frac{n_0 T_e}{W} = 2 \cdot 10$ $\frac{\omega_0}{\delta} = 2 \left(\frac{n_0 T_e}{W} \right)^{1/2} \left(\frac{M}{m_e} \right)^{1/2} = 2234.4$ $\frac{\delta}{\omega_0} = \frac{\delta}{\omega_{pe}} = 4.5 \cdot 10^{-4}$

Количество крупных частиц, моделирующих ионы, выбрано $0 < s \leq S = 20000$. Крупные частицы равномерно распределены на интервале $-1/2 < \xi < 1/2$, $\xi = k_0 x / 2\pi$, $v_s = d\xi / d\tau$, начальные условия для частиц $d\xi_s / d\tau |_{\tau=0} = v_s |_{\tau=0} = 0$, число мод спектра $-N < n < N$, $N = S / 100$. Начальная нормированная амплитуда интенсивных колебаний $a_0(0) = ek_0 E_0(0) / m_e \omega_{pe}^2 = 0.06$. Начальные амплитуды ВЧ мод задаются выражением $e_n |_{\tau=0} = e_{n0} = (2 + g) \cdot 10^{-3}$ в модели Силина и $e_n |_{\tau=0} = e_{n0} = (0.5 + g) \cdot 10^{-4}$ в модели Захарова, где $g \in [0; 1]$ – случайное число, $ek_0 E_n / m_e \omega_{pe}^2 = e_n \cdot \exp(i\psi_n)$, $\psi_n |_{\tau=0}$ также случайным образом распределялись в интервале $0 \div 2\pi$. Для возмущений плотности ионов n_{ni} и медленно меняющегося электрического поля \bar{E}_n использованы также безразмерные представления

$$M_n = M_{nr} + iM_{ni} = n_{ni} \omega_{pe} / n_0 \delta = \frac{\omega_{pe}}{\delta} \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp(2\pi n \cdot \xi_s) \cdot d\xi_{s0}$$

и $ek_0 \bar{E}_n / m_e \omega_{pe}^2 = E_{nr} + iE_{ni}$.

Программа, реализующая математическую модель задачи, была создана с использованием технологии JCUDA. JCUDA обеспечивает взаимодействие с технологией CUDA из Java-программы и дает возможность проводить вычисления с высокой скоростью параллельно на графическом процессоре.

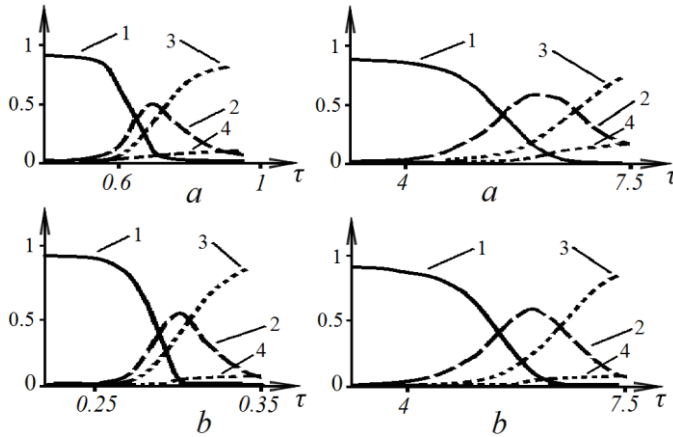


Рис. 7. Относительные значения энергии основной волны (1), энергии мелкомасштабного ленгмюровского спектра (2), энергии, переданной электронам (3) и ионам (4) плазмы, для модели Захарова (слева) и модели Силина (справа) для легких ионов (а) и тяжелых ионов (b)

7.2. Результаты моделирования

Развитие неустойчивости в гибридных моделях (2.40) и (3.45) было рассмотрено в работах [58, 59]. Темп затухания ВЧ мод определял скорость выгорания поля в кавернах плотности, откуда ВЧ поле втесняло частицы. Основная энергия неустойчивости сначала была сосредоточена в ВЧ поле коротковолнового ленгмюровского спектра, при этом формировался НЧ спектр возмущений. Затем энергия ВЧ спектра в значительной степени передавалась электронам. Сформированные каверны плотности при этом «схлопывались», траектории ионов пересекались, возмущения ионной плотности сглаживались, их масштаб увеличивался. Связь между ионными возмущениями и ВЧ полем ослаблялась, и неустойчивость насыщалась. Амплитуда основной волны, испытав несколько осцилляций,

стабилизировалась на достаточно низком уровне. Основная энергия теперь содержалась в возмущениях электронного компонента плазмы. Некоторая небольшая часть начальной энергии переходила в кинетическую энергию ионов. Оценка плотности, передаваемой ионам энергии E_{kin} , определялась выражением

$$\frac{E_{kin}}{W_0} \approx 0.27 \cdot I \cdot \left(\frac{M}{m_e}\right) \cdot \delta^2 / \omega_{pe}^2, \quad (7.1)$$

где W_0 – начальная плотность энергии интенсивной ленгмюровской волны, $I = \sum_s (d\xi_s/d\tau)^2$ – энергия ионов в соответствующей нормировке, δ – инкремент линейной неустойчивости. Доля энергии интенсивной ленгмюровской волны, передаваемая ионам в случае неизотермической плазмы (модель Захарова), определялась отношением W_0/n_0T_e , а в случае холодной плазмы (модель Силина) – отношением $(m_e/M)^{1/3}$.

Ниже рассмотрим детальнее характер распределения энергии в целом и для НЧ возмущений в частности [60, 61]. Обсудим особенности возбуждения НЧ коллективных движений ионно-звуковых волн в неизотермической плазме и НЧ колебаний в модели Силина. Особое внимание уделим роли поглощения ВЧ спектра, ответственного за выгорание ВЧ поля в кавернах плотности. Выясним, как этот процесс влияет на возбуждение мод НЧ спектра, а главное, на вид функции распределения ионов и на общую энергию, приобретаемую ионами.

Для параметров, определяющих характер поглощения энергии ВЧ спектра $n_M = 20$ и $\Theta = \theta/\delta = 0.05$, энергия основной волны, энергия мелкомасштабного ленгмюровского спектра, энергия, переданная электронам и ионам плазмы, нормированные на начальную энергию основной волны, представлены на рис. 7.

Анализ результатов численного моделирования показывает, что энергия интенсивной длинноволновой ленгмюровской волны переходит сначала в энергию ВЧ ленгмюровского коротковолнового спектра. Именно на этой стадии формируются каверны плотности плазмы, заполненные ВЧ полем. Затем ВЧ поле вследствие затухания на электронах, учтенного в данных моделях феноменологически, выгорает (при этом передавая свою энергию электронам плазмы). Каверны в этих условиях «схлопываются», возбуждаются НЧ волны, траектории ионов пересекаются, и энергия «схлопнувшихся» каверн и НЧ спектра передается ионам.

Можно определить в конце численного моделирования среднеквадратическую скорость $\sigma(v_s) = \sqrt{\sum_s v_s^2 / S}$, при этом в модели Захарова для легких ионов получим $\sigma(v_s) = 0.015$, для тяжелых $\sigma(v_s) = 0.006$, в модели

Силина для легких ионов $\sigma(v_s) = 0.002$, а для тяжелых $\sigma(v_s) = 0.0005$. Полная энергия частиц в выбранной нормировке $I = \sum_s (d\xi_s/d\tau)^2$ в модели Захарова для легких ионов равна 4.689, для тяжелых 0.808, в модели Силина для легких ионов 0.086, а для тяжелых 0.005. Различия в величинах полной энергии в разных моделях определяются разными значениями линейного инкремента, а для случаев легких и тяжелых ионов выбором массы иона. Можно построить на основе значений среднеквадратичной скорости нормальное распределение, тогда частицы, которые находятся вне его (в основном в так называемых «хвостах функции распределения»), в модели Захарова для легких ионов обладают 13,8% полной энергии, для тяжелых 9,2%, а в модели Силина заметно больше, то есть для легких ионов 25,6%, а для тяжелых 13%, соответственно. То есть, в случае неустойчивости интенсивной волны в холодной плазме можно ожидать существенно большей доли быстрых частиц.

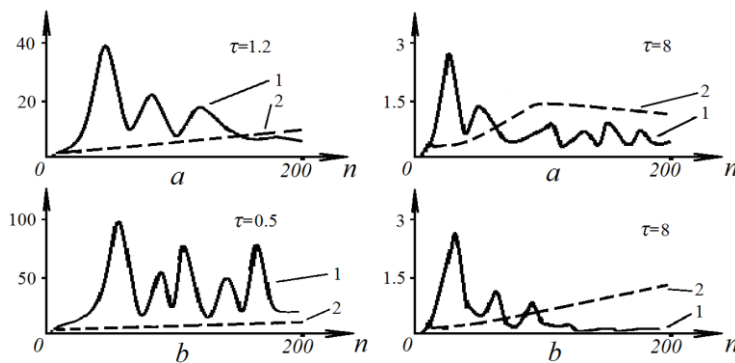


Рис. 8. Амплитуда мод НЧ спектра и зависимость частоты от волнового числа мод для модели Захарова (слева) и модели Силина (справа) для легких ионов (а) и тяжелых ионов (б): 1 – спектр M_n , 2 – сглаженная средняя $\partial\Phi_n / \partial\tau$ на развитой стадии неустойчивости

Представляет интерес не только распределение ионов по энергиям, но и возбуждение коллективных ионных колебаний (см. рис. 8), для чего определим частоту моды с волновым вектором nk_0 этих колебаний

$$\frac{d\Phi_n}{d\tau} = - \left(\frac{d}{d\tau} \frac{M_{nr}}{\sqrt{M_{nr}^2 + M_{ni}^2}} \right) / \left(\frac{M_{ni}}{\sqrt{M_{nr}^2 + M_{ni}^2}} \right), \quad (7.2)$$

где фазы Φ_n НЧ мод спектра можно найти из выражения

$$M_n = M_{nr} + iM_{ni} = \sqrt{M_{nr}^2 + M_{ni}^2} \cdot \exp\{i\Phi_n\}.$$

Следует обратить внимание на тот факт, что интенсивность НЧ спектра в случае неизотермической плазмы (модель Захарова) достаточно велика в широком интервале волновых чисел, что соответствует спектру ионного звука после разрушения каверн плотности, обнаруженному в численных экспериментах [41-44]. Напротив, в холодной плазме в спектре доминируют длинноволновые колебания.

Для обеих моделей кинетическая энергия ионов в выбранной выше нормировке

$$\frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} d\xi_{s0} \left(\frac{d\xi_s}{d\tau} \right)^2, \quad (7.3)$$

а энергии коллективных возбуждений для моделей Захарова и Силина имеют вид, соответственно,

$$\frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{m}{M} \right) \frac{1}{n_M^2} \frac{\delta}{\omega_{pe}} \sum_n |M_n|^2, \quad \frac{1}{8\pi^2} \frac{m}{M} \sum_n \frac{1}{n^2} [1 - J_0^2(a_n) + \frac{2}{3} J_2^2(a_n)] |M_n|^2, \quad (7.4)$$

причем в модели Захарова эти колебания носят названия ионно-звуковых. На рис. 9 показана динамика изменения энергии ионов и энергии НЧ поля от времени.

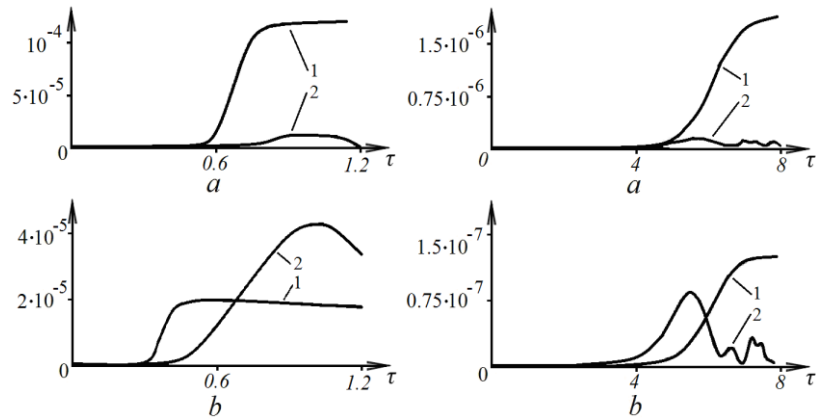


Рис. 9. Энергия ионов и НЧ поля для модели Захарова (слева) и модели Силина (справа) для легких ионов (а) и тяжелых ионов (б): 1 – кинетическая энергия, 2 – энергия поля колебаний, умноженная на 70

Стоит обратить внимание на тот факт, что энергия НЧ поля значительно меньше энергии ионов во всех рассмотренных случаях. Уменьшение энергии поля со временем происходит из-за передачи энергии ионам, а также из-за разрушения каверн плотности плазмы, на что было указано в работе [43].

Выборанный темп выгорания ВЧ поля в кавернах определяется величиной $\Theta = \theta / \delta = 0.05$. Представляет интерес выяснить, как зависят результаты расчетов от этого параметра. Очевидно, уменьшение этого параметра не только замедляет выгорание ВЧ поля в кавернах, но и уширяет спектр ВЧ мод, то есть увеличивает долю мелкомасштабных его компонент, что приводит к углублению каверн плотности плазмы и к увеличению кинетической энергии выталкиваемых из каверн ионов. Отметим, что с уменьшением затухания ВЧ мод функция распределения ионов по скоростям в двух моделях по форме все ближе приближается к нормальному распределению, то есть к функции Максвелла, что изображено на рис. 10.

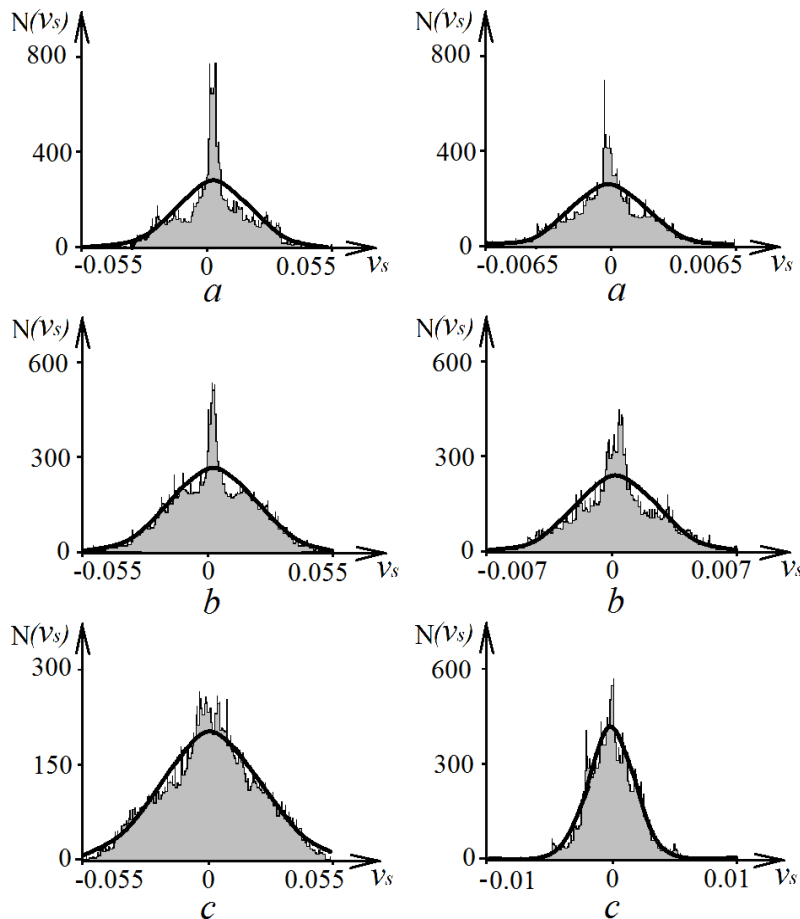


Рис.10. Распределение ионов по скоростям для модели Захарова (слева) и модели Силина (справа) для легких ионов ($a - \Theta = 0.05$, $b - \Theta = 0.015$, $c - \Theta = 0.001$)

Таблица 3

**Отличия расчетного распределения скоростей
от нормального распределения**

Модель / уровень поглощения	Отличие распределения по скоростям модели Захарова от нормального распределения	Отличие распределения по скоростям модели Силина от нормального распределения
$\Theta = 0.05$	19,9 %	13 %
$\Theta = 0.015$	9,9 %	13,4 %
$\Theta = 0.001$	6,9 %	8,8 %

В таблице 3 показана степень отличия распределения по скоростям, полученного численным моделированием, от наиболее близкого по форме нормального распределения по скоростям, отвечающая рис. 9.

На рис. 11 показано, что максимальное значение энергии ионно-звуковых колебаний при уменьшении поглощения ВЧ поля для неизотермической плазмы практически не изменяется, но формирование НЧ спектра ускоряется. В холодной плазме, напротив, заметно растет интенсивность длинноволновых НЧ колебаний при уменьшении поглощения ВЧ мод. В дальнейшем НЧ спектр подавляется, передавая свою энергию ионам.

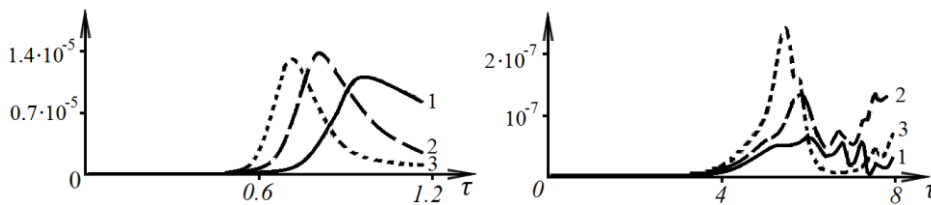


Рис. 11. Энергия НЧ спектра в модели Захарова (слева) и в модели Силина (справа) для легких ионов (1 – $\Theta = 0.05$, 2 – $\Theta = 0.015$, 3 – $\Theta = 0.001$) как функции времени

Как и следовало ожидать, с уменьшением поглощения ВЧ спектра энергия, в конечном итоге передаваемая ионам, растет практически в той же пропорции в неизотермической и в холодной плазме (см. рис. 12).

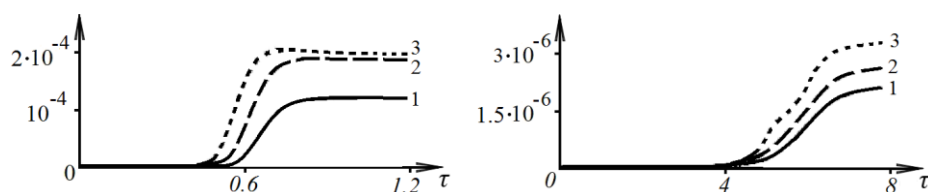


Рис. 12. Кинетическая энергия ионов в модели Захарова (слева) и в модели Силина (справа) для легких ионов (1 – $\Theta = 0.05$, 2 – $\Theta = 0.015$, 3 – $\Theta = 0.001$) как функции времени

Отметим в заключение, что масштабы возмущений ионной плотности, меньшие дебаевского радиуса ионов $r_{Di} = v_{Ti} / \omega_{pi}$, не дают вклада в формирование низкочастотных электрических полей из-за эффекта экранировки. В терминах $r_{Di} k_0 / 2\pi$ – ионный дебаевский радиус можно оценить [50–52]:

$$r_{Di} k_0 / 2\pi = R_{Di} \propto \left\langle \frac{v_i k_0}{2\pi \gamma_L} \right\rangle \left(\frac{\delta}{\omega_{pe}} \right) \left(\frac{M}{m_e} \right)^{1/2} = \langle v_s \rangle \left(\frac{\delta}{\omega_{pe}} \right) \left(\frac{M}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (7.5)$$

В режиме развитой неустойчивости эта величина оказывается порядка $R_{Di} \leq 10^{-3}$, а число мод спектра ионной плотности не превышает величины $1/R_{Di}$, что не противоречит проведенному анализу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что обнаруженный В. Е. Захаровым механизм нелинейного поглощения ленгмюровских колебаний при превышении плотности тепловой энергии плазмы плотности ВЧ поля применим и для полей, плотность энергии которых значительно больше тепловой энергии плазмы. Обсуждается подобие процессов модуляционной неустойчивости длинноволновых ленгмюровских колебаний в горячей и в холодной плазме, описываемой соответственно уравнениями Захарова и Силина. Характер возбуждения возмущений имеет ту же симметрию, механизмы возбуждения обширного коротковолнового спектра также подобны. Уравнения Захарова для неизотермической плазмы, в условиях, когда плотность энергии поля меньше плотности тепловой энергии среды, можно получить из уравнений Силина для низкотемпературной плазмы, когда плотность энергии поля существенно превышает плотность тепловой энергии среды. Действительно, уменьшая плотность энергии поля, легко перейти от случая, рассмотренного В. П. Силиным и коллегами, к случаю, описываемому уравнениями Захарова.

Движение энергии по спектру в моделях Захарова и Силина связано не только с перестройкой поля – взаимодействием мод между собой, – а в значительной степени есть следствие линейной неустойчивости. Максимальные инкременты для модели Захарова с уменьшением масштаба возмущений увеличиваются. Практически постоянное значение инкремента в широкой области волновых чисел в сверхзвуковом режиме приводит к взрывному росту каверн плотности плазмы. В модели Силина максимальный инкремент при уменьшении амплитуды накачки сдвигается в коротковолновую область, что подтвердили резуль-

таты изучения нелинейной стадии процесса. Важно также, что максимальный инкремент в холодной плазме при уменьшении амплитуды поля накачки не изменяется, а инкременты в неизотермической плазме при тех же условиях уменьшаются во всей области неустойчивости.

Наиболее важным следствием развития неустойчивостей интенсивных ленгмюровских волн в плазме является передача части энергии поля ионам и НЧ колебаниям плазмы. Этот вопрос рационально решать, рассматривая гибридные модели, где электроны описаны уравнениями квазигидродинамики, а ионы – крупными частицами. Процессы неустойчивости интенсивных длинноволновых ленгмюровских колебаний как в горячей, так и в холодной плазме оказываются подобны [48, 49].

Анализ результатов численного моделирования показывает, что в результате неустойчивости интенсивной длинноволновой ленгмюровской волны возбуждается ВЧ ленгмюровский коротковолновый спектр и коротковолновый НЧ спектр. Именно на этой стадии формируются каверны плотности плазмы, заполненные ВЧ полем. Затем ВЧ поле вследствие затухания на электронах, учтенного в данных моделях феноменологически, выгорает, передавая свою энергию электронам плазмы. Каверны в этих условиях «схлопываются», возбуждаются собственные НЧ волны (ионный звук), траектории ионов пересекаются, и энергия «схлопнувшихся» каверн и НЧ спектра передается ионам. Ранее отмечалось [48], что в неизотермической плазме доля энергии поля в условиях, когда плотность энергии поля меньше плотности тепловой энергии среды, которая передается ионам, пропорциональна отношению энергии поля к тепловой энергии плазмы. В холодной плазме доля энергии поля, которая передается ионам, порядка отношения инкремента к частоте, или, что практически то же самое, пропорциональна кубическому корню из отношения массы электрона к массе иона. В случае тяжелых ионов энергия, переданная ионному компоненту, заметно меньше, чем для случая легких ионов. Причем доля энергии, переданная ионам, в случае холодной плазмы обратно пропорциональна кубическому корню из массы ионов, а в случае горячей плазмы с ростом массы ионов падение доли энергии, переданной ионам, значительнее [58–60]. Распределение ионов по энергиям в гибридной модели Силина характеризуется наличием большой доли быстрых частиц.

Интенсивность НЧ спектра (ионно-звуковые волны) в случае неизотермической плазмы (модель Захарова) одного порядка в широком интервале волновых чисел. В холодной плазме (модель Силина) в НЧ спектре доминируют длинноволновые колебания. Причем энергия НЧ поля оказывается значительно меньше конечной энергии ионов во всех рассмотренных случаях. Уменьшение энергии НЧ поля со временем происходит из-за передачи энергии ионам.

Уменьшение уровня поглощения ВЧ поля соответствует замедлению выгорания ВЧ поля в кавернах и уширяет спектр ВЧ мод, что приводит к углублению каверн плотности плазмы и к увеличению кинетической энергии выталкиваемых из каверн ионов. Отметим, что с умень-

шением затухания ВЧ мод функция распределения ионов по скоростям в двух моделях по форме все ближе приближается к нормальному распределению, то есть к функции Максвелла, что позволяет говорить о температуре ионов. Максимальное значение энергии ионно-звуковых колебаний при уменьшении поглощения ВЧ поля для неизотермической плазмы практически не меняется, но формирование НЧ спектра ускоряется. В холодной плазме велика интенсивность именно длинноволновых НЧ колебаний, причем она увеличивается при уменьшении уровня поглощения ВЧ мод. Важно отметить, что с уменьшением поглощения ВЧ спектра энергия, в конечном итоге передаваемая ионам, возрастает.

Авторы выражают свою искреннюю благодарность В. П. Силину и А. А. Рухадзе за поддержку и внимание к работе и признательность Е. А. Кузнецову за конструктивные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Захаров В. Е. Коллапс ленгмюровских волн // ЖЭТФ. – 1972. – Т. 62, В. 5. – С. 1745–1759.
2. Силин В. П. Параметрический резонанс в плазме // ЖЭТФ. – 1965. – Т. 48, В. 6. – С. 1679–1691.
3. Силин В. П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. – М.: Наука, 1973. – 287 с.
4. Файнберг Я. Б. Плазменная электроника // Укр. физ. журн. – 1978. – Т. 23, № 11. – С. 1885–901.
5. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. – М.: Атомиздат, 1961. – 244 с.
6. Dawson J. M. On the production of plasma by giant pulse lasers // Phys. Fluids. – 1964. – Vol. 7, №7. – P. 981–987.
7. Пашинин П. П., Прохоров А. М. Получение высокотемпературной плотной плазмы при лазерном нагреве специальной газовой мишени // ЖЭТФ. – 1971. – Т. 60, В. 5. – С. 1630–1636.
8. Файнберг Я. Б. Некоторые вопросы плазменной электроники // Физика плазмы. – 1985. – Т. 11, № 11. – С. 1398–1410.
9. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 336 с.
10. Шапиро В. Д., Шевченко В. И. Взаимодействие волна–частица в неравновесных средах // Изв. ВУЗов. Радиофизика. – 1976. – Т. 19, №5–6. – С.787–791.
11. Кондратенко А. Н., Куклин В. М. Основы плазменной электроники. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 320 с.
12. Буц В. А., Лебедев А. Н. Когерентное излучение интенсивных электронных пучков. – М.: Изд. ФИАН РАН, 2006. – 333 с.
13. Захаров В. Е. О спектре слабой турбулентности в плазме без магнитного поля // ЖЭТФ. – 1966. – Т. 51, В. 6. – С. 688–696.
14. Алиев Ю. М., Силин В. П. Теория колебаний плазмы, находящейся в высокочастотном электромагнитном поле // ЖЭТФ. – 1965. – Т. 48, В. 3. – С. 901–912.
15. Горбунов Л. М., Силин В. П. О неустойчивости плазмы в сильном высокочастотном поле // ЖЭТФ. – 1965. – Т. 49, В. 6. – С. 1973–1981.
16. Krueer, W. L., P. K. Kaw, J. M. Dawson, C. Oberman, Anomalous high-frequency resistivity and heating of a plasma // Phys. Rev. Lett. – 1970. – V. 24. – P. 987.
17. Силин В. П. Аномальная нелинейная диссипация высокочастотных радиоволн в плазме // УФН. – 1972. – Т. 108, В. 4. – С. 625–654.
18. Krueer W. L. Heating of underdense plasma by intense lasers // Phys. Fluids. – 1973. – V. 16, N. 9. – P. 1548–1550.
19. Иванов А. А., Никулин М. Г. Нелинейное взаимодействие ленгмюровских волн большой амплитуды в бесстолкновительной плазме // ЖЭТФ. – 1973. – Т. 65, №1. – С. 168–174.
20. Kim H. C., Stenzel I. I., Wong A. Y. Development of "Cavitons" and Trapping of rf Field. II. // Phys. Rev. Lett. – 1974. – V. 33. – P. 886.

21. Дегтярев Л. М., Захаров В. Е. Сверхзвуковой коллапс ленгмюровских волн // Письма в ЖЭТФ. – 1975. – Т. 21, В. 1. – С. 9–12.
22. Андреев Н. Е., Силин В. П., Стенчиков Г. Л. О насыщении параметрической неустойчивости плазмы в сильном электрическом поле // Физика плазмы. – 1977. – Т. 3, №5. – С. 1088–1096.
23. Коврижных Л. М. Модуляционная неустойчивость и нелинейные волны в холодной плазме // Физика плазмы. – 1977. – Т. 3, В. 5. – С. 1097–1105.
24. Захаров В. Е., Львов В. С., Рубенчик А. М. О влиянии модуляционной неустойчивости на релаксацию релятивистского электронного пучка в плазме // Письма в ЖЭТФ. – 1977. – Т. 25, В. 1. – С. 11–14.
25. Бучельникова Н. С., Маточкин Е. П. Неустойчивость и затухание одномерных ленгмюровских волн / Препринт № 79–115, 1979. – АН СССР, Ин-т ядерной физики. – 20 с.
26. Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. Диссипация мощной электромагнитной волны в неоднородной плазме и «сверхсильная» плазменная турбулентность // Физика плазмы. – 1980. – Т. 6. – С. 377.
27. Дегтярев Л. М., Захаров В. Е., Сагдеев Р. З., Соловьев Г. И., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. Ленгмюровский коллапс при наличии накачки и диссипации волновой энергии // ЖЭТФ. – 1983. – Т. 85, В. 4. – С. 1221–1231.
28. Wong A. Y. and Cheung P. Y. Three-Dimensional Self-Collapse of Langmuir Waves // Phys. Rev. Lett. – 1984. – V. 52. – P. 1222.
29. Cheung P. Y., Wong A. Y. Nonlinear evolution of electron electron-beam-plasma interaction // Phys. Fluids. – 1985. – V. 28. – P. 1538.
30. Popel S. I., Tsyтович V. N., Vladimirov S. V. Modulational Instability of Langmuir Wave-Packets // Phys. Plasmas. – 1994. – Т. 1, № 7. – С. 2176–2188.
31. Захаров В. Е., Пушкарев А. Н., Рубенчик А. М., Сагдеев Р. З., Швец В. Ф. Кинетика трехмерного ленгмюровского коллапса // ЖЭТФ. – 1989. – Т. 96. – С. 591.
32. Карфилов Д. М., Рубенчик А. М., Сергейчев К. Ф., Сычев И. А. Сильная ленгмюровская турбулентность, возбуждаемая в плазме электронным пучком // ЖЭТФ. – 1990. – Т. 98. – С. 1592.
33. Vyacheslavov. L. N., Burmasov V. S., Kandaurov I. V., Kruglyakov E. P. Meshkov O. I., Sanin A. L. Spectra of developed Langmuir turbulence in a nonisothermal magnetized plasma // Phys. Plasmas. – 1995. – V. 2. – P. 2224–2230.
34. McFarland M. D., Wong A. Y. Spectral content of strong Langmuir turbulence in the beam plasma interactions // Phys. Plasmas. – 1997. – V. 4, N. 4. – P. 945–955.
35. Kuznetsov E. A. On averaged description of Langmuir waves in plasma // Sov. Plasma Physics. – 1976. – V. 2, № 2. – P. 327–333.
36. Захаров В. Е. Волновые коллапсы // УФН. – 1988. – Т. 156. – В. 1. – С. 189.
37. Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. Солитоны и коллапсы: два сценария эволюции нелинейных волновых систем // УФН. – 2012. – Т. 182, В. 6. – С. 569–592.
38. Dawson J. M. Some Investigations of Plasma Instabilities in One-Dimensional Plasmas. – Princeton, N.J.: Princeton University, Plasma Physics Laboratory, 1962. – 45 p.
39. Mei-Mei Shen and D. R. Nicholson. Numerical comparison of strong Langmuir turbulence model // Phys. Fluids. – 1987. – V. 30, N. 4. – P. 1096–1103.
40. Дегтярев Л. М., Сагдеев Р. З., Соловьев Г. И., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. Одномерная турбулентность ленгмюровских волн // Физика плазмы. – 1980. – № 6. – С. 485–508.
41. Галеев А. А., Сагдеев Р. З., Сигов Ю. С., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. Нелинейная теория модуляционной неустойчивости ленгмюровских волн // Физика плазмы. – 1975. – Т. 1, № 1. – С. 10–20.
42. Сигов Ю. С., Ходырев Ю. В. Одномерный квазиколлапс ленгмюровских волн при параметрическом воздействии на плазму // ДАН СССР. – 1976. – Т. 229. – С. 833–836.
43. Sigov Yu. S., Zakharov V. E. Strong turbulence and its computer simulation. // J. de Physique. – 1979. – V. 40, № C7. – P. 63–79.
44. Robinson P. A., de Oliveira G. I., Effect of ambient density fluctuations on Langmuir wave collapse // Phys. Plasmas. – 1999. – V. 6. – P. 3057–3065.
45. Wang J. G., Payne G. L., DuBois D. F., and Rose H. A. One dimensional simulations of Langmuir collapse in a radiation driven plasma // Physics of Plasmas. – 1994. – V. 1, N 8. – P. 2531–2546; doi: 10.1063/1.870581.
46. Wang J. G., Payne G. L., DuBois D. F., and Rose H. A. Comparison of Zakharov simulation and open boundary Vlasov simulation of strong Langmuir turbulence // Phys. Plasmas. – 1996. – Vol. 3, № 111, doi: 10.1063/1.871837.
47. Куклин В. М., Панченко И. П., Севидов С. М. Неустойчивость интенсивной ленгмюровской волны в холодной плазме // Радиотехника и электроника. – 1988. – Т. 33, В. 10. – С. 2135–2140.

48. Chernousenko V. V., Kuklin V. M., Panchenko I. P. The structure in nonequilibrium media. In book: The integrability and kinetic equations for solitons / AN USSR, ITPh. K. Nauk. Dumka, 1990. – 472 p.
49. Clark K. L., Payne G. L. and Nicholson D. R. A hybrid Zakharov particle simulation of ionospheric heating // Phys. Fluids B. – 1992. – V. 4, No. 3. – P. 708–718.
50. Дьяченко А. И., Захаров В. Е., Рубенчик А. М., Сагдеев Р. З., Швец В. Ф. Двумерный ленгмюровский коллапс и двумерные ленгмюровские солитоны / Письма в ЖЭТФ. – 1986. – Т. 44, В. 11. – С. 504–507.
51. Henri P., Califano F., Briand C., Mangeney A. Low energy Langmuir cavitons: asymptotic limit of weak turbulence. arXiv:1301.3090v2 [physics.plasm-ph] 15 Jan 2013.
52. Kuklin V. M. Similarity of 1D Parametric Instability Description of Langmuir Waves // The Journal of Kharkiv National University, physical series: Nuclei, Particles, Fields. – 2013. – №1041, Iss.2 (58). – P. 20–32.
53. Kuklin V. M. Instability of intensive longitudinal oscillations and structures in plasma // Proc. Contr. Papers. Int. Conf. on Plasma Physics. Kiev, apr.6–12, 1987, – V.4. – P.101–104.
54. Куклин В. М., Севидов С. М. К нелинейной теории устойчивости интенсивных колебаний холодной плазмы // Физика плазмы. – 1988. – Т. 14, В. 10. – С. 1180–1185.
55. Koch P., Albritton J. Electron and ion heating through resonant plasma oscillations // Phys. Rev. Lett. – 1974. – V. 32, № 25. – P. 1420–1423.
56. Буланов С. В., Сасоров П. В. Об ускорении ионов на нелинейной стадии бунемановской неустойчивости // Физика плазмы. – 1986. – Т. 12, В. 1. – С. 54–56.
57. Батанов Г. М., Иванов В. А., Косых И. А., Сергейчев К. Ф. Ленгмюровские волны большой амплитуды и ускорение частиц в плазменной короне СВЧ-разряда // Физика плазмы. – 1986. – Т. 12, В. 5. – С. 552–565.
58. Belkin E. V., Kirichok A. V., Kuklin V. M., Pryjmak A. V., Zagorodny A. G. Dynamics of ions during development of parametric instability of Langmuir waves // VANT. – 2013, – N.4 (86), series “Plasma Electronics and New Methods of Acceleration” issue 8. – P. 260–266.
59. Загородний А. Г., Киричок А. В., Куклин В. М., Приймак А. В. Особенности нагрева ионов при развитии неустойчивости интенсивных ленгмюровских колебаний в плазме // Физические основы приборостроения. – 2014. – Т. 3, № 1. – С. 58–69.
60. Kirichok A. V., Kuklin V. M., Pryjmak A. V., Zagorodny A. G. Ion heating, burnout of the HF field and ion sound generation with the development of modulation instability of an intensive Langmuir wave in a plasma // Physics of Plasmas. – 22, 092118 (2015).
61. Загородний А. Г., Киричок А. В., Куклин В. М. Одномерные модели модуляционной неустойчивости интенсивных ленгмюровских колебаний в плазме на основе уравнений Захарова и Силина // УФН – 2016. – Т. 186, № 7. – С. 743–762 (One-dimensional modulational instability models of intense Langmuir plasma oscillations using the Silin–Zakharov equations // Physics–Uspekhi. – 2016. – V. 59. – N. 7)

ПРИЛОЖЕНИЕ: ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ [I]

Следующая задача демонстрирует конструктивность подхода В. П. Силина к описанию параметрической неустойчивости интенсивного поля в плазме. Интенсивные электромагнитные поля, воздействующие на поверхность плазмы, приводят к значительным осцилляциям электронного компонента. При этом тепловым движением электронов можно пренебречь, считая плазму холодной. Характер воздействия такого внешнего электромагнитного поля на поверхность холодной плазмы подробно рассмотрен в книге В. П. Силина [II].

Ниже обобщим этот подход на случай самосогласованного описания воздействия внешнего нормально падающего на границу плазмы электромагнитного излучения с возбуждением широкого спектра поверхностных колебаний.

Пусть на плазменное полупространство ($x < 0$) с невозмущенной постоянной плотностью плазмы n_0 нормально падает электромагнитная волна с компонентами $(0, H_y, E_z)$, где $|H_y| = |E_z| = E_0$. Интенсивность поля падающей волны будем считать достаточно большой и пренебрежем тепловым разбросом электронов плазмы ($E_0^2 > 4\pi n_0 T_e$). Для возмущений поверхностной плотности заряда $\sigma_\alpha = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{-\rho}^{\rho} n'_\alpha dx$, где $e_\alpha, m_\alpha, n'_\alpha$ – заряд, масса и возмущенная плотность заряда частиц сорта α , запишем следующую систему уравнений В. П. Силина, сформулированных им в книге [II].

$$\exp[ia_{\alpha n} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)] \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_{\alpha n} + \frac{\omega_\alpha^2}{2} \sum_{\beta} v_{\beta n} = 0, \quad (\text{П.1})$$

где $v_{\alpha n} = e_\alpha \cdot \sigma_{\alpha n} \exp[-ia_{\alpha n} \sin(\omega_0 t + \varphi)]$, $a_{\alpha n} = e_\alpha n \cdot E_z(k_z = 0) / m_\alpha \omega_0 c$, $\omega_\alpha^2 = 4\pi e^2 n_0 / m_\alpha$, $\omega_0 t + \varphi$ – фаза поля с $k_z = 0$ в плазме, ω_0 – частота падающей волны. Волновое число таких возмущений $k_{zn} = n\omega_0 / c$. Решение (П.1) будем искать в виде ряда [II]

$$v_{\alpha n} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} u_{\alpha n}^{(s)} \cdot \exp\{is\omega_0 t\}. \quad (\text{П.2})$$

Для поверхностных возмущений ионной плотности можно удержать только первый член ряда. Слагаемые в сумме для v_{en} , пропорциональные $\exp\{\pm i\omega_0 t\}$, превышают остальные члены ряда, однако необходимо удержать члены, соответствующие «нулевой» и второй гармоникам. Ограничимся учетом симметричных возмущений ионов $u_{in}^{(0)} = u_{i-n}^{(0)}$. Кроме того, имеют место соотношения $u_{en}^{(0)} = u_{e-n}^{(0)}$, $u_{en}^{(\pm 2)} = u_{e-n}^{(\pm 2)}$, $u_{en}^{(\pm 1)} = -u_{e-n}^{(\pm 1)}$, $(u_{en}^{(1)})^* = u_{en}^{(-1)}$. Самосогласованная обобщенная система уравнений Силина, учитывающая обратное воздействие поля возбуждаемого коротковолнового спектра поверхностных колебаний на отраженную волну (параметры падающей волны очевидно не меняются), имеет вид:

$$\frac{du_{en}}{dt} + (\theta_n - i\Delta_1 \omega_0) u_{en} = i \frac{\omega_0}{2} J_1(a_n) \cdot u_{in} \exp\{i\varphi\}, \quad (\text{П.3})$$

$$\frac{d^2 u_{in}}{dt^2} = -\omega_0 \frac{m_e}{M} J_1(a_n) \cdot [u_{en} \exp\{-i\varphi\} + u_{en}^* \exp\{i\varphi\}], \quad (\text{П.4})$$

$$D(R - R_0) = \frac{8\pi}{en_0 E_0} \sum_n u_{in} [J_0(a_n) \cdot u_{en}^* \exp\{i\varphi\} - J_2(a_n) \cdot u_{en} \exp\{-i\varphi\}], \quad (\text{П.5})$$

где $1 + R = |1 + R| \exp\{-i\varphi\} = a_n \exp\{-i\varphi\} / \beta_0 n$, $\omega_0 = (1 - \Delta_1) \cdot \omega_{pe} / \sqrt{2}$,
 $\beta_0 = 2eE_0 / m_e c \omega_0$, $R_0 = -D_0^* / D_0$, $D_0 = \frac{\varepsilon_0}{\kappa_0} + i \frac{c}{\omega_0}$, $\varepsilon_0 = 1 - \omega_{pe}^2 / \omega_0^2$,
 $\kappa_0^2 = -\omega_0^2 \varepsilon_0 / c^2$, $\Delta_1 = (m_e / m_i)^{1/3} \Delta$, R – амплитудный коэффициент отражения, $u_{en} = u_{en}^{(1)}$, $u_{in} = u_{in}^{(0)}$.

Слагаемые, пропорциональные $J_0(a_n)$ и $J_2(a_n)$, отвечают вкладу в нелинейное взаимодействие соответственно «нулевой» и второй гармоник. Из уравнений системы (П.3)–(П.5) можно получить соотношение

$$1 - |R|^2 = \frac{16\pi}{e\beta_0 n_0 c E_0} \sum_n \frac{1}{n} \left(\frac{d|u_{en}|^2}{dt} + 2\theta_n |u_{en}|^2 \right), \quad (\text{П.6})$$

которое представляет собой закон сохранения энергии.

Для численного решения уравнений (П.3)–(П.5) переходим к переменным $\tau = (m_e / m_i)^{1/3} \omega_0 t$, $\theta_n = n\theta_0 (m_e / m_i)^{1/3} \omega_0$, $u_{en} = |u_{en}| \exp\{i\varphi_n\}$

$N_n = 4\pi (m_e / m_i)^{1/6} E_0^{-1} \cdot |u_{en}| \beta_0^{1/2}$, $M_n = 4\pi (m_e / m_i)^{-1/6} E_0^{-1} \cdot |u_{in}| \beta_0^{1/2}$.

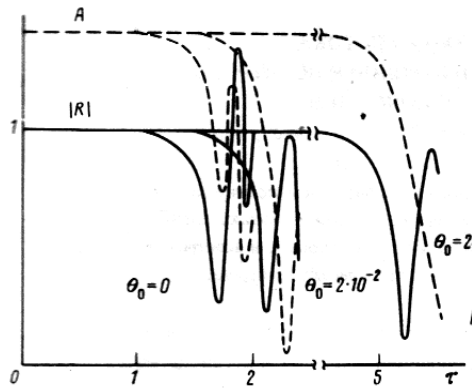


Рис. 13. Коэффициент отражения R и поле в плазме AE_0 для $\theta_0 = 0$ и $\theta_0 = 0.02$

Особенности затухания поверхностных волн таковы, что оно растет с ростом волнового числа колебаний [III]. В процессе развития неустойчивости разброс по фазам φ_n быстро уменьшается за времена несколько единиц τ , формируя области поверхностной электронной и ионной плотности быстро уменьшающегося масштаба. Этот же эффект синхронизации мод приводит к сильному взаимодействию коротковолнового спектра неустойчивости с отраженной волной и порождает значительные осцилляции коэффициента отражения при малой диссипации в интервале $R = 0.5 \div 1.3$ (см. рис. 13). Учет потерь сужает пространственный спектр неустойчивости, уменьшает интегральный уровень энергии спектра, затягивает развитие неустойчивости, а при колебаниях коэффициента отражения последний не превышает единицу.

I. Куклин В. М., Панченко И. П. Возбуждение коротковолнового спектра поверхностных волн в плазме мощным электромагнитным излучением // Письма в ЖЭТФ. – 1986. – Т. 43, В. 5. – С. 237–239.

II. Силин В. П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. – М.: Наука, 1973. – 287 с.

III. Кондратенко А. Н. Поверхностные и объемные волны в ограниченной плазме. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 208 с.

ЧАСТЬ III

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ С ПРИМЕНЕНИЯМИ К ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ И АСТРОФИЗИКИ. СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД⁵

В. М. Конторович

*Радиоастрономический институт НАН Украины
ул. Краснознаменная 4, Харьков, 61002, Украина;
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы 4, Харьков, 61022, Украина
E-mail: vkont@rian.kharkov.ua*

Обзор посвящен кинетическим уравнениям слабой турбулентности, включая точные методы получения неравновесных распределений. Представлены прозрачные квантово-механические аналогии. Для описания взаимодействий когерентных и стохастических систем используется гамильтонов формализм. Особое место уделяется астрофизическим приложениям. Приведены примеры приме-

⁵ Этот материал является продолжением ранней публикации: Конторович В. М. Линейные и нелинейные волны. Часть I. Динамический подход // Радиофизика и радиоастрономия. – 2001. – Т. 6. – №3. – С. 165–211, далее [1].

нения кинетического уравнения Смолуховского к анализу процессов слияния галактик и формирования их спектров масс. Рассмотрены нелокальные распределения и частично когерентные системы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Данный обзор посвящен кинетическим уравнениям для волн (и частиц) и получению на их основе степенных слаботурбулентных распределений. Эти существенно неравновесные распределения обладают определенной универсальностью и часто реализуются в природе в условиях, когда источник и сток энергии (или других сохраняющихся величин) разнесены по частотам или длинам волн и между ними формируется поток сохраняющейся величины по спектру, параметризующий распределения подобно тому, как температура параметризует равновесные распределения.

Используемые при определении функции распределения нормальные координаты a и a^* связаны с координатами q и импульсами p осцилляторов, описывающих волны, соотношениями вида: $\sqrt{2} \cdot a = p - iq$, что позволяет перевести сумму квадратов $p^2 + q^2$, входящую в гамильтониан, в разность квадратов $p^2 - (iq)^2$ и факторизовать гамильтониан $H = (p^2 + q^2)/2$, сведя его к виду в зависимости от нормировки $H = aa^*$ или $H = \omega aa^*$ (ω – частота осциллятора), что значительно упрощает все выводы.

Изложение, достаточно подробное в начале этой части, становится все более конспективным в конце, что отчасти компенсируется подробными ссылками. Описание точных решений кинетических уравнений будет приведено в заключении обзора. Точным методам посвящены Приложения, в которых обсуждается теоретико-групповая структура используемого подхода и выход за рамки кинетических уравнений при поиске степенных решений.

2. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В ранней публикации автора [1] можно было видеть, что взаимодействие волн во многом напоминает взаимодействие частиц. Эта аналогия еще более усилится, если мы рассмотрим не волны, а волнение, т.е. систему из большого числа волн со случайными фазами, напоминающую турбулентность. Но в отличие от классической турбулентности (в несжи-

маемой жидкости, где речь идет о вихрях) в случае волнения мы имеем дело с совокупностью (ансамблем) волновых пакетов, которые благодаря дисперсии движутся с различными скоростями, из-за чего их перекрытие оказывается весьма непродолжительным во времени, и результирующее взаимодействие оказывается слабым. В этой связи говорят о слабой турбулентности, описание которой оказывается аналогичным кинетическому описанию слабо неидеального газа.

Характерная для слабой турбулентности малость энергии взаимодействия по сравнению с полной энергией волнения позволяет использовать теорию возмущений и описывать турбулентность с помощью замкнутых систем кинетических уравнений для функций распределения.

Роль функции распределения играет величина, пропорциональная среднему квадрату амплитуды волны с волновым вектором \mathbf{k} (скобки означают усреднение по фазам волн):

$$N_{\mathbf{k}} = \langle a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} \rangle \quad (2.1)$$

(при дискретном наборе волновых векторов \mathbf{k}). Действительно, в этом случае средняя энергия, вычисляемая по квадратичной части гамильтониана (т.е. без учета энергии взаимодействия волн), есть

$$E = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \langle a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} \rangle. \quad (2.2)$$

Эта величина имеет вид энергии идеального газа с функцией распределения (2.1), где $N_{\mathbf{k}}$ играет роль числа частиц с «импульсом» \mathbf{k} , а частота волны $\omega_{\mathbf{k}}$ играет роль их энергии.

Нетрудно убедиться в том, что при непрерывном спектре связь между коррелятором (комплексных) нормальных координат и функцией распределения принимает вид

$$\langle a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}'} \rangle = N_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (2.3)$$

где δ -функция выражает однородность системы, а суммирование заменяется интегрированием.

Кинетическое уравнение

$$\dot{N}_{\mathbf{k}} - I_{cm} \{N_{\mathbf{k}}\} = 0 \quad (2.3')$$

представляет собой уравнение баланса частиц в фазовом пространстве. Взаимодействие учитывается интегралом столкновений $I_{cm} \{N\}$, вид которого определяется наиболее вероятными процессами, допускаемыми

законами сохранения энергии, импульса (а если число волн-частиц сохраняется, то и числа волн). Кинетические уравнения могут быть получены непосредственно из уравнения движения. Вывод этот несколько громоздок. Между тем простой физический смысл кинетического уравнения в терминах частиц позволяет его выписать непосредственно (используя квантовые представления [2–4], когда речь пойдет об аналогии с волнами).

Рассмотрим вначале классическое кинетическое уравнение Больцмана, учитывающее парные столкновения между частицами. В отсутствие столкновений функция распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, описывающая газ частиц без внутренних степеней свободы, сохраняется вдоль траекторий частиц в фазовом (\mathbf{r}, \mathbf{p}) -пространстве. Это означает, что полная (стоковая) производная от $f(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t), t)$, где $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{p}(t)$ определяются (гамильтоновыми) уравнениями движения частицы ($\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$, где \mathbf{v} – скорость частицы, а \mathbf{F} – действующая на нее сила), равна нулю:

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{p}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (2.4)$$

Учет столкновений приводит к тому, что вместо нуля в правой части (2.4) возникает некоторый функционал

$$\frac{Df}{Dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{cm} \equiv I_{cm}\{f\}, \quad (2.5)$$

где скорость изменения функции распределения за счет столкновений выписывается из простых вероятных соображений. А именно, считаем сталкивающимися две частицы, у которых в данный момент t оказались близкими их координаты $\mathbf{r}_{1,2} \approx \mathbf{r}$. Вероятность столкновения найдем как вероятность двух независимых событий оказаться каждому из партнеров «в одной точке» \mathbf{r} с импульсами \mathbf{p} и \mathbf{p}_1 :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t) d\mathbf{p} d\mathbf{p}_1. \quad (2.6)$$

Так как прицельное расстояние у сталкивающихся частиц при этом не фиксируется и может быть произвольным, то результат столкновения записывается также в вероятностных терминах. А именно, процессу рассеяния соответствует вероятность

$$w(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1 / \mathbf{p}', \mathbf{p}'_1) f f_1 d\mathbf{p} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}' d\mathbf{p}'_1, \quad (2.7)$$

где $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, $f_1 = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t)$, а w – условная вероятность (в единицу времени) перехода из исходного состояния \mathbf{p}, \mathbf{p}_1 в конечное $\mathbf{p}', \mathbf{p}'_1$ (разумеется, это отвечает некоторому определенному расстоянию в динамике взаимодействия).

Учитывая, что в силу симметрии относительно обращения времени обратному процессу соответствует та же вероятность w , а вероятность соударения при этом равна $f_1' f'$, получаем для полного баланса приходов и уходов в данный элемент фазового объема:

$$I_{cm} = \int d\tau (f f_1' - f f_1) w, \quad d\tau = d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}' d\mathbf{p}'_1. \quad (2.8)$$

Это и есть интеграл столкновений Больцмана. Равновесное распределение

$$f_0 = A e^{-\frac{\varepsilon}{T}} \quad (2.9)$$

обращает его в нуль в силу того, что f_0 должно являться решением кинетического уравнения, а стоксова производная в пространственно однородном случае (а также в потенциальном внешнем поле, если ε включает соответствующую потенциальную энергию) зануляется равновесным распределением f_0 (температура T (в энергетических единицах) и нормировочная константа A параметризуют распределение). Это рассуждение можно обратить и использовать для нахождения f_0 как решения, обращающего в нуль интеграл столкновений. Впоследствии подобный подход будет использован для нахождения стационарных, но неравновесных распределений, обращающих интеграл столкновений в нуль при других условиях в нуле и на бесконечности по энергии.

Учтем, что в силу выполнения законов сохранения энергии (упругие столкновения) и импульса вероятность перехода содержит соответствующие δ -функции

$$w_{\mathbf{p}\mathbf{p}_1/\mathbf{p}'\mathbf{p}'_1} = U_{\mathbf{p}\mathbf{p}_1/\mathbf{p}'\mathbf{p}'_1} \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}' - \mathbf{p}'_1) \delta(\varepsilon + \varepsilon_1 - \varepsilon' - \varepsilon'_1). \quad (2.10)$$

Благодаря этому, распределение f_0 вида (2.9), очевидно, приводит к тому, что интеграл столкновений оказывается равен нулю:

$$A^2 \left(e^{-\frac{\varepsilon + \varepsilon_1}{T}} - e^{-\frac{\varepsilon' + \varepsilon'_1}{T}} \right) \delta(\varepsilon + \varepsilon_1 - \varepsilon' - \varepsilon'_1) = 0.$$

Прежде чем перейти к волнам, рассмотрим квантовое обобщение интеграла столкновений Больцмана для ферми-частиц (например, электронов). В силу принципа Паули, который запрещает находиться в одном и том же состоянии двум электронам, вместо (2.7) запишем (опуская здесь индексы у w)

$$w \cdot f f_1 \cdot (1 - f')(1 - f_1'), \quad (2.11)$$

где два последних множителя представляют собой вероятности иметь конечное состояние свободным. Такая запись предполагает вполне определенную нормировку распределения, а также фиксированное значение спина, который для нас не существен. Для независимого от спина распределения появится просто дополнительный множитель 2 (результат суммирования по спинам), который мы можем включить в вероятность w .

В итоге интеграл столкновений приобретает вид

$$I_{cm}^{\phi} = \int d\tau w \cdot \{ f f_1' (1 - f)(1 - f_1) - f f_1 (1 - f')(1 - f_1') \}. \quad (2.12)$$

Непосредственной подстановкой проверяем, что равновесное фермиевское распределение

$$f_0^{\phi} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} + 1}, \quad 1 - f_0^{\phi} = \frac{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}}}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} + 1} \quad (2.13)$$

(нормировка достигается за счет химического потенциала μ) обращает в нуль I_{cm}^{ϕ} :

$$\{ \dots \} \delta(\varepsilon + \varepsilon_1 - \varepsilon' - \varepsilon_1') = e^{\frac{2\mu}{T}} \frac{\left(e^{\frac{\varepsilon + \varepsilon_1}{T}} - e^{\frac{\varepsilon' + \varepsilon_1'}{T}} \right) \delta(\varepsilon + \varepsilon_1 - \varepsilon' - \varepsilon_1')}{\left(e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} + 1 \right) \left(e^{\frac{\varepsilon_1 - \mu}{T}} + 1 \right) \left(e^{\frac{\varepsilon' - \mu}{T}} + 1 \right) \left(e^{\frac{\varepsilon_1' - \mu}{T}} + 1 \right)} = 0. \quad (2.14)$$

Для волн (которые являются бозе-частицами с квантово-механической точки зрения) при написании кинетического уравнения вместо принципа Паули необходимо учесть открытое Эйнштейном вынужденное излучение. А именно, вероятность перехода в конечное состояние складывается из двух слагаемых: спонтанного и вынужденного, причем последнее пропорционально числу волн (частиц) в конечном состоянии. Именно этот эффект ответственен за феномен лазера (или лазера), который кстати был создан (а еще позже обнаружен в естественных условиях в космосе) на полвека позднее открытия Эйнштейна. При

соответствующей (квантовой) нормировке это означает, что интеграл столкновений для бозе-частиц будет иметь вид:

$$I_{cm}^B = \int d\tau w \{ f f_1' (1+f)(1+f_1) - f f_1 (1+f')(1+f_1') \}. \quad (2.15)$$

Равновесное распределение есть

$$f_0^B = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} - 1}, \quad 1 + f_0^B = \frac{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} - 1}. \quad (2.16)$$

Переход к классическим частицам в обоих случаях означает, что при квантовой нормировке вероятность найти частицу в данном состоянии мала $f \ll 1$. При этом оба распределения (2.13) и (2.16) переходят в (2.8). Переход же к волнам для (2.16) означает, что $f^B \equiv N \gg 1$. При этом I_{cm}^B переходит в I_{cm} (для процессов рассеяния):

$$I_{cm} = \int d\tau w \{ N' N_1' N + N N_1' N_1 - N N_1 N' - N N_1 N_1' \}, \quad (2.17)$$

$$w = U \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3).$$

В силу однородности этого выражения по N нормировка здесь уже может выбираться классическим способом.

Выражение (2.17) соответствует нераспадному закону дисперсии волн. Нетрудно понять, что распадные процессы (распады и слияния волн) приведут аналогичным образом к интегралу столкновений:

$$I_{cr} = \int d\tau w \{ N_1 N_2 - N N_1 - N N_2 \} - cycle - bicycle, \quad (2.18)$$

$$w_{\mathbf{k}/\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = U_{\mathbf{k}/\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega), \quad d\tau = d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2,$$

где *cycle* означает циклическую перестановку индексов в функциях распределения и вероятности перехода. К анализу следствий, вытекающих из кинетического уравнения для волн (и частиц), мы вернемся ниже.

3. СЛАБАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Турбулентность возникает в результате развития неустойчивостей ламинарного движения и характеризуется возбуждением большого чис-

ла степеней свободы. В несжимаемой жидкости – это набор сильно взаимодействующих между собой вихрей. В такой среде, как плазма, могут возбуждаться самые различные типы волн (лэнгмюровские, ионно-звуковые, альфеновские и т.п.), причем, в отличие от вихрей в жидкости, волны в плазме обладают существенной дисперсией скоростей распространения. Благодаря этому их взаимодействие может быть достаточно слабым. Такое состояние принято называть слаботурбулентным. Оно может осуществляться и в гидродинамике и хорошо всем знакомо по движениям взволнованной поверхности моря (слабой турбулентности соответствует волнение без образования «барашков»).

В этих условиях хорошо определенными объектами становятся волновые пакеты – квазичастицы, динамика которых определяется их законом дисперсии $\omega(\mathbf{k})$. Такую систему, благодаря слабой связи между волновыми пакетами, удобно рассматривать как слабо неидеальный газ, взаимодействие в котором носит характер столкновений, а их можно описывать с помощью кинетического уравнения для функции распределения. В ряде случаев удастся найти точные стационарные решения этого уравнения, соответствующие колмогоровским распределениям с постоянными потоками (энергии, импульса, квазичастиц) по спектру турбулентности и тем самым получить достаточно полное статистическое описание.

При постановке задачи о турбулентном распределении в кинетическом уравнении (2.3') необходимо ввести источник $D_{\mathbf{k}}$ и сток $\Gamma_{\mathbf{k}}$:

$$\dot{N}_{\mathbf{k}} - I_{cm} \{N_{\mathbf{k}}\} = D_{\mathbf{k}} - \Gamma_{\mathbf{k}}. \quad (3.1)$$

Источник может быть связан с инкрементом $\gamma_{\mathbf{k}}$ неустойчивости $D_{\mathbf{k}} = \gamma_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}$, сток – с конечным временем жизни квазичастиц, например, из-за молекулярной вязкости ($\Gamma_{\mathbf{k}} = 2\nu k^2 N_{\mathbf{k}}$). Существенно, что источник и сток предполагаются значительно разнесенными в \mathbf{k} -пространстве, благодаря чему возникает поток энергии из области источника в область стока (возможно возникновение потоков других сохраняющихся величин: числа квазичастиц при нераспадном законе дисперсии, импульса в анизотропных распределениях, энтропии в двумерной системе [5] и т.д.).

В инерционном интервале, расположенном между областями источника и стока, определяющими являются нелинейные взаимодействия волн, и главным членом кинетического уравнения становится интеграл столкновений. При этом для стационарного распределения уравнение принимает вид

$$I_{cm} \{N_{\mathbf{k}}\} = 0. \quad (3.2)$$

Источник и сток можно считать находящимися в нуле и на бесконечности. Они играют роль граничных условий, отбирая решения КУ, соответствующие постоянству потока через инерционный интервал. С этой точки зрения решения представляют собой промежуточные асимптотики [6]. Величина потока определяется мощностью источника. Постоянство потока является очевидным следствием кинетического уравнения. Например, для потока энергии P имеем (α – размерность \mathbf{k} -пространства)

$$\frac{\partial P}{\partial k} = -k^{\alpha-1} \omega_k I_{ct} \{N_{\mathbf{k}}\} = 0 \quad (3.3)$$

в соответствии с уравнением непрерывности для энергии: $\dot{E}_k + \partial P / \partial k = 0$, $E(k) = k^{\alpha-1} \omega_k N_{\mathbf{k}}$. Решению $N_{\mathbf{k}}$ уравнения $I_{ct} \{N_{\mathbf{k}}\} = 0$ соответствует $P = \text{const}$. Разумеется, кинетическое уравнение описывает не только существенно неравновесные турбулентные состояния, но и состояния, близкие к тепловому равновесию. При этом источник и сток отсутствуют, и равновесным решениям уравнения (3.2) отвечает поток, равный нулю.

Выяснить физический смысл решения (а иногда и получить его) можно, используя соображения размерности. Обратимся к выражению для энергии (2.2) (удобно отнести ее к единице массы, разделив на плотность среды ρ)

$$\frac{E}{\rho} = \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} \langle a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} \rangle. \quad (3.4)$$

Тогда, учитывая определение $N_{\mathbf{k}}$, имеем

$$\frac{E}{(2\pi)^\alpha \rho L^\alpha} = \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} = \int dk E(k) = \int d\omega E(\omega), \quad (3.5)$$

где $E(k)$ и $E(\omega)$ спектральные плотности энергии в пространстве волновых чисел и частот соответственно, L – размер системы. Отсюда следуют размерности (l – длина, t – время):

$$[N] = l^5 t^{-1}, \quad [E(k)] = l^{6-\alpha} t^{-2}, \quad [E(\omega)] = l^{5-\alpha} t^{-1}, \quad [P] = l^{5-\alpha} t^{-3}, \quad (3.6)$$

размерность P определяется уравнением непрерывности. Если в задаче отсутствуют характерные времена и длины (мы для краткости ниже будем говорить при этом о полной автомодельности), то единственная величина размерности длины есть k^{-1} , а времени ω^{-1} .

Напомним, как из соображений размерности получается спектр турбулентности несжимаемой жидкости. У вихрей собственные частоты равны нулю. Поэтому спектральная плотность $E(k)$ должна быть построена лишь из потока P и волнового числа k (в силу локальности): $E(k) = P^a k^b$. Отсюда, сравнивая размерности и находя значения коэффициентов a и b , получаем спектр Обухова–Колмогорова

$$E(k) = P^{2/3} k^{-5/3}. \quad (3.7)$$

В случае волновой турбулентности одних соображений размерности недостаточно, так как здесь мы имеем дело с системой распространяющихся волн и кроме волнового числа есть еще один параметр – их скорость (или частота). Однако, в случае слабой турбулентности справедливо кинетическое уравнение, из которого вытекает связь между N и P . Для распадного спектра, когда $I_{\text{ст}}^{\text{расп}} \propto N^2$, отсюда следует $N \propto P^{1/2}$. Остается определить зависимость N от k и ω , а здесь уже соображений размерности оказывается достаточно: $N_{\mathbf{k}}^{\text{расп}} = P^{1/2} \omega^a k^b$. Получаем, таким образом,

$$N^{\text{расп}} = P^{1/2} \omega^{-1/2} k^{-\frac{\alpha+5}{2}}. \quad (3.8)$$

Для капиллярных волн на глубокой воде $\omega = k^{3/2}$, $\alpha = 2$, откуда (3.8) приводит к спектру Захарова и Филоненко $N_{\mathbf{k}} = P^{1/2} k^{-17/4}$ [7].

Рассмотрим теперь нераспадный спектр (например, гравитационные волны на глубокой воде⁶). При этом есть новая сохраняющаяся величина – число частиц. Поэтому наряду с решениями, в которых сохраняется поток энергии, возможны решения кинетического уравнения, в которых сохраняется поток частиц по спектру [8].

При полной автомодельности в случае постоянного потока энергии из соображений размерности имеем

$$N_{\mathbf{k}}^{\text{нерасп}} = P^{1/3} k^{-\frac{\alpha+10}{3}}. \quad (3.9)$$

Для гравитационных волн на глубокой воде ($\alpha = 2$) получаем спектр Захарова и Филоненко $N = P^{1/3} k^{-4}$ [7]. Решение с постоянным потоком частиц Q [8] получается отсюда заменой P на $Q\omega_k$:

⁶ Кинетическое уравнение с источниками и стоками для гравитационных волн на поверхности жидкости впервые рассматривалось К. Хассельманом [9]. Современному состоянию вопроса посвящены обзоры [10–15].

$$N^{\text{нерасп}} = Q^{1/3} \omega_k^{1/3} k^{-\frac{\alpha+10}{3}}. \quad (3.10)$$

Степень $1/3$, в которой входит поток, определяется видом интеграла столкновений кинетического уравнения ($P, Q \propto I_{\text{ст}} \{N\} \propto N^3$).

Для интерпретаций распределений необходимо рассматривать плотности потоков в \mathbf{k} -пространстве. Здесь весьма удобной оказывается электростатическая аналогия. Введем плотность потока энергии $\mathbf{q}(\mathbf{k})$ равенством

$$\text{div}_{\mathbf{k}} \mathbf{q}(\mathbf{k}) = -\omega_{\mathbf{k}} I_{\text{ст}} \{N_{\mathbf{k}}\}. \quad (3.11)$$

Из кинетического уравнения в стационарном случае следует тогда

$$\text{div}_{\mathbf{k}} \mathbf{q}(\mathbf{k}) = \tilde{D}_{\mathbf{k}}, \quad (3.12)$$

где $\tilde{D}_{\mathbf{k}}$ – источник (сток) энергии, локализованный вблизи начала координат в \mathbf{k} -пространстве. В инерционном интервале (большие расстояния от источника и стока) играют роль лишь его низшие мультипольные моменты. Если считать $\text{rot } \mathbf{q} = 0$, то \mathbf{q} играет роль поля, а $\tilde{D}/4\pi = \rho(\mathbf{k})$ – плотности заряда. Точечный заряд P в начале координат ($\rho = P\delta(\mathbf{k})$) согласно теореме Гаусса порождает постоянный поток (энергии). Для плотности потока справедлив закон, аналогичный закону Кулона. Диполь \mathbf{d} приводит к постоянному потоку импульса. Поток частиц соответствует свой «заряд» Q в начале координат. Эти распределения могут быть найдены не только из соображений размерности, но и как точные решения КУ, что является существенным результатом теории слабой турбулентности (см. Приложение I и работы [7, 16-30]), и будут рассмотрены ниже.

4. ВЗАИМОСВЯЗЬ РАВНОВЕСНЫХ И ПОТОВОКОВЫХ СЛАБОТУРБУЛЕНТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Идеи (слабой или волновой) колмогоровской турбулентности были распространены на новые объекты [31, 32], и это привело к результатам, важным для понимания структуры самих слаботурбулентных потоковых спектров. Мы ограничимся изотропными спектрами⁷ как ввиду их про-

⁷ Дрейфовые отклонения от изотропных распределений см. в [24]. Слабая турбулентность волн в замагниченной плазме (с учетом возникающей анизотропии) рассмотрена в [90].

стоты, так и той роли, которую они играют в астрофизических приложениях. В примерах из гидродинамики (волнение на поверхности жидкости) и физики плазмы (ленгмюровская турбулентность) квазичастицы представляли собой волновые пакеты, и речь шла о взаимодействии волна–волна, которое для нераспадного спектра сводилось к рассеянию. Сохранение, наряду с энергией, числа волн (волнового действия) приводило к двум различным степенным турбулентным спектрам, один из которых соответствовал потоку энергии, а другой – потоку числа квазичастиц через инерционный интервал [7, 16–30]. Оба этих спектра находились как решения, обращающие в нуль интеграл столкновений (наряду с равновесным распределением). Этот же подход был распространен на плазменные системы со взаимодействием волна–частица. Связанная система кинетических уравнений содержит при этом интеграл столкновений, по-прежнему имеющие структуру (2.12), (2.15), причем для частиц в выражении f^{KB} при фермиевской статистике возникают множители $(1-l)$ вместо множителей $(1+N)$ для волн. В классическом пределе ($n \ll 1$) имеем

$$f_{k_p|k_p'} = (N_k + 1)N_k n_{p'} - N_k (N_{k'} + 1)n_p. \quad (4.1)$$

Стационарные решения системы кинетических уравнений приводят к степенным спектрам как для волн, так и для частиц⁸ (при наличии потока по их спектру). Рассматривались с этой точки зрения и процессы томсоновского и комптоновского рассеяния. Наконец, колмогоровские спектры частиц обсуждались для взаимодействия частица–частица [33]. В частности, были получены степенные распределения частиц, которые формируются за счет обычных кулоновских соударений в отсутствие взаимодействия с волнами и, более того, способствуют затуханию волновых движений и расширению области существенно «столкновительной» плазмы. Здесь физическая картина уже очень далека от гидродинамической турбулентности, но формальная аналогия в духе слабой турбулентности полностью сохраняется. Остается справедливым и выражение для слаботорбулентных потоковых распределений. При этом в силу $n \ll 1$ для частиц следует $f_{p_1|p_2,p_3} = n_2 n_3 - n n_1$. Степенные распределения частиц прежде всего сказываются на тех свойствах среды, которые чувствительны к наличию быстрых частиц: затухание Ландау, скорости ядерных реакций, критерий Лоусона и т. п. Однако в подобных вопросах важна уже структура распределения при значительной доле тепловых частиц. Она выяснена на более простом примере спектра, формируемого томсоновским рассеянием, когда КУ носит дифференциальный характер (см. ниже).

⁸ Степенные спектры нейтронов, соответствующие постоянному потоку частиц по спектру, обсуждались Ахиезером и Померанчуком еще в 1948 г. [5], причем рассматривалось рассеяние нейтронов на ядрах, описываемое кинетическим уравнением.

4.1. Распределения с потоком и температурой (на примере взаимодействия электронов и излучения)

Существование равновесных и турбулентных стационарных решений у КУ поставило вопрос о том, каким должно быть распределение при совместном воздействии термостата, формирующего равновесный, и источника, формирующего турбулентный спектр. Достаточно простой и важный пример излучения, рассеиваемого равновесными нерелятивистскими электронами (играющими роль термостата с температурой T_e), при наличии потока от источника фотонов позволяет провести аналитическое исследование задачи. Оказывается, что одновременное наличие потока и температуры приводит к формированию единого распределения, вид которого существенно зависит от соотношения между потоками и температурой [27]. Типичным для него является возникновение промежуточной асимптотики [34], существенно искажающей «хвосты» распределения при самых малых потоках. При нерелятивистских энергиях электронов изменение частоты фотона при рассеянии мало ($\Delta\omega/\omega \sim V/c \ll 1$), так что фотонное КУ из интегрального становится дифференциальным. Соответствующее уравнение Компанейца [35-37] для $N \equiv N_k$ имеет вид

$$\dot{N} = -\frac{1}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} q(\nu), \quad q(\nu) = -\xi \nu^4 \left[\frac{T_e}{h} \frac{\partial N}{\partial \nu} + N(1+N) \right]. \quad (4.2)$$

Здесь q — поток фотонов в пространстве частот $\nu = \omega/2\pi$, h — постоянная Планка, коэффициент ξ определяется через томсоновское сечение σ и концентрацию электронов n . Член с N^2 описывает индуцированные, остальные — спонтанные процессы. Рассмотрим стационарное состояние, соответствующее постоянному отрицательному потоку $q \equiv -\xi(\bar{\nu})^4$. Оно описывается уравнением

$$\frac{T_e}{h} \frac{\partial N}{\partial \nu} + N^2 + N = \left(\frac{\bar{\nu}}{\nu} \right)^4, \quad (4.3)$$

из которого видно, что единственным параметром является отношение корня четвертой степени из потока к температуре $\zeta \equiv h\bar{\nu}/T_e$. При малом

потоке ($\zeta \ll 1$) решение имеет вид слабозмущенного планковского распределения, от которого отрастают в области малых [35-37] и больших [27] частот степенные хвосты (см. рис. 1):

$$N_k \approx (\bar{\nu}/\nu)^2 + T_e/h\nu (\nu \leq \zeta\bar{\nu}); \quad N_k \approx (\bar{\nu}/\nu)^4 + e^{-h\nu/T_e} (\nu \geq T_e \ln(1/\zeta)). \quad (4.4)$$

(Полное решение см. в [27].) При этом область частот, занимаемая степенными асимптотиками, существенно зависит от величины потока.

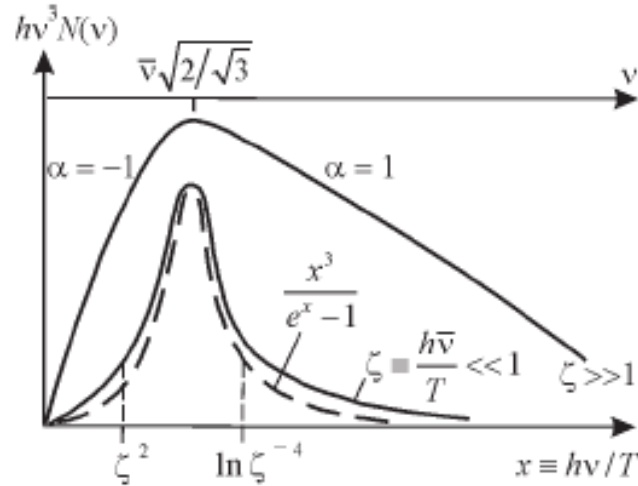


Рис. 1. Распределение интенсивности равновесного излучения при наличии потоков по спектру. Индекс α относится к степенным асимптотикам распределения $\nu^3 N(\nu) \propto \nu^{-\alpha}$

С ростом потока она также растет, и при большом значении потока эти асимптотики смыкаются, «съедая» равновесную часть распределения. Образуется бистепенный спектр, который следует из (4.3) при $T_e \rightarrow 0$:

$$N_k = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 4(\bar{\nu}/\nu)^4} - 1 \right], \quad (T_e \ll h\bar{\nu}). \quad (4.5)$$

Бистепенный вид спектра связан с одновременным учетом как спонтанных, так и индуцированных процессов. Распределение (4.4) является нормируемым, соответствующее ему полное число фотонов конечно. Каждая из степенных асимптотик может быть найдена независимо с использованием свойств симметрии КУ. В этой связи рассмотренный пример решения уравнения Компанейца интересен и для теории турбулентности,

так как наглядно демонстрирует, как степенные асимптотики входят в полное решение. Рассеяние частиц на излучении при наличии потока может формировать и степенные спектры релятивистских частиц, обсуждавшиеся в связи с проблемой объяснения степенных спектров космических лучей. Для релятивистских электронов с распределением по импульсам n_p возникает степенная асимптотика с индексом $\gamma = 2$ в дифференциальном пространственном потоке частиц $c \cdot n_p d^3 p / d\varepsilon \sim \varepsilon^{-\gamma}$. Заметим, что комптоновский спектр электронов с $\gamma = 2$ является весьма универсальным – он получается без каких-либо специальных предположений о виде фотонного спектра [38, 39]. В частности, он может устанавливаться за счет рассеяния на реликтовом излучении.

4.2. Плазменный турбулентный реактор (ПТР) — пример турбулентной системы с потоком по спектру

Под ПТР понимают систему релятивистских электронов с энергиями $\varepsilon \gg mc^2$ и излучения, рассеиваемых и удерживаемых турбулентной плазмой. Процессом, определяющим распределения электронов и фотонов, является рассеяние с превращением плазменного колебания частоты ω_0 в поперечную электромагнитную волну с частотой $\omega \sim \omega_0 (\varepsilon / mc^2)^2$. Плазменная турбулентность является заданной и играет роль некоторого статистически однородного и стационарного внешнего поля, разрешающего основной процесс рассеяния. Уравнения ПТР получаются разложением КУ вида (2.12), (2.15) по малой передаче электронного импульса при рассеянии с учетом доплеровского преобразования частоты и содержат усредненную вероятность перехода u , зависящую лишь от отношения ω / ε^2 , где ω измеряется в единицах ω_0 , а энергия в единицах mc^2 . Так как рассматривается один и тот же процесс, то каждое из КУ для распределения фотонов N_k и электронов n_p содержит одну и ту же комбинацию функций распределения $\omega N \partial n / \partial \varepsilon + n$, умноженную на $u(\omega / \varepsilon^2)$ и плотность электронных состояний ε^2 . Величина u пропорциональна энергии плазменной турбулентности. Т.о. уравнения ПТР имеют вид [40, 41]

$$\dot{n}_p = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_0^\infty d\omega S(\omega, \varepsilon); \quad \dot{N}_k = \frac{1}{\omega^3} \int_0^\infty d\omega S(\omega, \varepsilon); \quad S(\omega, \varepsilon) = \varepsilon^2 u(\omega / \varepsilon^2) (\omega N \partial n / \partial \varepsilon + n). \quad (4.6)$$

Эти уравнения допускают два стационарных степенных решения. Одно из них, выраженное через индексы $\varepsilon^2 n_p \sim \varepsilon^{-\gamma}$ и $\omega^3 N \sim \omega^{-\alpha}$, соответствует $\gamma = 2$ и $\alpha = -5/2$, другое — индексам $\gamma = 3$ и $\alpha = -5/2$. Первое из них соответствует постоянному потоку числа релятивистских электронов [26, 40, 41], направленному в сторону больших энергий, а второе представляет собой решение с постоянным потоком энергии по спектру как электронов, так и фотонов, причем суммарный поток направлен в сторону малых энергий [26]. Не останавливаясь на астрофизической стороне дела [40, 41], отметим, что потоки в ПТР должны создаваться источниками, сторонними по отношению к турбулентной плазме. Скорее всего, при этом должны формироваться неоднородные спектры [31, 32].

4.3. Направление потоков по спектру и нормировка распределений

Различные турбулентные решения требуют для своей реализации определенного расположения источников в соответствии со знаками потоков. Определение направления потоков на степенных спектрах может быть произведено в общем виде [25]. При этом удобно использовать выражение для потока частиц $Q = J_0$ через производную по показателю степени от интеграла столкновений [42] и аналогичное условие для потока энергии $P = J_1$. Анализ существенно упрощается, если воспользоваться конформной симметрией и перейти к факторизованной форме записи $L_{ст}$ на степенных распределениях. Соотношение между потоком и спектром вида $N_{турб}^{(i)} = A_i \omega^s$ ($i = 0$ или 1 в зависимости от сохранения потока частиц или энергии) для процесса рассеяния вида $\omega + \omega_1 \rightleftharpoons \omega_2 + \omega_3$ приобретает вид:

$$J_i = \frac{A_i^3}{4\beta} \int d\tau \cdot w \cdot (\omega \omega_1 \omega_2 \omega_3)^s \left[\omega^{-s} + \omega_1^{-s} - \omega_2^{-s} - \omega_3^{-s} \right] \times \\ \times \left[\omega^i \ln \omega + \omega_1^i \ln \omega_1 - \omega_2^i \ln \omega_2 - \omega_3^i \ln \omega_3 \right] \Big|_{s=s_i} \quad (4.7)$$

Здесь $d\tau = d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3$, w — вероятность рассеяния. Выяснить знак потоков с помощью этого выражения можно без фактического вычисления интегралов (разумеется, необходимого для вычисления нормирующего множителя c_i в связи $A_i = c_i |J_i|^{1/3}$). Результат определяется только индексами распределения s и степенью однородности закона диспер-

сии β : $\text{sign } J_0 = -\text{sign } \beta s_0 (s_0 + 1)$; $\text{sign } J_1 = \text{sign } \beta s_1 (s_1 + 1)$; $s_0 = s_1 + 1/3$. Знак потока меняется, если индекс проходит через значения $s = 0$ и -1 , отвечающие степенным асимптотикам равновесного спектра волн $N_{\text{равн}} = T/(\omega + |\mu|)$. Направлены ли потоки энергии и числа волн в одну сторону или противоположны, определяется расположением значений индексов распределений s_0 и s_1 относительно указанных «критических» значений 0 и -1 . Как правило, потоки могут быть направлены только в разные стороны, причем для $\beta > 0$ поток числа волн направлен в сторону длинных, а энергии – в сторону коротких волн. Для систем гидродинамического типа это отмечалось Захаровым и связано с «вымерзанием» взаимодействия при $\lambda \rightarrow \infty$, что приводит к значениям $s < -1$. Аналогичный анализ для частиц, описываемых интегралом столкновений Больцмана, приводит к условиям $\text{sign } J_0 = -\text{sign } \beta s_0$, $\text{sign } J_1 = \text{sign } \beta s_1$; $s_0 = s_1 + 1/2$. Особым является случай активационного закона дисперсии.

Определение направления потока тесно связано с нормировкой турбулентных распределений, которые, как правило, не соответствуют конечным плотностям (числам частиц) или энергиям при растяжении инерционного интервала на всю полуось энергий (частот). Эти распределения допускают нормировку на поток по спектру, если на них сходятся сами интегралы столкновений (т. е. выполнено условие локальности). Прямые вычисления в простейших случаях (например, для акустической турбулентности [23], для капиллярных волн на мелкой воде и др.) подтверждают, что безразмерный нормировочный коэффициент — порядка единицы. Для кулоновского спектра частиц с потоком энергии он обратно пропорционален кулоновскому логарифму [42, 43].

5. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ СМОЛУХОВСКОГО И СЛИЯНИЯ ГАЛАКТИК

Долгое время считалось, что после своего образования в результате развития гравитационной неустойчивости (из газового протогалактического облака) галактики эволюционируют сугубо индивидуально. Наблюдательные данные последних трех десятилетий, в особенности данные космического телескопа Хаббла и крупнейших наземных телескопов, дают убедительные доказательства определяющей роли слияний

в космогонии галактик. Выход обзоров Кенникута, Швейцера и Барнса [44], посвященных взаимодействию и слиянию галактик и вызванному им индуцированному звездообразованию (около 1000 ссылок и более 200 иллюстраций!), позволяет опустить описание соответствующей библиографии и наблюдательных аргументов в пользу слияний.

Корреляция между активностью галактик и их взаимодействием и слияниями также является сейчас уже хорошо установленным наблюдательным фактом [45–47]. Малая концентрация квазаров и радиогалактик позволяет возникать им даже за счет очень редких соударений или слияний. Активные галактики могут играть роль удобного маркера при исследовании вопроса о слияниях. Примером может служить обрыв в распределении квазаров при красных смещениях $z_{cr} \approx 2-3$, который может означать момент «сборки» массивных галактик из менее массивных блоков⁹, соответствующий «взрывной» эволюции, свойственной процессу слияния галактик (см. ниже).

5.1. В е р о я т н о с т ь с л и я н и я г а л а к т и к

Поскольку за неупругость столкновения, приводящую к слиянию, ответственны быстро убывающие приливные силы в бесстолкновительной звездной подсистеме галактик, для слияния необходимо их тесное сближение (вплоть до перекрытия). При большой относительной скорости галактики пройдут друг сквозь друга даже при полном пересечении. Сечение слияний используем в виде $\sigma = \pi (R_1 + R_2)^2 (1 + \gamma) \varphi(\gamma)$, где $\gamma \equiv V_g^2 / V^2$ – параметр фокусировки, а функция $\varphi(\gamma) \rightarrow 1$ при $\gamma \rightarrow \infty$; $\varphi(\gamma) \rightarrow 0$ при $\gamma \rightarrow 0$ и зависит от модели слияния. Простейший вариант критерия слияния: минимальное расстояние между сталкивающимися галактиками меньше суммы их радиусов ($R_1 + R_2$), а относительная скорость на бесконечности меньше скорости убегания V_g . Это приводит к следующему выражению (выписываем только зависимости от масс) для коэффициента коагуляции $U \equiv \overline{\sigma v}$, где черта означает усреднение по скоростям галактик:

$$U = \begin{cases} c_{1+\beta} (M_1 + M_2) (M_1^\beta + M_2^\beta), & \text{(большие массы)} \\ c_2 (M_1 + M_2)^2. & \text{(малые массы)} \end{cases} \quad (5.1)$$

Здесь радиус галактики R связан с её массой M соотношением $R = CM^\beta$ ($\beta = 1/3$ соответствует постоянной плотности, $\beta = 1/2$ – наблюдаемым

⁹ Обнаружение в сверхглубоком поле Хаббла древних и в то же время массивных галактик может внести изменения в этот сценарий.

законам Фабера–Джексона и Талли–Фишера). Для функции $U(M_1, M_2)$ удобно ввести ее степень однородности u и показатели $u_{1,2}$, описывающие ее асимптотики при сильно отличающихся массах: $U \propto M_1^{u_1} M_2^{u_2}$, $M_1 \ll M_2$, $u_1 + u_2 = u$. Очевидно, что для (12.1) $u_1 = 0$, а $u_2 = u = 2$ для $M \ll M_b$ и $1 + \beta$ для $M \gg M_b$, где M_b разделяет области больших и малых масс. Заметим, что именно параметры $u_{1,2}$ (т. е. асимптотики U) определяют асимптотики источника в уравнении для функции светимости (ФС) квазаров (см. ссылки в [47]). Поскольку скрытая масса (темное вещество) также бесстолкновительна, в простейших схемах, по-видимому, можно не отделять темную материю от светящейся, если считать гало индивидуализированными для галактик.

5.2. Ф у н к ц и я м а с с

Если массивные галактики преимущественно образуются в результате слияния менее массивных, то этот процесс отражает их распределение по массам [48] – функция масс (ФМ). Вычислить такую функцию можно, например, если ограничиться парными слияниями, решив описывающее её уравнение Смолуховского (УС):

$$\frac{\partial f(M, t)}{\partial t} = \int dM_1 dM_2 [U_{12} \delta_M f_1 f_2 - cycle - bicycle]. \quad (5.2)$$

Здесь $f_1 \equiv f(M_1, t)$ и т. д., $\delta_M \equiv \delta(M - M_1 - M_2)$ – дираковская δ -функция, выражающая закон сохранения массы при слияниях, U_{12} – коэффициент коагуляции (5.1). В случае обобщенного уравнения Смолуховского (см. ниже) мы будем считать выполняющимся также закон сохранения углового момента. Законы эти отнюдь не очевидны, но с удовлетворительной точностью подтверждаются численными экспериментами. Выход за эти рамки, как и за рамки кинетического уравнения, требует использования значительно более изощренного математического аппарата, который применительно к интересующему нас кругу задач еще только развивается (ср. [49]). В то же время, как известно, кинетические уравнения хорошо описывают ситуацию и шире формальных рамок применимости. Отметим, что между подходом Пресса и Шехтера [50], использующим ренормгрупповую перенормировку масштаба, и кинетическим подходом также имеется связь. С точки зрения кинетики, в этом подходе описывается результат многих слияний ближайших соседей с вероятностью, не зависящей от масс.

5.3. «Взрывная» эволюция галактик

В случае галактик весьма существенной оказывается зависимость U от масс (5.1), которая приводит, в частности, к взрывной эволюции ФМ. Стокмайером было открыто применительно к полимеризации, а затем последовательно переоткрывалось в других областях физики [51–57] необычное поведение решения уравнения Смолуховского при $u > 1$. В этом случае в системе происходит нечто близкое к фазовому переходу: за конечное время (t_{cr}) устанавливается квазистепенное распределение $\Phi \propto M^{-\alpha}$ вплоть до формально бесконечных масс («взрывная» эволюция). Достаточно подробное исследование взрывной эволюции в связи с образованием центральных массивных сD-галактик в группах, эпохой рождения квазаров, эффектом Бутчера–Эмлера «покраснения» галактик на определенных красных смещениях и т.п. было проведено в работах римской и харьковской групп [58–63]. В системе N_0 галактик с массами M_0 это время равно $t_{cr} = \xi_u / (c_u N_0 M_0)$, где соответственно $\xi_u = 0.002, 0.26, 0.1$ для $u = 2, 4/3, 3/2$. Появление при этом относительно крутой промежуточной асимптотики ($\alpha \approx 2$) легко может быть понято из следующих аргументов. Оба полученные численно значения для индексов ($\alpha \sim 1.9$ для $u = 4/3$ и $\alpha \sim 2.1$ для $u = 3/2$) находятся между $(n+2)/2$ и $(n+3)/2$. ФМ с $\alpha = (n+3)/2$ соответствует постоянному потоку массы вдоль спектра масс до бесконечности, то есть к сD-галактике в нашем случае (решения с постоянным потоком сохраняющейся величины аналогичны колмогоровским спектрам в теории слабой турбулентности). Однако, благодаря нелокальности распределений с $u > 1$ (расходимость интеграла в уравнении Смолуховского на степенном распределении) такое решение не реализуется точно в обоих наших случаях. Нелокальность приводит к существенной роли взаимодействий между галактиками малых и больших масс. При этом число массивных галактик приблизительно сохраняется, и постоянный поток их числа по спектру соответствует ФМ с $\alpha = (n+2)/2$. В итоге индекс спектра ФМ (как можно видеть из численного решения уравнения Смолуховского) расположен между этими значениями: $1.67 < \alpha \approx 1.9 < 2.17$ ($n = 4/3$), $1.75 < \alpha \approx 2.1 < 2.25$ ($n = 3/2$) и весьма близок к их среднему арифметическому. Мы ограничились здесь обсуждением случая больших масс. При малых массах $u = 2$ и нелокальность еще существенней. В этом случае естественной является попытка перехода к дифференциальному уравнению от интегрального, что было предпринято в [59] и [62] (см. также Приложение 3).

Интерес к распределению галактик по моментам определяется формированием различных морфологических типов при слияниях, но этим не ограничивается: слияния приводят к возникновению активности

галактических ядер. Один из способов описания этого грандиозного феномена, включающего ультраяркие ИК галактики, радиогалактики и квазары, состоит в учете компенсации момента при слиянии (см. [58, 64–70]). Найти распределение по массам и моментам $f(M, S)$, устанавливающееся в результате слияний галактик, можно, решив обобщенное уравнение Смолуховского для $f(M, S)$ [58–63]. Аналитически это возможно сделать лишь при весьма упрощающих допущениях. В частности, в т. н. анизотропной модели распределение $f(M, S)$ факторизовано и имеет вид произведения ФМ на острую функцию от моментов. Отказавшись от упрощений, приходится прибегать к численным методам, в частности, к моделированию с помощью метода Монте-Карло [75]. Оказывается, что в системе сливающихся галактик происходит аналог кинетического фазового перехода Стокмайера. Система разделяется на две фазы: гигантскую галактику, в которой заключена макроскопическая часть массы и много мелких галактик. Возникающую гигантскую галактику можно отождествить с реальными сD-галактиками в центрах групп и скоплений. Среди мелких большинство составляют галактики, ни разу не испытавшие слияния. ФМ, полученная в результате численного моделирования (рис. 2), находится в хорошем согласии с функцией, полученной прямым решением уравнения Смолуховского [51–63, 71–76]. Вследствие значительного вклада слияний между относительно небольшим числом появляющихся массивных галактик и маломассивными галактиками, время t_{cr} , соответствующее «фазовому переходу», существенно меньше характерного времени $(\sigma V n)^{-1}$, где σ – сечение слияния для типичных галактик, n – их концентрация, а V – средняя скорость. Этот процесс можно сопоставить также наблюдаемому укрупнению ФМ галактик на ее легком конце [62]. При $\alpha > 2$ основная барионная масса Вселенной может быть сосредоточена в «невидимых» маломассивных галактиках.

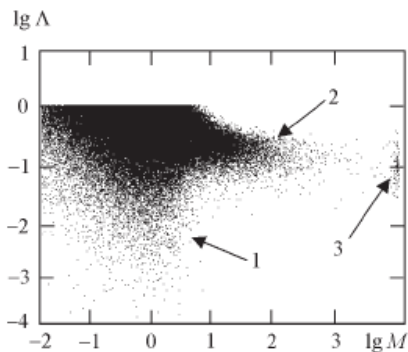


Рис. 2. Эволюция распределения галактик по массам M и (безразмерным) моментам Λ за счет слияний (расчет методом Монте-Карло): 1 – начальное распределение маломассивных галактик; 2 – степенной «хвост», формируемый слияниями; 3 – возникающая популяция самых массивных сD-галактик

5.4. Активность и слияния

Хотя идея взаимодействия, а тем более слияния галактик как одного из основных факторов их эволюции, наталкивалась на многочисленные возражения, за последние годы произошло изменение во взглядах значительного числа исследователей на происхождение активных галактических ядер (АГЯ). Ответственность за активность возлагается на слияния галактик. Согласно практически общепринятым представлениям, АГЯ представляют собой весьма сложно устроенную аккрецирующую систему вокруг сверхмассивной черной дыры, находящейся в центре хозяйской галактики [27] (упомянем аккреционный диск, затеняющий тор или толстый диск, по оси которого направлен радиовыброс в случае радиогромких объектов, систему быстролетающих облаков, формирующих широкие, а на больших расстояниях – уже за тором – узкие оптические эмиссионные линии, и т.п.). Хотя в силу чрезвычайной эффективности энерговыделения при аккреции для питания большинства активных галактических ядер достаточно «внутренних ресурсов», они, по не вполне понятным причинам, не обеспечивают необходимую поставку топлива. Данные последних трех деkad, в особенности данные космического телескопа Хаббла, убедительно свидетельствуют в пользу того, что взаимодействие галактик и, в первую очередь, их слияния (это непосредственно подтверждается наблюдением хозяйских галактик ближайших квазаров) ответственны за феномен активности, поставляя необходимое для аккреции вещество. Процесс слияний может носить взрывной характер (см. выше), и «эпоха квазаров» может соответствовать эпохе «сборки» массивных галактик из строительных блоков путем «сильных» слияний (major mergers) с галактикой сравнимой массы. Подобная «сборка» галактик позволяет объяснить как быстрое убывание числа квазаров от прошлого к настоящему, так и известный обрыв в их распределении на больших красных смещениях, сделать выводы о виде и эволюции их функции светимости [9, 25–27] и т.п. Радиогромкие квазары в модели слияний естественно связываются с вращением черной дыры, которое инициируется либо недавним «сильным» слиянием, либо относительно небольшим количеством «слабых» слияний массивной галактики с карликами. Местонахождение удаленных квазаров в скоплениях, а более близких в группах, способствует слияниям. Наиболее экзотический обсуждаемый вариант модели – возможность слияния галактики (или облака межгалактической среды) с «голой» массивной черной дырой [77].

В модели слияний характерная масса галактик со временем растет, а светимость квазаров после эпохи их образования, как известно из наблюдений, падает. Таким образом, простая космологическая эволюция ФМ не может быть причиной этого падения. Одно из возможных объяснений уменьшения светимости квазаров заключается в космологической

эволюции доли вещества η , реально попадающего в центр при слияниях [60]. Уменьшение η на космологических временах можно связать с уменьшением содержания газа в галактиках. Действительно, при слиянии в центр попадает, в основном, газ, а за счет интенсивного звездообразования при каждом слиянии его доля, естественно, должна уменьшаться, как это и наблюдается. Влияет также эволюция контраста плотности галактик. При этом для не эволюционирующей ФМ доля вещества, попавшего в центр, изменяется с $\eta \sim 0.12-0.3$ при $z \sim 2$ до $\eta \sim 0.025-0.043$ при $z \sim 0.5$, а средний контраст плотности в местах образования квазаров – от $\sim 1.4-2.4$ при $z \sim 2$ до $\sim 4.5-7.2$ при $z \sim 0.5$ (в случае эволюции ФМ и учета эддингтоновского ограничения светимости параметр η и контраст плотности могут быть еще выше). Таким образом, рассматриваемая модель может описать наблюдаемую эволюцию квазаров.

Галактики в обсуждаемой схеме являются носителями массы и момента. Возможно сопоставление различным хаббловским морфологическим типам (через эффективный момент $S_{eff}(M)$, см. [51–57, 74, 75]).

Эллиптические галактики с этой точки зрения принципиально не отличаются от спиралей. Суммарная ФМ получается близкой к шехтеровской $f(M) = M^{-\alpha} e^{-M/M^*}$ [46] (см. также Приложение 3), но ФМ для различных морфологических типов $f(M, S_{eff}(M))$ от нее отличаются.

6. С Т Е П Е Н Н Ы Е С П Е К Т Р Ы В П Р И Р О Д Е

Многие статистические закономерности в природе, приводящие к степенным распределениям, могут быть получены из простейшего предположения о малости времен корреляции случайных сил в уравнениях Ньютона $dp/dt = f$. Тогда эти силы можно считать δ -коррелированными: $\langle f(t+\tau) - f(t) \rangle = G\delta(\tau)$, $G = \sigma^2\tau_0$, где σ^2 – дисперсия случайных сил, τ_0 – малое время корреляции. Рассматриваемый процесс стационарен и характеризуется структурной функцией, получаемой интегрированием уравнений Ньютона: $D(\tau) = \langle [p(t+\tau) - p(t)]^2 \rangle = 2G\tau$, что означает диффузию «частиц» в пространстве импульсов. В серии работ Г. С. Голицына [78] показано, что уже одно это допущение, при разном физическом смысле как «сил», так и «частиц», позволяет объяснить многие наблюдаемые статистические закономерности: от турбулентных законов распределения энергии волн, структуры рельефа поверхности планет, частоты повторяемости землетрясений – до спектра космических лучей [79]. Дельта-корреляции сил соответствует постоянный по спектру частотный

спектр¹⁰ – белый шум вида $E_f(\omega) = \varepsilon$, структурной функции импульсов [80] – красный шум вида $E_p(\omega) = \varepsilon\omega^{-2}$, от которого, используя «законы дисперсии» для «квазичастиц», можно переходить к энергиям, волновым числам, масштабам [78], а также оценивать закономерности потока событий и соотношения типа частота события – размер (в обычном пространстве либо в пространстве параметров). Для кумулятивной частоты событий $N(\geq E) = 1/\tau(\geq E)$, следствием белого шума для корреляционной функции сил является зависимость $N(\geq E) = \varepsilon/E$, объясняющая многие эмпирические зависимости частота-размер вида $N(\geq E) = E^a$: цунами $N(\geq h)$, h – высота, $a=1.01$; оползни $N(\geq m)$, m – масса грунта, $a=0.95-1.1$; озера $N(\geq S)$, S – площадь озера, $a=0.93-0.95$ и т.п. [78].

В случае космических лучей основой рассмотрения остается классический механизм Ферми ускорения на системе ударных волн и эмпирический факт постоянства пространственной плотности космических лучей в интервале энергий $10-3 \cdot 10^6$ Гэв, что приводит автора к показателю степени дифференциального энергетического спектра $-8/3 \approx -2.67$ [78] при эмпирическом значении -2.7 [80]. Отметим, что отличные физические механизмы могут также приводить к индексам, близким к наблюдаемым значениям. Так, ускорение частиц при разрыве перемычек в плазменном пинче приводит к показателю спектра вида $-(1 + \sqrt{3}) \approx -2.73$ [81]. С другой стороны, индивидуальные особенности процессов ускорения в местах формирования спектров накладывают «отпечатки пальцев», приводящие, в частности, к отличию степенных спектров отдельных космических радиоисточников.

В возможностях обсуждаемого статистического подхода есть существенное отличие от метода, опирающегося на кинетическое уравнение. Чисто степенные зависимости в корреляционных и структурных функциях должны приводить к расходимостям в коэффициентах диффузии. В случае поисков точных решений кинетического уравнения имеется возможность проверить сходимость интеграла столкновений на полученных решениях. Такая сходимость, несмотря на степенной характер решения, является результатом компенсаций различных слагаемых в асимптотиках нелинейных интегралов столкновений. В случае расходимости, т.н. «нелокальности» решений, преобладают взаимодействия квазичастиц разных масштабов, что может быть корректно учтено переходом к дифференциальному описанию, построенному на переразложении кинетического уравнения [28]. Расходимость коэффициентов диф-

¹⁰ Для колмогоровской турбулентности \mathcal{E} соответствует потоку энергии по спектру. Структурные функции, введенные А. Н. Колмогоровым, заменяют корреляционные функции для процессов со стационарными случайными приращениями разных порядков.

фузии может означать уместность обращения к негауссовым статистикам Леви и дробным производным (см., например, [82, 83]).

Интерпретация степенных спектров и изломов в них оказывается плодотворной в самых различных областях, например, указывая на механизмы излучения радиопульсаров [84], рентгеновских пульсаров [85] или определения физических параметров радиогалактик и квазаров [86], и т.п.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ГРУППА СИММЕТРИИ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И СТАЦИОНАРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СЛАБОТУРБУЛЕНТНЫХ СРЕДАХ [87, 88]

Как было показано выше, важный класс существенно неравновесных распределений может быть получен как точное решение КУ, обращающее в нуль ИС $I_{\text{ст}}\{N\}$. Это – стационарные распределения с потоком по спектру турбулентности при удаленных (в \mathbf{k} -пространстве) источнике и стоке волн. Решить нелинейное относительно распределения $N_{\mathbf{k}}$ интегральное уравнение $I_{\text{ст}}\{N\} = 0$ удастся благодаря использованию его свойств симметрии, позволяющих (в частных случаях) факторизовать подынтегральное выражение в $I_{\text{ст}}$. Преобразования в пространстве частот, т.е. для изотропных распределений, были найдены Захаровым [22], преобразования в \mathbf{k} -пространстве – в работах Каца и автора [24].

Покажем, что упомянутые преобразования формируют группу, а смысл факторизации $I_{\text{ст}}$ состоит в проектировании подынтегрального выражения на ее неприводимое единичное представление, по которому преобразуются инварианты группы (см. [89]), благодаря чему решение интегрального уравнения сводится к решению функционального уравнения, состоящего в равенстве нулю этой проекции.

Рассмотрим вначале нераспадный случай, к которому относится ленгмюровская турбулентность. При этом

$$I_{\text{ст}} = \int d\tau_k \cdot w_k \cdot f_k, \quad d\tau_k \equiv d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \quad (\text{П1.1})$$

вероятность рассеяния плазмонов (зависимость от аргументов теперь существенна)

$$w_k \equiv w_{kk_1|k_2k_3} = U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1|\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)$$

содержит закон сохранения энергии (из которого активационная частота выпадает) и импульса, а вид функции

$$f_k \equiv f_{kk_1k_2k_3} = N_1N_2N_3 + NN_2N_3 - NN_1N_2 - NN_1N_3$$

учитывает сохранение числа волн при рассеянии. Закон сохранения импульса удобно изобразить в виде четырехугольника (вообще говоря, пространственного), см. рис. 3а. Преобразования подобия этой фигуры при фиксированной стороне \mathbf{k} образуют группу симметрии интеграла столкновений в изотропной среде, если выполнены условия «автомодельности» $w_{\lambda k} = \lambda^n w_k$, $\omega_{\lambda k} = \lambda^\beta \omega_k$. Определяя операции G_i , относительно кото-

рых инвариантна приведенная вероятность перехода $\tilde{w} \equiv (kk_1k_2k_3)^{-n/4} w_k$ согласно $G_i \mathbf{k}_i = \mathbf{k}$ ($i = 1, 2, 3$), получаем таблицу умножения

$$\begin{array}{c|ccc} E & G_1 & G_2 & G_3 \\ \hline G_1 & E & G_3 & G_2 \\ G_2 & G_3 & G_1 & E \\ G_3 & G_2 & E & G_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} G_1 = \lambda_i g_i, \\ \lambda_i = k/k_i, \\ w_{Gk} = \lambda^n w_k, \tilde{w}_{Gk} = \tilde{w}_k, \end{array} \quad (\text{П1.2})$$

где g_i – повороты, λ_i – растяжения. Группа G изоморфна C_4 (учет инвариантности относительно перестановки $\mathbf{k}_2 \Leftrightarrow \mathbf{k}_3$ приводит к группе D_4). Легко получить ее расширение, включая операции отражения в плоскости, содержащей вектор \mathbf{k} , и вращения вокруг \mathbf{k} (в трехмерном случае). Используя преобразования (П1.2), спроектируем подынтегральное выражение на единичное представление (d – размерность \mathbf{k} -пространства):

$$I_{coll} = \frac{1}{4} \int d\tau_k w_k \left[f_k + \sum_{i=1}^3 (k/k_i)^r f_{G_i k} \right], \quad r = n + 4d. \quad (\text{П1.3})$$

Решением интегрального уравнения $I_{coll} \{N\} = 0$ таким образом являются решения функционального уравнения:

$$\phi(N) = k^{-r} f_k + \sum_{i=1}^3 k_i^{-r} f_{G_i k} = 0 \quad (\text{П1.4})$$

при выполнении законов сохранения. Для изотропных распределений

$$N = \omega^s, \quad \phi(N) \sim f_k \left(\omega^{-\nu} + \omega_1^{-\nu} - \omega_2^{-\nu} - \omega_3^{-\nu} \right), \quad \beta\nu = r + 3\beta S$$

и из (П1.4) следуют решения, отвечающие постоянству потока частиц $S_0 = -r/3\beta$ и энергии $S_1 = -(1/3) - r/3\beta$. Из (П1.4) следуют и те решения, в которых возникает малый дрейф (появление потока импульса и т.п., см. [17, 24]).

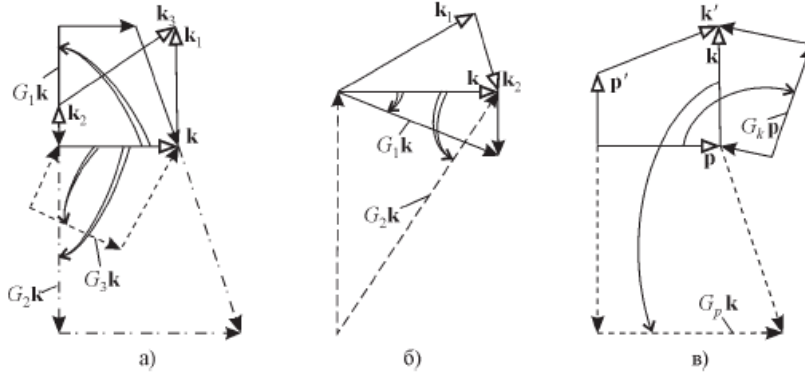


Рис. 3. Фигуры, переходящие друг в друга под действием преобразований симметрии: а) нераспадный спектр, б) распадный спектр, в) индуцированное рассеяние

В двумерном случае, например, для поверхностных волн или для поперечных \mathbf{H} движений в замагниченной плазме, можно ввести комплексное представление векторов $\mathbf{k} \rightarrow z$, $\mathbf{k}_i \rightarrow z_i$, и преобразования группы сводятся к инверсии $G_i = z/z_i$ ($\text{Im } z=0$) [90]. В этом виде они непосредственно обобщают преобразования [22]. Для распадных процессов, где группу симметрии интеграла столкновений

$$I_{coll} = \int d\tau_k \left[w_{k|k_1k_2} f_{k|k_1k_2} - w_{k_1|k_2k} f_{k_1|k_2k} - w_{k_2|kk_1} f_{k_2|kk_1} \right], \quad (\text{П1.5})$$

$$d\tau_k \equiv d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2,$$

при $w_{k|k_1k_2} = w_{k|k_2k_1} = U_{k|k_1k_2} \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ образуют преобразования E, G_1, G_2 (рис. 3б) подобия треугольника, выражающего законы сохранения, она изоморфна D_3 . При этом $f_k = N_1 N_2 - N N_1 - N N_2$ проектируется на неприводимое представление, по которому преобразуется приведенная вероятность $\tilde{w}_k \equiv (kk_1k_2)^{-n/3} w_k$, что, аналогично предыдущему, приводит к уравнению

$$\phi(N) = k^{-r} f_k - k_1^{-r} f_{G_1 k} - k_2^{-r} f_{G_2 k} = 0 \quad (r = n + 3d). \quad (\text{П1.6})$$

Подобным образом находятся группы симметрии кинетических уравнений, описывающих взаимодействие волн с частицами. Так, при индуцированном рассеянии плазмонов на ионах преобразовывая подобия четырехугольника $\mathbf{k} + \mathbf{p} = \mathbf{k}' + \mathbf{p}'$ (рис. 3в) $G_k \mathbf{k}' = \mathbf{k}$, $G_p \mathbf{p}' = \mathbf{p}$ позволяют факторизовать плазмонный и ионный интегралы столкновений [91]. Обе группы изоморфны $C_2(D_2)$. Наконец, интеграл столкновений Больцмана (или Ленарда–Балеску), описывающий парные взаимодействия частиц, обладает группой симметрии $C_4(D_4)$, если вероятность рассеяния обладает свойством однородности $w_p \sim p^n$. Эта группа приводит к уравнению (П1.4) с $f = N_2 N_3 - N N_1$. Наличие указанной симметрии позволило найти в [25, 92] распределение частиц с потоками по спектру. Как отмечалось в работе [92], свойства плазмы с таким распределением частиц (чувствительные к наличию хвостовых частиц) должны существенно отличаться от равновесных. Вводя показатель однородности функции $f(N) \sim N^l$, приведем выражение для изотропных степенных распределений, пригодное как для волн [24] ($l = j - 1$, j – число взаимодействующих волн), так и для частиц [33] ($l = 2$):

$$N_k = P^{1/l} \omega_k^{s_1}, \quad S_1 = -(r + \beta)/\beta l, \quad N_k = Q^{1/l} \omega_k^{s_0}, \quad S_0 = -r/\beta l = S_1 + 1/l. \quad (\text{П1.7})$$

Здесь $r = n + jd$ для волн и $n + 4d$ для частиц, P и Q соответственно потоки энергии и числа волн (частиц). Второе из распределений в (П1.7), отвечающее постоянству потока частиц, существует лишь для процессов рассеяния, когда число частиц (волн) является интегралом движения.

В важном вырожденном случае закона дисперсии, близкого к линейному, также возможно ввести преобразования симметрии, включающие в этом случае и растяжения углов в \mathbf{k} -пространстве [15, 96]. Существенно также, что это вырождение сказывается и на величине вероятностей [19].

ПРИЛОЖЕНИЕ II. СКЕЙЛИНГ И СПЕКТРЫ РАЗВИТОГО ВОЛНЕНИЯ [97]

Нераспадный закон дисперсии поверхностных гравитационных волн ($\omega_k = \sqrt{gk}$, ω – частота, \mathbf{k} – волновой вектор в плоскости раздела,

$k = |\mathbf{k}|$, g – ускорение свободного падения) запрещает процессы распада (и слияния) волн, и в теории слабой турбулентности (СТ) (см. [П]) главным процессом становится рассеяние с сохранением энергии, импульса и «числа волн». Благодаря относительной локализации и разнесенности источников возбуждаемых ветром волн ($k \sim k_+$) и их стоков естественно считать, отвлекаясь от анизотропии, что от источника вверх по спектру направлен поток энергии (распределение Захарова–Филоненко (ЗФ) [7])

$$N_k = c_1 P^{1/3} k^{-4}, \quad (\text{П2.1})$$

вниз по спектру направлен поток числа волн (соответствующее распределение получается заменой $P \rightarrow \omega_k Q$ и $c \rightarrow c_0$ в (П2.1), но может быть получено и как точное решение кинетического уравнения [8]¹¹). Мы будем интересоваться потоком вверх по спектру и, соответственно, коротковолновой частью волнения, где следует ожидать нарушения условия слабой турбулентности (относительной малости потока):

$$Q/V_k^3 \ll 1, \quad (\text{П2.2})$$

где $V_k \equiv \omega_k/k = \sqrt{g/k}$ – фазовая скорость волн. При нарушении (П2.2) нелинейный сдвиг частоты $\Delta\omega_k$ и нелинейное затухание γ_k уже не малы по сравнению с частотой ω_k . В слабо турбулентной области сдвиг $\Delta\omega_k$, обобщающий известный стоков сдвиг, определяется спектром волнения $N_{\mathbf{k}}$ и полудиagonalным элементом гамильтоновой матрицы, описывающим четверные взаимодействия волн $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_1} \equiv V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{(4)}$, ответственным за вклад волны \mathbf{k}_1 в (средний) частотный сдвиг волны \mathbf{k} :

$$\Delta\omega_k = \int d\mathbf{k}_1 \tilde{V}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{(4)} N_{\mathbf{k}_1}. \quad (\text{П2.3})$$

Тильда над $\tilde{V}^{(4)}$ означает, что наряду с процессами рассеяния необходимо учитывать (во втором порядке теории возмущений) тройные процессы, определяемые матричным элементом $V^{(3)}$. Плотность «числа волн» $N_{\mathbf{k}}$ (волнового действия) пропорциональна Фурье-компоненте коррелятора одновременных возвышений поверхности, а плотность энергии в интервале $d\mathbf{k}$ в гармоническом приближении есть $\omega_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}$.

¹¹ На обратное направление потока в этом распределении было указано В. Е. Захаровым.

В интересующей нас области $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}}^{(4)} \sim k^3$ и $V_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^{(4)} \sim (kq)^{3/2}$ при $k \gg q$.

Чисто четверные процессы согласно (П2.3) дают $\Delta\omega_k \sim k^{3/2}$, так как основной вклад в интеграл (П2.3) дает нижний предел. Результат существенно изменяется при учете тройных процессов: главные асимптотики $V_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^{(4)}$ при $q \rightarrow 0$ взаимно погашаются, и получаем $V_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^{(4)} \sim kq^2$ [8], что дает $\Delta\omega_k \propto k$:

$$\Delta\omega_k = CP^{1/3}k. \quad (\text{П2.4})$$

В обоих случаях видна та же тенденция: сдвиг частоты растет с ростом k и при $k > \bar{k} = C^{-2}qP^{-2/3}$, где $\Delta\omega_{\bar{k}} = \omega_{\bar{k}}$, превышает ω_k . При этом закон дисперсии становится распадным, что усиливает взаимодействие. Первая часть (П2.4) ввиду расходимости (П2.3) содержит большой (логарифмический для спектра (П2.1)) множитель $C \gg 1$, вообще говоря, слабо зависящий от k . Благодаря этому при $\tilde{v}_k = \Delta\omega_k/k = CP^{1/3}$ возможно появление малого параметра $k \gg \bar{k}$, где $P/\tilde{v}_k^3 \ll 1$. Область $k \approx \bar{k}$ является сильно турбулентной. Вне области слабой турбулентности используем графическую технику Уальда (см. [29, 80]), в которой система связанных уравнений для функции Грина G и коррелятора N аналогична уравнениям Дайсона:

$$G^{-1} = G_0^{-1} - \Sigma, \quad N = |G|^2 \Phi. \quad (\text{П2.5})$$

Здесь $G_0^{-1} = \omega - \omega_k - i\gamma_k^L$, $\Sigma = \Delta\omega_{\mathbf{k}\omega} - i\gamma_{\mathbf{k}\omega}$, $N \equiv N_{\mathbf{k}\omega}$, $N_k = \int d\omega N_{\mathbf{k}\omega}$, $G \equiv G_{\mathbf{k}\omega}$ — индексы \mathbf{k}, ω опускаем. Собственная энергия Σ и функция Φ выражаются бесконечными рядами, которые можно частично отсуммировать, перейдя к точным гриновским функциям G и вводя перенормированные вершины. Таких вершин возникает несколько типов — как для тройных, так и для четверных процессов. Имея в виду в дальнейшем скейлинговую область [93], не будем для краткости их различать. Символические выражения для Φ и Σ имеют вид

$$\Phi = \text{[diagram 1]} + \text{[diagram 2]}, \quad (\text{П2.6})$$

$$\Sigma = \text{[diagram 3]} + \text{[diagram 4]} + \text{[diagram 5]}, \quad (\text{П2.6'})$$

а уравнения для вершин $\Delta \equiv 3$ и $\square \equiv 4$ содержат бесконечные ряды

$$\Delta = \text{triangle} + \text{triangle with wavy line} + \dots \tag{П2.7}$$

$$\square = \times + \text{triangle} + \text{triangle} + \dots \tag{П2.7'}$$

Здесь сплошной линии соответствует G , волнистой — N , точки — затравочные вершины $V^{(3)}$ и $V^{(4)}$. В области СТ роль малого параметра играет величина $4 \cdot GNk^2\omega$, вершины можно заменить затравочными $3 \rightarrow 3_0 \equiv V^{(3)}$ и $4 \rightarrow 4_0 \equiv V^{(4)}$, функция Грина $G \rightarrow G_0$, а из уравнений (П2.5,6) следует обычное кинетическое уравнение. Учет нелинейного сдвига частоты, обсуждавшийся выше, соответствует тому, что $\Re e \Sigma$ велика ($|\Re e \Sigma| \gg \omega_k$) и в (П2.6,7) существенно отличие гриновской функции от затравочной. Такая процедура, однако, с необходимостью влечет перенормировку тройной вершины.

Действительно, из (П2.7') следует $4 = 3G3$, в то время как для невозмущенных вершин $4_0 = 3_0 G_0 3_0$. Переход от G_0 к G непосредственно не отражается на четверной вершине, не зависящей от частоты ω_k , и можно положить $4 \simeq 4_0$, а тройная вершина вынуждена к ней подстраиваться. При этом сохраняется условие компенсации, приводящей к линейной дисперсии (П2.4). Этот результат имеет более общий смысл и связан с условием скейлинга [93] (см. ниже). Для справедливости кинетического уравнения с модифицированным законом дисперсии необходимо $\gamma_k \ll \delta \omega_k$. Для тройных процессов $\gamma_k^{(3)} \sim kJ^{1/3}$, а в силу сходимости интеграла не содержит большого множителя. Поэтому $\gamma_k^{(3)} \ll \Delta \omega_k$. Однако $\gamma_k^{(4)}$ уже расходится. Поэтому как $\Delta \omega_k$, так и γ_k необходимо искать самосогласованно из (П2.5,6). А именно, необходимо учесть вклад γ_k , что приводит к оценке $\gamma_k^{(4)} \sim \gamma_k \sim \Delta \omega_k$. Этот результат означает, что если $\Re e \Sigma$ является однородной функцией ω и k ($\Delta \omega \sim k^\beta$), то $\gamma = \Im m \Sigma$ будет иметь ту же степень однородности. Последнее позволяет найти при этих условиях решение обобщенного кинетического уравнения (следствие уравнений Дайсона (П2.5)): $L_{k\omega} \equiv N \Im m \Sigma + \Phi \Im m G^* = 0$. Учитывая однородность полной гриновской функции при $\omega_k \ll \Delta \omega_k \sim \gamma_k \sim k^\beta$, $G_{k\omega} \simeq (\omega - \omega_k - i\gamma_k)^{-1}$ и коррелятора $N_{k\omega} = \gamma_k |G_{k\omega}|^2 N_k$, можно из урав-

нения $L_\omega \equiv \int d\mathbf{k} N_{\mathbf{k}\omega} = 0$ найти степенные решения для N_k (см. [19]). При этом для тройных процессов при $V_{\lambda p \lambda p_1 \lambda p_2} = \lambda^{ma} V_{pp_1 p_2}$, $p \equiv (\omega, \mathbf{k})$, $\lambda p \equiv (\lambda \omega, \lambda^{1/\beta} \mathbf{k})$ получим $N_k \sim k^{-(d+ma)}$, d ($=2$ в нашем случае) – размерность \mathbf{k} -пространства. Эту зависимость можно получить непосредственно из условия постоянства потока $P \sim \gamma_k \Delta \omega_k N_k k^d$, $\gamma \sim (G^3 N_k k^d)$. Совместно с условием $\gamma \sim k^\beta$ это позволяет выразить индекс перенормированной вершины m_3 и N_k через β : $m_3 = 2\beta$,

$$N_k \sim k^{-(d+2\beta)}. \quad (\text{П2.8})$$

При согласованных вершинах $m_4 = 2m_3 - \beta$ и четверные процессы приводят к (П2.8). Отметим, что при $\beta = 1$ это решение дает спектр (П2.1), хотя теперь смысл «квазичастиц» совсем иной и кинетическое уравнение неприменимо, т.к. благодаря нелинейным взаимодействиям волн утрачена однозначная связь между ω и k , и нелинейное затухание становится того же порядка, что и частота. Отметим, что $\beta = 1$ соответствует индексу неперенормированной четверной вершины $m_3 = 3$.

Вернемся к точным уравнениям (П2.5-7) и применим к ним идеи, разработанные в теории фазовых переходов [93] для ситуаций, в которых не существенны ни внешние, ни внутренние (микроскопические) масштабы, что характерно и для турбулентности [82, 83]. Выписываем далее только размерности по k и ω . Условия, при которых все слагаемые в уравнениях, за исключением затравочных вершин одного порядка:

$$3^2 G = 4, \quad 4 \cdot GNk^d \omega = 1 \quad (G\omega = 1). \quad (\text{П2.9})$$

Два соотношения для четырех величин $3, 4, G$ и N позволяют накладывать два дополнительных условия. Если потребовать, чтобы $3 = 3_0$, $4 = 4_0$, то придем к распределению Филлипса [94] $N_k \sim \omega_k / k^5$, $\omega_k N_k \sim k^{-4}$. Поток энергии при этом непостоянен, что видно из его размерности (П4.9). Потребуем теперь, напротив, постоянства потока $P = \text{const}$ в качестве условия, дополнительного к (П2.9). При этом остается один свободный параметр, в качестве которого можно принять индекс четверной вершины. Если определить его условием $4 = 4_0$, то для $\varpi_k = \omega_k + \Delta \omega_k$ получаем линейный спектр (ср. (П2.4) и распределение (П2.1)). Существенно, однако, что частотный спектр при этом будет отли-

чатся от соответствующего спектра ЗФ. Полученный результат согласуется с наблюдавшимся уширением волновых состояний и изменением дисперсии в коротковолновой области спектра развитого волнения [95].

Грубая оценка области перехода $k \sim \bar{k}$ приводит к $k_+ / \bar{k} \sim 2\pi\gamma_+ / \omega_+$, где γ_+ – инкремент ветровой неустойчивости. По достижении порога Кельвина–Гельмгольца это отношение перестает быть малым. Это может означать необходимость включения взаимодействия с ветром, перестраивающего спектр волн, в картину нелинейных взаимодействий.

ПРИЛОЖЕНИЕ III. ЭВОЛЮЦИЯ ДАЛЕКИХ ГАЛАКТИК. КИНЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

Современные исследования далеких галактик. Представления о «далеких галактиках» долгое время было весьма относительным. Сейчас ситуация в корне отличается: наблюдения подводят нас к пределу, за которым галактик (и звезд) еще не существовало [98-100]. Для сравнения укажем, что Эдвин Хаббл в первой своей работе, где была установлена линейная связь скорости удаления галактики (и соответственно, красного смещения¹² спектральных линий) от расстояния до нашей Галактики – Млечного пути (закон Хаббла), использовал галактики из близкого скопления Дева с красными смещениями $z < 0,003$. В следующей работе Хаббл уже использовал галактики из более далекого скопления Волос Вероники, но красные смещения все еще были очень малы: $z < 0,006$. Расстояния определялись по цефеидам, переменным звездам, у которых период осцилляций яркости связан с мощностью излучения, что позволяет ее определить по периоду, а сравнивая с измеренной яркостью, найти и расстояние до галактики.

Современные методы накопления слабых сигналов от далеких галактик позволили в глубоких «проколах» крупнейших телескопов за десятки лет накопления достичь красных смещений, превышающих $z = 10$. В сочетании с современными методами, такими как метод многоцветной

¹²Напомним, что для относительно близких галактик $z \approx v/c \ll 1$, где «v» – относительная скорость галактики, а «с» – скорость света. Красное смещение вызвано эффектом Доплера при удалении от нас галактик, связанным с общим расширением Вселенной. При не малых z такой простой связи и столь простой интерпретации красного смещения не существует. Тем не менее, оно является надежной мерой удаленности от нас галактик как в пространстве, так и во времени. Самые далекие галактики наблюдаются на специальных участках неба (т.н. глубокие и сверхглубокие поля соответствующих телескопов [101]), в узких «проколах», где установлено отсутствие близких объектов. В дальнейшем мы будем ссылаться на почти 20-летние наблюдения Боуенса, Иллингорса и их коллег в сверхглубоком поле космического телескопа Хаббла [102, 103].

фотометрии, использующей изменения спектра галактик за счет красного смещения, при использовании гравлинзирования слабых далеких объектов это позволило вплоть до указанных предельных красных смещений построить функции светимости, которые мы будем интерпретировать как функции масс (ФМ) в силу соотношения масса-светимость. Эволюция ФМ будет нами обсуждаться в рамках получившей к настоящему времени обширные подтверждения модели слияний.

Слияния далеких галактик ($Z \approx 3$) [104–105], как действительно наблюдаемые явления, будут служить нам в качестве отправной точки для анализа эволюции функции масс галактик.

Взрывная эволюция галактик при слияниях с малым приращением массы. Ниже рассмотрена взрывная эволюция галактик при слияниях с малым приращением массы (minor mergers [106]) при наличии, кроме фона маломассивных галактик, также источника массивных галактик, отделяющихся с течением времени от общего расширения [107–108]. Возникающая при этом ФМ имеет степенную часть с индексом α , определяющим ее наклон, точно совпадающий при $z = 0$ с известным из наблюдений шехтеровским индексом¹³ 1.25.

Рассмотрим решение кинетического уравнения Смолуховского (КУ) в дифференциальной форме, предполагая, что основной вклад происходит от слияний маломассивных галактик с массивными с соответствующей этому вероятностью $U(M_1, M_2) \approx 0.5CM_1^u$ для $M_2 \ll M_1$.

Главный вклад в интеграл столкновений, следующий от малых масс порядка M_* и меньше, равен:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(M, t) + C \Pi \frac{\partial}{\partial M} [M^u f(M, t)] = \phi(M, t), \quad \Pi = \Pi(t) = \int dM_2 M_2 f(M_2, t), \quad (\text{П3.1})$$

где Π приблизительно равно полной массе маломассивных галактик. Перепишывая (1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} F(M, t) + C \Pi M^u \frac{\partial}{\partial M} F(M, t) = \Phi(M, t), \quad F(M, t) = M^u f(M, t), \\ \Phi(M, t) = M^u \phi(M, t), \quad (\text{П3.2})$$

и используя метод характеристик, получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$dM/dt = C \Pi M^u, \quad dF/dt = \Phi. \quad (\text{П3.3})$$

Параметры C и u , определяемые вероятностью слияний, считаем не зависящими от времени, тем самым предполагая достаточно быструю эволюцию взрывных решений КУ.

¹³ Шехтеровский индекс α часто определяется со знаком, обратным выбранному нами.

Легко найти один из первых интегралов с помощью прямого интегрирования первого соотношения:

$$\tau(t) - \frac{M^{1-u}}{1-u} = a(M, t) = const, \quad \tau(t) \equiv C \int_0^t dt \Pi(t). \quad (\text{П3.4})$$

При $\Phi \neq 0$ выражение для второго независимого интеграла системы должно быть получено из второго ОДУ. При этом M понимается здесь как решение первого ОДУ (П3.3) и т.о. понимается здесь как зависящая от времени. Именно,

$$M = \mu(a, t), \quad \mu(a, t) = \left[(u-1)(a - \tau(t)) \right]^{\frac{1}{1-u}}, \quad (\text{П3.5})$$

где a является постоянной интегрирования. Для того, чтобы решить это уравнение, мы должны указать вид источника $\Phi(M, t)$. Ограничим себя локализованным источником, т.е. положим $\Phi(M, t) = \delta(M - \bar{M}(t))\Phi(t)$, где $\Phi(t)$ некоторая функция времени. Такое представление имитирует отделение массы $\bar{M}(t)$ от глобального расширения в момент времени t . Интегрируя теперь второе ОДУ (П3.3), получаем следующий независимый первый интеграл системы ОДУ

$$F - K(a, t) = b(M, t) = const, \quad (\text{П3.6})$$

где

$$K(a, t) = \int_0^t dt \delta[\mu(a, t) - \bar{M}(t)] \Phi(t) = \sum_n \Phi(t_n) \theta(t - t_n) \left| \frac{d}{dt} [\mu(a, t) - \bar{M}(t)] \right|_{t=t_n}^{-1}, \quad (\text{П3.7})$$

а t_n обозначают корни уравнения

$$\mu(a, t) - \bar{M}(t) = 0. \quad (\text{П3.8})$$

Используя начальное условие,

$$f(M, 0) = f_0(M),$$

находим решение КУ:

$$\begin{aligned} f(M, t) &= f_s(M, t) + f_{in}(M, t), \\ f_s(M, t) &= M^{-u} K \left(\tau + \frac{M^{1-u}}{u-1}, t \right), \\ f_{in}(M, t) &= \left[(u-1)\tau M^{u-1} + 1 \right]^{\frac{u}{1-u}} f_0 \left\{ M \left[(u-1)\tau M^{u-1} + 1 \right]^{\frac{1}{1-u}} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П3.9})$$

Для того, чтобы выписать индуцированный источником вклад в функцию масс $f_s(M, t)$, мы должны получить явное выражение для функции $K(a, t)$, ср. (ПЗ.7), то есть найти соответствующие корни. В простейшем случае $u = 2$, $\bar{M}(t) = t/A$, $\Pi(t) = \Pi = const$ имеем $\mu(a, t) = (a - \text{СП}t)^{-1}$, и уравнение для корней приобретает вид $\text{СП}t^2 - at + A = 0$. Соответственно, вещественные корни существуют при условии $a \geq a_{cr} \equiv 2\sqrt{A\text{СП}}$, или в безразмерных переменных $T \equiv t\sqrt{\text{СП}/A}$, $\tilde{a} \equiv a/a_{cr}$, принимают вид $T_{\pm} = \tilde{a} \pm \sqrt{\tilde{a}^2 - 1}$. Тогда индуцированный источником член в ФМ сводится к

$$M^u f_s(M, t) = K\left(\tau + \frac{1}{M}, t\right) = \frac{A}{2\sqrt{\tilde{a}^2(M, t) - 1}} \sum_{\pm} \frac{\Phi(t_{\pm}(M, t))}{|T_{\pm}(M, t)|} \theta(\tilde{a}(M, t) - 1) \theta(T - T_{\pm}(M, t)). \quad (\text{ПЗ.10})$$

Удобно ввести нормированную массу m , $m = a_{cr}M = 2\sqrt{A\text{СП}} \cdot M$. Тогда $\tilde{a}(M, t) = T/2 + m^{-1}$ и становится очевидным, что мы приходим к взрывной эволюции ФМ: ФМ достигает области бесконечных масс за конечное время $T \rightarrow T_{cr} = 2$, т.е. $t \rightarrow t_{cr} = \sqrt{A/(\text{СП})}$. Асимптотика точного решения с источником такого типа является степенной: в области $1 \ll m \ll (1 - T/2)^{-1} \equiv m_{\max}(t)$ мы получаем $f(M, t) \propto M^{-3/2}$. В общем случае $u > 1$ мы также приходим к взрывной эволюции со степенной асимптотикой на больших массах “ $M \rightarrow \infty$ ”:

$$f(M, t \rightarrow t_{cr}) \propto M^{-(u+1)/2}. \quad (\text{ПЗ.11})$$

При расчете индекса однородности вероятности слияния u мы используем законы Талли–Фишера и Фабер–Джексона, связывающие массу галактики и ее радиус. Для больших масс учитываем гравитационную фокусировку в сечении слияний (см. раздел 5.1).

Наблюдаемый рост наклона ФМ при возрастании z (до $\alpha \approx 2$ при $z = 6$ [102-103]) может следовать из эволюционного изменения механизма слияний. Действительно, наиболее крутой наклон ФМ может возникать при эволюции начального распределения f_{in} (ПЗ.9) с $\alpha = u = 2$ для больших значений z и, соответственно, для относительно малых масс. При меньших z и больших массах гравитационная фокусировка в сечении приводит к $\alpha = u = 1.5$. Происходящий от источника член в ФМ (ПЗ.9), f_s , приводит к $\alpha = 1.5$ для $u = 2$ (малые массы) и $\alpha = 1.25$ для $u = 1.5$ (большие массы, гравитационная фокусировка). Последнее

соответствует $z = 0$ и совпадает с хорошо известным из наблюдений значением индекса Шехтера.

Более детальное описание см. в [107].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ДАУНСАЙЗИНГ

Процесс слияния галактик благодаря их гравитационному взаимодействию носит «взрывной характер» в силу зависимости вероятности слияний от массы галактик такой, что вероятность слияния возрастает быстрее, чем первая степень массы. В результате возникает критический момент времени, который может соответствовать эпохе формирования массивных галактик (см. ссылки в [4–7]). Наблюдения слияний галактик при помощи гравлинз предоставляют большие возможности для апробации этого процесса. Малые слияния галактик могут объяснить наблюдаемую в сверхглубоком поле Хаббла [103] эволюцию наклона ФС галактик. В этом состоит основной конкретный результат данной работы.

В модели слияний галактик, построенной на основе кинетического уравнения Смолуховского, учитываются только процессы (парных) слияний, т.е. процессы с участием трех «частиц». Получаемые решения позволяют найти наклоны функции масс в широком диапазоне красных смещений, удовлетворительно объясняющие эволюцию наклонов ФМ сверхглубокого поля Хаббла вплоть до предельных красных смещений.

Возникающая при этом «взрывная» эволюция приводит к неограниченному росту максимальной массы по мере приближения к моменту «взрыва» [107-108]. Как и в других аналогичных задачах конечные результаты возникают при учете «четырёхчастичных» процессов, вступающих в игру вблизи от особенности, и в нашем случае описывающих рассеяние с передачей массы. При этом, в отличие от слияний, при которых масса может только увеличиваться, существенную роль начинает играть процесс разукрупнения – «даунсайзинг», при котором масса наибольших галактик может уменьшаться. Рассмотрены простейшие модельные схемы, описывающие разукрупнение [109]. На этом пути дается объяснение наблюдаемому явлению «даунсайзинга», когда с течением времени возрастание характерной наибольшей массы сменяется ее убыванием.

Пользуюсь случаем принести благодарность за многолетнее сотрудничество и обсуждения затронутых в обзоре вопросов Александру Владимировичу Кацу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Конторович В. М. Линейные и нелинейные волны. Динамический подход. I. // Радиофизика и радиоастрономия. – 2001. – Т. 6, №3. – С. 165-211; Telecommunications and radio engineering. – 2004. – Vol. 61, №11. – P. 903-982.
2. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. – М.: Наука, 1979. – 528 с.
3. Силин В. П. Введение в кинетическую теорию газов. – ibid, 1971. – 332 с.

4. Ахиезер А. И., Пелетминский С. В. Методы статистической физики. – *ibid*, 1977. – 368 с.
5. Ахиезер А. И., Померанчук И. Я. Некоторые вопросы теории ядра. – М.: ОГИЗ, 1948.
6. Hasselman K. On the nonlinear energy transfer in a gravity wave spectrum // *J. Fluid Mech.* – 1962 – Vol. 12. – P. 481–500; 1963. – Vol. 15. – P. 273–281, 385–398.
7. Захаров В. Е., Филоненко Н. Н. Спектр энергии для стохастических колебаний поверхности жидкости // *Докл. АН СССР.* – 1966. – Т. 170, № 6. – С. 1292–1295.
8. Кац А. В., Конторович В. М. К теории слабой турбулентности волн на поверхности жидкости // *ПМТФ.* – 1974. – №6. – С. 97–106.
9. Баренблатт Г.И. Подobie, автомодельность, промежуточная асимптотика. – Ленинград: Гидрометеиздат, 1982. – 256 с.
10. Badulin S. I., Pushkarev A. N., Resio D. and Zakharov V. E. Self-similarity of wind-driven seas // *Nonlinear Processes in Geophysics.* – 2005. – Vol. 12. – P. 891–945; A self-similar parametrization of wind-wave spectra. In: “Topical Problems of Nonlinear Wave Physics”, Eds. E. Mareev, Yu. Troitskaya, p. 10–11, N. Novgorod, Inst. Appl. Phys. RAN, 2005.
11. Annenkov S. I., Shrira V. I. Direct numerical simulation of evolution of random water wave fields: direct and inverse cascades. *Ibid.* – P. 8–9.
12. Medvedev S.B., Zeitlin V. Weak turbulence of short equatorial waves // *Physics letters A.* – 2005. – Vol. 342. – P. 217–227.
13. Пелиновский Е. Н. Гидродинамика волн цунами. – Нижний Новгород: Изд-во ИПФ, 1996. – 276 с.
14. Куркин А. А., Пелиновский Е. Н. Волны-убийцы. – *ibid*, 2004. – 158 с.
15. Мони́н А. С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. – Ленинград: Гидрометеиздат, 1988. – 424 с.
16. Захаров В. Е. Гамильтоновский формализм для гидродинамических моделей плазмы // *ЖЭТФ.* – 1971. – Т. 60. – С. 1714–1726.
17. Захаров В. Е. Гамильтоновский формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией // *Изв. Вузов, Радиофизика.* – 1974. – Т. 17, № 4. – С. 431–453.
18. Кадомцев Б. Б., Конторович В. М. Теория турбулентности в гидродинамике и плазме // *Изв. ВУЗов, Радиофизика.* – 1974. – Т. 17, № 4. – С. 511–540.
19. Zakharov V. E., Shulman E. I. Degenerative dispersion laws, motion invariants and kinetic equations // *Physica D.* – 1980. – Vol. 1, No 1. – P. 192–202.
20. Гончаров В. П., Павлов В. И. Проблемы гидродинамики в гамильтоновом описании. – М.: Изд. МГУ, 1993. – 197 с.
21. Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. Гамильтоновский формализм для нелинейных волн // *УФН.* – 1997. – Т. 167, № 11. – С. 1137–1167.
22. Захаров В. Е. Об устойчивости волн в нелинейных средах с дисперсией // *ЖЭТФ.* – 1966. – Т. 51. – № 4. – С. 688–696; Коллапс ленгмюровских волн // *ibid.* – 1972. – Т. 62, № 5. – С. 1745–1759.
23. Захаров В. Е., Сагдеев Р. З. О спектре акустической турбулентности // *Докл. АН СССР.* – 1970. – Т. 192, № 2. – С. 297–300.
24. Кац А. В., Конторович В. М. Дрейфовые стационарные решения в теории слабой турбулентности // *Письма в ЖЭТФ.* – 1971. – Т. 14, № 6. – С. 392–395.
25. Кац А. В. Направление перекачки энергии и числа частиц по спектру в стационарных степенных решениях кинетических уравнений для волн и частиц // *ЖЭТФ.* – 1976. – Т. 71, №6. – С. 2104–2112.
26. Кац А. В., Конторович В. М. О степенных распределениях, устанавливающихся в плазменном турбулентном реакторе // *ЖЭТФ.* – 1977. – Т. 73, №6. – С. 2157–2168.
27. Кац А. В., Конторович В. М. Степенные спектры излучения, описываемые решениями уравнения Компанейца при отличном от нуля потоке // *Изв. вузов. Радиофизика.* – 1977. – Т. 2, №7. – С. 1112–1114.
28. Балк А. М., Захаров В. Е., Назаренко С. В. О нелокальной турбулентности дрейфовых волн // *ЖЭТФ.* – 1990. – Т. 98, № 8. – С. 446–467.
29. Zakharov V. E., L'vov V. S., Falkovich G. *Kolmogorov Spectra of Turbulence. Wave Turbulence.* – N.Y.: Springer-Verlag, 1992. – 330 p.
30. Фриш У. Турбулентность. Наследие Колмогорова. – М.: Фазис, 1998. – 345 с.
31. Кац А. В., Конторович В. М. Взаимосвязь равновесных и потоковых слаботурбулентных распределений // *Нелинейные волны.* – М.: Наука, 1979. – С. 151–163.
32. Волоцкий С. В., Кац А. В., Конторович В. М., Мельник В. Н., Шнейдман В. А. К теории слаботурбулентных колмогоровских спектров // *Нелинейные волны.* – Горький: Изд-во ИПФ, 1980. – С. 161–171.
33. Кац А. В., Конторович В. М., Моисеев С. С., Новиков В. Е. Степенные решения кинетического уравнения Больцмана, описывающие распределения частиц с потоками по спектру //

Письма в ЖЭТФ. – 1975. – Т. 21. – С. 13–16; Точные степенные решения кинетических уравнений для частиц // ЖЭТФ. – 1976. – Т. 71. – С. 177–192.

34. Kraichnan R. N. Inertial-range transfer in two and three-dimensional turbulence // *J. Fluid Mech.* – 1971, Vol. 47, № 3. – P. 525–535; Kraichnan R.N., Montgomery D. Two-dimensional turbulence // *Rep. Progr. Phys.* – 1980. – Vol. 43. – P. 547–619.

35. Зельдович Я. Б. Взаимодействие свободных электронов с электромагнитным излучением // УФН. – 1975. – Т. 115, № 1. – С. 161–197.

36. Илларионов А. Ф., Сюняев Р. А. Комптон-эффект на тепловых электронах в источниках рентгеновского излучения // *Астрон. журн.* – 1972. – Т. 49, № 1. – С. 58–73; Комптонизация, характерные спектры и тепловой баланс разреженной плазмы // *ibid*, 1974. – Т. 51, № 4. – С. 698–711.

37. Sunyaev R. A., Titarchuk L. G. Comptonization of X-rays in Plasma Clouds. Typical Radiation Spectra. // *Astron. & Astrophys.* – 1980. – Vol. 86, № 1. – P. 121–138.

38. Кац А. В., Конторович В. М., Кочанов А. Е. Спектры релятивистских электронов и излучения, формируемые комптоновским рассеянием при отличном от нуля потоке // *Astrophys. Space Sci.* – 1978. – Vol. 57. – P. 321–345.

39. Кочанов А. Е., Конторович В. М. Нелинейные спектры радиоисточников при жесткой инжекции // *Изв. вузов. Радиофизика.* – 1981. – Т. 24, № 9. – С. 1047–1053.

40. Каплан С. А., Цыгович В. Н. Плазменная астрофизика. – М.: Наука, 1972. – 440 с.

41. Norman C. A., Ter Haar D. Plasma turbulent reactors. / *Preprint Oxford Univ.*, № 57/74, 1974; *Phys. Rep.* 1975. – Vol. 17C. – P. 307–317.

42. Карась В. И., Моисеев С. С., Новиков В. Е. Неравновесные стационарные распределения заряженных частиц в твердотельной плазме // ЖЭТФ. – 1976. – Т. 71, № 5. – С. 1421–1433.

43. Балебанов В. М., Карась В. И., Карась И. В., Кононенко С., Муратов В. И., Моисеев С. С., Нагушев О. Ю. Неравновесные стационарные распределения электронов с потоком частиц по спектру в твердотельной плазме и их применения // *Физика плазмы.* – 1998. – Т. 24, № 5. – С. 789–807.

44. Kennicutt, Jr. R. C., Schweizer P., Barnes J. E. Galaxies: Interactions and Induced Star Formation. *Saas-Fee Advance Course*. Vol. 26, Springer. – 1998. – 404 p.

45. Kontorovich V. M., The connection between the interaction of galaxies and their activity // *Astron. and Astrophys. Transactions.* – 1994. – Vol. 5, No 3. – P. 259–278.

46. Schmidt M., Schneider D. P., Gunn J. E. Evolution of the luminosity function from quasars // *Astron. J.* – 1995. – Vol. 110. – P. 68–77.

47. Конторович В. М. Влияние слияний на динамические свойства галактик // *Кинематика и Физика Небесных Тел.* 1999. – Приложение № 2. – С. 47–56.

48. Binggeli B., Sandage A., Tammann G.A. The luminosity function of galaxies // *Ann. Rev. Astron. Ap.* – 1988. – Vol. 26. – P. 509–560.

49. Cavaliere A., Menci N. The cosmological mass distribution from Cayley trees with disorder // *Astrophys. J.* – 1994. – Vol. 435, № 2. – P. 528–535.

50. Press W. H. & Schechter P. Formation of galaxies and clusters of galaxies by self-similar gravitational condensation // *Astrophys. J.* – 1974. – Vol. 187, № 3. – P. 425–435.

51. Волощук В. М. Кинетическая теория коагуляции. – Ленинград: Гидрометеоздат. 1984. – 284 с.

52. Stockmayer W. H. Theory of molecular size distribution and gel formation in branched-chain polymers // *J. Chem. Phys.* – 1943. – Vol. 11, № 2. – P. 45–55.

53. Трубников Б. А. Решение уравнений коагуляции при билинейном коэффициенте слипания частиц // *ДАН СССР.* – 1971. – Т. 196, № 6. – С. 1316–1319.

54. Эрнст М. Кинетика образования кластеров при необратимой агрегации // *Фракталы в физике* / Под ред. Л. Пьетронеро и Э. Тозатти. – Москва: Мир, 1988. – 627 с. (С. 399–429).

55. Софронов В. С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. – М.: Наука, 1969. – 244 с.

56. Софронов В. С., Витязев А. В. Происхождение солнечной системы // *Астрономия.* Т. 24. *Итоги Науки.* – М.: ВИНТИ, 1985. – С. 5–93.

57. Скало Дж. М. Спектр звездных масс. – Протозвезды и планеты, ч. 1. – М.: Мир, 1982. – С. 295–320.

58. Кац А. В., Конторович В. М. Распределение галактик по массам и моментам, формирующееся в результате слияний, и проблема активности ядер // ЖЭТФ. – 1990. – Т. 97, № 1. – С. 3–19.

59. Конторович В. М., Кац А. В., Кривицкий Д. С. «Взрывная» эволюция галактик в модели слияний и эпоха возникновения квазаров // *Письма в ЖЭТФ.* – 1992. – Т. 55, № 9. – С. 3–9.

60. Конторович В. М., Кривицкий Д. С. Функция светимости квазаров в модели слияний // *Письма в Астрон. журн.* – 1995. – Т. 21, № 9. – С. 643–649.

61. Cavaliere A., Colofrancesco B., Menci N. The merging runaway // *Astrophys. J.* – 1991. – Vol. 376, №2. – P. L37–41.
62. Kontorovich V. M. The weak turbulence methods in the problem of galaxy mass distribution function // *Problems of Atomic Sci. & Techn.* – 2000. – № 6, Series: Plasma Physics. – P. 84–87.
63. Kontorovich V. M., Shelyag S. I. The influence of merging on galaxy evolution // *Astrophys. Space Sci.* – 2003. – Vol. 284, №2. – P. 475–478.
64. Blandford R. D. Physical processes in Active Galactic Nuclei. In: *Active Galactic Nuclei*, Ed. by R.D.Blandford, H.Netzer and L.Voltjer. – Berlin: Springer, 1990. – P. 161-276.
65. Rees M. “Dead quasars” in nearby galaxies? // *Science.* – 1990. – Vol. 247, № 4944. – P. 817–823.
66. Bacall J. N., Kirhakos S., Schneider D. P. PKS 2349-014: a luminous quasar with thin wisps // *Astrophys. J.* – 1995. – Vol. 447, №1. – P. L1–4.
67. Hernquist L., Mihos J. C. Excitation of activity in galaxies by minor mergers // *Astrophys. J.* – 1995. – Vol. 448, №1. – P. 41–63.
68. Sanders D. B., Mirabel I. P. Luminous Infrared Galaxies // *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* – 1996. – Vol. 34. – P. 749–792.
69. Cavaliere A., Vittorini V. The rise and fall of the quasars // *astro-ph/9802320*; The fall of the quasar population // *Astrophys. J.* – 2000. – Vol. 543, № 2. – P. 599–610.
70. Valtonen M. J., Heinamaki P. Double Radio Sources: Two Approaches // *Astrophys. J.* – 2000. – Vol. 530, № 1. – P. 107–123.
71. Vinokurov L. I., Kats A.V. and Kontorovich V. M. The relation between the velocity and mass distributions. The role of collisionless relaxation processes // *J. Stat. Phys.* – 1985. – Vol. 38, No 1–2. – P. 217–229.
72. Cavaliere A., Colofrancesco S. and Menci N. Merging in cosmic structures // *Astrophys. J.* – 1992. – Vol. 392, No1. – P. 41–44.
73. Kontorovich V. M. The connection between the interaction of galaxies and their activity // *Astron. and Astrophys. Transactions.* – 1994. – Vol. 5, No 3. – P. 259–278.
74. Kontorovich V. M., Krivitsky D. S. and Kats A. V. “Explosive” evolution of galaxies (an analogue of collapse) and appearance of quasars in the merger model // *Physica D.* – 1995. – Vol. 87. – P. 290–294.
75. Krivitsky D. S. and Kontorovich V. M. Mergers of galaxies in clusters: Monte Carlo simulation of mass and angular momentum distribution // *Astron. Astrophys.* – 1997. – Vol. 327. – P. 921–929.
76. Kontorovich V.M. Zakharov’s transformation in the problem of galaxy mass distribution function // *Physica D.* 2001. – Vol. 152–153. – P. 676–681; Merging galaxies in compact groups: analytical theory. In: *Small Galaxy Groups ASP Conference Series*, Vol. 209, 2000, M. Valtonen and C. Flynn, eds. P. 423–429.
77. Valtonen M. J., Heinamaki P. Double Radio Sources: Two Approaches // *Astrophys. J.* – 2000. – Vol. 530, № 1. – P. 107–123.
78. Голицын Г. С. Статистика и динамика природных процессов и явлений. – М.: КРАСАНД URSS, 2013. – 400 с.; Статистические закономерности макропроцессов: случайные блуждания в пространстве импульсов // *ДАН.* – 2004. – Т. 398. – №2. – С. 117–180; Феноменологическое объяснение формы спектра космических лучей с энергиями $E > 10$ ГэВ // *Письма в Астрон. журнал.* 2005. – Т. 31. – №7. – С.500–505.
79. Манин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч.2. – М.: Наука, 1967. – 720 с.
80. Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И. Происхождение космических лучей. – М.: Изд. АН СССР, 1963. – 384 с; Березинский В. С., Буланов С. В., Гинзбург В. Л., Догель В. А., Птускин В. С. Астрофизика космических лучей. – М.: Наука, 1984. – 360 с.
81. Жданов С. К., Трубников Б. А. Квазигазовые неустойчивые среды. – М.: Наука, 1991. – 176 с.
82. Zaslavskii G. M. Chaos, fractional kinetics and anomalous transport // *Phys. Rep.* – 2002. – Vol. 371. – P. 461–580.
83. Зеленый Л. М., Милованов А. В. Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики // *УФН.* – 2004. – Т. 174, № 8. – С. 809–852.
84. Kontorovich V. M., Flanchik A.B. High Frequency Cut-off and Changing of Radio Emission Mechanism in Pulsars. // *Astrophysics and Space Science.* – 2013. – V. 345. – P. 169–175 ; *astro-ph/1201.0261*; О связи спектра радиоизлучения пульсаров с особенностями ускорения частиц в полярном зазоре // *ЖЭТФ.* – 2013. – Т. 143, № 1. – С. 92–104 ; arxiv 1210.2858.

85. Gilfanov M. X-ray variability, viscous time and Lindblad resonances in LMXB. In: *Cosmology and high Energy Astrophysics*, Moscow, 2004, hea.iki.rssi.ru/Z-90; Postnov K. X-ray luminosity function of low-mass X-ray binaries in galaxies. *ibid.*
86. Железняков В. В. Излучение в астрофизической плазме. – М.: Издат-во “Янус-К”, 1997. – 528 с.
87. Кац А.В., Конторович В.М. Группа симметрии кинетического уравнения и стационарные распределения в слабо турбулентной плазме. / Препринт ИРЭ АН Украинской ССР, Харьков, № 53, 1975 г. – 10 с.
88. Kats A.V., Kontorovich V. M. Symmetry group of the kinetic equation and stationary distributions in a weak turbulent plasma // *Physica*. – 1977. – Vol.86a. – P. 471–476.
89. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применения в физике. – М.: Наука, 1957. – 254 с.
90. Кузнецов Е.А. Слабая магнитогидродинамическая турбулентность замагниченной плазмы // *ЖЭТФ*. – 2001. – Т.120, №5 (11). – С. 1213–1226.
91. Боцман В. И., Кац А. В., Конторович В. М. Индуцированное рассеяние и связанные спектры ленгмюровской турбулентности и частиц в плазме // *Докл. АН СССР*. – 1975. – Т. 220, № 5. – С. 1953–1056.
92. Lin C. C. Liquid helium, *Proc. Int. School of physics, Course XXI, Acad. Press, N.Y.* (1963).
93. Паташинский А. З., Покровский В. Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. – М: Наука, 1975.– 255 с.
94. Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана. – М.: Мир, 1969.– 268 с.
95. Юэн Г., Лейк Б. Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. – М.: Мир, 1987. – 180 с.
96. Волоцкий С. В., Кац А. В., Конторович В. М. Преобразования симметрии интеграла столкновений, описывающего рассеяние квазичастиц с законом дисперсии, близким к линейному // *Доп. АН УРСР*. – 1980. – сер. А, No11. – С. 66–70.
97. Кац А. В., Конторович В. М. Скейлинг и спектры развитого волнения // *ДАН Укр.ССР*. – 1985. – сер. А, № 11. – С. 49–52.
98. Ellis R. & Silk J. *New frontiers in cosmology...* astro-ph/07122864; Ellis R. & Silk J. In: *Structure formation in Astrophysics*, Cambridge: CUP, 2008; Silk J., Mamon G. *The current status of Galaxy Formation*. arXiv:1207.3080.
99. Вайнберг С., *Космология*. – М.: URSS, Книжный Дом, 2013; Лукаш В.Н., Михеева Е.В. *Физическая космология*. – М.: Физматлит, 2010.
100. Комберг Б. В., Репин С.В. *Звездные острова Вселенной с релятивистскими «гейзерами» в центрах Галактики на «Рабочем столе»*. – Москва: АКЦ ФИАН им. Лебедева, ИКИ РАН, 2014. – 312 с.
101. Решетников В. П. *Обзоры неба и глубокие поля наземных и космических телескопов // УФН*. – 2005. – Т. 175, В.11. – С. 1163–1183.
102. Bouwens R. J., Pillingworth G. D., Franx M., & Ford H. UV luminosity functions at $z = 4, 5$ and 6 from the HUDF and other deep HST ACS fields: evolution and star formation history // *Ap. J.* – 2007. – Vol. 670. – P. 928–958.
103. Bouwens R. J., Pillingworth G. D., Oesch P. A., et al. // *Astrophys. J.* – 2011. – Vol. 737. – P. 90.
104. Borys C., Chapman S., Donahue M., et al. The nature of a gravitationally lensed submillimetre arc in MS0451.6_0305: two interacting galaxies at $z \sim 2.9$? *MNRAS*, 352, 759–767, 2004.
105. Berciano Alba A., Koopmans L., Garrett M. Radio counterpart of the lensed submm emission in the cluster MS0451.6–0305: new evidence for the merger scenario. *A&A*, A54, 1–18. – 2010.
106. *Minor mergings as a driver of galaxy evolution*, Special Session in JENAM–2011, St–Petersburg, Russia. – 2011.
107. Kats A. & Kontorovich V. Explosive evolution of far galaxies through mergers // *Astrophysical Bulletin*. – 2013. – Vol. 68, No. 3. – P. 273–284; astro-ph/1309.0957; Explosive evolution of galaxies at high redshifts due to minor mergers and hidden mass problem // *Astronomy and Space Physics*, Київ. – 2012. – С. 14–15.
108. Kats A. & Kontorovich V. Использование гравитационных линз в изучении слияния далеких галактик // *Радиофизика и радиоастрономия*. – 2013. <http://journal.ri.kharkov.ua/index.php/ra/issue/view/74>
109. Конторович В. М. Разукрупнение (downsizing) с точки зрения модели слияний (предварительное обсуждение) // *ВАНТ*. – 2015. – №4. – С. 157–160.

ЧАСТЬ IV

РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ ТИПА ВОЛНА-ЧАСТИЦА

В. А. Буд

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
НАН Украины, ул. Академическая 1; г. Харьков, 61108, Украина;
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы 4,
г. Харьков, 61022, Украина*

Изложены результаты исследований динамики заряженных частиц в электромагнитных полях. Динамика может быть как регулярной, так и хаотической. Изложение результатов разбито на две части. В первой изложены наиболее важные результаты регулярной динамики частиц, во второй – хаотической динамики частиц. Перечислим наиболее интересные результаты. Были получены общие выражения для импульса и координаты частицы в лабораторной системе отсчета. Эти выражения позволяют изучать проблему обмена энергией между электромагнитной волной и потоком заряженных частиц. Используя эти результаты, были предложены новые схемы лазеров на свободных электронах, а также новые схемы ускорения заряженных частиц. Во всех этих исследованиях существенным фактом было отсутствие ограничения на величину напряженности электромагнитных полей. Было показано, что силы трения (в том числе и силы радиационного трения), которые действуют на заряженные частицы, могут не тормозить частицы, а способствовать их

ускорению в поле, например, лазерного излучения. Найдены условия, когда силы трения тормозят частицы и когда они способствуют их ускорению. Наличие постоянного магнитного поля существенно обогащает динамику частиц. При этом, если амплитуда волны оказывается достаточно маленькой или выполнены условия, близкие к условиям авторезонанса, то динамика, в основном, определяется одним изолированным резонансом и регулярна. Построена самосогласованная теория приборов, которые можно рассматривать как мазеры на циклотронных резонансах (МЦР). Если же амплитуды возбуждаемых волн становятся достаточно большими, так что происходит перекрытие нелинейных циклотронных резонансов, то динамика частиц и возбуждаемых ими волн становится хаотической. Показано, что развитие динамического хаоса ограничивает уровень возбуждаемого в МЦР поля. Эффективность таких приборов падает. Интересным результатом является результат исследования рассматриваемых систем в условиях, при которых нарушается теорема о непрерывной зависимости решений от параметров. В этих условиях можно провести эффективное разделение частиц, например, по их массам. Показано, что в условиях авторезонанса ширина нелинейного резонанса стремится к бесконечности. Однако расстояние между резонансами растет еще быстрее. В результате нелинейные резонансы не перекрываются, и режимы с динамическим хаосом не возникают. Для многих приложений это очень полезный результат. Однако оказалось, что в условиях авторезонанса динамика частиц аномально чувствительна к флуктуациям. Наличие аддитивных флуктуаций ведет к супердиффузии, а мультипликативные флуктуации ведут к флуктуационной неустойчивости. При этом высшие моменты растут быстрее низших моментов. Показано, что такие процессы не могут быть описаны традиционными кинетическими уравнениями. Надо использовать либо уравнения с дробными производными, либо пользоваться методом моментов. Хаотическая динамика частиц возникает и в том случае, когда частицы находятся в поле нескольких волн. Обнаружено, что во всех схемах ЛСЭ и схемах ОЛСЭ развивается режим с динамическим хаосом. Это нежелательные режимы. Они ограничивают эффективность и ухудшают качество возбуждаемых полей (в ЛСЭ) и качество ускоряемых пучков (в ОЛСЭ). Однако эти же режимы могут быть основой новых эффективных схем нагрева плазмы до термоядерных температур. В обзоре показано, что учет особых решений требует пересмотра основных парадигм динамического хаоса. Действительно, учет таких решений приводит к возможности реализации режимов с нерегулярной динамикой в системах с одной степенью свободы и даже в динамических системах, которые полностью интегрируются. Особые решения необходимо учитывать при исследовании многих важных физических систем. Многие линейные системы при преобразовании переменных превращаются в нелинейные. Наиболее известными примерами этому служат переходы от уравнений квантовой механики к уравнениям классической механики, а также переход от волновой оптики к геометрической оптике. При этом в новых переменных могут реализо-

ваться режимы с хаотической динамикой. В обзоре показано, что такой путь может быть полезным во многих других случаях. В частности, используя такой подход, удалось обнаружить новый механизм многофотонного возбуждения квантовых систем. Кроме того, используя такой подход, удалось показать, что практически любую регулярную функцию можно представить в виде комбинации функций с хаотическим поведением.

В В Е Д Е Н И Е

Динамика заряженных частиц в электромагнитных полях волн умеренной интенсивности к настоящему времени практически хорошо изучена. При этом под умеренными полями мы понимаем поля, параметр силы которых достаточно мал ($\varepsilon = eE / mc\omega = eE\lambda / mc^2$, здесь E – напряженность электрического поля волны; ω – частота волны, $\lambda = c / \omega$). Этот параметр можно интерпретировать как отношение энергии, которую частица приобретает на расстоянии, равном длине волны, к энергии покоя частицы.

В настоящее время значительные успехи достигнуты в создании электромагнитных полей исключительно большой напряженности. Параметр силы волны в таких полях может значительно превосходить единицу. Анализ динамики движения частиц при этом значительно затруднен, так как отсутствует малый параметр. Динамика частиц приобретает качественно новые характеристики. Наиболее существенные изменения обусловлены тем, что при увеличении напряженности поля динамика частиц становится нерегулярной. Изложению результатов исследований особенностей динамики частиц в полях большой напряженности и посвящен этот обзор. Следует только заметить, что многие качественные изменения динамики частиц возникают и в полях достаточно умеренной напряженности. Описание результатов исследований таких изменений также содержится в этом обзоре.

Первая глава посвящена описанию регулярной динамики частиц, вторая – хаотической. Прежде всего, было получено выражение для импульса и координаты заряженной частицы, которая движется в вакууме в поле плоской электромагнитной волны. Известно, что решение такой задачи в системе отсчета, в которой частица в среднем покоится, содержится в монографии Ландау [1]. Однако найденные там выражения практически нельзя использовать при исследовании динамики большого числа частиц (для каждой из них придется ввести свою систему отсчета). Поэтому в работе [2] были получены общие выражения для импульса и координаты частицы в лабораторной системе отсчета. Эти выражения позволяют анализировать процесс обмена энергией между электромагнитной волной и **потокком заряженных частиц**. Используя эти результаты, были предложены новые схемы лазеров на свободных электронах,

а также новые схемы ускорения заряженных частиц в вакууме. Важной особенностью этих схем является тот факт, что они малочувствительны к разбросу энергии частиц в потоке заряженных частиц. Кроме динамики частиц в плоской электромагнитной волне была исследована динамика частиц в поле волны с эллиптической поляризацией и в поле электромагнитного импульса [2-6]. Во всех этих исследованиях существенным фактом было отсутствие ограничения на величину напряженности электромагнитных полей. При этом оказалось, что как только параметр силы электромагнитных волн оказывается большим единицы, то проявляется важная особенность динамики частиц в таких полях. А именно: продольное движение частиц (вдоль волнового вектора электромагнитной волны) оказывается более существенным, чем поперечная динамика частиц. Отметим, что такая динамика непривычна для нашего восприятия. Привычным был факт, что в поперечной электромагнитной волне основное движение частиц направлено поперек волнового вектора волны. Такое качественное изменение динамики частиц связано с тем фактом, что в полях большой напряженности основная динамика определяется нелинейными эффектами. Важным результатом исследований является доказательство, что силы трения [3-6], которые действуют на заряженные частицы, могут не тормозить частицы, а способствовать их ускорению в поле, например, лазерного излучения. Показано, что привычная, широко используемая схема определения максимальной энергии частиц, может быть ошибочной. Эта схема заключается в анализе баланса сил ускорения и сил торможения (сил трения). В частности, используя эту схему, авторы работы [11] нашли, что силы радиационного трения при ускорении заряженных частиц полями лазерного излучения не позволяют ускорить электроны до энергий, больших 200 МэВ. Более тщательный анализ динамики частиц в лазерных полях и при наличии сил трения (в том числе и радиационного трения) показывает, что такого ограничения нет. Имеется две основные причины такого расхождения. Первая – наиболее важная – заключается в том, что силы трения меняют фазовые соотношения между частицами и полями. Эти изменения могут быть таковыми, что способствуют ускорению частиц. Вторая заключается в том, что при увеличении энергии заряженных частиц в поле лазерного излучения их траектории становятся более пологими, радиус кривизны таких траекторий увеличивается, и силы радиационного трения уменьшаются. При наличии постоянного однородного внешнего магнитного поля динамика частиц в поле лазерного излучения может существенно меняться. Эти изменения связаны, прежде всего, с возникновением резонансов (циклотронных резонансов) между волной и заряженными частицами. При этом, если амплитуда волны оказывается достаточно маленькой или выполнены условия, близкие к условиям авторезонанса, то динамика, в основном, определяется одним изолированным резонансом. Динамика частиц в этих условиях описана ниже в первой главе. Построена самосогласованная теория приборов, которые можно рассматривать как мазеры на циклотронных резонансах (МЦР). При

этом, если выполняются условия приближения изолированного циклотронного резонанса, то динамика возбуждаемых волн оказывается регулярной. Регулярной оказывается и динамика частиц. Такая динамика изучена в разделах 1.3 и 1.5 первой главы. Если же амплитуды возбуждаемых волн становятся достаточно большими, так что происходит перекрытие нелинейных циклотронных резонансов, то динамика частиц и возбуждаемых ими волн становится хаотической. Отметим, что рост возбуждаемого поля однозначно связан с ростом величины тока, который возбуждает поля. Переход в хаотический режим ухудшает эффективность возбуждения полей в таких приборах. Уровень возбуждаемого поля не превышает уровень, который необходим для перекрытия нелинейных резонансов. Хаотическая динамика волн и частиц при этом рассмотрена в разделах 2.2 и 2.3 второй главы. Интересным является результат исследования рассматриваемой системы в условиях, при которых нарушается теорема о непрерывной зависимости решений от параметров. В разделе 1.3 показано, что в этих условиях возможна качественно различная динамика частиц, параметры которых отличаются на незначительную величину. Например, если массы двух частиц не одинаковы (изотопы) и практически не отличаются, то в сформулированных условиях траектория их ведущих центров может двигаться в разных направлениях. Такая схема была названа условно схемой сепаратора. Особенности движения частиц в условиях авторезонанса описаны в разделах 1.4 и 2.4. В разделе 1.4 показано, что в условиях авторезонанса нелинейные циклотронные резонансы не перекрываются. При этом ширина изолированного резонанса стремится к бесконечности, однако расстояние между нелинейными резонансами стремится к бесконечности быстрее. В результате нелинейные резонансы не перекрываются и режимы с динамическим хаосом не возникают. Для многих приложений это полезный результат. Однако оказалось, что в условиях авторезонанса движение частиц аномально чувствительно к внешним флуктуациям. Аддитивные флуктуации ведут к супердиффузии, а мультипликативные – к развитию флуктуационной неустойчивости. Эти результаты описаны в разделе 2.4. Эта особенность динамики частиц может объяснить известный факт, что попытки использовать условия авторезонанса для целей эффективного возбуждения колебаний оказались малоэффективными.

Во второй главе исследуется хаотическая динамика. Такая динамика возникает в том случае, когда в вакууме с заряженными частицами взаимодействует не одна электромагнитная волна, а несколько волн. Наиболее интересным при этом является тот факт, что в поле нескольких волн для заряженной частицы возникают волны (комбинационные, виртуальные волны), с которыми частица может взаимодействовать в условиях черенковского резонанса. Примерами этому являются лазеры на свободных электронах (ЛСЭ), а также схемы обращенного ускорения заряженных частиц (обращенный лазер на свободных электронах (ОЛСЭ)). Эффективность всех этих схем (ЛСЭ и ОЛСЭ) растет с увеличением амплитуды взаимодействующих с частицами волн. Однако, как

показано в разделе 2.1, все такие схемы имеют область фазового пространства, в которой динамика частиц оказывается хаотической. При малых напряженностях полей эта область незначительна, однако при увеличении напряженности взаимодействующих волн эта область растет, и такие схемы возбуждения волн и ускорения частиц становятся малоэффективными. В этом случае такие режимы, безусловно, являются вредными режимами. С ними надо бороться. С другой стороны, режимы с хаотической динамикой, по-видимому, являются наиболее эффективными режимами для нагрева заряженных частиц. В разделе 2.1 показано, что такие режимы могут быть эффективно использованы в схемах инерциального термоядерного синтеза. В разделе 2.2 аналитически определены напряженности полей, при которых перекрываются нелинейные циклотронные резонансы, а также численными методами изучен стохастический режим приборов типа МЦР.

Возможно, наиболее важным результатом, который описан во второй главе, является доказательство того факта, что парадигмы динамического хаоса должны быть пересмотрены. Напомним, что имеется три основные парадигмы динамического хаоса. Перечислим их: 1. Система должна иметь 1.5 или более степеней свободы. 2. Должна быть нелинейной. 3. В системе должна развиваться локальная неустойчивость. Эти парадигмы, безусловно, справедливы, если на рассматриваемые динамические системы наложены определенные условия. Наиболее важным из этих условий является исключение из рассмотрения особых решений. Напомним, что под особыми решениями понимают решения, в точках которого нарушается теорема единственности. Однако, как показано в этом обзоре, особые решения необходимо учитывать для адекватного описания динамики физических систем. Показано, что учет таких решений позволяет реализовывать режимы с динамическим хаосом в системах с одной степенью свободы и даже в системах полностью интегрируемых. При этом механизм возникновения непредсказуемости и необратимости связан не с локальной неустойчивостью, а с тем фактом, что траектории изучаемой физической системы могут проходить через точки особого решения либо в близкой окрестности к этим точкам. Поэтому механизм больше напоминает бросание игральной кости с неограниченным числом сторон в момент прохождения траектории через точки особых решений. Показано также, что при изучении линейных систем часто пользуются преобразованиями, которые переводят линейные системы в нелинейные системы. При этом в нелинейных системах возможны режимы с хаотической динамикой. Широко известными примерами таких переходов является переход от уравнений квантовой механики к уравнениям классической механики, а также переход от уравнений волновой оптики к уравнениям геометрической оптики. Ниже показано, что такие переходы могут быть распространенными и полезными.

1. РЕГУЛЯРНАЯ ДИНАМИКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ ТИПА ВОЛНА-ЧАСТИЦА [2-6, 28-29]

В этой главе приведено строгое решение, описывающее в лабораторной системе динамику заряженных частиц в поле как быстрой, так и медленной поперечных электромагнитных волн *с произвольной величиной напряженности поля*.

1.1. Динамика заряженных частиц в поле интенсивной поперечной электромагнитной волны

Взаимодействие поперечных электромагнитных волн с заряженными частицами является одним из фундаментальных процессов, который лежит в основе многих явлений, возникающих при взаимодействии излучения с веществом. Изучению такого взаимодействия посвящено большое количество работ. Результаты этих исследований изложены в книгах, обзорах, монографиях (см., например, [1, 7–14] и цитируемую там литературу). В настоящее время успехи физики лазеров позволяют возбуждать поля с большой напряженностью, у которых $\mathcal{E} \gg 1$. Возможность использовать интенсивные лазерные поля для ускорения заряженных частиц, в основном, стимулировала исследование динамики частиц в поле лазерного излучения. Такие исследования начались сразу же после появления лазеров. Первой в этом направлении была, по-видимому, работа [10], а одними из последних – [13–14, 68–69]. Используя уравнение Гамильтона–Якоби аналогично тому, как это сделано в [1], можно найти строгие решения в любой системе координат, в том числе и в лабораторной. С большим трудом могут быть получены аналогичные решения и для задачи о движении частиц в поле медленной волны. Однако, как будет видно ниже, эти решения могут быть получены проще, прямо из уравнений движения без перехода к уравнению Гамильтона–Якоби.

Основные интегралы движения получены в разделе 1.2. В разделе 1.3 анализируется динамика частиц в вакууме, находятся размеры области взаимодействия, необходимые для эффективного обмена энергией между волной и частицами, а также зависимость периода осцилляции частиц от напряженности поля волны. Сформулированы условия для ускорения частиц и условия, при которых поток частиц отдает свою энергию волне. В разделе 2.4 получены основные выражения, описывающие

динамику частиц в поле медленной волны. Определены условия захвата частиц полем волны и частоты захватных колебаний. Описана автофазировка частиц в волне с меняющейся фазовой скоростью. В заключении сформулированы и обсуждаются наиболее важные результаты.

Постановка задачи. Основные уравнения и интегралы. Рассмотрим движение заряженной частицы в поле плоской электромагнитной волны с произвольной поляризацией. Компоненты электрического и магнитного полей такой волны можно представить в виде

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}_0 e^{i\psi}), \quad \vec{H} = \text{Re}\left(\frac{1}{k_0} [\vec{k}\vec{E}]\right), \quad (1.1)$$

где $\psi \equiv \omega t - \vec{k}\vec{r}$, $\vec{E}_0 = \vec{\alpha}E_0$; $\vec{\alpha} = \{\alpha_x, i\alpha_y, \alpha_z\}$ — вектор поляризации волны; $k_0 = \omega/c$; ω , \vec{k} — частота и волновой вектор волны. Введем следующие безразмерные переменные:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}/mc, \quad \vec{k}_1 = \vec{k}/k_0, \quad \tau = \omega t, \quad \vec{r}_1 = k_0 \vec{r},$$

$$\vec{\mathcal{E}} = e\vec{E}_0/mc\omega, \quad \vec{v}_1 = \vec{v}/c, \quad v_{ph1} = v_{ph}/c = \omega/kc.$$

В этих переменных уравнение движения приобретает вид (индекс «1» опускаем)

$$\dot{\vec{p}} \equiv \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \text{Re}\left\{\left[\left(1 - \vec{k}\vec{v}\right)\vec{\mathcal{E}} + \vec{k}\left(\vec{v}\vec{\mathcal{E}}\right)\right]e^{i\psi}\right\}. \quad (1.2)$$

К уравнениям (1.2) удобно добавить уравнение, которое определяет энергию частицы и может быть получено из системы (1.2):

$$\dot{\gamma} = \text{Re}\left(\vec{v}\vec{\mathcal{E}}e^{i\psi}\right), \quad (1.3)$$

где $\gamma = \sqrt{1 + p^2}$ — безразмерная энергия частицы (измеренная в единицах mc^2).

Уравнения (1.2) и (1.3) имеют известные интегралы:

$$\vec{p} - \vec{k}\gamma + \text{Re}\left(i\vec{\mathcal{E}}e^{i\psi}\right) = \vec{p}_0 - \vec{k}\gamma_0 + \text{Re}\left(i\vec{\mathcal{E}}e^{i\psi_0}\right) = \text{const} = \vec{C}. \quad (1.4)$$

Индексом «0» здесь обозначены начальные переменные. В дальнейшем без ограничения общности будем считать, что волна распространяется вдоль оси z , т.е. $\vec{k} = \{0, 0, k\}$. Для случая волны с линейной

поляризацией ($\alpha_y = 0$) из уравнений движения (1.2) и интегралов (4) можно получить еще один, важный для дальнейшего анализа, интеграл

$$(\gamma - \gamma_*)^2 - \frac{p_x^2}{1 - k^2} = (\gamma_0 - \gamma_*)^2 - \frac{p_{x0}^2}{1 - k^2}, \quad (1.5)$$

где $k \neq 1$, $\gamma_* = \gamma_0 \gamma_{ph}^2 (1 - v_{z0} v_{ph})$, $\gamma_{ph} = 1 / (1 - v_{ph}^2)$.

Для случая взаимодействия в вакууме ($k = 1$) интеграл (1.5) можно переписать в виде

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{p_x^2 - p_{x0}^2}{2(\gamma_0 - p_{z0})}. \quad (1.6)$$

Определим области пространства энергия-импульс (γ, p) , в которых могут двигаться частицы. Сделаем это для случая взаимодействия частицы с линейно поляризованной волной ($\alpha_y = 0$). Тогда $p_y = p_{y0} = \text{const}$. Движение частиц при этом ограничено условием

$$\gamma^2 - p_x^2 - p_z^2 = 1 + p_{y0}^2.$$

Это условие представляет собой двухполостный гиперboloид. Только верхняя часть гиперboloида ($\gamma \geq 1$) имеет физический смысл. Она представлена на рис. 1.1. Движение ограничено не только поверхностью гиперboloида, но и интегралом $p_z - k\gamma = p_{z0} - k\gamma_0$, т.е. реальное движение будет происходить по сечению гиперboloида с этим интегралом. На рис. 1.1а показано это сечение для случая взаимодействия частиц с полем быстрой волны ($k \leq 1$), а на рис. 1.1б – сечение того же гиперboloида тем же интегралом при ($k > 1$), т.е. при взаимодействии частиц с полем медленной волны. Движение частицы происходит по линии пересечения интеграла с гиперboloидом. Если в первом случае (рис. 1.1а) сечение представляет собой гиперболу ($k < 1$), то во втором случае ($k > 1$) (рис. 1.1б) – эллипс. При $k = 1$ кривая пересечения – парабола. Качественное различие возможных траекторий (замкнутые или разомкнутые) соответствует достаточно простому факту – в вакууме ($k = 1$) и в поле быстрой волны ($k < 1$) частицы относительно волны являются пролетными и могут ею только увлекаться (см. ниже), полем же медленной волны ($k > 1$) они могут быть захваченными. Аналитические выражения проекции на плоскость (p_x, γ) кривых пересечения интегралов с гиперboloидом даются формулами (1.5), (1.6).

Уже из этих двух рисунков можно сделать важные физические заключения. В частности, видно, что при взаимодействии частицы с быстрой волной ($k_z < 1$) энергия частицы не ограничена интегралами и может достигать произвольных величин. Это тот случай, при реализации которого потенциально возможно неограниченное ускорение частиц, а также возможна значительная передача энергии от частиц волне. Конечно, вопрос о конкретной реализации такого обмена энергией остается открытым. Ниже мы рассмотрим некоторые механизмы реализации такого обмена. При взаимодействии же медленной волны ($k_z > 1$) с частицей обмен энергией ограничен характеристиками эллипса.

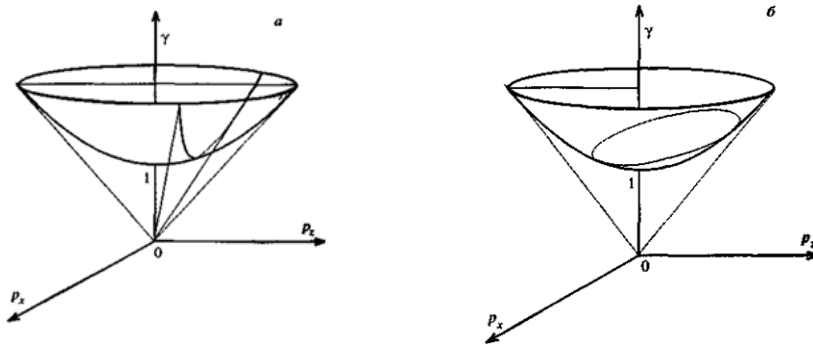


Рис. 1.1. Пересечение гиперboloида $\gamma^2 - p_x^2 - p_z^2 = 1$ с интегралом продольного движения $p_z - k\gamma = p_{z0} - k\gamma_0$ для случаев взаимодействия частицы а) с быстрой волной ($k \leq 1$), б) с медленной волной ($k > 1$)

Взаимодействие в вакууме. Наиболее полный анализ динамики движения частиц может быть проведен при взаимодействии частиц с полем в вакууме. Учитывая определение фазы ψ из интегралов (1.4), можно получить

$$\gamma\dot{\psi} = \text{const} = -C_z. \tag{1.7}$$

Используя (1.7), из системы уравнений (1.2) легко находим следующие общие выражения для компонент импульса частицы и для ее энергии:

$$\begin{aligned} p_x &= p_{x0} + \mathcal{E}_x (\sin \psi - \sin \psi_0), & p_y &= p_{y0} + \mathcal{E}_y (\cos \psi - \cos \psi_0), \\ p_z &= p_{z0} \pm \frac{(p_x^2 + p_y^2) - (p_{x0}^2 + p_{y0}^2)}{2\gamma\dot{\psi}}, & \gamma &= \gamma_0 \pm (p_z - p_{z0}), \end{aligned} \tag{1.8}$$

где $\mathcal{E}_{x,y} \equiv eE_{0,x,y} / mc\omega$; верхний знак (+) в выражениях для γ и p_z соответствует попутному распространению волны и частицы ($k = 1$), нижний (-) – встречному ($k = -1$).

Из формул (1.8) с учетом интеграла (1.7) находятся выражения для координат частицы:

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + \frac{1}{\gamma\dot{\psi}} [(\psi - \psi_0)(p_{x0} - \mathcal{E}_x \sin \psi_0) - \mathcal{E}_x (\cos \psi - \cos \psi_0)] \\
 y &= y_0 + \frac{1}{\gamma\dot{\psi}} [(\psi - \psi_0)(p_{y0} - \mathcal{E}_y \cos \psi_0) + \mathcal{E}_y (\sin \psi - \sin \psi_0)], \\
 z &= z_0 + \frac{p_{z0}(\psi - \psi_0)}{\gamma\dot{\psi}} \pm \frac{1}{2(\gamma\dot{\psi})^2} \{(\psi - \psi_0) \cdot \\
 &\cdot [\mathcal{E}_x^2 \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \psi_0\right) - 2\mathcal{E}_x p_{x0} \sin \psi_0 + \mathcal{E}_y^2 \left(\frac{1}{2} + \cos^2 \psi_0\right) - 2\mathcal{E}_y p_{y0} \cos \psi_0] - \\
 &- \mathcal{E}_x^2 \left[\frac{1}{4} (\sin 2\psi - \sin 2\psi_0) - 2 \sin \psi_0 (\cos \psi - \cos \psi_0)\right] + \\
 &+ \mathcal{E}_y^2 \left[\frac{1}{4} (\cos 2\psi - \cos 2\psi_0) - 2 \cos \psi_0 (\sin \psi - \sin \psi_0)\right] \\
 &- 2\mathcal{E}_x p_{x0} (\cos \psi - \cos \psi_0) + 2\mathcal{E}_y p_{y0} (\sin \psi - \sin \psi_0)\}.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

В системе отсчета, в которой частица в среднем покоится, из (1.8) и (1.9) для случая частицы в поле линейно поляризованной волны находим

$$\begin{aligned}
 p_x &= \mathcal{E}_x \sin \psi, \quad p_y = 0, \quad p_z = -\frac{\mathcal{E}_x \cos 2\psi}{2\gamma\dot{\psi}}, \\
 x &= -\frac{\mathcal{E}_x \cos \psi}{\gamma\dot{\psi}}, \quad y = 0, \quad z = -\frac{\mathcal{E}_x^2 \sin 2\psi}{8(\gamma\dot{\psi})^2}, \quad \gamma\dot{\psi} = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \mathcal{E}_x^2}.
 \end{aligned}$$

Эти выражения совпадают с полученными в работе [1]. Кроме того, легко показать, что в той же системе, где частица в среднем покоится, выражения для импульсов и координат частицы в случае круговой поляризации также совпадают с выражениями, найденными в [1].

Отметим, что система отсчета, где частица в среднем покоится, зависит от фазы влета частицы в область взаимодействия с полем, т. е. от ψ_0 . Поэтому, если нас интересует обмен энергией большого числа частиц с полем, пользоваться этой системой неудобно. Значительно проще исследовать динамику взаимодействия, используя выражения (1.8), (1.9), а также интеграл (1.7).

Перейдем к их анализу. Для простоты получаемых формул ниже мы в основном выпишем их для случая линейно поляризованной волны. Прежде всего, из этих выражений следует, что частицы увлекаются волной, что особенно просто увидеть в случае взаимодействия волны с первоначально покоящейся частицей. Полагая в (1.8), (1.9) $p_{x0} = p_{z0} = 0$, $x_0 = z_0 = \psi_0 = y_0 = 0$, находим:

$$p_x = \mathcal{E}_x \sin \psi, \quad p_z = \pm \frac{1}{4} \mathcal{E}_x^2 (1 - \cos 2\psi), \quad \gamma = 1 + \frac{1}{4} \mathcal{E}_x^2 (1 - \cos 2\psi),$$

$$x = -\mathcal{E}_x \cos \psi, \quad z = \pm \left[\frac{\mathcal{E}_x \tau}{4 + \mathcal{E}_x^2} - \frac{1}{8} \mathcal{E}_x^2 \sin 2\psi \right], \quad (1.10)$$

$$T = 2\pi \left(1 + \frac{1}{4} \mathcal{E}_x^2 \right)$$

(где T — период осцилляции). Из этих формул видно, что частица, осциллируя, увлекается волной. Период осцилляции зависит от напряженности поля и при $\mathcal{E}_x \gg 1$ значительно превосходит период поля волны. Если область взаимодействия поля с частицами велика, то выражения (1.8), (1.9) и (1.10) могут быть усреднены по осцилляциям. При этом мы получим средние координаты, энергию и импульс частицы, которая увлекается полем. Для первоначально покоящейся частицы ($p_0 \ll 1$) эти величины равны

$$\langle x \rangle = \langle p_x \rangle = 0, \quad \langle p_z \rangle = \pm \frac{\mathcal{E}_x^2}{4}, \quad \langle \gamma \rangle = 1 + \frac{\mathcal{E}_x^2}{4}, \quad \langle z \rangle = \pm \frac{\mathcal{E}_x^2 \tau}{4 + \mathcal{E}_x^2}.$$

Перейдем к более детальному анализу. Отметим, что общие выражения (1.8), (1.9) несмотря на их кажущуюся простоту все же довольно сложны, так как фаза ψ является функцией начальной фазы ψ_0 . Поэтому ниже мы рассмотрим некоторые наиболее интересные частные случаи, поддающиеся простому анализу.

Пусть $p_{x0} = 0$. Тогда, как следует из (1.8), энергия и продольный импульс частицы периодически меняются, но всегда больше или равны своим начальным значениям (γ_0, p_{z0}) . Для релятивистской частицы ($\gamma_0 \gg 1$) энергия изменяется в пределах

$$\gamma_0 \leq \gamma \leq \gamma_0 (1 + 4\mathcal{E}^2).$$

Используя интеграл (1.7), можно найти время t_α взаимодействия частиц с полем, или, что эквивалентно, длину l_α области взаимодей-

ствия частиц с полем, на которой частица получает максимальную энергию $\gamma = \gamma_0(1 + 4\mathcal{E}^2)$. Так, при $\gamma_0 \gg 1$ эти величины равны

$$t_\alpha = T_0 \gamma_0^2 \left(1 + \frac{3}{2} \mathcal{E}^2\right), \quad l_\alpha = \lambda \gamma_0^2 \left(1 + \frac{3}{2} \mathcal{E}^2\right), \quad (1.11)$$

где T_0, λ – период и длина волны.

Если частица нерелятивистская ($\gamma_0 = 1$), то максимальная энергия $\gamma = 1 + 2\mathcal{E}^2$. Эту энергию она приобретает на расстоянии

$$l_\alpha = \frac{1}{2} \lambda v_{z0} + \frac{3}{2} \lambda \mathcal{E}^2.$$

Таким образом, если область взаимодействия частиц с полем ограничена (характерный размер l_α), то в среднем поток частиц после прохождения этой области будет приобретать энергию. Основным недостатком такого механизма ускорения является разброс энергий частиц на выходе из области взаимодействия, а также наличие поперечной скорости. Максимальная поперечная скорость на выходе равна $|p_x| = 2\mathcal{E}_x$, а за время взаимодействия с полем частица сместится в поперечном направлении на величину $l < \lambda \gamma_0 \mathcal{E}_x$.

Заметим, что оптимальный продольный размер области взаимодействия (1.11) представляет собой не что иное, как расстояние, на котором фаза волны на траектории электрона изменилась на π . При $\mathcal{E}^2 \ll 1$ этот размер в $2\gamma^2$ раз больше половины длины волны $\lambda/2$ и полностью определяется кинематикой и релятивистским эффектом Доплера. При $\mathcal{E} > 1$ существенную роль начинает играть эффект увлечения частицы полем волны, который при $\mathcal{E}^2 \gg 1$ может существенно увеличить размер области эффективного обмена энергией.

Пусть $p_{x0} \neq 0$ и выполнены неравенства $2\mathcal{E}_x \ll p_{x0} \ll p_{z0} \sim \gamma_0 \gg 1$. Максимальное изменение энергии частицы $\Delta\gamma = \gamma - \gamma_0$ в этом случае будет определяться выражением

$$\Delta\gamma = \frac{4\gamma_0 p_{x0} \mathcal{E}}{1 + p_{x0}^2}. \quad (1.12)$$

Размер области взаимодействия вдоль оси z , на котором частица приобретет или потеряет энергию (1.12), равен

$$l_z = \frac{\lambda \gamma_0^2}{1 + p_{x0}^2} \left(1 - \frac{2p_{x0} \mathcal{E}}{1 + p_{x0}^2}\right).$$

Отметим, что если при $p_{x0} = 0$ частица после взаимодействия с полем могла только приобрести энергию, то в рассматриваемом случае она может как приобрести ее, так и потерять, т. е. возможно не только ускорение частиц, но и усиление волны за счет энергии пучка частиц.

Для частиц, имеющих отличную от нуля поперечную скорость на входе в область взаимодействия с полем ($p_{x0} \neq 0$), важной характеристикой является необходимый для эффективного обмена энергией минимальный поперечный размер области взаимодействия. При выполнении указанных выше неравенств он равен

$$l_x = \frac{\lambda \gamma_0 p_{x0}}{1 + p_{x0}^2}.$$

Выше была рассмотрена динамика частиц в поле линейно поляризованной волны. В поле волны с эллиптической поляризацией основные особенности динамики сохраняются. Однако имеются и различия. Наиболее существенным различием является тот факт, что в поле с круговой поляризацией величина продольного импульса для всех частиц одинакова и не зависит от первоначального расположения частиц по фазам. Действительно, из уравнений (1.8) можно получить следующее выражение для продольного импульса в поле с круговой поляризацией: $P_z = 2\mathcal{E} [1 - \cos(\psi - \psi_0)]$. Из этого выражения видно, что величина продольного импульса для всех частиц не зависит от первоначального расположения частиц по фазам. Действительно, так как в первоначальный момент времени ψ и ψ_0 совпадают, то P_z для всех частиц оказываются одинаковыми.

Взаимодействие с потоком частиц. Практический интерес представляет случай взаимодействия волны не с одной частицей, а с потоком. Если скорости частиц одинаковы, а сами частицы распределены в пространстве однородно, то эффективность обмена энергией потока с полем может быть определена путем усреднения выражения (1.8) для энергии по фазам влета частиц (ψ_{0i}) в область взаимодействия их с полем. Трудность такого усреднения обусловлена тем, что фаза i -й частицы (ψ_i) связана с начальной фазой ψ_{0i} неявным соотношением. В общем случае связь ψ с ψ_0 может быть легко получена из соотношений (1.9), если мы зададим либо продольные, либо поперечные размеры области взаимодействия. В некоторых случаях удобнее связать ψ с ψ_0 через заданный продольный размер. Так, если $p_{x0} = 0$ и $\mathcal{E}_x^2 \ll 1$, то, как видно из выражения (1.9), для z эта связь становится наиболее простой (линейной):

$$\psi = \psi_0 + \frac{\gamma \dot{\psi}}{p_{z0}} (z - z_0). \quad (1.13)$$

Если в (1.13) положить $z_0 = \mathbf{O}$, $\gamma_0 \gg 1$ и координату z приравнять оптимальному размеру $z = z_{opt} = 2\pi\gamma_0^2$, то получаем совсем простую связь фазы на выходе из области взаимодействия с фазой на входе:

$$\psi = \psi_0 + \pi.$$

Используя эту связь, можно легко найти среднюю энергию и значения средних импульсов частиц пучка, которые они приобретают после взаимодействия с полем:

$$\langle \gamma \rangle = \gamma_0 + 2\gamma_0 \mathcal{E}^2, \quad \langle p_x \rangle = 0.$$

Достаточно простая связь ψ с ψ_0 имеется и в случае $p_{x0} \gg \mathcal{E}_x$ для произвольной величины \mathcal{E}_x :

$$\psi = \psi_0 + \xi + \varepsilon \xi \sin \psi_0, \quad (1.14)$$

где $\varepsilon = \frac{\mathcal{E}}{p_{x0}}$, $\xi \equiv \frac{1}{p_{x0}}(x - x_0)(\gamma_0 - p_{z0}) \geq \pi$.

Подставляя (1.14) в выражение (1.8) для энергии и усредняя по начальным фазам, получаем следующее выражение для средней энергии:

$$\begin{aligned} \langle \gamma \rangle = \gamma_0 + \frac{\gamma_0(1 + v_{z0})}{2(1 + p_{x0}^2)} \left\{ \mathcal{E}_x^2 \left[1 - \cos \xi (J_0(\varepsilon \xi) + J_2(\varepsilon \xi)) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} J_2(2\varepsilon \xi) \cos 2\xi \right] - 2p_{x0} \mathcal{E}_x J_1(\varepsilon \xi) \sin \xi \right\}, \quad (1.15) \end{aligned}$$

где J_n – функции Бесселя первого рода n -го порядка.

Следует отметить, что при получении формулы (1.15) мы воспользовались только малостью параметра ε ; величина $\varepsilon \xi$, как и \mathcal{E}_x , может быть произвольной.

Из формулы (1.15), в частности, следует, что выбором параметров пучка и размера области взаимодействия можно не только ускорить частицы пучка, но и осуществить обратный процесс – передать энергию пучка волне. Так, при $\mathcal{E} = 0.3$, $p_{x0} = 1$, $\xi = 5\pi/2$, $v_{z0} \approx 1$ из формулы (1.15) следует, что пучок за один проход области взаимодействия с полем передает волне 15% своей энергии. Минимальные размеры области взаимодействия при этом равны $l_z = 5\lambda\gamma_0^2/4$, $l_x = 5\lambda\gamma_0/4$. Важной особенностью такой передачи энергии от потока частиц волне является тот факт, что эффективность передачи мало зависит от качества пучка. Действительно, допустимый энергетический разброс пучка $\delta\gamma$ можно оценить из

условия $\delta\xi \leq \pi$. Из этого условия, считая, что размеры области взаимодействия заданы, находим $\delta\gamma \leq \gamma$.

Взаимодействие частиц с полем медленной волны (Взаимодействие при наличии среды). Как уже говорилось выше, динамика частиц, взаимодействующих с полем медленной ($k > 1$) поперечной электромагнитной волны, может качественно измениться по сравнению с динамикой при взаимодействии с быстрой волной ($k \leq 1$). Это различие видно из рис. 1.1а и 1.1б. Полем медленной волны частица может захватиться. Захват проявляется в том, что интегральные кривые, по которым совершается движение частицы, становятся замкнутыми (см. формулы (1.5) и (1.6)). В проекции на плоскости (γ, p_x) эти кривые для частных случаев $p_{x0} = 0, 1 > v_{ph} > v_0$ и $p_x = 0, 1 > v_0 > v_{ph}$ представлены соответственно на рис. 1.2а и 1.2б. В первом случае (рис. 1.2а) скорость частиц меньше скорости волны. При этом происходит, как и в случае взаимодействия в вакууме, только ускорение частиц, причем, если $\mathcal{E}_x^2 < (\gamma_0 - \gamma_*)^2 / 4\gamma_0^2 v_{ph}^2$, частицы не захватываются волной и движение происходит только вдоль левой половины эллипса ($\gamma < \gamma_*$) и качественно не отличается от движения частиц при взаимодействии с волной в вакууме. Если напряженность поля волны достаточно велика, так что $\mathcal{E}_x^2 > (\gamma_0 - \gamma_*)^2 / 4\gamma_{ph}^2 v_{ph}^2$, то частицы захватываются волной и движутся по эллипсу, т. е. совершают захватные колебания в поле поперечной волны.

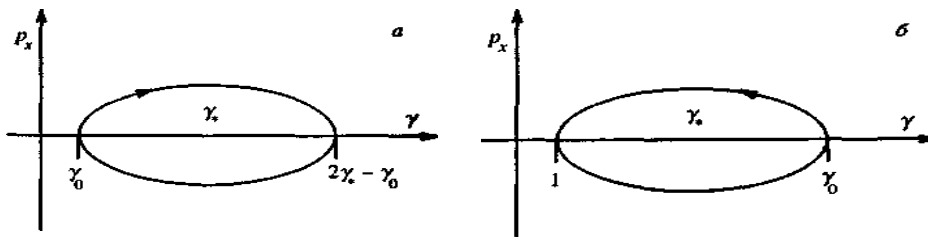


Рис. 1.2. Проекция кривой пересечения гиперboloида энергии с интегралом на плоскость (γ, p_x) при взаимодействии частицы с медленной волной

для случаев $v_{ph} > v_0$ (а) и $v_{ph} < v_0$ (б). В последнем случае частица может полностью отдать энергию волне

Во втором случае частицы обгоняют волну ($v_0 > v_{ph}$) и тормозятся. Более того, легко показать, что если фазовая скорость волны связана с начальной скоростью частицы соотношением $v_{ph} = \frac{v_{z0}\gamma_0}{\gamma_0 + 1}$ и частица

оказывается захваченной, то частица может полностью отдать энергию волне ($\gamma = 1$). Этому случаю соответствует рис. 1.2б.

Динамика частиц в поле медленной волны оказывается значительно более сложной для анализа, чем при взаимодействии с полем в вакууме. Это связано прежде всего с тем, что интеграл (1.7) теперь не сохраняется. Вместо него имеем соотношение

$$\gamma\dot{\psi} + (k^2 - 1)\dot{\gamma} = -C_z. \quad (1.16)$$

Выпишем основные формулы, описывающие динамику частицы в поле медленной волны. Выражения для импульсов и энергии частицы, так же как и в вакууме, легко находятся для общего случая:

$$\begin{aligned} p_x &= p_{x0} + \mathcal{E}_{x0} (\sin \psi - \sin \psi_0), \\ p_z &= p_{z0} + k(\gamma_* - \gamma_0) \left\{ 1 \pm \left[1 - \kappa^2 (\sin \psi - \sin \psi_0)^2 - \kappa^2 \frac{2p_{x0}}{\mathcal{E}_x} (\sin \psi - \sin \psi_0) \right]^{1/2} \right\}, \\ \gamma &= \gamma_0 + \frac{1}{k} (p_z - p_{z0}), \end{aligned} \quad (1.17)$$

где $\kappa^2 = \mathcal{E}_x^2 \gamma_{ph}^2 v_{ph}^2 / (\gamma_* - \gamma_0)^2$.

Верхний знак перед корнем (плюс) в выражении (1.17) соответствует (при ускорении, рис. 1.2а) движению по правой половине эллипса ($\gamma > \gamma_*$), нижний знак (минус) – движению по левой половине ($\gamma < \gamma_*$).

Выражения для координат частицы могут быть получены интегрированием (1.17). В общем случае это громоздкие выражения, хотя и получаются без труда. Чтобы их не выписывать, но все же дать представление о характерных размерах области эффективного обмена энергией и о характерных временных масштабах, выпишем эти выражения для частного случая, когда $\psi_0 = 0$, $p_{x0} = 0$ и $\psi \leq \pi/2$:

$$\begin{aligned} z &= z_0 - \gamma_{ph}^2 v_{ph} \left[\psi - \left(1 + \frac{v_{ph} p_{z0}}{\gamma_* - \gamma_0} \right) \begin{cases} F(\psi, \kappa), \kappa \leq 1 \\ \kappa^{-1} F(\varphi, \kappa^{-1}), \kappa > 1 \end{cases} \right], \\ x &= x_0 - \frac{\mathcal{E} \ln \left\{ \left| \kappa \cos \psi + \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \psi} \right| / (1 + \kappa) \right\}}{\kappa(k^2 - 1)(\gamma_* - \gamma_0)}, \\ \tau &= -\frac{\psi}{k^2 - 1} + \frac{\gamma_*}{(\gamma_* - \gamma_0)(k^2 - 1)} \begin{cases} F(\psi, \kappa), \kappa \leq 1 \\ \kappa^{-1} F(\varphi, \kappa^{-1}), \kappa > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.18)$$

где $F(\psi, \kappa)$ – эллиптический интеграл первого рода,

$$\varphi = \arcsin(\kappa \sin \psi), \quad \kappa^2 \sin^2 \psi \leq 1, \quad (1.19)$$

$\kappa < 1$ соответствует случаю пролетных частиц, $\kappa > 1$ – захваченных, τ – время, за которое частица достигнет фазы ψ .

Из этих формул, в частности, можно найти, учитывая симметрию движения, частоту малых фазовых колебаний захваченных частиц. Для них $\psi \ll 1$, $\kappa \gg 1$, $\kappa \sin \psi \simeq 1$, $\varphi \leq \pi/2$. Подставляя эти значения в (1.20), находим $\omega_B = \omega \mathcal{E}_x / \gamma_{ph}^2 v_{ph}^2$. При приближении к сепаратрисе, разделяющей пролетные частицы от захваченных, частота фазовых колебаний стремится к нулю:

$$\omega_B = \omega \mathcal{E}_x \frac{\gamma_{ph}}{\gamma_*} \frac{\pi}{2} \left(\ln \frac{4}{\sqrt{1-\kappa^2}} \right)^{-1}. \quad (1.20)$$

Автофазировка. Представляет интерес выяснить возможность автофазировки в поперечной волне, а также определить ее особенности. Для решения этого вопроса будем считать, что параметры среды, а вместе с ними и фазовая скорость волны медленно меняются вдоль направления распространения волны (z). Фазу волны можно в этом случае представить в виде

$$\psi = \tau - \int_0^z k(z') dz'.$$

Легко увидеть, что как уравнения движения (1.2), так и интегралы (1.4) сохраняют свой вид. Введем, как в теории ускорителей, синхронную частицу, скорость которой меняется в соответствии с фазовой скоростью волны ($v_s = v_{ph}$).

Используя интегралы (1.4) для определения фазы ψ , легко получить следующее уравнение:

$$\ddot{\psi} - \frac{\dot{k}}{k} \dot{\psi} - \frac{k C_z}{\gamma^2} \mathcal{E}_x \left[\frac{\mathcal{E}_x}{2\gamma} (\sin 2\psi - \sin 2\psi_s) + \frac{1}{\gamma} (C_x \cos \psi - C_{xs} \cos \psi_s) \right] = 0. \quad (1.21)$$

Ограничимся анализом поведения малых отклонений фазы от синхронной. Для этого положим $\psi = \psi_s + \varphi$, $\varphi \ll 1$. Линеаризуем (1.21)

относительно φ . В результате для определения φ получим уравнение маятника с затуханием:

$$\ddot{\varphi} + \frac{\dot{v}_{ph}}{v_{ph}} \dot{\varphi} + \Omega^2 \varphi = 0,$$

$$\text{где } \Omega^2 = \frac{1}{\gamma^2 v_{ph}^2} (1 - v_{z0} v_{ph}) \mathcal{E}_x (\mathcal{E}_x \cos^2 \psi_s - p_{x0} \sin \psi_s).$$

Выражение для частоты фазовых колебаний для случая $p_{x0} = 0$ и отдельно для случая $p_{x0} \gg \mathcal{E}_x$ выражение для Ω^2 было найдено в [15].

Взаимодействие с импульсом электромагнитной волны. Наиболее привлекательными реальными схемами ускорения заряженных частиц являются схемы с использованием импульсов лазерного излучения. Ниже мы рассмотрим некоторые наиболее простые схемы такого ускорения. Будут выяснены особенности, связанные с тем, что взаимодействия происходят с импульсом, а также будут оценены возможные перспективы использования таких схем.

Рассмотрим движение заряженной частицы в поле импульса плоской бегущей электромагнитной волны, характеризуемой векторным потенциалом $\vec{A} = \vec{A}(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \equiv \vec{A}(\psi)$. Уравнение движения частицы в этом поле в безразмерных переменных: $\tau \equiv \omega t$, $\vec{k} \equiv \vec{k}/k_1$, $k_1 \equiv \omega/c$, $\vec{\beta} \equiv \vec{v}/c$, $\vec{p} \equiv \vec{p}_1/m_0 c$ (\vec{v} – скорость частицы, \vec{p} – ее импульс), $A \equiv ek_0 A_1/m_0 c \omega$ принимает вид (индекс «1» опускаем):

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial \psi} (1 - \vec{k} \cdot \vec{\beta}) - \vec{k} \left(\vec{\beta} \frac{\partial \vec{A}}{\partial \psi} \right). \quad (1.22)$$

Умножим скалярно уравнение (1.22) на \vec{p} . Используя соотношения $\gamma = \sqrt{1 + p^2}$, $\dot{\psi} = 1 - \vec{k} \cdot \vec{\beta}$, $\vec{\beta} = \vec{p}/\gamma$, можно получить уравнение, описывающее изменение энергии:

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = -\left(\vec{\beta} \frac{\partial \vec{A}}{\partial \psi} \right), \quad (1.23)$$

с помощью уравнений (1.22) и (1.23) легко найти следующий интеграл:

$$\vec{p} + \vec{A} - \vec{k} \gamma = \text{Const} = \vec{p}_0 + \vec{A}_0 - \vec{k} \gamma_0. \quad (1.24)$$

В случае чисто поперечной волны ($k_{\parallel} = 1, k_{\perp} = 0$, $[k_{\parallel} \vec{E}] = [k_{\parallel} \vec{H}] = [k_{\parallel} \vec{A}] = 0$), уравнения (1.22) с учетом (1.23) и (1.24) и следующего из (1.24) соотношения $p_{\parallel} - k_{\parallel} \gamma = Const = -\gamma(1 - \beta_{\parallel}) = -\gamma \dot{\psi}$ полностью интегрируемы в лабораторной системе координат. Решение имеет вид:

$$p_{\parallel} - p_{\parallel 0} = \frac{(\vec{A} - \vec{A}_0)^2 + \vec{p}_{\perp 0}^2}{2\gamma \dot{\psi}}; \quad \vec{p}_{\perp} - \vec{p}_{\perp 0} = (\vec{A} - \vec{A}_0); \quad (1.25)$$

$$r_{\parallel} - r_{\parallel 0} = \frac{p_{\parallel 0}(\psi - \psi_0)}{\gamma \dot{\psi}} + \frac{1}{2(\gamma \dot{\psi})^2} \int_{\psi_0}^{\psi} [(\vec{A} - \vec{A}_0)^2 + \vec{p}_{\perp 0}^2] d\psi; \quad (1.26)$$

$$\vec{r}_{\perp} - \vec{r}_{\perp 0} = \frac{-1}{\gamma \dot{\psi}} \int_{\psi_0}^{\psi} [(\vec{A} - \vec{A}_0) - \vec{p}_{\perp 0}] d\psi \quad .$$

Уже из (1.25), (1.26) видно, что частица увлекается полем волны, т.к. ее продольный импульс осциллирует, но остается знакопостоянным, а продольная координата определяется интегралом от неотрицательной функции.

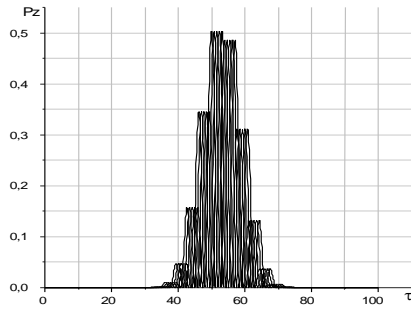


Рис. 1.3. Импульс частицы для случая линейной поляризации

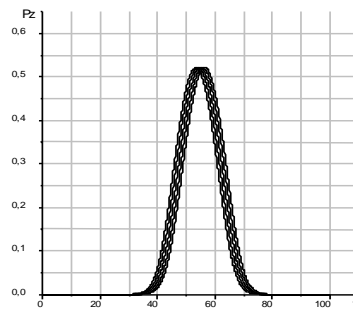


Рис. 1.4. Импульс частицы для случая круговой поляризации

Для иллюстрации этой динамики на рис. 1.3 приведены временные зависимости импульса частицы, найденные при численном решении уравнения (1.22) для случая линейной поляризации поля импульса. Решение получено для первоначально покоящейся частицы, на которую воздействует поперечное электромагнитное поле с компонентами, определяемыми соотношением $\partial A_x / \partial \psi = A_0 \exp[-\beta(\psi - \psi_0)^2] \cdot \cos \psi$, при $A_0 = 1, \beta_0 = 0.01, \psi_0 = 50$. На рис. 1.4 приведены временные зависимо-

сти импульса частицы для случая круговой поляризации поля импульса. Сравнивая рис. 1.3 и 1.4, можно сделать следующие выводы. В поле как линейно-поляризованной волны, так и в поле с круговой поляризацией максимальные значения импульсов примерно одинаковые. В поле волны с линейной поляризацией динамика продольного импульса строго следует за фазой излучения. В поле волны с круговой поляризацией продольный импульс строго следует за огибающей импульса. Реально для ускорения необходимо разорвать взаимодействие ускоряемых частиц с полем волны в момент максимального значения энергии и продольного импульса. Легко видеть, что такое разделение достаточно легко осуществить при использовании волны с круговой поляризацией. При использовании волны с линейной поляризацией такое разделение частицы поля реализовать значительно труднее.

Некоторые выводы. Важный вывод, который можно сделать из полученных выше результатов, заключается в том, что ограничение области взаимодействия частиц с полем приводит к эффективному обмену энергией между частицами и полем. Здесь, по-видимому, уместно сделать следующее замечание. В работе [11] сформулировано утверждение, что ускорение заряженных частиц электромагнитным полем в вакууме силой, пропорциональной первой степени напряженности электрического поля E , невозможно. Такое утверждение, безусловно, справедливо, когда область взаимодействия частиц с полем неограничено велика. В реальных условиях эта область ограничена. При этом возможен обмен энергией между волной и частицами. Этот же результат сразу следует и из формул, приведенных в работе [11], если время взаимодействия частицы с полем в них взять не бесконечно большим ($-\infty < t < \infty$), как в работе, а ограниченным ($0 \leq t \leq T$).

Если частица и волна движутся в одном направлении ($p_{x0} = 0$), то частица всегда получает энергию от волны, причем приращение энергии пропорционально энергии частицы и квадрату напряженности поля: $\Delta\gamma \propto \gamma_0 \mathcal{E}^2$. Заметим, что квадратичная зависимость от поля не связана с осцилляторным движением, поэтому отсутствуют ограничения на энергию частиц, связанные с торможением излучения, которые ограничивают возможности ускорения частиц силой Миллера [11]. Кроме того, при ускорении пондеромоторным потенциалом приращение энергии обратно пропорционально энергии ($\Delta\gamma \propto \mathcal{E}^2 / \gamma_0$), поэтому при больших энергиях ($\gamma_0 \gg 1$) рассматриваемый нами механизм обмена энергией эффективнее.

Если $p_{x0} \neq 0$, то возможно не только ускорение, но и торможение частиц. Важной особенностью передачи энергии волне является слабая зависимость эффективности передачи от разброса энергии пучка ($\delta\gamma \sim \gamma$). Эта особенность рассматриваемой схемы усиления коротковолнового

излучения выгодно отличает ее от известных схем лазеров на свободных электронах (ЛСЭ), для которых разброс должен быть мал ($\delta\gamma \leq 10^{-3}\gamma$ для усиления волны с $\lambda \approx 10$ мкм [16]). Для усиления более коротких волн требуются пучки еще более высокого качества ($\delta\gamma \sim 10^{-4}\gamma$). Этот результат легко объясним. В традиционных схемах лазеров на свободных электронах рассматривается самосогласованная динамика частиц и поля. Возбуждение (усиление) волны происходит в результате развития коллективной пучковой неустойчивости. Оно начинается с линейной стадии, когда амплитуда поля мала. При этом только пучки высокого качества могут эффективно (с гидродинамическим инкрементом) возбуждать коротковолновое излучение. В рассмотренной нами схеме передачи энергии от частиц волне поле волны не меняется, т. е. используется приближение заданного поля, причем напряженность поля достаточно велика, и именно поле определяет динамику частиц. Ясно, что такое приближение справедливо, когда за время пролета частицы через область взаимодействия можно пренебречь изменением напряженности поля. Кроме того, предполагается, что для поля реализуется стационарный режим, т. е. приращение его энергии компенсируется уходом поля из области взаимодействия. Таким образом, когда такое приближение справедливо, для возбуждения коротковолнового излучения могут быть использованы пучки плохого качества ($\delta\gamma \leq \gamma$).

Рассмотренные выше возможности обмена энергией между частицами и полем являются грубыми моделями реальных схем, которые могут быть использованы. Чтобы приблизить эти модели к реальным, следует учесть в них неоднородность поперечной структуры поля, а также исследовать процесс обмена энергией не в одной изолированной области взаимодействия, а в некоторой совокупности таких областей. Результаты исследований в этом направлении были опубликованы в [12, 17, 18]. В работах [17, 18] было предложено использовать для ускорения заряженных частиц лазерный поток, состоящий из большого числа параллельных элементарных пучков, причем фаза каждого следующего сдвинута относительно предыдущего на определенную величину. Эффективное поле, действующее на частицы, пересекающие под углом такой лазерный поток, эквивалентно полю медленной электромагнитной волны. Учет неоднородной структуры поля элементарных пучков качественно не меняет динамику частиц. Еще один интересный вариант организации элементарных областей взаимодействия изложен в работе [12]. В ней лазерный пучок последовательно отражается от большого числа зеркал, расположенных аналогично положению электродов в фотоэлектронных умножителях, а траектория лазерного пучка аналогична траектории электронного потока в умножителе. Ускоряемые частицы движутся вдоль оси системы между зеркалами, последовательно пересекая каждый лазерный пучок в его фокальном сечении. Эти схемы организации элементарных областей, с учетом описанных выше процессов в каж-

дой области, по-видимому, можно использовать и для создания реальных схем ускорителей и лазеров на свободных электронах.

Несколько слов скажем об использовании сред для ускорения заряженных частиц. При плотностях энергии лазерного излучения, которые интересны для приложений, все среды превращаются в плазму. Взаимодействие излучения с плазмой приводит к развитию разнообразных неустойчивостей, которые разрушают схему ускорения. Наиболее опасной является модуляционная неустойчивость. Поэтому такие схемы могут функционировать только в импульсном режиме. Длительность импульса ограничена величиной $T = \min\{d / \mathcal{E}c; \Gamma^{-1}\}$, где d – диаметр лазерного фокуса, Γ – инкремент модуляционной неустойчивости. Наличие этих трудностей приводит к тому, что все большее внимание в настоящее время уделяется разработке схем лазерного ускорения, в которых среда отсутствует. Это, например, схемы типа обращенного лазера на свободных электронах. Интересный, имеющий много преимуществ перед другими подход к этой проблеме содержится в работе [12]. В ней предлагается для ускорения заряженных частиц использовать комбинацию лазерного поля и внешнего постоянного магнитного поля. Использование внешнего магнитного поля для создания условий эффективного обмена энергией между частицами и полем имеет давнюю историю. Имеется много схем ускорения частиц и генерирования электромагнитных волн. Однако в [12] содержится новый важный физический факт, который заключается в том, что если величина внешнего поперечного постоянного магнитного поля превышает некоторое значение, которое пропорционально энергии частицы, то частота осцилляции лазерного поля на траектории электрона меняется во времени. В результате (при прохождении области взаимодействия) частицы в среднем приобретают энергию. Оценка максимального приращения энергии частицы при однократном прохождении области взаимодействия дает (в наших переменных) величину $\Delta\gamma \approx \gamma_0 \mathcal{E}^2 \alpha$ ($\mathcal{E} < 1, \alpha > 1$), т.е. величину того же порядка, что и полученная в рассматриваемой нами схеме. Имеются три важные особенности, определяющие достоинства рассмотренного в [12] подхода. Первая, наиболее существенная, заключается в том, что обмен энергией между частицей и волной не является строго резонансным. Поэтому ограничения, связанные с нелинейным сдвигом фазы ускоряющей волны относительно частицы (критичные для схем типа обращенного лазера на свободных электронах), здесь несущественны. Вторая связана с тем, что ускорение происходит в вакууме, и все проблемы, связанные с особенностью взаимодействия интенсивного лазерного излучения с веществом, в частности с плазмой, не возникают. Третья – внешнее поперечное магнитное поле может возвращать ускоренные частицы в область взаимодействия с полем, т.е. возможно многократное циклическое ускорение частиц. Мы перечислили достоинства предложенного в [12] подхода, так как все они свойственны и тем схемам ускорения, которые могут быть предложены, исходя из полученных в этой работе результатов.

Отметим методическую важность учета интегралов (1.5) или (1.6). Для различных схем ускорения заряженных частиц, ввиду достаточно сложной структуры ускоряющего поля в них, часто проводят отдельно анализ продольного (фазового) движения частиц и отдельно анализ их поперечного движения. Для случая продольного движения во многих случаях достаточно рассмотреть только один из интегралов (1.4). Анализируя этот интеграл изолированно, без учета интегралов (1.5), (1.6) или аналогичных, явно учитывающих поперечное движение, в некоторых случаях можно прийти к ошибочному результату. Рассмотрим в качестве примера случай, когда частица движется вдоль оси z , а медленная электромагнитная волна ($k > 1$) движется под таким углом к этой оси, что $k_z = 1$. Будем анализировать только один из интегралов (1.4), а именно тот, который характеризует продольное движение частицы:

$$p_z - \gamma - \mathcal{E}_z \sin \psi = C_z.$$

Из него, в частности, следует, что частица может неограниченно ускоряться ($\gamma \rightarrow \infty$) полем с конечной амплитудой \mathcal{E}_z . Из этого интеграла можно найти и условия захвата частицы в режим неограниченного ускорения и другие характеристики движения частицы. Однако, как видно из интеграла (1.5), неограниченное ускорение в рассматриваемом случае невозможно – траектории на плоскости (γ, p_x) всегда замкнуты, а величины γ и p_x всегда ограничены.

1.2. Роль сил трения

(в том числе радиационного трения) при лазерном ускорении заряженных частиц

В этом разделе показано, что силы трения, в частности силы радиационного трения, могут способствовать передаче энергии от лазерного излучения к заряженным частицам. Показано также, что известное ограничение на максимальную энергию, которую могут получить заряженные частицы в поле лазерного излучения, и которое обусловлено наличием сил радиационного трения, может быть преодолено.

При ускорении электрона лазерным излучением ускоряемые частицы осциллируют в лазерном поле. При этом возникает интенсивное излучение. Это излучение, также как и излучение в циклических ускорителях, может ограничивать энергию, которую могут приобрести ускоряемые частицы. Влияние собственного излучения заряженных частиц на динамику самих частиц во многих случаях можно интерпретировать

как радиационное трение. Такая аналогия особенно оправдана при больших значениях энергии частиц. В этом случае ограничения на максимальную энергию, которую могут приобрести ускоряемые частицы, обычно получают, приравнивая ускоряющие силы силам радиационного трения. Так, в работе [11], рассматривая ускорение электронов полем лазерного излучения, авторы приравняли силу радиационного трения ускоряющим силам (силам высокочастотного давления). В результате они нашли, что в поле лазерного излучения электроны не могут приобрести энергию большую, чем 200 МэВ ($\lambda \sim 1 \mu k$). При этом, так как сила высокочастотного давления и сила радиационного трения обе пропорциональны ε^2 , то этот результат не зависит от напряженности поля лазерного излучения. В этом смысле он универсален.

Ниже покажем, что роль радиационного трения не может быть сведена к простому торможению частиц. Будут найдены условия, когда силы трения, в том числе и силы радиационного трения, могут способствовать передаче энергии от внешнего лазерного поля ускоряемым частицам. Кроме того, будет показано, что ограничение на максимальную величину энергии в 200 МэВ, которые могут приобрести частицы в поле лазерного излучения, в общем случае отсутствует.

Основные уравнения и аналитические оценки. Рассмотрим наиболее простую модель, которая описывает динамику заряженной частицы в поле лазерного излучения. Пусть частица движется в поле однородной плоской электромагнитной волны, которая распространяется в вакууме вдоль оси z . Пусть эта волна имеет только две компоненты электромагнитного поля: E_x, H_y . При этом будем считать, что существуют силы трения, которые тормозят частицу. Вначале мы рассмотрим простую модель, в которой не будем конкретизировать природу этих сил. Затем рассмотрим конкретно силы радиационного трения. И в том, и в другом случае мы покажем, что силы трения нарушают баланс тормозящих и ускоряющих сил и могут способствовать более эффективному отбору энергии частицами от лазерного излучения. Уравнение движения заряженной частицы в поле плоской однородной электромагнитной волны с учетом силы трения имеет вид:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v} \cdot \vec{H}] + \vec{F}_f. \quad (1.27)$$

Это уравнение отличается от изученного выше уравнения (1.2) только наличием силы трения. Если эта сила отсутствует, то динамика продольного движения заряженной частицы представлена на рис. 5. При этом величина $I \equiv \gamma - p_z = const$ является интегралом уравнения (1.1) в отсутствие сил трения. Отметим, что здесь и везде ниже мы используем общепринятые безразмерные переменные (например, импульс измеряется в единицах mc , время – в периодах поля: $\vec{p} = \vec{p}/mc$, $\tau = \omega \cdot t$, смотри выше (раздел 1.2)). Если же сила трения присутствует, то эта величина I

уже перестает быть интегралом. Будем считать, что силу трения можно представить в виде $\vec{F}_f = -\mu\vec{p} / \gamma$, где $\mu = const$. Тогда для определения зависимости этого интеграла I от времени из (1.27) можно получить следующее уравнение:

$$\frac{dI}{d\tau} = -\mu \frac{I}{\gamma} + \frac{\mu}{\gamma^2}. \quad (1.28)$$

Общее решение уравнения (1.28) можно записать в виде:

$$I = \exp(-) \cdot \int_0^\tau \frac{\mu}{\gamma^2} \cdot \exp(+)\cdot d\tau, \quad (1.29)$$

где $\exp(\pm) \equiv \exp(\pm \mu \int d\tau / \gamma)$.

Анализ этого решения затруднен тем фактом, что мы не знаем динамики изменения энергии частицы во времени. Однако качественную картину поведения интеграла I со временем легко получить из уравнения (1.28). Действительно, если пренебречь вторым слагаемым в правой части уравнения (1.28) (сильно релятивистский случай), то видно, что величина интеграла экспоненциально стремится к нулю. Более того, из уравнения (1.28) видно, что $I = 1/\gamma$ является стационарной точкой этого уравнения. Более того, эта точка является устойчивой точкой. Таким образом, величина интеграла I стремится к величине $1/\gamma$. Характерное время обратно пропорционально параметру μ . Уменьшение величины интеграла означает рост величины p_z и, соответственно, энергии частицы. Дополнительный анализ показывает, что величина поперечного импульса при этом практически не меняется. Таким образом, мы видим, что наличие затухания может приводить к нарушению баланса сил торможения и ускорения и к более эффективному отбору энергии. Из формулы (1.27) можно оценить и максимальную величину продольного импульса, который может достигнуть частица: $p_z \sim \varepsilon^2 / \mu$.

Рассмотрим теперь конкретно роль сил высокочастотного трения. Нас будут интересовать большие напряженности полей ($\mathcal{E} \geq 1$). Поэтому мы можем сразу ограничиться случаем релятивистского движения. Для этого случая безразмерную силу радиационного трения можно представить в виде [1]:

$$\vec{F}_f = \frac{\omega}{\Omega} (F_{ik} \cdot u^k) \cdot (F^{mn} \cdot u_n) \cdot \vec{v}, \quad (1.30)$$

где F_{ik} – тензор электромагнитного поля; u^k – четырехвектор скорости; \vec{v} – трехмерный вектор скорости, «частота» $\Omega_e = 3mc^3 / 2e^2 = 1,8 \cdot 10^{23} \text{ сек}^{-1}$.

В нашем случае мы имеем только две компоненты электромагнитного поля (E_x, H_y) . Учитывая, что $E_x = H_y$, а также что четырехвектор скорости в наших обозначениях имеет вид $u^k = (\gamma, \vec{p})$, $u_n = (\gamma, -\vec{p})$, силу радиационного трения можно представить следующим выражением:

$$\vec{F}_f = -\frac{\omega}{\Omega} \cdot \varepsilon^2 \cdot I^2 \cdot \frac{\vec{p}}{\gamma} \cdot \cos^2(\psi). \quad (1.31)$$

Следует заметить, что сила радиационного трения пропорциональна четвертой степени заряда частицы. Поэтому, если движется не одна частица, а сгусток из N частиц, то сила радиационного трения быстро растет с увеличением числа частиц: $\vec{F}_f \sim N^4$. Из формулы (1.31) мы видим, что в данном случае коэффициент μ уже является сложной функцией времени. Однако качественный анализ поведения интеграла I можно провести аналогично предыдущему случаю. Легко видеть, что в данном случае величина интеграла со временем уменьшается, хотя не так быстро, как в предыдущем случае. Это связано с тем, что с уменьшением I сила трения также быстро уменьшается. Как и в предыдущем случае, точка $I = 1/\gamma$ является устойчивой стационарной точкой. Таким образом, качественно влияние силы радиационного трения аналогично предыдущему случаю. Существенным отличием является только тот факт, что сама величина радиационного трения быстро убывает с уменьшением интеграла I . Это обусловлено тем фактом, что частота, которую воспринимает частица, с ростом ее энергии падает.

Результаты численного анализа. Уравнение (1.27) было детально изучено численными методами. Качественно результаты численного исследования хорошо совпадают с аналитическими результатами. Наиболее характерные особенности динамики частицы представлены на рис. 1.6-1.8. На рис. 1.6 представлена зависимость продольного импульса от времени при наличии силы трения. Параметры поля и начальные условия для частицы те же, что и на рис. 1.5: $\varepsilon = 5$, $\mu = 5 \cdot 10^{-3}$. Видно, что при отсутствии трения (рис. 1.5) максимальное значение продольного импульса достигает величины $\varepsilon^2/2$. При наличии же трения эта величина существенно возрастает. Причем чем больше сила трения, тем рост быстрее, однако максимальное значение меньше. Динамика поперечного импульса практически не меняется от присутствия силы трения (см. рис. 1.7). Эти факты хорошо согласуются с полученными выше аналитическими результатами. Если следить за динамикой частиц на больших временах или если начальная энергия частиц достаточно велика, то, как мы описывали выше, сила радиационного трения играет все меньшую роль. Так, на рис. 1.8 представлена зависимость продольного импульса от времени при следующих значениях параметров: $\varepsilon = 5$, $\mu = 5 \cdot 10^{-3}$, $p_{z,0} = 20$.

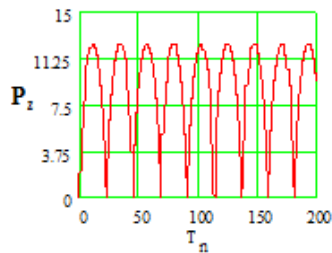


Рис. 1.5. Зависимость продольного импульса от времени в отсутствие силы трения ($\varepsilon = 5, \mu = 0, p_{z,0} = 0$)

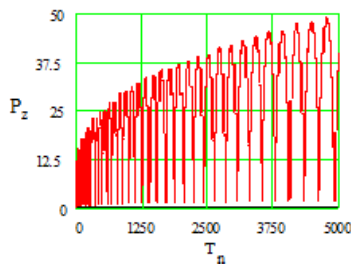


Рис. 1.6. Зависимость продольного импульса от времени при наличии силы трения ($\varepsilon = 5, \mu = 5 \cdot 10^{-3}, p_{z,0} = 0$)

Величина поперечного импульса при этом практически не меняется. Из этого рисунка видно, что с ростом энергии частиц период осцилляции частиц в поле лазерного излучения значительно увеличился. Так, за время счета, представленного на этом рисунке, частица не сделала ни одного колебания, т.е. происходит практически квазистатическое ускорение заряженных частиц. Потери энергии на излучение при этом существенно уменьшаются. Кроме того, из рис. 1.8 видно, что энергия частицы уже превосходит 200 МэВ.

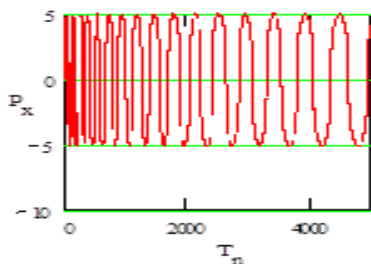


Рис. 1.7. Зависимость поперечного импульса от времени при наличии силы трения ($\varepsilon = 5, \mu = 5 \cdot 10^{-3}, p_{z,0} = 0$)

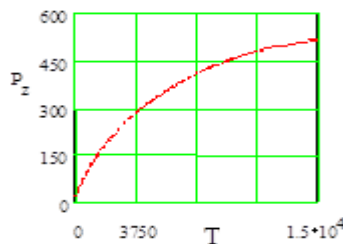


Рис. 1.8. Зависимость продольного импульса от времени при наличии силы трения и при достаточно больших значениях начального импульса ($\varepsilon = 5, \mu = 5 \cdot 10^{-3}, p_{z,0} = 20$)

Таким образом, простое приравнивание сил радиационного торможения средним ускоряющим силам (силам высокочастотного давления) не может правильно описать динамику частиц при лазерном ускорении. Действительно в рассмотренной нами схеме средняя ускоряющая частицы сила равна нулю. Наличие сил радиационного торможения должно было бы привести к уменьшению величины отклонения от среднего положения, к уменьшению величины максимальной скорости, ко-

торую получают частицы. Как мы видели выше, динамика сложнее, и силы трения могут способствовать ускорению частиц.

Частицы, двигаясь с ускорением, теряют часть своей энергии на излучение. Причем чем больше энергия частиц, тем больше потери энергии частицы на излучение. Так, если релятивистский электрон движется по круговой орбите, радиус которой не меняется (например, в магнитном поле циклического ускорителя), то выражение для мощности излучения можно представить в виде:

$$W = \frac{2}{3} e^2 c \cdot K^2 \cdot \gamma^4,$$

где γ – релятивистский фактор; K – кривизна орбиты.

Из этой формулы видно, что потери растут как четвертая степень энергии частицы. Эти потери должны быть скомпенсированы. Этот факт существенно ограничивает возможности циклических ускорителей электронов. Кроме того, как известно, излучение ускоряемых в циклических ускорителях электронов существенно меняет динамику электронов. В рассмотренном нами случае радиус кривизны траектории электронов растет пропорционально квадрату энергии электрона ($K \sim 1/\gamma^2$). Поэтому мощность излучения не меняется с ростом энергии, и проблема, связанная с ростом радиационных потерь не возникает.

Выше мы рассмотрели случай движения частицы в поле однородного лазерного излучения. Представляет интерес исследовать влияние силы радиационного трения для случая неоднородного поля. Как показывают наши расчеты, качественно влияние сил трения на динамику движения в этом случае не отличается от описанного выше случая движения в однородном поле.

Следует обратить внимание на тот факт, что в нашей схеме взаимодействия поля с частицами при больших значениях энергии интеграл I становится малым ($I \sim 1/\gamma$). Выражения (1.30) и (1.31) для радиационной силы в этом случае не полностью описывают силу радиационного воздействия. Необходимо воспользоваться более полным выражением для этой силы. Выражение для силы (1.31) приобретает дополнительные слагаемые. Однако качественно результаты при этом не меняются.

В поле плоской электромагнитной волны только частицы, расположенные в фазах πn , строго увлекаются вдоль направления распространения волны. Частицы же, которые находятся в других фазах, увлекаются не только в продольном направлении, но и в поперечном. Причем частицы, которые находятся в фазах от 0 до π , увлекаются в другом поперечном направлении, чем частицы, находящиеся в фазах от π до 2π . При этом ускоряемые сгустки частиц быстро разрушаются полем лазерного излучения. Однако, если ускоряемые частицы имели достаточно большую первоначальную энергию (как на рис. 1.8), то отклонения в поперечном направлении значительно уменьшаются. Таким образом, ускорение по-

лем лазерного излучения, по-видимому, является наиболее эффективным для доускорения частиц, уже имеющих значительную энергию.

Выше мы видели, что динамика заряженной частицы в поле поперечной электромагнитной волны такова, что частица увлекается волной в направлении распространения волны. При этом скорость частицы периодически возвращается к своему начальному значению. Например, периодически обращается в ноль, если до взаимодействия с волной частица покоилась в рассматриваемой системе координат. Такой согласованный процесс обмена энергией между частицей и волной может быть нарушен, если в процесс взаимодействия включатся другие силы. Выше мы видели, как на этот процесс влияют силы трения. Также могут влиять и другие силы. Например, если частица будет взаимодействовать не с одной волной, а с двумя волнами.

1.3. Движение заряженных частиц в поле электромагнитной волны произвольной поляризации и в постоянном магнитном поле

Рассмотрим заряженную частицу (электрон), которая движется во внешнем постоянном магнитном поле величины H_0 , направленном вдоль оси z , и в поле электромагнитной волны произвольной поляризации. Компоненты поля этой волны определяются формулами (1.1) (смотри раздел 1.2). Без ограничения общности можно считать, что вектор \vec{k} имеет только две отличные от нуля компоненты k_x и k_z . В тех же безразмерных переменных, которые были введены в разделе 1.2, уравнения движения частицы можно привести к виду:

$$\dot{\vec{P}} = \left(1 - \frac{\vec{k}\vec{p}}{\gamma}\right) \text{Re}(\vec{\varepsilon}e^{i\psi}) + \frac{\vec{k}}{\gamma} \text{Re}(\vec{p}\vec{\varepsilon})e^{i\psi} + \frac{\omega_H}{\gamma} [\vec{p}\vec{e}]; \quad (1.32)$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{p} / \gamma; \quad \dot{\psi} = \vec{k}\vec{p} / \gamma - 1,$$

где $\tau \equiv \omega t$, $\vec{e} \equiv \vec{H}_0 / H_0$; $\omega_H \equiv eH_0 / mc\omega$; $\psi = \vec{k}\vec{r} - \tau$.

Система уравнений (1.32) отличается от системы уравнений (1.2) только последним слагаемым в правой части первого векторного уравнения. Это слагаемое описывает силу Лоренца, которая действует на частицу в постоянном внешнем поле. Помножив первое из уравнений (1.32) на \vec{p} и учитывая, что $p^2 = \gamma^2 - 1$, получим следующее уравнение для изменения энергии частицы:

$$\dot{\gamma} = \text{Re}(v\vec{\varepsilon})e^{i\psi}. \quad (1.33)$$

Используя это уравнение, из уравнений (1.32) найдем следующий интеграл движения:

$$\vec{p} - \text{Re}(i\vec{\varepsilon}e^{i\psi}) + \omega_H [\vec{r}\vec{e}] - \vec{k}\gamma = \text{const}. \quad (1.34)$$

Интеграл (1.34) является обобщением интегралов, полученных выше (формула (1.4)). Обобщение заключается в учете внешнего магнитного поля \vec{H}_0 . Для дальнейшего удобно перейти к новым переменным $p_\perp, p_\parallel, \theta, \xi$ и η , которые связаны со старыми следующими соотношениями:

$$p_x = p_\perp \cos \theta, p_y = p_\perp \sin \theta, p_z = p_\parallel, x = \xi - \frac{p_\perp}{\omega_H} \sin \theta, y = \eta + \frac{p_\perp}{\omega_H} \cos \theta. \quad (1.35)$$

В этих переменных уравнения (1.32) с учетом интеграла (1.34) примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{p}_\perp &= (1 - k_z v_z) \sum_n \left(\varepsilon_x \frac{n}{\mu} J_n - \varepsilon_y J_n' \right) \cos \theta_n + k_x v_z \varepsilon_z \sum_n \frac{n}{\mu} J_n \cos \theta_n; \\ \dot{\theta} &= -\frac{\omega_H}{\gamma} + \frac{(1 - k_z v_z)}{p_\perp} \sum_n \left(\varepsilon_x J_n' - \varepsilon_y \frac{n}{\mu} J_n \right) \sin \theta_n + \frac{k_x v_\perp}{p_\perp} \varepsilon_y \sum_n J_n \sin \theta_n + \\ &\quad + \frac{k_x v_z}{p_\perp} \varepsilon_z \sum_n J_n' \cdot \sin \theta_n; \\ \dot{p}_\parallel &= \sum_n \cos \theta_n \left[\varepsilon_z J_n + (k_z v_\perp \varepsilon_x - k_x v_\perp \varepsilon_z) \right] \frac{n}{\mu} J_n - k_z v_\perp \varepsilon_y J_n'; \\ \dot{\eta} &= -\frac{1}{\omega_H} \varepsilon_x (1 - k_z v_\perp) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \cos \theta_n - \frac{k_x}{\omega_H} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\varepsilon_y v_\perp J_n' - \varepsilon_z v_\perp J_n) \cos \theta_n \\ \dot{\xi} &= -\frac{\varepsilon_y}{\omega_H} \sum_n J_n \cdot \sin \theta_n \left[(1 - k_z v_z) + \frac{n}{\mu} k_x v_\perp \right]; \\ \dot{\gamma} &= \sum_n \cos \theta_n \left[J_n \left(v_\perp \varepsilon_x \frac{n}{\mu} + v_z \varepsilon_z \right) - v_\perp \varepsilon_y J_n' \right]; \\ \dot{z} &= v_z; \quad \theta_n = k_z z + k_x \xi - n\theta - \tau. \end{aligned} \quad (1.36)$$

При получении (1.36) мы воспользовались разложением

$$\cos(x - \mu \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\mu) \cos(x - n\theta), \quad (1.37)$$

где $\mu = k_x p_{\perp} / \omega_H$.

Рассмотрим случай малых амплитуд электромагнитной волны ($\varepsilon_0 \ll 1$). При этом эффективное взаимодействие частицы с волной происходит при выполнении одного из резонансных условий

$$\Delta_s(\gamma_0) \equiv k_z v_{z0} + s \frac{\omega_H}{\gamma_0} - 1 = 0. \quad (1.38)$$

Считая условие (1.38) выполненным и вводя резонансную фазу $\theta_s = s\theta - \tau$ из системы уравнений (1.36), получим после усреднения следующие уравнения движения:

$$\dot{p}_{\perp} = \frac{1}{p_{\perp}} (1 - k_z v_z) W_s \cdot \varepsilon_0 \cos \theta_s; \quad \dot{p}_z = \frac{1}{\gamma} k_z W_s \varepsilon_0 \cos \theta_s; \quad (1.39)$$

$$\dot{\theta}_s = \Delta_s \equiv k_z v_z + s \frac{\omega_H}{\gamma} - 1; \quad \dot{\gamma} = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} W_s \cdot \cos \theta_s,$$

где $W_s \equiv \alpha_x p_{\perp} \frac{s}{\mu} J_s - \alpha_y p_{\perp} J'_s + \alpha_z p_z J_s$, $\mu \equiv k_x p_{\perp} / \omega_H$.

Последнее уравнение системы (1.39) является следствием остальных. При получении (1.39) мы пренебрегли членами, пропорциональными произведению малых множителей: $\Delta_s \varepsilon_0$.

Следует обратить внимание, что система уравнения (1.39) получена после усреднения по быстроменяющимся фазам (нерезонансным фазам). При этом в зависимости от параметров волны и частицы возможны резонансы на различных гармониках циклотронной частоты, т.е. в принципе величина s может приобретать различные целочисленные значения. Однако, если волна распространяется строго вдоль направления внешнего постоянного магнитного поля и ее поперечной структурой можно пренебречь, то в полученных выше формулах следует положить $k_x \rightarrow k_y \rightarrow 0$. При этом $\mu \rightarrow 0$. Следствием этого является тот факт, что отличными от нуля остаются только члены, описывающие резонансы с $s = 0, \pm 1$, т.е. описывающие черенковский резонанс, а также резонансы на нормальном и аномальном эффектах Доплера. Таким образом, возбуждение гармоник циклотронной частоты обусловлено неоднородной поперечной структурой возбуждаемого поля.

Качественный анализ интегралов движения. Полученные выше уравнения, описывающие динамику движения частицы даже в своем укороченном виде (1.39), достаточно сложны для анализа. Поэтому представляет значительный интерес получить как можно большую информацию из анализа интегралов движения (1.34) и из резонансных условий (1.38). Кроме того, так как безразмерные амплитуды возбуждаемых волн (\mathcal{E}) практически всегда малы, то значительный обмен энергии между волной и частицами может происходить только в условиях достаточно длительного синхронного взаимодействия волны с частицей. При этом представляет интерес рассмотреть динамику изменения фазы волны ($\theta_s = s\theta - \tau$) относительно взаимодействующей с нею частицей. Уравнение для фазы, интегралы и резонансные условия представляют собой простые алгебраические соотношения. Их анализ может быть проведен в полной мере и с необходимой подробностью.

Следует отметить, что движение частицы в пространстве $(\gamma, p_{\parallel}, p_{\perp})$ может происходить только по следующей поверхности:

$$\gamma^2 = p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2 + 1. \quad (1.40)$$

Поверхность (1.40) представляет собой гиперboloид вращения. Необходимо иметь в виду, что не вся поверхность гиперboloида, описываемая уравнением (1.40), доступна частицам. Очевидно, что в области, определяемые неравенствами $\gamma < 1$ или $p_{\perp} < 0$, частица попасть не может. Поверхность гиперboloида (1.40) представлена на рис. 1.9 (представлена только верхняя физически доступная часть гиперboloида).

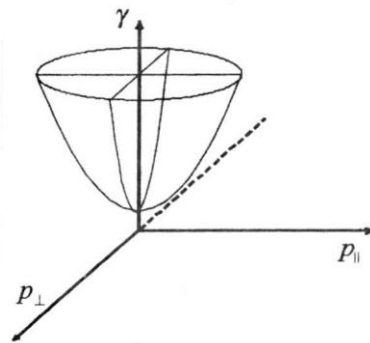


Рис. 1.9. Гиперboloид вращения (1.40)

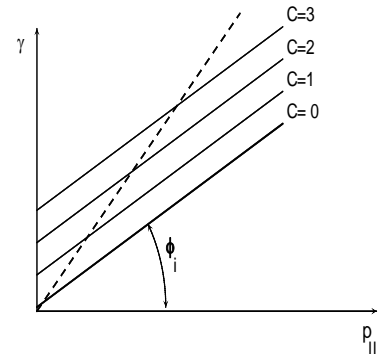


Рис. 1.10. Прямые интегралов на плоскости (γ, p_{\parallel}) для случая $k_z > 1$

Анализ интегралов. Интеграл (1.35) представлен в векторном виде. В действительности мы имеем три алгебраических соотношения (проекции интеграла (1.35) на оси декартовой системы координат x, y, z), кото-

рые остаются постоянными в процессе взаимодействия частицы с волной, т.е. также являются интегралами. Из этих трех интегралов особое значение имеет третий, т.е. проекция интеграла (1.35) на ось z . Этот интеграл существенно упрощается в случае, когда волна строго распространяется вдоль оси z ($k_x = k_y = 0, k_z = 0$). Он упрощается также при усреднении этого интеграла по быстрой фазе $\psi = \vec{k}\vec{r} - \tau$. В этих двух случаях интеграл приобретает вид:

$$p_{\parallel} - k_z \gamma = p_{\parallel 0} - k_z \gamma_0 \equiv C = const. \quad (1.41)$$

В (1.41) индексом «0» обозначены начальные значения продольного импульса частицы и ее энергии.

Любопытно отметить, что интеграл (1.41) является следствием законов сохранения энергии и импульса при излучении кванта волны заряженной частицей. Действительно, эти законы можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Delta\gamma &= \gamma_0 - \gamma = \hbar\omega / mc^2, \\ \Delta\vec{p} &= \vec{p}_0 - \vec{p} = \vec{e} \cdot \hbar\omega / mcv_f. \end{aligned}$$

Легко видеть, что, подставляя $\hbar\omega$ из первого уравнения во второе, мы получим интеграл (1.41), если квант излучается в направлении оси z . Причем полученное соотношение не содержит постоянной Планка, т.е. является классическим. Интеграл (1.41) на плоскости (γ, p_{\parallel}) представляет собой уравнения параллельных прямых, которые отличаются друг от друга различным значением константы C . Несколько таких прямых представлены на рис. 1.10. Наклон этих интегралов относительно оси определяется продольным волновым числом k_z и равен $\varphi_i = \arctg(1/k_z)$. Забегая вперед (см. ниже), отметим, что резонансы на плоскости (γ, p_{\parallel}) также представляют собой прямые линии, угол наклона которых относительно оси p_{\parallel} равен $\varphi_r = \arctg(k_z)$. Легко увидеть, что если волна распространяется строго вдоль внешнего постоянного магнитного поля в вакууме, то $k_z = 1$ и прямые интегралов оказываются параллельными прямым резонансов. Если кроме того константа C равняется $s \cdot \omega_H$, то эти прямые будут совпадать. Эти частные условия являются условиями авторезонанса, и имеют значительный самостоятельный интерес (смотри ниже разделы 1.4 и 2.4).

Рассмотрим проекцию линии интегралов на гиперboloиде на плоскость (γ, p_{\perp}) . Легко видеть, что эта проекция представляет собой линию второго порядка и может быть представлена следующей формулой:

$$\frac{p_{\perp}^2}{A^2} + \frac{(\gamma - \gamma_*)^2}{B^2} = 1, \quad (1.42)$$

где $A^2 = [C^2 / (k_z^2 - 1)] - 1$, $B^2 = [C^2 - (k_z^2 - 1)] / (k_z^2 - 1)^2$,
 $\gamma_* = -C \cdot k_z / (k_z^2 - 1)$.

Уравнение (1.42) при $A^2 > 0, B^2 > 0$ представляет собой уравнение эллипса, центр которого расположен в точке $p_{\perp} = 0, \gamma = \gamma_*$. Этот случай, в частности, выполняется при взаимодействии частицы с медленной волной ($k_z > 1$). При этом представляет интерес найти условия, при которых частица может полностью отдавать всю свою энергию волне. Если частица отдает всю свою энергию волне, то $\gamma \rightarrow 1, p_{\parallel} \rightarrow 0$ и константа C равняется $-k_z$. В этом случае должны выполняться следующие соотношения между начальным значением продольного импульса и начальной энергией: $p_{\parallel,0} = k_z(\gamma_0 - 1)$. Интересно отметить, что в процессе передачи энергии от частицы к волне поперечный импульс частицы вначале растет, достигает своего максимума, равного $1 / \sqrt{(k_z^2 - 1)}$, а затем уменьшается до нуля. Характерный вид интеграла для этого случая на плоскости (γ, p_{\perp}) представлен на рис. 1.11.

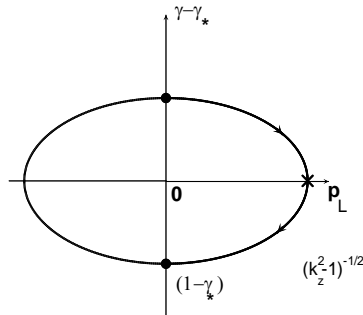


Рис. 1.11. Эллипс (1.42) – проекция интеграла (1.41) на плоскость $(\gamma - \gamma_*, p_{\perp})$ для случая $k_z > 1$. На рисунке представлен случай, когда $\gamma_* = k_z^2 / (k_z^2 - 1)$, при котором возможна полная передача энергии от частицы к волне

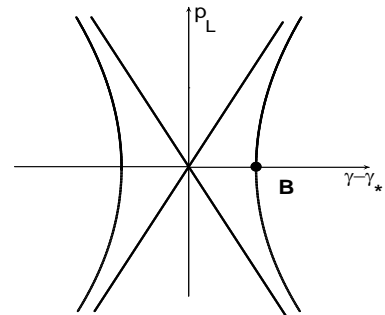


Рис. 1.12. Характерный вид проекции интеграла (1.41) на плоскость $(\gamma - \gamma_*, p_{\perp})$ для случая $k_z < 1$. Физически доступная область $p_{\perp} > 0$

Если взаимодействие частицы происходит с быстрой волной ($k_z < 1$), то линия пересечения интеграла с гиперboloидом представляет собой гиперболу. В этом случае в уравнении (1.42) параметр A^2 отрицателен. Вид проекции этой гиперболы на плоскость (γ, p_\perp) представлен на рис. 1.12. Из этого рисунка видно, что передача энергии от частицы к волне происходит при монотонном уменьшении поперечного импульса. Полная передача энергии от частицы к волне ($\gamma \rightarrow 1$) происходит при тех же начальных условиях, что и при взаимодействии с медленной волной, т.е. при $C = -k_z (p_{\parallel 0} = (\gamma_0 - 1)k_z)$.

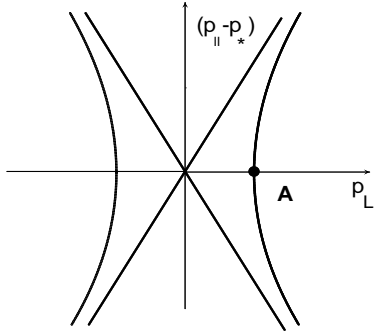


Рис. 1.13. Проекция интегралов (1.41) на плоскость (p_\parallel, p_\perp) для случая $k_z < 1$

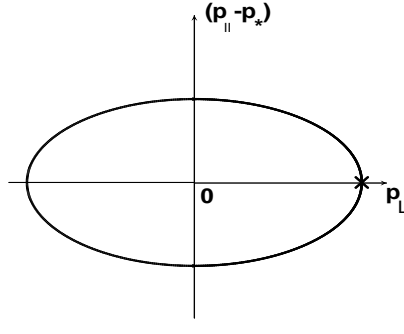


Рис. 1.14. Проекция интеграла (1.41) на плоскость (p_\parallel, p_\perp) для случая $k_z > 1$

Определенный интерес при обмене энергии между частицей и волной представляет зависимость продольного импульса от поперечного импульса. Используя уравнение гиперboloида (1.40) и выражение для интеграла (1.41) для случая $k_z \neq 1$, эту зависимость можно выразить уравнением

$$\frac{p_\perp^2}{A^2} + \frac{(p_\parallel - p_*)^2}{B^2} = 1, \tag{1.43}$$

где $A^2 = [C^2 / (k_z^2 - 1)] - 1$, $B^2 = k_z^2 \cdot [C^2 - (k_z^2 - 1)] / (k_z^2 - 1)^2$, $p_* = -C / (k_z^2 - 1)$.

Уравнение (1.43) при $k_z < 1$ представляет собой уравнение гиперболы (см. рис.1.13).

В этом случае передача энергии от частицы к волне происходит при одновременном, монотонном уменьшении как продольного, так

и поперечного импульсов. Если взаимодействие частицы происходит с медленной волной ($k_z > 1$), то уравнение (1.43) представляет собой эллипс (см. рис. 1.14), и передача энергии от частицы к волне может сопровождаться первоначальным ростом поперечного импульса с последующим его уменьшением до нуля.

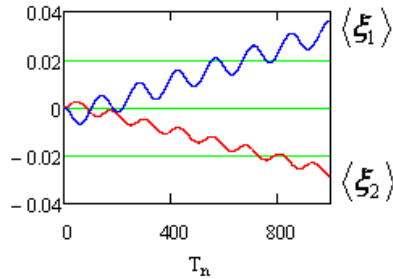


Рис. 1.15. Динамика ведущих центров двух частиц, массы которых слегка различаются

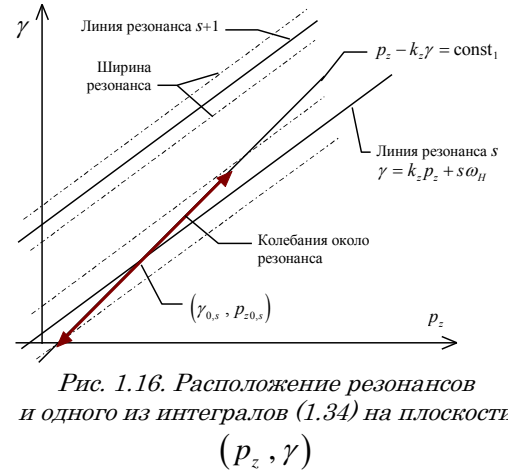


Рис. 1.16. Расположение резонансов и одного из интегралов (1.34) на плоскости (p_z, γ)

Отметим также, что на плоскости (γ, p_{\parallel}) интеграл (1.41) представляет собой неограниченные лучи при $k_z < 1$ и ограниченные отрезки прямых при взаимодействии частицы с медленной волной ($k_z > 1$).

Анализ резонансов. Резонансные условия (1.38) на плоскости (γ, p_{\parallel}) , также как и интегралы (1.41), представляют собой уравнения прямых (см. рис.1.10). На этом рисунке угол φ определяется продольным волновым числом k_z и равен $\varphi_r = \text{arctg}(k_z)$. В отличие от интегральных прямых резонансные прямые представляют собой лучи при $k_z > 1$ и ограниченные отрезки при взаимодействии частицы с быстрой волной ($k_z < 1$).

Особенности динамики частиц в условиях нарушения теоремы о непрерывной зависимости решений от параметров. Сепаратор. В большинстве физических задач малые изменения параметров изучаемой системы приводят к малым изменениям в ее динамике. Такое положение дел гарантируется теоремой о непрерывной зависимости решений уравнений от изменений параметров. Однако это справедливо только вдали от бифуркационных значений параметров изучаемой системы. Причем следует различать опасные и безопасные бифуркационные границы в пространстве параметров. При пересечении опасных границ сколь угодно малые отклонения от этой границы не позволяют системе вернуться

ся в исходное состояние (динамика в окрестности этих границ описывается взрывными неустойчивостями). При переходе через обычные (безопасные) границы малые отклонения от этой границы позволяют системе вернуться в исходное состояние (в окрестности этой границы неустойчивости экспоненциальные). Во всех случаях области параметров, в которых происходит качественное изменение динамики изучаемой системы, представляют особый интерес. Такие области требуют внимательного изучения.

В настоящем разделе мы покажем, что динамика ведущих центров заряженных частиц имеет область параметров, в окрестности которых происходит качественное изменение динамики этих центров. Ниже мы будем рассматривать динамику этих центров. В постоянных однородных внешних магнитных полях динамика ведущего центра заряженных частиц выражена слабо. Она определяется только нелинейными эффектами. В большинстве случаев этой динамикой можно пренебречь. Так обстоят дела при анализе высокочастотных приборов, работа которых основана на циклотронных резонансах, например, в мазерах на циклотронных резонансах. Однако именно динамика ведущих центров, как будет видно ниже, может быть наиболее чувствительной к малому изменению параметров системы. В частности, к малому изменению массы частицы.

Для простоты ниже мы рассмотрим наиболее простую структуру полей, когда плоская электромагнитная волна с линейной поляризацией распространяется строго перпендикулярно внешнему магнитному полю и магнитная компонента поля этой волны коллинеарна внешнему магнитному полю. Кроме того, нас будут интересовать условия, близкие к ионным циклотронным резонансам. Это означает, что частота внешней волны близка к ионной циклотронной частоте. В этом случае параметр силы волны можно переписать как отношение напряженности электрического поля электромагнитной волны к напряженности постоянного магнитного поля ($\varepsilon = E/H$). Практически всегда этот параметр мал. Кроме того, при анализе динамики ионов эффектами релятивизма можно пренебречь. Воспользовавшись малостью этих параметров, можно получить следующую систему укороченных уравнений, которая справедлива в окрестности ионных циклотронных резонансов:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= [\omega_H - 1] + \frac{\varepsilon}{2V} \sin \theta_1, & \dot{V} &= -0.5 \cdot \varepsilon \cdot \cos \theta_1, \\ \dot{\xi} &= -\varepsilon \cdot V \cdot \sin \theta_1, \end{aligned} \quad (1.44)$$

где $\omega_H = q \cdot H / M \cdot c \cdot \omega$ – безразмерная ионная циклотронная частота.

Из этих уравнений видно, что первые два уравнения представляют собой полностью замкнутую систему уравнений относительно переменных V и θ_1 . После решения этой пары уравнений: $\theta_1 \approx (\omega_H - 1)\tau$, $V = V(0) - (\varepsilon \cdot \sin \theta_1) / 2(\omega_H - 1)$ находим уравнение, определяющее динамику ведущего центра ξ :

$$\dot{\xi} = -\varepsilon \cdot [V(0) - (\varepsilon \cdot \sin \theta_1) / 2(\omega_H - 1)] \cdot \sin \theta_1. \quad (1.45)$$

Из этого уравнения видно, что второе слагаемое в квадратной скобке представляет собой разрывную функцию от параметра ω_H . Точка $\omega_H = 1$ является точкой разрыва второго рода. В этом случае условия теоремы о непрерывной зависимости решения от параметров не выполняются. Динамика изучаемой системы может существенно различаться при незначительном изменении параметра ω_H . Действительно, учитывая, что параметр $\varepsilon = E / H$ мал, уравнение (1.45) можно усреднить по фазе θ_1 . Решение, описывающее усредненную динамику ведущего центра, можно представить в следующем виде:

$$\langle \xi \rangle \approx \varepsilon^2 \cdot \tau / 4(\omega_H - 1), \quad \langle V \rangle = V(0). \quad (1.46)$$

Здесь угловыми скобками обозначено усреднение по θ_1 . Из вида выражения для $\langle \xi \rangle$ следует, что можно подобрать такую частоту ω , что частицы с одной массой будут двигаться в одном направлении ($\omega_H > 1$), а частицы с другой массой ($\omega_H < 1$) – в другом направлении. Исходная система уравнений (не усредненная) была посчитана численно. Результаты этих расчетов представлены на рис. 1.15. Здесь представлена зависимость положения ведущего центра от времени для двух частиц. Масса одной частицы такова, что $(\omega_H - 1) = 0.05$. Ведущий центр этой частицы движется в положительном направлении оси x . Масса другой частицы слегка отличается от массы первой: $(\omega_H - 1) = -0.05$. Видно, что ведущий центр этой частицы движется в противоположном направлении – в отрицательном направлении оси x . Рассмотренная выше модель не слишком удобна для практической реализации. Похоже, что значительно интереснее для реализации будет модель, когда поле волны представляет собой поле ионнозвуковой волны. Это волна продольная. Ее волновой вектор параллелен вектору напряженности электрического поля волны. Магнитной составляющей волна не имеет. Легко показать, что в поле такой волны сохраняются все описанные выше особенности динамики частиц.

1.4. Особенности движения частиц в условиях авторезонанса

Циклотронные резонансы широко используются в физике плазмы и в физической электронике. На основе этих резонансов разработаны разнообразные схемы нагрева частиц плазмы. Они лежат в основе цело-

го ряда гирорезонансных приборов (смотри, например, [19-21]). Особый интерес представляют условия, когда условия циклотронных резонансов не меняются в результате обмена энергией между волной и частицами. При этом условия циклотронных резонансов совпадают с интегралами движения частиц. Такие условия называются циклотронными авторезонансами, или просто авторезонансами. Впервые на такие условия было указано в работах [22, 23]. Анализу динамики частиц в условиях авторезонанса посвящено много работ. Достаточно указать на последние обзоры [24, 25] и на цитируемую там литературу. Однако, несмотря на такую эффективность и на тот факт, что теория циклотронных резонансов, в частности теория авторезонанса, достаточно хорошо разработана, авторезонанс, насколько нам известно, не нашел должного использования. В частности, при попытках создать источники интенсивного когерентного миллиметрового излучения, работа которых основана на принципе авторезонанса (МЦАР). Оказалось, что эффективность таких устройств значительно ниже, чем предполагалось. Вместо предполагаемой эффективности в 20-40 процентах удавалось добиться эффективности всего лишь в 2-4 процента (смотри [25] и цитированную там литературу). Авторы обзора [25] отмечают, что одним из возможных объяснений такой малой эффективности является отсутствие учета в теоретических расчетах влияния несинхронных (нерезонансных) волн и сил. Действительно, в теоретических расчетах, в основном, учитываются только резонансные моды электродинамической структуры, которые эффективно взаимодействуют с потоками заряженных частиц. Нерезонансные моды в большинстве случаев во внимание не принимаются. В обзоре [25], в частности, указано, что когда таких нерезонансных мод становится достаточно много, они могут не только количественно, но и качественно менять эффективность взаимодействия между частицами и волнами.

В настоящем разделе мы обращаем внимание на некоторые новые особенности динамики заряженных частиц в условиях, близких к условиям авторезонанса. В частности, показана разница в динамике частиц при их ускорении и при передаче энергии волнам (при торможении). Кроме того, показана разница в динамике частиц на больших интервалах времени (асимптотически) от динамики частиц на малых интервалах времени. Кроме того в разделе будет показано, что динамика частиц в условиях, близких к авторезонансу, аномально чувствительна к флуктуациям.

Даже простой анализ системы уравнений (1.39) или (1.36) может вскрыть важные особенности динамики взаимодействия заряженных частиц с полем электромагнитной волны. Например, если волна распространяется строго вдоль направления внешнего постоянного магнитного поля и ее поперечной структурой можно пренебречь, то в полученных выше формулах следует положить $k_x \rightarrow k_y \rightarrow 0$. При этом $\mu \rightarrow 0$. Следствием этого является тот факт, что отличными от нуля остаются только члены, описывающие резонансы с $s = 0, \pm 1$, т.е. описывающие черенковский резонанс ($s = 0$) и резонансы на нормальном $s = -1$ и ано-

мальном $s = 1$ эффектах Доплера. Таким образом, в условиях авторезонанса эффективное взаимодействие частиц с полем происходит только в условиях этих резонансов. В частности, отсюда следует, что возбуждаемые поля на частотах гармоник циклотронной частоты должны иметь неоднородную поперечную структуру.

Для дальнейшего анализа воспользуемся тем фактом, что изменение энергии частиц происходит значительно медленнее, чем фазовые изменения. В этом случае можно в системе уравнений (1.39) ограничиться линейными по $\tilde{\gamma}$ членами. В результате получим:

$$\frac{d^2\theta_s}{d\tau^2} - \frac{\partial R_{s0}}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=\gamma_0} \frac{\varepsilon_0}{\gamma_0} W_s \cos \theta_s = 0. \quad (1.47)$$

Из этого уравнения легко найти значение ширины нелинейного резонанса в энергетических единицах:

$$\Delta\gamma_s = 4 \sqrt{\varepsilon_0 W_s / \left(\gamma_0 \frac{\partial R_{s0}}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma_0} \right)}. \quad (1.48)$$

Используя интегралы (1.34) и резонансные условия (1.38), можно найти расстояние между циклотронными резонансами:

$$\delta\gamma = \omega_H / (1 - k_z^2). \quad (1.49)$$

Учитывая, что $(\partial R_s / \partial \gamma) \sim (1 - k_z^2)$, можно сделать заключение о том, что при приближении к авторезонансу ($(1 - k_z^2) \rightarrow 0$) растет как ширина нелинейного резонанса, так и расстояние между ними. Однако видно, что расстояние между резонансами растет значительно быстрее. Это означает, что в условиях авторезонанса нелинейные резонансы не будут перекрываться. Соответственно, не будут возникать режимы с динамическим хаосом. Динамика частиц будет регулярной. Отметим, что, по-видимому, этот результат был впервые получен в работе [26]. На рис. 1.10, 1.16 представлены прямые интегралов (1.34) и прямые резонансов. В условиях авторезонанса эти прямые параллельны.

Регулярная динамика заряженных частиц. Рассмотрим регулярную динамику в условиях, близких к авторезонансу. При этом будем считать, что $\vec{\alpha} = \{\alpha_x, 0, 0\} = \{1, 0, 0\}$, $k_\perp \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow 0$, $W_1 \rightarrow p_\perp / 2$.

Система уравнений (1.39) в этих условиях приобретает вид:

$$\begin{aligned} \dot{p}_\perp &= \frac{1}{2}(1 - p_z / \gamma) \varepsilon_0 \cos \theta_1; & \dot{p}_z &= \frac{p_\perp}{2 \cdot \gamma} \varepsilon_0 \cos \theta_1; \\ \dot{\theta}_1 &= R_1 \equiv -[\gamma - p_z - \omega_H] / \gamma & \dot{\gamma} &= [(\varepsilon_0 \cdot p_\perp) / 2\gamma] \cos \theta_1. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Правые части уравнений для энергии и продольного импульса совпадают. В результате имеется такой интеграл:

$$\gamma - p_z = \gamma_0 - p_z(0) = C. \quad (1.51)$$

Используем этот интеграл и связь энергии с импульсом: $\gamma^2 = 1 + p_z^2 + p_\perp^2$, получим такое выражение для квадрата поперечного импульса: $p_\perp^2 = 2\gamma C - C^2 - 1 = 2p_z C + C^2 - 1$.

Рассмотрим процесс ускорения. Пусть энергия частицы после ускорения стала существенно больше начальной, тогда $p_\perp = \sqrt{2\gamma C}$. При авторезонансе $\theta_1 = const$. Поэтому из последнего уравнения системы (1.50) получим следующую зависимость энергии частицы при ускорении в условиях авторезонанса:

$$\gamma = (M\tau + \gamma_0^{3/2})^{2/3} \approx (M\tau)^{2/3}, \quad (1.52)$$

где $M = \varepsilon_0 \cos \theta_1 \sqrt{C} \cdot [3/(2)^{3/2}]$.

Такая зависимость энергии частицы от времени в условиях авторезонанса была впервые получена уже в первых работах по авторезонансу. Рассмотрим теперь процесс торможения частицы в условиях авторезонанса. При торможении можно считать, что: $p_z \rightarrow 0$, $p_\perp^2 = C^2 - 1$. Из этих соотношений легко находим следующую зависимость энергии частицы от времени при торможении в условиях авторезонанса:

$$\gamma = \sqrt{\gamma_0^2 + D\tau}, \quad (1.53)$$

где $D = \varepsilon_0 \sqrt{C^2 - 1} \cdot \cos \theta_1 < 0$.

Сравнивая выражения (1.52) и (1.53), мы видим, что законы обмена энергией при ускорении и при торможении отличаются. Это асимптотические формулы.

Динамика частиц на коротких интервалах времени. На коротких интервалах времени временная динамика в большинстве случаев отличается от асимптотической динамики. Однако для многих важных приложений (например, для изучения процессов развития неустойчивостей, в частности неустойчивостей на циклотронных резонансах) нет необходимости знать асимптотическое поведение зависимых переменных. Более того, это знание может помешать правильной оценке анализируемых процессов. Во многих случаях нам нужно знать динамику процессов на достаточно малых временах. На тех временах, в течение которых развивается неустойчивость. Важным и впечатляющим примером факта, что динамика на малых временах может качественно отличаться от динамики на больших временах, может служить закон распада. Действи-

тельно, как известно, этот закон имеет следующий привычный вид: $P(\tau) = \exp(-\lambda\tau)$, где $P(\tau)$ – вероятность найти систему в момент времени τ в исходном, нераспавшемся состоянии. Однако этот закон справедлив только на больших временах ($\lambda\tau \gg 1$). На малых временах он имеет вид: $P(\tau) = [1 - (\rho\tau)^2]$, $\rho\tau \ll 1$. Обратим внимание на то, что добавок к единице в последней формуле пропорционален квадрату малого параметра. Такую зависимость нельзя получить, если складывать асимптотическую формулу, считая, что параметр $\lambda\tau$ мал ($\lambda\tau \ll 1$). Такая особенность процесса распада квантовых систем впервые была обнаружена в работе [27]. Эта особенность распада на малых временах является ключевым элементом квантового эффекта Зенона. Динамику на малых временах нужно также знать при анализе развития разного рода неустойчивостей. Особенно при анализе развития и подавления неустойчивостей. В нашем случае, при наличии флуктуации разница в динамике на больших временах и на малых временах также может играть существенную роль. Покажем это. На малых интервалах времени динамика взаимодействия между волной и частицей при авторезонансе может быть описана линеаризованной системой уравнений (1.39). Чтобы ее проанализировать, рассмотрим линеаризованную систему (1.39). Для этого подставим в (1.39) $\theta_1 = \theta_0 + \theta$, $\theta \ll 1$, $\gamma \equiv \tilde{\gamma} + \gamma_1$, $\tilde{\gamma} \ll 1$, а в правую часть уравнений системы (1.39), учитывая, что они содержат малый множитель ε_0 , поставим невозмущенные значения параметров. Эту линеаризованную систему можно представить в виде:

$$\gamma_1 = (\varepsilon_0 W_1 / 2\gamma_0) \cos \theta_0 \cdot \tau + \gamma_0, \quad \frac{d\tilde{\gamma}}{d\tau} = -B\theta, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = d \cdot \tilde{\gamma}, \quad (1.54)$$

$$\text{где } B \equiv (\varepsilon_0 W_1 / 2\gamma_0) \sin \theta_0, \quad d \equiv \left. \frac{\partial R}{\partial \gamma} \right|_{\gamma_0}.$$

Общее выражение для энергии частицы приобретает вид:

$$\gamma \equiv \tilde{\gamma} + (\varepsilon_0 W_1 / 2\gamma_0) \cos \theta_0 \cdot \tau + \gamma_0. \quad (1.55)$$

Из (1.54) и (1.55) следует, что только для тех частиц, для которых $d \cdot B < 0$, малая добавка $\tilde{\gamma}$ к энергии может оказаться существенной. Для остальных этой добавкой можно пренебречь. Более того, в условиях авторезонанса ($d \rightarrow 0$), $\theta = \text{const} \ll 1$ и для всех частиц эта добавка несущественна. Таким образом, в условиях авторезонанса на коротких временах регулярная динамика частиц для ускоряемых частиц и для частиц, что тормозятся, одинакова.

Следует заметить, что, говоря о малых временах, мы всегда имеем в виду малые времена для тех процессов, которые мы рассматриваем. В частности, малые времена для процессов, которые описываются укор-

ченными уравнениями, в действительности могут означать достаточно большие времена для исходных высокочастотных процессов.

Кратко сформулируем наиболее важные результаты этого раздела:

1. Ширина нелинейных циклотронных резонансов оказывается обратно пропорциональной корню квадратному от производной по энергии от параметра $R_s \equiv k_z v_z + s\omega_H / \gamma - 1$: $\Delta\gamma_s \approx \sqrt{1/(\partial R_{s0} / \partial \gamma)}$. В свою очередь, расстояния между нелинейными циклотронными резонансами оказываются обратно пропорциональными первой степени этой производной: $\delta\gamma \approx 1/(\partial R_{s0} / \partial \gamma)$. В результате динамический хаос, обусловленный возникновением гомоклинической структуры (перекрывание нелинейных циклотронных резонансов), не развивается.

2. Имеется отличие в асимптотической динамике процесса ускорения заряженных частиц: $\gamma = (B\tau + \gamma_0^{3/2})^{2/3} \approx (B\tau)^{2/3}$ и в динамике частиц, попавших в фазу торможения: $\gamma = \sqrt{\gamma_0^2 + V\tau}$, где $V = \varepsilon_0 \sqrt{\omega_H^2 - 1} \cdot \cos \theta_1 < 0$. Отсюда следует, что те частицы, которые попали в ускоряющую фазу, будут быстрее и эффективнее отбирать энергию у волны, чем те частицы, которые будут передавать энергию волне.

1.5. Самосогласованная нелинейная теория МЦР. (Приближение изолированного нелинейного циклотронного резонанса) [28–30]

В предыдущем разделе мы показали, что при достаточно больших амплитудах волны, когда имеет место перекрывание нелинейных резонансов, движение заряженных частиц становится стохастическим. Можно ожидать, что если в системе осцилляторов в результате развития коллективной неустойчивости амплитуда возбуждаемого поля достигнет значения, при котором наступает перекрывание нелинейных резонансов, то движение частиц станет стохастически неустойчивым, и система осцилляторов перейдет в режим возбуждения стохастических колебаний. Кроме того, можно ожидать, что наличие нескоррелированного хаотического движения частиц будет препятствовать развитию неустойчивостей. Тем самым механизм развития стохастической неустойчивости может оказаться механизмом стабилизации уровня возбуждаемых полей.

Чтобы разобраться в этих вопросах, следует решить полную самосогласованную нелинейную задачу о возбуждении колебаний системой осцилляторов. Для простоты мы будем считать, что электромагнитные колебания возбуждаются системой холодных сфазированных осциллято-

ров. Функцию распределения таких осцилляторов можно представить в виде:

$$f = \frac{n}{p_{\perp}} \delta(p_{\perp} - p_{\perp,0}) \cdot \delta(p_z) \cdot \delta(\theta - \theta_0 + \omega_H t / \gamma), \quad (1.56)$$

где n – плотность осцилляторов.

Таким образом, мы будем рассматривать систему осцилляторов, которая неподвижна вдоль оси z и которая в начальный момент времени имеет только поперечную составляющую импульса. Ось z , как и ранее, направлена вдоль однородного постоянного внешнего магнитного поля.

Полная самосогласованная система уравнений, описывающая возбуждение электромагнитного излучения осцилляторами (1.56), содержит уравнение движения для частиц и уравнение Максвелла для электромагнитного поля:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{mc\gamma} \left[\vec{p}(\vec{H} + \vec{H}_0) \right], \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{p}}{m\gamma} \quad (1.57)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = c \cdot \text{rot} \vec{E}, \quad \text{div} \vec{H} = 0, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c \cdot \text{rot} \vec{H} - 4\pi \vec{j}, \quad \text{div} \vec{E} = 4\pi \rho.$$

Здесь \vec{E} и \vec{H} – напряженность электрического и магнитного полей; \vec{j} , ρ – плотность тока и плотность зарядов; e , m – заряд и масса частицы, соответственно.

Будем изучать эволюцию пространственно периодического возмущения электромагнитного поля с отличными от нуля компонентами E_x , E_y , H_z и волновым вектором $\vec{k} = (k_x, 0, 0)$, направленным вдоль оси x . Тогда выражения для напряженностей электрического и магнитного полей можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, t) &= \left\{ \text{Re} E_x(t) \cdot \exp(ikx), \text{Re} E_y(t) \cdot \exp(ikx), 0 \right\}, \\ \vec{H}(x, t) &= \left\{ 0, 0, \text{Re} H_z(t) \cdot \exp(ikx) \right\}, \quad k \equiv k_x. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Следует отметить, что в выражениях для полей (1.58) не выделена гармоническая зависимость полей от времени. Такой подход позволяет корректно описать динамику полей и движение частиц в стохастическом режиме, когда возбуждаемые поля имеют широкий частотный спектр.

Используя обычную процедуру усреднения по пространственному периоду возмущения поля, а также теорему Лиувилля о сохранении фазового объема частиц, нетрудно получить следующую самосогласованную систему нелинейных уравнений для поля и для частиц пучка:

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{d\tau} &= [\operatorname{Re}(h \cdot \exp i\Psi) + \omega_H] \cdot \frac{p_y}{\gamma} + \operatorname{Re}(\mathcal{E}_x \cdot \exp i\Psi), \\ \frac{dp_y}{d\tau} &= -[\operatorname{Re}(h \cdot \exp i\Psi) + \omega_H] \cdot \frac{p_x}{\gamma} + \operatorname{Re}(\mathcal{E}_y \cdot \exp i\Psi), \\ \frac{d\Psi}{d\tau} &= \frac{p_x}{\gamma} \end{aligned} \quad (1.59)$$

$$\frac{dh}{d\tau} = -i\mathcal{E}_y, \quad \frac{d\mathcal{E}_y}{d\tau} = -ih - \frac{\omega_b^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{p_y}{\gamma} \exp(-i\Psi) \cdot d\Psi_0$$

$$\frac{d\mathcal{E}_x}{d\tau} = -\frac{\omega_b^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{p_x}{\gamma} \exp(-i\Psi) d\Psi_0.$$

В уравнениях (1.59) использованы следующие безразмерные переменные и безразмерные параметры: $\tau = kct$, $\Psi = kx$, $\vec{p} = \frac{\vec{p}}{mc}$, $h = \frac{eH_z}{mc \cdot kc}$,

$$\mathcal{E}_{x,y} = \frac{eE_{x,y}}{mc \cdot kc}, \quad \omega_b^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m \cdot kc}.$$

Интегрирование в правых частях уравнений (1.59) ведется по начальным значениям координат частиц. Система уравнений (1.59), также как и система уравнений (1.32) предыдущего раздела 1.9, имеет интеграл движения:

$$p_y + \omega_H \cdot \Psi + \operatorname{Im}(h \cdot \exp i\Psi) = \text{const.} \quad (1.60)$$

Отметим, что четвертое и пятое уравнения системы (1.59) эквивалентны неоднородному уравнению осциллятора и описывают возбуждение поперечного электромагнитного поля частицами. В свою очередь, последнее уравнение системы (1.59) описывает возбуждение в системе продольного электрического поля, которое фактически является коллективным кулоновским полем заряженных частиц. Если в системе уравнения (1.59) считать напряженности поля постоянными величинами, то мы приходим к задаче движения осцилляторов в заданном электромагнитном поле. Если $\omega_b \rightarrow 0$, то мы приходим к задаче движения одной заряженной частицы во внешнем постоянном магнитном поле и в поле электромагнитной волны заданной амплитуды. Такая задача была решена в предыдущем разделе.

Результаты численного анализа. Полная самосогласованная система уравнений (1.59) может быть изучена только численными методами. Такое рассмотрение было проведено в работе [28-30]. Ниже мы кратко опишем наиболее важные результаты этого анализа. Система урав-

нений (1.59), описывающая возбуждение электромагнитных колебаний коллективом сфазированных осцилляторов, была решена численно при различных значениях плазменной частоты $\omega_b = 0.1; 0.3$, при фиксированных значениях циклотронной частоты $\omega_H = 0.5$ и начальной энергии $\gamma = 2$. Условие резонанса в этом случае выполняется для $s = 4$. Изучались: эволюция полей во времени, спектры возбуждаемых полей, корреляционные функции, а также эволюция функции распределения по энергии. Спектральный и корреляционный анализ продольного и поперечного электрических полей проводился по формулам:

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{T} |a_T(\omega)|^2, \quad a_T(\omega) = \int_0^T u(t) \exp(-i\omega t) dt, \quad (1.61)$$

$$R(\tau) = \int_0^\infty G(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

где $a_T(\omega)$ – преобразование Фурье исследуемого процесса $u(t)$.

Главный результат численного анализа заключается в том, что все наиболее важные характеристики динамики частиц и полей полной самосогласованной системы могут быть предсказаны из анализа динамики движения отдельной заряженной частицы во внешних электромагнитных полях. При малой плотности заряженных частиц ($\omega_b = 0.1$) возбуждается преимущественно поперечная компонента электрического поля. На начальной стадии неустойчивости имеет место экспоненциальный рост амплитуды поперечного электрического поля. Затем ее рост сменяется медленными осцилляциями, которые обусловлены фазовыми колебаниями сгустков частиц в поле волны, которое захватило эти сгустки (см. рис. 1.17).

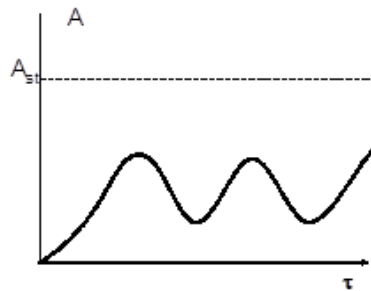


Рис. 1.17. Эволюция огибающей амплитуды высокочастотного поперечного поля. Резонансы не перекрыты

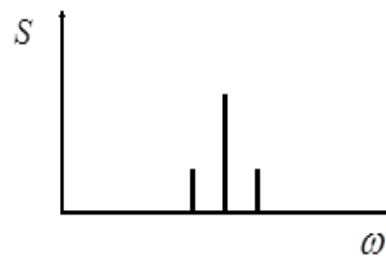


Рис. 1.18. Спектр возбужденного поперечного поля. Случай изолированного резонанса

На этом рисунке пунктирной линией обозначен уровень поля, который необходим для перекрытия нелинейных резонансов. Спектр поперечной компоненты электрического поля имеет узкий пик на основной частоте колебаний ($\omega = 1$) и два сателлита, расположенных по обе стороны пика (рис. 1.18). Возникновение сателлитов обусловлено модуляцией волны на частоте фазовых колебаний сгустков частиц в поле волны. Корреляционная функция поперечного электрического поля представляет собой осциллирующую функцию на основной частоте с медленно спадающей амплитудой.

Зависимость от времени продольного поля имеет более сложный вид, обусловленный наложением гармоник гирочастоты. Однако и здесь наблюдается экспоненциальный рост амплитуды на начальной стадии неустойчивости, который затем сменяется колебаниями ее амплитуды с частотой фазовых колебаний частиц в поле поперечной волны. Спектр продольного электрического поля имеет несколько узких пиков на гармониках циклотронной частоты:

$$\begin{aligned} \omega = 0,25 \text{ при } s = 1; \quad \omega = 0,5 \text{ при } s = 2; \\ \omega = 0,75 \text{ при } s = 3; \quad \omega = 1 \text{ при } s = 4. \end{aligned}$$

Корреляционная функция продольного поля является периодической функцией частоты $\omega = 0.5$ (спектр на этой частоте имеет максимум) с медленно спадающей амплитудой.

Таким образом, пучок осцилляторов с малой плотности возбуждает регулярные колебания, спектр которых носит дискретный характер. Легко убедиться, что максимальное значение амплитуды поперечного поля в этом случае меньше напряженности, необходимой для перекрытия резонансов (смотри формулу 2.26). Поэтому частицы находятся в изолированном резонансе с волной, и движение их носит практически регулярный характер. Анализ эволюции функции распределения частиц по энергиям показывает, что возбуждение колебаний сопровождается уширением функции распределения. Однако это уширение остается в пределах ширины нелинейного резонанса, т.е. частицы движутся в изолированном циклотронном резонансе и не переходят в соседние. Интересно отметить, что коэффициент полезного действия, который определялся соотношением $\eta = (|E|^2 / 4\pi) / n_p m c^2 (\gamma_0 - 1)$, достаточно велик и достигает в этих условиях 37 %. При увеличении плотности заряженных частиц до значений, когда амплитуда возбуждаемого осцилляторами поля удовлетворяет условию перекрытия нелинейных резонансов, динамика неустойчивости качественно меняется. Эта динамика будет описана ниже (раздел 2.3).

В заключение подчеркнем, что выше мы уделили основное внимание описанию физической картины взаимодействия заряженных частиц с электромагнитными волнами в условиях циклотронного синхронизма между ними. Анализу работы конкретных приборов было уделено мало внимания. Это вызвано тем, что описанию этих приборов посвящена

обширная литература. Из МЦР приборов особое внимание привлекают гиротроны и мазеры на циклотронном авторезонансе. По механизму физического взаимодействия заряженных частиц с электромагнитными полями эти приборы существенно отличаются друг от друга. Главное отличие заключается в том, что в гиротронах прямые интегралов перпендикулярны прямым резонансов. Так как движение частиц происходит вдоль интегральных кривых, то в линейном приближении обмен энергией между частицами и волнами отсутствует. Такой обмен возможен только при учете конечной величины амплитуды взаимодействующих с частицами волн. В условиях изолированного резонанса максимальная величина переданной энергии будет порядка ширины нелинейного резонанса. При реализации МЦАР прямые резонансов параллельны прямым интегралов и синхронное (резонансное) взаимодействие частиц с полем может осуществляться неограниченно долго. Ограничения на величину переданной энергии (от частиц поля или наоборот) определяются либо истощением энергии источника, либо геометрическими размерами электродинамических структур, в которых происходит взаимодействие частиц с полем. Следует, конечно, заметить, что эффективность работы гиротронов, несмотря на указанное выше обстоятельство об ограниченной величине возможной переданной энергии, достаточно высока. Это вызвано тем фактом, что величина возможной передачи энергии от частиц к полю $\Delta\gamma \sim \sqrt{\mathcal{E}}$ сама по себе достаточно велика. Кроме того, изменение продольных параметров электродинамических структур позволяет увеличить $\Delta\gamma$.

2. ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ЧАСТИЦ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ ТИПА ВОЛНА-ЧАСТИЦА

Выше была рассмотрена регулярная динамика в поле одной электромагнитной волны или в поле одного нелинейного резонанса. Эти модели взаимодействия заряженных частиц с электромагнитными полями являются идеализированными моделями. Эта идеализация хорошо себя оправдывает, когда напряженности полей достаточно малы. И чем меньше напряженности полей, тем более оправдана такая идеализация. Однако мы видели, что эффективность обмена энергией между частицами и волнами растет с увеличением напряженностей полей. Поэтому представляет интерес рассмотреть динамику частиц в поле не одной электромагнитной волны, а в поле нескольких электромагнитных волн. Кроме того, при увеличении амплитуды электромагнитной волны на частицу, которая движется во внешнем постоянном магнитном поле и в поле этой волны, начинает действовать не только один изолированный нелинейный циклотронный резонанс, но и другие резонансы. Во всех этих случаях представляет интерес

выяснить, какие качественные изменения происходят в динамике частиц? Наиболее существенным изменением в этой динамике оказывается качественное изменение этой динамики – регулярная динамика сменяется хаотической динамикой. Вторая глава настоящего обзора посвящена описанию условий перехода от регулярной динамики к хаотической динамике, а также тем особенностям хаотической динамики, которые при этом возникают. Ниже мы увидим, что смена регулярной динамики к хаотической динамике может быть вредной. С нею надо бороться. Однако для некоторых приложений такой переход (от регулярной динамики к хаотической) может быть полезным. Оказывается, что режимы с динамическим хаосом реализуют, по-видимому, наиболее эффективные схемы бесстолкновительного нагрева частиц. Возможно, наиболее интересным результатом второй главы является изложение анализа парадигм динамического хаоса (раздел 2.5). Показано, что учет особых решений, а также некоторые замены переменных приводят к возникновению режимов с динамическим хаосом в системах с одной степенью свободы и даже в полностью интегрируемых системах, а также в линейных системах.

2.1. Динамика частиц в поле нескольких поперечных электромагнитных волн

Постановка задачи. Основные уравнения. Интегралы. Рассмотрим динамику движения заряженных частиц в поле нескольких электромагнитных волн. Выражения для электрических и магнитных полей этих волн можно представить в таком виде:

$$\vec{E} = \sum_n \vec{E}_n, \quad \vec{H} = \sum_n \vec{H}_n, \quad \vec{E}_n = \text{Re}(\mathcal{E}_n e^{i\psi_n}), \quad \vec{H}_n = \frac{c}{\omega_n} [\vec{k}_n \vec{E}_n], \quad (2.1)$$

где $\psi_n = \vec{k}_n \vec{r} - \omega_n t$.

Эти поля удовлетворяют уравнениям Максвелла.

Уравнения движения заряженной частицы в полях (2.1) имеют традиционный вид:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v}\vec{H}]. \quad (2.2)$$

Эти уравнения удобно записать в безразмерных переменных как для зависимых, так и для независимых переменных:

$$\omega_n = \frac{\omega_n}{\omega_0}, \quad \dot{\vec{P}} \equiv \frac{d\vec{P}}{d\tau}, \quad \tau \equiv \omega_0 t, \quad \vec{P} \equiv \frac{\vec{P}}{mc}, \quad \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{v}}{c}, \quad \vec{E}_n \equiv \frac{e\vec{E}_n}{mc\omega_n},$$

$$\vec{k}_n \equiv \frac{\vec{k}_n c}{\omega_0}, \quad \vec{r} \equiv \frac{\omega_0}{c} \vec{r}.$$

Уравнение (2.2) удобно дополнить уравнением для энергии:

$$\dot{\gamma} = \frac{\vec{P}}{\gamma} \frac{e\vec{E}}{mc\omega_0}. \quad (2.3)$$

Подставляя поля (2.1) в уравнения (2.2) и (2.3) и пользуясь этими безразмерными переменными, можно получить следующие, удобные для дальнейшего анализа уравнения:

$$\dot{\vec{P}} = \sum_n E_n (\omega_n - \vec{k}_n \dot{\vec{r}}) + \sum_n \vec{k}_n (\dot{\vec{r}} \vec{E}_n), \quad \dot{\gamma} = \frac{\vec{P}}{\gamma} \sum_n \omega_n \vec{E}_n, \quad (2.4)$$

где $\vec{E}_n = \text{Re}(\vec{\mathcal{E}}_n e^{i\psi_n})$, $\psi_n \equiv \vec{k}_n \vec{r} - \omega_n \tau$,

Введем некую вспомогательную характеристику частицы, которую мы будем в дальнейшем называть парциальной энергией частицы, которая удовлетворяет следующему уравнению:

$$\dot{\gamma}_n = \omega_n (\dot{\vec{r}} \vec{E}_n). \quad (2.5)$$

Из определения этой парциальной энергии следует, что она определяет то значение энергии, которую имела бы частица, если бы двигалась только в поле одной n -ой электромагнитной волны. Используя определение этой парциальной энергии, мы из уравнений (2.4), (2.5) получим следующий интеграл движения:

$$\vec{P} - \sum_n \text{Re}(i\vec{\mathcal{E}}_n e^{i\psi_n}) - \sum_n \frac{\vec{k}_n}{\omega_n} \gamma_n = \vec{C}. \quad (2.6)$$

Возможная диаграмма взаимодействующих с частицами волн представлена на рис. 2.1. В общем случае, уравнения (2.4) и (2.5) совместно с интегралом (2.6) могут быть изучены только численными методами. Для получения аналитических результатов мы будем считать, что параметр силы каждой из действующих на частицу волн мал. В этом случае все характеристики частицы (ее энергию, импульс, координату, скорость) можно представить в виде суммы медленно меняющейся и быстро меняющихся величин:

$$\vec{P} = \vec{\bar{P}} + \vec{\tilde{P}} \quad \gamma_n = \bar{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_n.$$

В этом случае можно получить следующие выражения и уравнения, которые связывают быстрые и медленные переменные:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \sum_n \frac{\vec{k}_n}{\omega_n} \bar{\gamma}_n + C, \\ \dot{\bar{P}} &= \sum_n \operatorname{Re}(i\vec{\mathcal{E}}_n e^{i\psi_n}) + \sum_n \vec{k}_n \tilde{\gamma}_n / \omega_n, \\ \dot{\tilde{\gamma}}_n &= \omega_n \bar{v} \vec{E}_n = \omega_n \bar{v} \operatorname{Re}(\vec{\mathcal{E}}_n e^{i\psi_n}), \\ \dot{\tilde{\gamma}}_n &= \omega_n \bar{v} \vec{E}_n \quad \tilde{\gamma}_n = \operatorname{Re}(\Gamma_n e^{i\psi_n}), \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $\Gamma_n = -i\omega_n \bar{v} \vec{\mathcal{E}}_n / \dot{\psi}_n$.

Уравнения для быстрых переменных могут быть проинтегрированы:

$$\tilde{\gamma}_n = \operatorname{Re} \left[i\omega_n (\bar{v} \vec{\mathcal{E}}_n) e^{i\psi_n} / \omega_n - \vec{k}_n \bar{v} \right], \quad \bar{P} = \sum_n \operatorname{Re} \left\{ i e^{i\psi_n} \left[\vec{\mathcal{E}}_n + \vec{k}_n (\bar{v} \vec{\mathcal{E}}_n) / \omega_n \right] \right\}.$$

Уравнения для медленных переменных приобретут следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{P}} &= \sum_{m,n} \vec{k}_n \frac{1}{\gamma} \left[\operatorname{Re}(i\vec{\mathcal{E}}_m e^{i\psi_m}) \right] \left[\operatorname{Re}(\vec{\mathcal{E}}_n e^{i\psi_n}) \right] \\ \dot{\tilde{\gamma}} &= \frac{1}{\gamma} \sum_{m,n} \operatorname{Re}(i\vec{\mathcal{E}}_m e^{i\psi_m}) \omega_n \operatorname{Re}(\vec{\mathcal{E}}_n e^{i\psi_n}) = \\ &= \sum_{m,n} \frac{1}{2\gamma} \omega_n \vec{\mathcal{E}}_n \vec{\mathcal{E}}_m [\cos(\psi_m + \psi_n + \pi/2) + \cos(\psi_m - \psi_n + \pi/2)]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ниже мы используем полученные уравнения и интегралы для анализа динамики некоторых физических систем, которые представляют значительный интерес.

Схема обращенного лазера на свободных электронах. Одной из перспективных схем ускорения, позволяющей ускорять заряженные частицы в вакууме, является схема обращенного лазера на свободных электронах (ОЛСЭ). В этой схеме заряженные частицы движутся в поле двух электромагнитных волн с заданными параметрами. При этом предполагается, что нелинейное взаимодействие заряженной частицы с полем этих двух поперечных электромагнитных волн эквивалентно взаимодействию заряженной частицы с медленной электромагнитной волной, которая имеет фазовую скорость, близкую к средней скорости частиц. Кроме того, эта эквивалентная волна имеет продольную компоненту электрического поля. Практически речь идет о черенковском взаимодействии ускоряемых заряженных частиц с комбинационной волной. Такая схема ускорения заряженных частиц широко обсуждается в научной литературе. Она обладает многими важными особенностями, из которых мы отметим только тот

факт, что ускорение происходит в вакууме и поперечными электромагнитными волнами. Для определения условий эффективного обмена энергии в схеме ОЛСЭ необходимо изучить особенности динамики заряженных частиц в этой схеме. При этом особое внимание следует обращать на зависимость этой динамики от напряженности полей этих волн. Дело в том, что в схеме ОЛСЭ, также как и в других схемах ускорения, эффективность (темп) ускорения оказывается тем выше, чем больше напряженность поля ускоряющих волн. Ниже мы увидим, что с увеличением напряженностей полей растет количество частиц, динамика которых становится хаотической. В результате качество ускоряемого сгустка значительно ухудшается.

Пусть среди тех волн, которые действуют на частицу, имеются только две волны (под номером 1 и 2). Биения этих волн формируют комбинационную волну, фазовая скорость которой близка к средней скорости частицы. В этом случае динамику частиц можно описать динамикой нелинейного маятника (математического маятника). Покажем это. Обозначим разность фаз этих волн через θ : $\theta \equiv \psi_1 - \psi_2$. Для этой разности фаз получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\theta}{dt} = \bar{\chi}\bar{v} - \Omega = \Delta(\gamma), \quad (2.9)$$

где $\bar{\chi} \equiv \bar{k}_1 - \bar{k}_2$, $\Omega \equiv \omega_1 - \omega_2$.

При этом мы считаем, что $\Omega/\chi \cong v$.

Второе уравнение системы (2.4) с учетом динамики медленных и быстрых переменных можно переписать в виде:

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{1}{\gamma} \mathcal{E}\Omega \cos \theta + F(\tau), \quad (2.10)$$

где $\mathcal{E} = \vec{\mathcal{E}}_1 \vec{\mathcal{E}}_2$, $F(\tau)$ – периодическая функция.

В условиях, близких к черенковскому резонансу частиц с комбинационной волной, фаза меняется медленно. В этом случае первое слагаемое правой части уравнения (2.10) описывает медленную нелинейную динамику частицы при черенковском резонансе. Второе слагаемое является быстроменяющейся функцией. Если строго следовать разделению динамики на быструю динамику и на медленную динамику, то это слагаемое исчезает. Оно описывает связь медленной динамики с быстрой динамикой частиц. Если амплитуды волн, которые взаимодействуют с частицами, достаточно малы, то этим слагаемым можно пренебречь. Однако, как показывают аналитический и численный анализы уравнений (2.9), (2.10), а также численный анализ исходных неукороченных уравнений, это слагаемое (т.е. связь быстрого и медленного движения частиц) может качественно изменить динамику частиц. Из регулярной она становится хаотической.

Будем считать, что начальная энергия частицы в точности соответствует черенковскому резонансу частицы с комбинационной волной. Это означает, что $\Delta(\gamma_0) = 0$. Кроме того, учтем, что в результате взаимодействия волн с частицами энергия частицы изменилась не намного. В этом случае расстройку можно разложить в ряд Тейлора:

$$\Delta = \Delta(\gamma_0) + \delta\gamma \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \gamma} \right)_{\gamma_0}.$$

Тогда уравнения (2.9) и (2.10) будут полностью замкнуты, и примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} &= \delta\gamma \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \gamma} \right)_{\gamma_0}, \\ \frac{d\delta\gamma}{d\tau} &= \frac{\mathcal{E}\Omega}{\gamma_0} \cos \theta + F(\tau). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Система уравнений (2.11) эквивалентна уравнению математического маятника, находящегося под воздействием внешней периодической силы $F(\tau)$:

$$\ddot{\theta} = \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \gamma} \right)_{\gamma_0} \frac{\mathcal{E}\Omega}{\gamma_0} \cos \theta + F(\tau). \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) правильно описывает динамику частиц при малых амплитудах действующих на них волн. И чем меньше амплитуды этих волн, тем точнее описываемая динамика. Динамика такого нелинейного маятника была изучена в работах [31-35]. Эта динамика изучалась аналитически и численно. Кроме того, численно исследовалась динамика исходной системы уравнений (2.4). Исследовалась динамика частиц в наиболее интересной конфигурации полей, которая представляет собой поле двух распространяющихся навстречу электромагнитных волн. Такая конфигурация как раз соответствует схеме ускорения ОЛСЭ. Основные результаты этих численных исследований заключаются в следующем:

- если амплитуды волн малы ($\vec{\mathcal{E}}_1$ и $\vec{\mathcal{E}}_2$ меньше 0.1), качественно динамика частиц соответствует динамике математического маятника;
- когда амплитуды волн становятся большими 0.1, динамика некоторых частиц, а именно тех частиц, которые попадают в окрестность сепаратрисы математического маятника, становится хаотической. Причем чем больше амплитуда волн, тем большее количество частиц ускоряемого сгустка включается в хаотическую динамику;
- только те частицы, которые оказываются в нулевых фазах комбинационной волны, не участвуют в хаотической динамике, они нахо-

дятся в островке устойчивости. Однако с увеличением амплитуды таких частиц становится меньше.

Для иллюстрации сформулированного выше результата о возникновении хаотической динамики частиц в поле двух поперечных электромагнитных волн на рисунке 2.3 представлена характерная зависимость энергии частицы от времени. Из этого рисунка видна нерегулярная динамика движения частицы. Эта же нерегулярность движения подтверждается статистическим анализом: спектры движения широкие, корреляционная функция быстро спадает, показатели Ляпунова положительны. Полученные численные результаты находятся в хорошем качественном согласии с анализом динамики частиц на основе уравнения (2.12).

Таким образом, мы видим, что увеличение напряженности электромагнитных волн приводит к возникновению хаотической динамики ускоряемых частиц. Чем больше напряженности полей, тем большее количество частиц оказывается вовлеченным в эту динамику. Кроме того, с увеличением напряженностей полей в реальных схемах ОЛСЭ возбуждается несколько электромагнитных волн, которые могут создавать несколько комбинационных волн, фазовые скорости которых меньше скорости света. Качественная дисперсионная диаграмма возникновения таких комбинационных волн представлена на рис. 2.1. Если расстояние между этими комбинационными волнами оказывается значительно большим, чем ширина их нелинейных резонансов, то динамика частиц может быть описана одним нелинейным черенковским резонансом. Уравнение, которое описывает динамику частиц в этом случае, аналогично уравнению (2.12), в котором можно убрать второе слагаемое в правой части. Отметим, что при этом мы не учитываем связи медленных и быстрых движений. Однако в рассматриваемом случае кроме одного изолированного резонанса появляется несколько нелинейных черенковских резонансов. Если сепаратрисы этих резонансов соприкоснутся, то динамика частиц, как известно, становится хаотической. Кратко опишем эту ситуацию. Нам достаточно рассмотреть динамику частиц в поле трех волн. Две из этих волн распространяются в одном направлении, третья распространяется им навстречу. Условие перекрытия нелинейных резонансов можно записать в виде:

$$(v_{ph_{i+1}} - v_{ph_i}) \leq \frac{\mathcal{E}_0}{\gamma_0^2 \sqrt{k_0 v_0}} \left[\sqrt{\mathcal{E}_i \Delta \omega_{0_i}} + \sqrt{\mathcal{E}_{i+1} \Delta \omega_{0_{i+1}}} \right], \quad (2.13)$$

где $v_{ph_i} = \Delta \omega_{0_i} / (k_0 + k_i)$, $i = \{1, 2, \dots, n\}$, $\Delta \omega_{0_i} \equiv 1 - \omega_i$.

Левая часть неравенства (2.13) описывает расстояние между нелинейными резонансами. Правая – представляет собой сумму полуширин двух рядом расположенных нелинейных резонансов. Если неравенство (2.13) выполняется, то динамика частиц становится хаотической. Этот факт подтверждается как аналитическими, так и численными исследованиями. Кратко опишем результаты численного исследования исход-

ной системы уравнений (2.4) для случая взаимодействия частиц с тремя волнами. Была исследована динамика частиц в поле малых и одинаковых напряженностей полей $\mathcal{E}_i = 0.03$ и при больших – $\mathcal{E}_i = 0.3$.

На рис. 2.2 представлена зависимость изменения энергии от времени для частиц с начальной скоростью, равной нулю. Волновые вектора волн были равными: $k_1 = -0.8$, $k_2 = -1$, $k_3 = 1.2$. На рис. 2.3 представлена временная динамика энергии частиц при большой напряженности поля $\mathcal{E}_i = 0.3$.

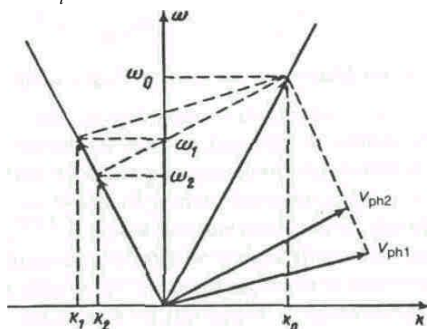


Рис. 2.1. Дисперсионная диаграмма взаимодействующих волн

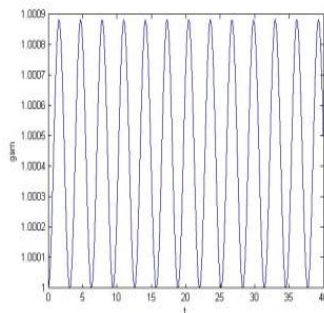


Рис. 2.2. Энергия одной частицы при $\mathcal{E}_i = 0.03$

$$k_1 = -0.8, k_2 = -1, k_3 = 1.2$$

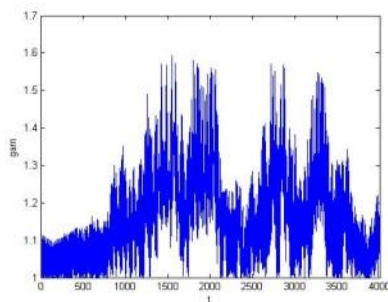


Рис. 2.3. Энергия одной частицы при $\mathcal{E}_i = 0.3$

$$k_1 = -0.8, k_2 = -1, k_3 = 1.2$$

Из рис. 2.2 и 2.3 видно, что при малых напряженностях электромагнитного поля волн частица совершает регулярные колебания, находясь в одном нелинейном резонансе комбинационной волны. С увеличением напряженности поля под действием полей происходит переход частицы из резонанса в резонанс, динамика движения частиц носит нерегулярный характер со значительными изменениями энергии частицы.

Стохастический нагрев плазмы лазерным излучением [36, 37].

Полученные выше результаты указывают, что появление режимов с динамическим хаосом существенно ухудшает качество ускоряемых сгустков в схемах ОЛСЭ. Однако развитие режимов с динамическим хаосом

может быть полезным. В этом разделе будет показано, что, используя режимы с динамическим хаосом, можно предложить достаточно простые и эффективные схемы нагрева твердотельной плазмы вплоть до температур, необходимых для реализации ядерного синтеза. Причем процесс нагрева протекает исключительно быстро, так что все известные плазменные неустойчивости не успевают развиваться. Для доказательства возможности такого нагрева мы воспользуемся всеми полученными выше результатами. Будем предполагать, что частота лазерного излучения, которое действует на твердотельную мишень, значительно больше, чем плазменная частота. Тогда полученные выше результаты в первом приближении могут быть использованы. Это означает, что мы можем считать, что в поле лазерного излучения выполняется условие (2.13) перекрытия нелинейных черенковских резонансов. При выполнении этих условий можно считать, что динамика частиц хаотична. Тогда, проводя усреднение по случайным фазам и по случайным положениям частиц, можно найти следующее выражение для среднего квадрата изменения энергии частиц:

$$\langle (\Delta\gamma)^2 \rangle \approx J^4 (\Delta\omega)^2 \cdot \tau / (4\gamma_0^2). \quad (2.14)$$

Здесь угловыми скобками обозначено усреднение по фазам и по положению частиц:

$$\langle L \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d(\vec{k}\vec{r}) \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T L \cdot dt.$$

При выводе (2.14) мы предполагали, что $\Delta\omega_{01} \approx \Delta\omega_{02} \equiv \Delta\omega_0$, $J_0 \approx J_1 \approx J_2 \equiv J$ и что время усреднения является значительно большим времени расщепления корреляций движения частиц ($\tau \gg \tau_k$). Время расщепления корреляции можно оценить $\tau_k \sim 1/\omega \cdot \ln K$. Здесь K – отношение ширины нелинейных резонансов к расстоянию между ними. При $K > 1$ время расщепления корреляции соизмеримо с периодом ВЧ-поля.

Аналогичный анализ динамики частиц можно провести для случая большого числа взаимодействующих с частицами волн. Аналитический анализ практически не отличается от проведенного выше. Были проведены и численные расчеты. Отметим наиболее важные результаты этих исследований. Скорость роста средней энергии ансамбля частиц и ее максимальная энергия зависят как от величины напряженности электромагнитных волн, от числа комбинационных волн, участвующих во взаимодействии, а также от расстояния между их нелинейными резонансами. Так, максимальная энергия, которую могут набрать частицы в случае перекрытия всех черенковских резонансов из N комбинационных волн, определяется суммой расстояний между этими резонансами:

$$\sum_{n=0}^{N-1} v_{ph_{n+1}} - v_{ph_n} = v_{ph_N} - v_{ph_0}.$$

Представляет интерес сравнить эффективность нагрева плазмы полями регулярных электромагнитных волн (в режиме с динамическим хаосом) с нагревом плазмы случайными полями. В случайных полях мы можем записать следующее уравнение для энергии частиц:

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = (\vec{v}\vec{J}_n).$$

Здесь \vec{J}_n – напряженность поля случайной волны.

При тех же самых предположениях, при которых получена (2.14), найдем:

$$\langle (\Delta\gamma)^2 \rangle = v^2 J_n^2 \tau. \quad (2.15)$$

Предположим, что энергия в поле шумовой волны равна энергии поля когерентного излучения. В этом случае $J_n^2 \cdot \Delta\omega_n = J^2 \cdot \Delta\omega$. Здесь $\Delta\omega_n > \omega$, – ширина спектра шумового поля, $\Delta\omega = \omega/Q$ – ширина спектра когерентного излучения, Q – добротность оптического резонатора ($Q \sim 10^6 - 10^7$).

Определим сравнительную эффективность этих двух механизмов нагрева плазмы как отношение средних квадратов приращения энергии в этих механизмах:

$$K \equiv \frac{\langle (\Delta\gamma)^2 \rangle}{\langle (\Delta\gamma)^2 \rangle_n} > \frac{J^2 (\Delta\omega_0)^2 Q}{4\gamma_0^2 v_0^2}. \quad (2.16)$$

В подавляющем большинстве случаев $K \gg 1$. Следует сказать, что и многие другие механизмы нагрева также менее эффективны, чем нагрев в режиме динамического хаоса. В частности, можно указать на широко известный турбулентный нагрев. В схемах турбулентного нагрева падающее на плазму излучение в результате нелинейных процессов возбуждает случайные флуктуации полей в плазме. Именно эти случайные флуктуации и производят нагрев частиц плазмы. Как мы видели выше, этот механизм менее эффективен, чем нагрев в динамическом режиме. Кроме того, трансформация регулярных падающих на плазму полей в случайные поля требует значительного времени. Наиболее близкий к рассмотренному сценарий нагрева плазмы связан со столкновениями частиц плотной (твердотельной) плазмы. Частота столкновений, как известно, пропорциональна плотности плазмы $n = 10^{22} \text{ см}^{-3}$ и при температуре $T=7 \text{ keV}$ составляет $\nu = 10^{12} \text{ с}^{-1}$. Если частота лазерного излучения $\omega = 5 \times 10^{15} \text{ с}^{-1}$ и амплитуда лазерной волны $J = 0.1$, тогда нагрев плазмы до температуры 7 keV происходит за время $\Delta t_H = 2 \times 10^{-14} \text{ с}$, т.е. за время, значительно меньшее времени столкновения между частицами. Таким образом, имеется область параметров ла-

зерного излучения и плазмы, при которых динамический нагрев значительно эффективнее других механизмов нагрева.

Оценим возможность использования динамического нагрева твердотельной плазмы до термоядерных температур. В этом случае нам нужно нагреть ионы плазмы. В этом случае прямой динамический нагрев ионов малоэффективен. Действительно, как следует из формулы (4), это время пропорционально четвертой степени массы ($\tau_H \sim (m_i)^4$).

При этом схема нагрева ионов может выглядеть следующим образом: лазерное поле ($J = 0.1$, $\omega = 5 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$) греет плазменные электроны $n = 10^{22} \text{ см}^{-3}$ до температуры 7 keV. Этот нагрев происходит за время $t < 10^{-13} \text{ s}$. За время $t \sim 10^{-9} \text{ s}$ нагретые электроны передадут свою энергию ионам. Это время достаточно короткое. За это время твердотельная мишень радиуса $r = 0.1$ не слишком увеличит свои размеры. Отметим, что быстрый нагрев электронов и быстрая передача энергии от электронов к ионам позволяет избежать развития плазменных неустойчивостей.

2.2. Возникновение хаотической динамики частиц, движущихся в постоянном магнитном поле и в поле одной электромагнитной волны [28–30, 37]

Выше, в первой главе (раздел 1.5), были сформулированы основные уравнения, определяющие динамику частиц во внешнем однородном постоянном магнитном поле и в поле одной плоской поперечной электромагнитной волны. Динамика частиц в таких полях во многом определяется существованием условий циклотронных резонансов. Если амплитуда электромагнитной волны достаточно мала, то динамика частиц практически полностью определяется динамикой одного нелинейного циклотронного резонанса. Характерные особенности этой динамики описаны в разделе 1.9 первой главы. Однако, когда амплитуда волны увеличивается, нелинейные циклотронные резонансы начинают перекрываться. В этом случае динамика частиц становится хаотической. Ниже мы найдем условия перекрытия этих нелинейных резонансов, и опишем наиболее важные особенности динамики частиц в этих условиях. **Условия возникновения динамического хаоса.** Определим условия, при которых нелинейные циклотронные резонансы перекрываются, т.е. найдем условия, когда динамика частиц становится хаотической. Для этого будем считать, что энергия частицы в результате взаимодействия с электромагнитной волной меняется мало ($\gamma = \gamma_0 + \tilde{\gamma}$), $\tilde{\gamma} \ll \gamma_0$, а резонансное условие (1.38) точно выполнено для частицы с энергией

γ_o . Тогда, проводя разложение $\Delta_s(\gamma)$ вблизи γ_o из последних двух уравнений системы (1.39), получим замкнутую систему из двух уравнений для определения $\tilde{\gamma}$ и θ_s :

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{d\tau} = \frac{\varepsilon_0}{\gamma_0} W_s \cos \theta_s, \quad \frac{d\theta_s}{d\tau} = \frac{k_z^2 - 1}{\gamma_0} \tilde{\gamma}. \quad (2.17)$$

Уравнения (2.17) представляют собой уравнения математического маятника. Из них находим ширину нелинейного резонанса

$$\Delta \dot{\theta}_s = 4 \sqrt{(k_z^2 - 1) \varepsilon_0 \cdot W_s / \gamma_0^2}. \quad (2.18)$$

Ширину нелинейного резонанса удобно выразить в энергетических единицах

$$\Delta \tilde{\gamma}_s = 4 \sqrt{\varepsilon_0 W_s / (k_z^2 - 1)}. \quad (2.19)$$

Для отыскания расстояния между резонансами запишем резонансные условия (1.38) и усредненный закон сохранения (1.34) для двух рядом расположенных резонансов

$$k_z p_{s+1} + (s+1) \omega_H - \gamma_{s+1} = 0, \quad \gamma_{s+1} - p_{s+1} / k_z = C. \quad (2.20)$$

$$k_z p_s + s \omega_H - \gamma_s = 0, \quad \gamma_s - p_s / k_z = C. \quad (2.21)$$

Отметим, что константа C в интеграле (2.20) и в интеграле (2.21) одна и та же. Из этих условий находим следующее значение величины расстояния между резонансами:

$$\delta \gamma = \omega_H / (1 - k_z^2). \quad (2.22)$$

Из выражений (2.19) и (2.22) следует, что при выполнении неравенства

$$\varepsilon_0 > \omega_H^2 / 4 \left[\sqrt{W_s} + \sqrt{W_{s+1}} \right]^2 (1 - k_z^2). \quad (2.23)$$

сумма полуширин нелинейных резонансов $(\Delta \tilde{\gamma}_s + \Delta \gamma_{s+1}) / 2$ больше расстояния между резонансами $\delta \tilde{\gamma}$, и происходит их перекрытие. Отметим, что ширина нелинейного резонанса, а также расстояние между резонансами должны рассчитываться вдоль интегралов движения.

Для практических целей может оказаться удобным переписать формулы (2.19), (2.22) и (2.23) в размерных единицах:

$$\Delta \tilde{\gamma}_s = 4 \sqrt{e E_0 W_s / mc (\omega^2 - k_z^2 c^2)}. \quad (2.24)$$

$$\delta\gamma = \omega \cdot \omega_H / (\omega^2 - k_z^2 c^2). \quad (2.25)$$

$$E_0 > mc\omega\omega_H^2 / 4e(\omega^2 - k_z^2 c^2) [\sqrt{W_s} + \sqrt{W_{s+1}}]^2, \quad (2.26)$$

где $W_s \equiv (\alpha_x \cdot sp_{\perp} / mc\mu + \alpha_z p_z / mc) J_s - \alpha_y p_{\perp} / mc \cdot J'_s$, $\mu \equiv k_x p_{\perp} / m\omega_H$.

Выражение (2.19) для ширины нелинейного резонанса и условие (2.23), при выполнении которого возникает стохастическая неустойчивость движения частиц, являются достаточно общими и описывают наиболее важные случаи резонансного взаимодействия частиц с электромагнитными волнами. Действительно, выражение (2.19) дает ширину нелинейного резонанса для черенковского взаимодействия частицы с полем ($s=0$), для циклотронных резонансов ($k_z=0$), для нелинейных резонансов на нормальном ($s>0$) и аномальном ($s<0$) эффектах Доплера. Соответственно, выражение (2.23) дает условие возникновения стохастической неустойчивости, обусловленной перекрытием соответствующих нелинейных резонансов.

Формулировка наиболее важных частных случаев. Обсудим некоторые конкретные случаи условия перекрытия нелинейных резонансов (2.23).

1. Рассмотрим взаимодействие частицы с продольной волной в постоянном магнитном поле. Критерий возникновения хаотического движения заряженной частицы в этих условиях для нерелятивистской частицы получен в работах [38-40]. В работе [30] эти результаты обобщены на релятивистское движение частицы. Формула (2.23) в качестве частного случая содержит эти результаты. Действительно, для продольной волны из (39) ($\alpha_x = \frac{k_x}{k}$, $\alpha_y = 0$, $\alpha_z = k_z/k$) с учетом резонансных условий ($s\omega_H + k_z p_z = \gamma$) имеем $W_s = \gamma \cdot J_s(\mu) / k$. Считая $\mu \gg 1$ из (2.23), находим следующее условие возникновения стохастической неустойчивости, обусловленное перекрытием черенковского ($s=0$) и соседних резонансов на нормальном и аномальном эффектах Доплера:

$$\varepsilon > \frac{\omega_H^2 \sqrt{\mu}}{\gamma(1-k_z^2)} \frac{1}{16} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (2.27)$$

Это выражение с точностью до числового множителя $\frac{1}{16} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ совпадает с критерием, полученным в работе [40]. Различие в числовом коэффициенте обусловлено тем, что в работе [40] дана только оценка ширины нелинейного резонанса.

2. Пусть поперечная электромагнитная волна распространяется перпендикулярно внешнему магнитному полю. При этом перекрытие резонансов обусловлено только релятивистскими эффектами. Для Е-волны (поляризация $\vec{\alpha} = (0,1,0)$) критерий перекрытия резонансов имеет вид:

$$\varepsilon > \omega_H^2 / 16p_{\perp 0} J'_s(\mu) \quad (2.28)$$

и не зависит от продольной скорости. Для Н-волны $\vec{\alpha} = (0,0,1)$ формула (2.23) переходит в

$$\varepsilon > \omega_H^2 / 16p_{z0} J_s(\mu). \quad (2.29)$$

В отличие от случая Е-волны амплитуда Н-волны, необходимая для развития стохастической неустойчивости, существенно зависит от величины продольного импульса.

3. Рассмотрим условие (2.23) для случая движения частицы в поле плоскополяризованной электромагнитной волны, распространяющейся под углом φ к внешнему магнитному полю в среде с показателем преломления $n > 1$.

Для перекрытия черенковского ($s = 0$) и соседних циклотронных резонансов в поле Е-волны $\vec{\alpha} = (\cos \varphi, 0, \sin \varphi)$ условие (2.23) преобразуется к виду:

$$\varepsilon > \omega_H v_{z0} / 16J_o(\mu) \gamma_o (1 - v_{z0}^2) \sin \varphi. \quad (2.30)$$

В поле Н-волны это выражение приобретает вид:

$$\varepsilon > \omega_H v_{z0}^2 / 16J_1(\mu) p_{\perp 0} (1 - v_{z0}^2). \quad (2.31)$$

Из выражений (2.30) и (2.31) следует, что с увеличением продольной скорости частицы значение амплитуды волны, необходимое для перекрытия резонансов, возрастает.

4. Следует особо отметить случай продольного распространения электромагнитной волны в вакууме. При этом $k_z = 1$, и в рамках рассматриваемых приближений, стохастическая неустойчивость не развивается ($\varepsilon \rightarrow \infty$). В рассматриваемом случае условие резонанса совпадает с интегралом движения (см. формулы (2.20) и (2.21)), и изменение энергии частицы в результате взаимодействия ее с волной не выводит ее из резонанса, т.е. выполняются условия авторезонанса, который впервые был изучен в работах [22, 23]. Таким образом, можно утверждать, что в условиях авторезонанса стохастическая неустойчивость движения частиц не развивается.

5. Для целей стохастического ускорения представляет интерес рассмотреть случай больших энергий частицы ($\gamma \gg 1$), которая взаимодей-

ствуется с плоской электромагнитной Е-волной ($\vec{\alpha} = (0, 1, 0)$), распространяющейся перпендикулярно внешнему магнитному полю ($k_z = 0$). Для простоты будем считать, что у частицы нет продольной скорости ($p_z = 0$), а взаимодействие с волной происходит на высоких циклотронных резонансах ($s \gg 1$). Последнее условие соответствует случаю стохастического ускорения частицы в поле волны, частота которой значительно превосходит циклотронную частоту ($\omega \gg \omega_H$). Условие резонанса в рассматриваемом случае имеет вид $\omega_H = \frac{s}{\gamma}$. Так как $p_{\perp s} \sim \gamma$, то $\mu \cong s \gg 1$, и можно воспользоваться асимптотикой функций Бесселя $J_s(\mu) \sim 0,44 / (s)^{1/3}$. Подставляя эти оценки в формулу (2.23), получим:

$$\varepsilon > 0,28 \cdot \omega_H \cdot s^{1/3}. \quad (2.32)$$

Из формулы (2.32) следует, что с увеличением номера резонанса амплитуда волны, необходимая для перекрытия резонанса, растет.

2.3. Самосогласованная нелинейная теория МЦР (сильные поля) [28–30]

Теория мазеров на циклотронных резонансах для случая, когда электромагнитные поля возбуждаются системой холодных сфазированных осцилляторов, была построена в разделе 1.5. Функция распределения таких осцилляторов и система уравнений, которая описывает динамику частиц, приведены в первой главе (смотри раздел 1.5, формулы (1.56)–(1.59)). Там же описана динамика частиц и полей при достаточно малых плотностях заряженных частиц. Достаточно малые в данном случае означает, что возбуждаемые этими частицами поля таковы, что справедливо приближение изолированного нелинейного резонанса ($\omega_b = 0.1$). Временная динамика поля и спектр возбуждаемых колебаний при этом представлены на рис. 1.17 и рис. 1.18.

При увеличении плотности заряженных частиц до значений, когда амплитуда возбуждаемого осцилляторами поля удовлетворяет условию перекрытия нелинейных резонансов, динамика неустойчивости качественно меняется. Вначале, как и для случая изолированного резонанса, происходит экспоненциальный рост амплитуды поперечного поля, который ограничивается захватом частиц пучка полем возбуждаемой волны (см. рис. 2.5, $\tau \leq 50$). Уровень этого поля примерно в 2 раза выше уровня, необходимого для перекрытия резонансов, поэтому движение осцилляторов становится хаотическим. Такое движение частиц приводит

к хаотической модуляции амплитуды поперечного поля ($50 \leq \tau \leq 200$) и к возникновению хаотического продольного поля. Хаотическая динамика частиц и поля приводит к ухудшению обмена энергией между частицами и полем. В результате амплитуда возбуждаемого поля падает до величины, которая соответствует критерию перекрытия нелинейных резонансов. Эта особенность динамики видна при сравнении рис. 1.16 с рис. 2.4. Различие в поведении продольного и поперечного полей (различная степень хаотизации) можно объяснить следующим образом. Зависимость продольного кулоновского поля от времени, в соответствии с последним уравнением системы (59), полностью определяется движением частиц.

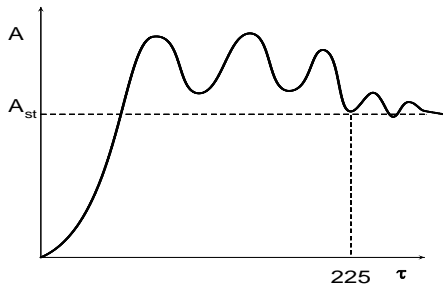


Рис. 2.4. Эволюция огибающей амплитуды высокочастотного поперечного поля.
Резонансы перекрыты

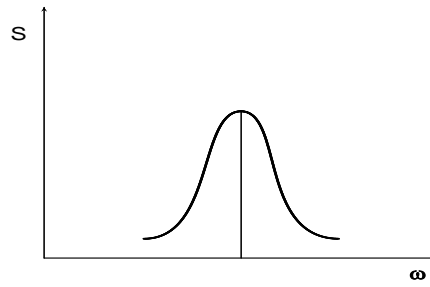


Рис. 2.5. Спектр возбужденного поперечного поля.
Резонансы перекрыты

Поэтому хаотизация движения заряженных частиц вызывает хаотизацию самосогласованного кулоновского поля этих частиц. Поперечное электромагнитное поле описывается неоднородным уравнением осциллятора (четвертое и пятое уравнения системы (1.59)), поэтому хаотический ток пучка, который входит в правую часть этого уравнения, может вызвать только нерегулярную модуляцию комплексной амплитуды поперечного поля. В соответствии с этой картиной развития неустойчивости находится вид спектра возбуждаемых колебаний и вид функции распределения. Спектр поперечного поля хотя и имеет максимум на основной частоте $\omega = 1$, но заметно уширен (см. рис. 2.5). Корреляционная функция этого поля, в отличие от случая пучка малой плотности, осциллируя на основной частоте, быстро спадает со временем. Спектр продольного поля непрерывный и значительно шире спектра поперечного поля. На рис. 2.6 и 2.7 представлена эволюция функции распределения для случая малой плотности частиц ($\omega_b = 0.1$, рис. 2.6) и для случая достаточно большой плотности ($\omega_b = 0.3$, рис. 2.7). Анализ вида функции распределения на рис. 2.7 показывает, что до времени $\tau \approx 40$ неустойчивость развивается аналогично случаю изолированного резонанса. Однако уже с $\tau \approx 80$ функция распределения частиц захватывает область

нескольких резонансов. При этом имеются не только замедленные частицы, но появляется группа стохастически ускоренных частиц. При дальнейшем увеличении времени функция распределения все больше размывается, число ускоренных частиц растет, хотя в целом замедленных частиц больше, чем ускоренных. Такое хаотическое движение осцилляторов при размытии функции распределения (появление ускоренных частиц) приводит к тому, что уровень самосогласованного поля, вызвавшего это движение, падает. Более того, начиная со времени $\tau \approx 225$, средняя амплитуда этого поля соответствует амплитуде, необходимой для перекрытия резонансов. Это значит, что уровень насыщения поля, в конечном счете, определяется не условием захвата частиц, а условием перекрытия резонансов.

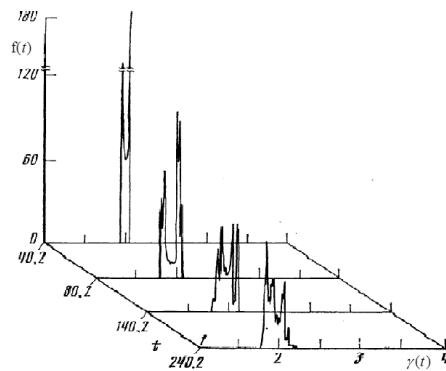


Рис. 2.6. Эволюция функции распределения частиц по энергии при $\omega_b = 0.1$

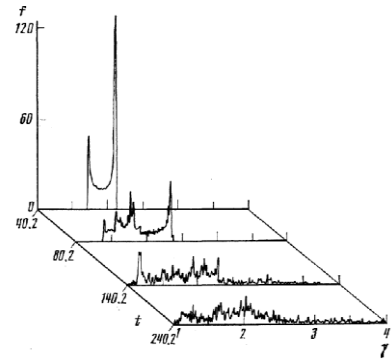


Рис. 2.7. Эволюция функции распределения частиц по энергии при $\omega_b = 0.3$

Следует отметить, что даже в случае малой плотности пучка, когда движение частиц происходит в изолированном резонансе, динамика этих частиц может стать хаотической. Это вызвано тем, что результирующее самосогласованное поле, в котором движутся частицы, представляет собой поле волны, амплитуда которой периодически меняется во времени. Динамика движения частиц в таком поле эквивалентна динамике движения частиц в поле трех волн, частоты которых разнесены на частоту баунс-колебаний (Ω) захваченных частиц $\omega = 1$, $\omega = 1 \pm \Omega$. Причем амплитуды этих волн таковы, что нелинейные резонансы этих трех волн перекрываются. Динамика движения частиц при этом должна быть хаотической. В свою очередь, хаотизация движения частиц должна приводить к сглаживанию амплитуды модуляции возбуждаемой волны. Аналитические оценки показывают, что это должно произойти в течение пяти баунс-колебаний. Однако численные расчеты показывают значительно более длительный период периодической модуляции амплитуды

возбуждаемой волны. Анализ этого противоречия содержится в работах [41-42]. Оказалось, что причиной такого длительного сохранения регулярной модуляции амплитуды возбуждаемой волны является тот факт, что в процессе группировки частиц в сгустке они, в основном, группируются в такой области фазового пространства, которая соответствует островку стохастической устойчивости движения частиц. Это приводит к значительно большему времени стохастизации этих частиц. В конечном счете, такая стохастизация наступает. Амплитуда модуляции возбуждаемых колебаний при этом уменьшается и в дальнейшем претерпевает только небольшую случайную модуляцию.

В заключение этого раздела подчеркнем, что выше мы основное внимание уделили описанию физической картины взаимодействия заряженных частиц с электромагнитными волнами в условиях циклотронного синхронизма между ними. Анализу работы конкретных приборов было уделено мало внимания. Это вызвано тем, что описанию этих приборов посвящена обширная литература. Из МЦР приборов особое внимание привлекают гиротроны и мазеры на циклотронном авторезонансе. По механизму физического взаимодействия заряженных частиц с электромагнитными полями эти приборы существенно отличаются друг от друга. Главное отличие заключается в том, что в гиротронах прямые интегралов перпендикулярны прямым резонансов. Так как движение частиц происходит вдоль интегральных кривых, то в линейном приближении обмен энергией между частицами и волнами отсутствует. Такой обмен возможен только при учете конечной величины амплитуды взаимодействующих с частицами волн. В условиях изолированного резонанса максимальная величина переданной энергии будет порядка ширины нелинейного резонанса. При реализации МЦАР прямые резонансов параллельны прямым интегралов и синхронное (резонансное) взаимодействие частиц с полем может осуществляться неограниченно долго. Ограничения на величину переданной энергии (от частиц поля или наоборот) определяются либо истощением энергии источника, либо геометрическими размерами электродинамических структур, в которых происходит взаимодействие частиц с полем. Следует, конечно, заметить, что эффективность работы гиротронов, несмотря на указанное выше обстоятельство об ограниченной величине возможной переданной энергии, достаточно высока. Это вызвано тем фактом, что величина возможной передачи энергии от частиц к полю $\Delta\gamma \sim \sqrt{\mathcal{E}}$ сама по себе достаточно велика. Кроме того, изменение продольных параметров электродинамических структур позволяет увеличить $\Delta\gamma$.

Особенно следует отметить тот факт, что рассмотренная выше физическая картина механизма циклотронного взаимодействия частиц и волн позволяет качественно описать новые режимы работы МЦР – стохастические режимы. Кроме того, эта же картина может быть использована для более глубокого понимания как процессов возбуждения колебаний, так и процессов ускорения заряженных частиц, а также меха-

низмов стохастического нагрева ансамбля заряженных частиц. Такие режимы с участием поперечных электромагнитных волн впервые были рассмотрены в работе [30]. В частности, используя описанные выше механизмы обмена энергией, удалось нагреть плазму до высоких температур ($\sim 1.5 \text{ Mev}$) с высокой эффективностью ($\sim 50\%$) [43-45]. Заметим, что, по-видимому, рассмотренному механизму стохастического нагрева нет альтернативы. Действительно, при стохастическом нагреве происходит прямая трансформация энергии регулярных волн в энергию хаотического движения частиц. Нет промежуточных звеньев такой трансформации. В работах [36, 45] в частности показано, что такой механизм нагрева заряженных частиц (плазмы) оказывается очень эффективным даже в том случае, когда отсутствуют резонансы в первом порядке по напряженности поля. В частности, он практически всегда более эффективен, чем нагрев частиц случайными полями. Заметим также, что с увеличением мощности генерируемых колебаний и с продвижением в более коротковолновую область стохастические механизмы будут проявляться все чаще. Поэтому знание особенностей эволюции поля и заряженных частиц в режимах со стохастической динамикой является необходимым для эффективного использования механизмов циклотронного взаимодействия волн и частиц.

2.4. Авторезонанс

Выше (в разделе 1.4) мы видели, что при выполнении условий авторезонанса нелинейные циклотронные резонансы не перекрываются. В отсутствие перекрытия резонансов динамика частиц регулярна (мы не рассматриваем частицы вблизи сепаратрис). Однако при этом (как будет показано в этом разделе) эта динамика аномально чувствительна к воздействию внешних случайных сил.

Влияние аддитивных флуктуаций. Супердиффузия. Анализ влияния на динамику частиц внешних случайных сил начнем с наиболее простого случая – влияния аддитивного шума. К появлению аддитивной флуктуационной добавки могут приводить либо флуктуации величины внешнего магнитного поля, либо флуктуации фазы волны, в которой движется частица. Во всех этих случаях второе и третье уравнения системы (1.54) для нахождения временной динамики $\tilde{\gamma}$ и θ приобретают вид:

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{d\tau} = -B\theta, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = d \cdot \tilde{\gamma} + f, \quad (2.33)$$

где $f \equiv n\tilde{\omega}_H / \gamma_0$, $\tilde{\omega}_H$ – определяет величину флуктуации внешнего магнитного поля.

Будем считать, что $f(\tau)$ – δ коррелированный случайный процесс с нулевым средним:

$$\langle f \rangle = 0, \quad \langle f(\tau)f(\tau') \rangle = 2D\delta(\tau - \tau'). \quad (2.34)$$

Тогда из (2.33) легко получить систему уравнений для первых моментов:

$$\frac{d\langle \tilde{\gamma} \rangle}{d\tau} = -B\langle \theta \rangle, \quad \frac{d\langle \theta \rangle}{d\tau} = d\langle \tilde{\gamma} \rangle. \quad (2.35)$$

Для определения вторых моментов получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \tilde{\gamma}^2 \rangle}{d\tau} &= -2B\langle \tilde{\gamma}\theta \rangle, \quad \frac{d\langle \tilde{\gamma}\theta \rangle}{d\tau} = -B\langle \theta^2 \rangle + d\langle \tilde{\gamma}^2 \rangle + \langle f\tilde{\gamma} \rangle, \\ \frac{d\langle \theta^2 \rangle}{d\tau} &= 2d\langle \tilde{\gamma}\theta \rangle + 2\langle f\theta \rangle. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Для расщепления корреляций $\langle f\tilde{\gamma} \rangle$ и $\langle f\theta \rangle$ воспользуемся методом вариационных производных [46] и вытекающим из этого метода соотношением

$$\langle f(t)R[f(t)] \rangle = \int_t \langle f(t)f(\tau) \rangle \left\langle \frac{\delta R[f(\tau)]}{\delta f(\tau)} \right\rangle d\tau, \quad (2.37)$$

где $R[z]$ – произвольный функционал от z .

Пользуясь формулой (2.37), получим, что $\langle f\tilde{\gamma} \rangle = 0$, $\langle f\theta \rangle = D$. Здесь D коэффициент диффузии, определенный в формуле (2.34). С учетом полученных соотношений систему уравнений (2.36) можно представить в виде:

$$\frac{d^2\langle \tilde{\gamma}\theta \rangle}{d\tau^2} + 4dB\langle \tilde{\gamma}\theta \rangle = -2BD. \quad (2.38)$$

Интересующее нас частное решение этого уравнения имеет вид: $\langle \tilde{\gamma}\theta \rangle = -D/4d$.

Выражение для среднего квадрата энергии при этом будет определяться формулой:

$$\langle \tilde{\gamma}^2 \rangle = \frac{\varepsilon_0 W_1 D}{2\gamma_0 d} \tau. \quad (2.39)$$

Таким образом, при приближении к авторезонансу ($d \rightarrow 0$) диффузия заряженной частицы в пространстве энергий аномально растет. Выражение (2.39) получено и справедливо при произвольных d , но не при

$d = 0$. В последнем случае необходимо вернуться к системе (2.36) и положить в ней $d = 0$. После этого легко найти следующую зависимость среднего квадрата энергии от времени при точном выполнении условия авторезонанса ($d = 0$):

$$\langle \tilde{\gamma}^2 \rangle = B^2 D \tau^3 / 3 = \frac{\varepsilon_0^2 P_{\perp}^2 D}{12 \gamma_0^2} (\cos \theta_0)^2 \cdot \tau^3. \quad (2.40)$$

Отсюда следует, что при авторезонансе диффузия может заметно превышать обычную квазилинейную диффузию. Такую диффузию называют супердиффузией.

Влияние мультипликативных флуктуаций. Таким образом, наличие аддитивных флуктуаций приводит к появлению супердиффузии. Отметим, что мы пользуемся следующей классификацией диффузионных процессов (смотри, например, [47, 48]). Пусть мы имеем следующую зависимость среднего квадрата энергии от времени $\langle \tilde{\gamma}^2 \rangle = D \tau^{\mu}$. Если $\mu = 1$, то мы имеем дело с обычной диффузией; если $\mu > 1$, то это супердиффузия; если $\mu < 1$, то это субдиффузия.

Представляет интерес выяснить, к чему приведет наличие мультипликативных флуктуаций. Такие флуктуации возникают, например, при наличии флуктуаций амплитуды волны, в которой движется частица. Уравнения для частиц, которые находятся вблизи седловых точек математического маятника (смотри (2.17)), в этом случае удобно представить в виде:

$$\dot{\theta} = -u, \quad \dot{u} = -(1 + f(\tau))\theta. \quad (2.41)$$

Здесь u – новая зависимая переменная, $f(\tau)$ – случайная функция, статистические характеристики которой подчиняются соотношениям (2.34).

Отметим, что в системе уравнений (2.41) введено новое безразмерное время $\tau \equiv \omega \cdot t \cdot \sqrt{|d \cdot B|}$, $d \neq 0$. При этом связь между энергией частицы и углом θ принимает вид: $\tilde{\gamma} = \dot{\theta} \cdot \sqrt{|B/d|}$. Из системы уравнений (2.41) можно получить систему уравнений для моментов любого порядка (m). Для этого умножим левую и правую части первого уравнения системы (2.41) на $u^{m-n} \theta^{n-1}$, а второго – на $\theta^n u^{m-n-1}$. Затем сложим полученные уравнения и усредним по ансамблю реализаций. В результате для нахождения моментов n -го порядка получим следующую систему уравнений:

$$\langle u^{m-n} \theta^n \rangle_{\tau}' = -n \langle u^{m-n+1} \theta^{n-1} \rangle - (m-n) \langle (1+f) \theta^{n+1} u^{m-n-1} \rangle. \quad (2.42)$$

Для расщепления корреляций $\langle f \theta^{n+1} u^{m-n-1} \rangle$, как и выше, воспользуемся методом вариационных производных. Используя (2.37) и вычислив соответствующие вариационные производные, находим:

$$\begin{aligned} \langle u^{m-n} \theta^n \rangle'_\tau &= -n \langle u^{m-n+1} \theta^{n+1} \rangle - (m-n) \langle (1+f) \theta^{n+1} u^{m-n-1} \rangle \\ &+ \frac{\sigma^2}{2} (m-n-1)(m-n) \langle u^{m-n-2} \theta^{n+2} \rangle, \end{aligned} \quad (2.43)$$

где σ^2 – дисперсия случайного процесса $f(\tau)$.

Для анализа устойчивости моментов (2.43) будем рассматривать решения для моментов в виде $e^{\lambda \tau}$. Для определения характеристических чисел λ получим следующее рекуррентное соотношение:

$$Det_m(\lambda) \equiv A_m^n(\lambda) = 0, \quad (2.44)$$

где

$$A_n^m = \frac{\lambda}{n} A_{n-1}^m - \left(\frac{m}{n-1} - 1 \right) A_{n-2}^m - \left(\frac{m}{n-2} - 1 \right) (m-n+1) \frac{B}{2} A_{n-3}^m,$$

$$A_0^m = \lambda, A_1^m = \lambda^2 - m, A_2^m = \frac{\lambda}{2} (\lambda^2 - m) - \lambda(m-1) - m(m-1) \frac{B}{2},$$

$$A_n^m \neq 0, \forall n < m.$$

В частности, при $m = 1$ (первые моменты) характеристическое уравнение приобретает вид:

$$\lambda^2 - 1 = 0, \quad (2.45)$$

а для $m = 2$ (вторые моменты)

$$\lambda^3 - 4\lambda - 2B = 0. \quad (2.46)$$

Учитывая, что $B \sim \varepsilon_0 \ll 1$, из (2.46) следует, что инкремент вторых моментов более чем в два раза превышает инкремент первых моментов.

Если частица находится не в окрестности особой точки типа «седло», а в окрестности «центра», то система уравнений будет иметь вид:

$$\dot{\theta} = u, \quad \dot{u} = -(1+f(\tau))\theta. \quad (2.47)$$

Повторяя вычисления, аналогичные приведенным выше для частиц, находящихся в окрестности «седла», получим следующие уравнения для характеристических чисел:

$$\lambda^2 + 1 = 0. \quad (2.48)$$

Для первых моментов, а также уравнения для вторых моментов:

$$\lambda^3 + 4\lambda - 4\sigma^2 = 0. \quad (2.49)$$

Корни этого уравнения равны $\lambda_{1,2} \approx \pm 2i$, $\lambda_3 \approx \sigma^2$. Важно, что уравнение (2.46) имеет положительный корень $\lambda_3 \approx \sigma^2$, который пропорционален коэффициенту диффузии $D \approx \sigma^2$ (σ^2 – дисперсия случайного процесса $f(\tau)$).

Таким образом, во всех случаях динамика движения заряженных частиц при наличии мультипликативных флуктуаций характеризуется экспоненциальным ростом дисперсии (вторых моментов). Если для частиц, которые находятся в окрестности особых точек типа «седло», это достаточно ожидаемый результат, то наличие экспоненциального роста вторых моментов для частиц, которые находятся в окрестности точек типа «центр», является относительно неожиданным и очень важным. Важность этого результата заключается, по крайней мере, по двум причинам: первая из них заключается в том, что все частицы, взаимодействующие с электромагнитной волной вне зависимости от своего положения относительно фазы этой волны, будут экспоненциально разбегаться друг от друга. Такое разбегание может привести к срыву пучковой неустойчивости. Вторая причина заключается в том, что, как легко увидеть из уравнений (2.43), не только вторые моменты экспоненциально нарастают, но экспоненциально нарастают и следующие, высшие моменты. Более того, инкремент нарастания каждого следующего момента больше инкремента нарастания предыдущих моментов. В этом случае, как мы увидим ниже, привычные диффузионные уравнения перестают адекватно описывать динамику частиц. Посмотрим детальнее, к чему могут приводить эти две особенности поведения моментов.

Первая особенность (быстрый рост вторых моментов) приводит к тому, что флуктуационное расплывание частиц в поле волны может приводить к стабилизации пучковых неустойчивостей, которые развиваются на основе электронного циклотронного резонанса. Действительно, возьмем самый «мягкий» случай расплывания частиц, которые оказались в окрестности точек типа «центр». Для этих частиц $\langle \tilde{\gamma}^2 \rangle \approx \exp(D\tau) \cdot |B/d|(D^2/4)$. Оценим флуктуационную скорость частиц величиной $\tilde{v} \approx \sqrt{\langle \tilde{\gamma}^2 \rangle} \cdot v_0 \cdot \gamma_0^3$. Если за характерное время развития неустойчивости (время, обратное инкременту неустойчивости $T_i \sim 1/I$) частицы, имеющие такие флуктуационные скорости, выйдут за пределы расстояния порядка длины волны возбуждаемых колебаний, то процесс развития неустойчивости будет подавлен (будет подавлен процесс группировки частиц в когерентные сгустки). Условием такого подавления будет неравенство:

$$\tilde{\nu} \cdot T_i \geq \lambda, \quad D\sqrt{|d \cdot B|} \geq \frac{T_\omega}{T_i \cdot \pi} \left| \ln \left[\frac{T_\omega}{T_i \cdot \beta_0 \cdot \gamma_0^3} \frac{2}{D} \sqrt{\frac{|d|}{|B|}} \right] \right|. \quad (2.50)$$

Здесь T_ω – период волны, в поле которой двигаются частицы.

Соотношение (2.50) определяет ограничения на основные характеристики неустойчивых пучковых систем: скорость частиц, инкременты развития неустойчивостей, как близки параметры системы к условиям авторезонанса. В частности, неравенство (2.50) накладывает ограничение на величину амплитуды волны, которая возбуждается пучком заряженных частиц.

Роль высших моментов. Из характеристического уравнения (2.44) легко увидеть, что высшие моменты растут быстрее низших моментов. Представляет интерес понять, к чему ведет такая особенность статистических характеристик. Для этого рассмотрим простейшую одномерную схему вывода кинетического уравнения для функции распределения частиц по скоростям. Для ответа на поставленный вопрос этой схемы вполне достаточно. Обобщение на многомерный случай является очевидным. Будем для определенности и простоты считать, что частицы меняют свою энергию в результате «соударений». Тогда число частиц, которые в момент времени $\tau + \Delta\tau$ имеют скорость ν , можно представить в виде:

$$n(\nu, \tau + \Delta\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [n(\nu - \nu', \tau)] P(\nu') d\nu'. \quad (2.51)$$

Выражение (2.51) является просто математическим выражением факта, что плотность частиц, имеющих скорость ν в момент времени $\tau + \Delta\tau$, будет определяться всеми другими частицами (с другими энергиями) и которые с вероятностью $P(\nu')$ через интервал времени $\Delta\tau$ приобретают скорость ν . Уравнение (2.51) удобно переписать в виде:

$$n(\nu, \tau + \Delta\tau) - n(\nu, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [n(\nu - \nu', \tau) - n(\nu, \tau)] P(\nu') d\nu'. \quad (2.52)$$

Если моменты конечны, то, раскладывая подынтегральные выражения (2.52) относительно малых смещений и ограничиваясь вторыми моментами, мы получим обычное уравнение диффузии с коэффициентом диффузии $D = \langle \nu^2 \rangle / 2$:

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 n}{\partial \nu^2}. \quad (2.53)$$

Обратим внимание, что если следующие моменты больше предыдущих моментов, то такое разложение теряет смысл. Именно такая особенность соотношения между моментами имеет место в нашем случае.

Поэтому привычные дифференциальные уравнения для функции распределения в рассматриваемом случае не могут быть использованы. Необходимо другой подход. Можно непосредственно вычислять все необходимые моменты. Такой подход был реализован выше. Если же необходимо определить функцию распределения, то, в общем случае, уравнение для ее нахождения будет интегро-дифференциальным (в (2.52) нельзя удалить интегральный оператор), либо такое уравнение будет уравнением с дробными производными (смотри, например, [48]).

Сформулируем наиболее важные результаты этого раздела, которые являются дополнением к результатам раздела 1.4:

1. Схема взаимодействия заряженных частиц с полем электромагнитной волны в условиях, приближающихся к условиям авторезонанса, особенно чувствительна к наличию флуктуаций. Действительно, второй момент (дисперсия) аномально быстро растет. При наличии аддитивных флуктуаций он оказывается обратно пропорциональным первой степени производной от параметра R : $\langle \gamma^2 \rangle \approx D\tau / (\partial R / \partial \gamma)$. При точном выполнении условий авторезонанса ($\partial R / \partial \gamma = 0$) диффузия частиц становится супердиффузией: $\sqrt{\langle \gamma^2 \rangle} \approx D\tau^{3/2}$. Такая особенность поведения вто-

рых моментов может приводить к стабилизации пучковых неустойчивостей. Отметим, что влияние большого числа несинхронных, в особенности не распространяющихся мод, во многих случаях можно моделировать влиянием внешних флуктуаций.

2. Если частицы находятся в поле волны, амплитуда которой имеет случайную добавку, то вторые моменты растут экспоненциально. Причем высшие моменты растут быстрее предыдущих. Такая особенность поведения моментов приводит не только к возможности подавления пучковых неустойчивостей, но и к необходимости пользоваться для описания кинетики частиц либо к анализу их моментов (как сделано в настоящей работе) либо к интегро-дифференциальным уравнениям, либо к уравнениям с дробными производными.

Описанные в разделах 1.4 и 2.4 особенности динамики заряженных частиц в условиях, близких к условиям авторезонанса, возможно могут объяснить малую эффективность возбуждения коротковолнового излучения в схемах, которые используют эффект авторезонансного взаимодействия. С другой стороны, наличие этих особенностей позволяет рассматривать новые схемы эффективного нагрева заряженных частиц.

2.5. Парадигмы динамического хаоса

[49-53, 60-62]

В этом разделе показано, что при анализе динамики нелинейных физических систем необходимо учитывать особые решения. Учет таких

решений расширяет круг систем с хаотическим поведением. Показано, что хаотическую динамику могут демонстрировать системы с одной степенью свободы и даже полностью интегрируемые системы. Наличие особых решений предъявляет жесткие требования к математической модели изучаемой физической системы. Оказывается, что при наличии особых решений динамика физической системы может качественно измениться при воздействии чрезвычайно малых возмущений, неучтенных при моделировании. Показано, что введение особых решений позволяет практически любую регулярную функцию представить в виде комбинации функций с хаотическим поведением. Особенности особых решений могут вскрыть некоторые новые стороны динамики физических систем. В частности, показано, что в многофотонном возбуждении квантовых систем существует дополнительный канал возбуждения (хаотический), который может быть эффективнее известного канала. Показано также, что при моделировании движения заряженных частиц в непрерывных потенциалах с помощью дискретных моделей может приводить к неправильным результатам.

Как известно, для реализации хаотических режимов в рассматриваемой динамической системе необходимо выполнение следующих условий: *1. Система должна иметь 1.5 или более степеней свободы. 2. Она должна быть нелинейной. 3. В фазовом пространстве должна развиваться локальная неустойчивость.* Эти три условия можно назвать парадигмами динамического хаоса. В той или иной форме они сформулированы во всех книгах и обзорах, посвященных динамическому хаосу (см., например, [54]). Ниже мы обсудим эти условия. Несколько слов о сути этих условий. Они, безусловно, все необходимы для определенного круга динамических систем. Необходимость в фазовом пространстве, размерность которого равна трем или больше, вытекает из требований теоремы единственности. Действительно, в двумерном фазовом пространстве нельзя без пересечений реализовать перемешивание интегральных кривых. Отсюда вытекает необходимость, как минимум, в трехмерном фазовом пространстве. Далее, чтобы происходило перемешивание фазовых траекторий в ограниченном фазовом пространстве, необходимо, чтобы эти траектории разбегались, т.е. необходима локальная неустойчивость. И наконец, так как реальная система описывается в конечном фазовом пространстве, необходима нелинейность для возвратов в ограниченный фазовый объем.

Известно, что кроме обычных решений дифференциальных уравнений существуют особые решения. В точках особых решений теорема единственности нарушается, поэтому можно ожидать, что при учете особых решений режимы с хаотическим поведением будут присущи и динамическим системам с одной степенью свободы. Ниже мы покажем, что действительно такая динамика имеет место. При этом хаотическая динамика оказывается возможной даже для полностью интегрируемых систем. Далее на примере задачи Кеплера показано, как могут влиять особые решения на динамику частиц.

Обычно при изучении линейных систем никто не ориентируется на изучение хаотических режимов. И действительно, в линейных системах они отсутствуют. Однако часто при изучении линейных систем оказывается удобным вводить новые функции, делать замену как зависимых, так и независимых переменных. При этом математическая модель изучаемой первоначально линейной системы становится нелинейной. Классическим примером является переход от уравнений квантовой механики к уравнениям классической механики, а также переход от волновых уравнений к уравнениям геометрической оптики. Во всех этих нелинейных системах возможны режимы с динамическим хаосом. Ниже приведены примеры таких систем.

Хорошо известно, что многие системы, имеющие режимы с динамическим хаосом, имеют интегралы. При этом выражение для интегралов содержит зависимые переменные, динамика которых может быть хаотической. При этом мы имеем пример, что некая комбинация функций, ведущих себя хаотически, может оставаться постоянной. Ниже такая особенность функции с хаотической динамикой обобщается. Показано, что практически любую регулярную функцию можно представить в виде некой комбинации функции, динамика которой хаотична.

Ниже также показано, что преобразования, которые переводят линейные системы в нелинейные с хаотической динамикой, могут быть полезными. В частности, на примере многоуровневой квантовой системы, которая находится под воздействием внешнего низкочастотного возмущения, с помощью таких замен вскрывается новый канал возбуждения многоуровневой системы. Он связан с диффузией квантовых частиц в пространстве энергии. Показано, что в некоторых случаях обнаруженный механизм возбуждения квантовой системы оказывается более эффективным, чем известное многофотонное возбуждение.

На примере механизма ускорения Ферми показано, что переход к дискретным моделям необходимо совершать с осторожностью. Если при таком моделировании пропадает влияние точек потенциала, в которых нарушается теорема единственности, то результаты такой дискретной модели могут не всегда правильно описывать динамику частиц.

В заключение сформулированы основные результаты и сделаны некоторые выводы.

Особые решения и хаотическая динамика, порождаемая ими.

В математике особые решения хорошо известны. Достаточно указать на тот факт, что термин «особые решения» ввел, в свое время, Ж. Лагранж. Правда, иногда под термином «особые решения» в математических и мат.-физических работах понимают решения, которые обладают той или иной особенностью, которую выделяют эти решения. Такая неоднозначность термина особенно распространена в англоязычных работах (singular solutions). В настоящей работе будем под термином «особые решения» понимать решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), в точках которого условия единственности нарушены (не выполняется условие Липшица). Повторим, что такие решения широко представ-

лены в математической литературе. Однако при анализе математических моделей, которые описывают физические процессы, по-видимому, всегда (автор не нашел противоречащих этому случаев), явно или неявно, накладываются условия, которые исключают учет таких решений, т.е. накладывается условие единственности решения.

В качестве примера можно привести определение основного свойства фазового пространства, в котором рассматривается регулярная и стохастическая динамика физических систем в книге [54]: «В любой заданный момент времени траектории в фазовом пространстве не пересекаются...». Этим предложением сразу исключается учет особых решений, в точках которого траектории могут пересекаться. Кроме того, этим предложением сразу же накладывается необходимость для реализации режимом с динамическим хаосом иметь систему, число степеней свободы которой больше или равно $n \geq 1.5$. Действительно, если мы имеем систему с одной степенью свободы, то фазовое пространство такой системы представляет собой плоскость. Если фазовые траектории пересекаться не могут, то на плоскости не могут быть реализованы условия перемешивания этих траекторий. Отметим еще одну особенность особых решений. Такие решения рассматриваются только в курсах высшей математики в основном для математиков. В обычных курсах высшей математики такие решения не рассматриваются. Кроме того, если посмотреть математические справочники и энциклопедии, то особые решения в них рассматриваются практически только для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Хотя очевидным является факт, что в уравнениях более высокого порядка они присутствуют значительно чаще. Такое отношение к особым решениям, по-видимому, связано с тем, что они не соответствуют нашему представлению о необходимости получения определенных решений в физических задачах. Отметим также, что, как следует из литературы, достаточно подробный анализ особых решений был дан В. А. Стекловым [55]. Однако эта книга мало доступна. В работе [49] было указано, что особые решения могут порождать хаотическую динамику в системах с одной степенью свободы и даже в системах, для которых известны аналитические выражения для всех фазовых траекторий. Хаотическая динамика в этом случае возникала в результате того факта, что эти фазовые траектории проходили через область, где теорема единственности была нарушена, и реальная фазовая траектория, проходя через эту область, могла перебрасываться на другую фазовую траекторию. Таким образом, наличие аналитического выражения для фазовых траекторий не определяло реальную динамику изучаемой системы. Следует сказать, что такая динамика могла быть изучена в общем случае только численными методами. Полученные в работе [49] результаты, однако, не имели прозрачного физического смысла. Можно было предположить, что рассмотренные модели также, как и многочисленные модели особых решений в математике, представляют интерес только с точки зрения математики. Ниже мы покажем, что такие решения могут представлять значительный интерес и при решении физических задач. Причем будет видно, что даже если динамика изучаемой физической системы описывается фазовыми траекториями,

которые не попадают в точки «особых решений», но проходят достаточно близко к ним, то в этом случае сколь угодно малые и неучтенные возмущения или неточности численных расчетов могут качественно изменить динамику изучаемой системы. Таким образом, особые решения необходимо учитывать при рассмотрении физических задач. Их учет может указать на появление режимов с динамическим хаосом даже в системах с одной степенью свободы. Кроме того, такие решения достаточно распространены и могут влиять на физические процессы, которые изучаются. В частности, наличие таких решений приводит к дополнительным возможностям появления режимов с динамическим хаосом в различных физических системах. Ниже мы проиллюстрируем такие возможности. Следует сказать, что, как мы увидим ниже, наличие таких решений и, соответственно, таких режимов может быть нежелательным и с ними нужно бороться. С другой стороны, они могут быть неизбежными, и их нужно учитывать. Кроме того, они могут быть полезными, и их можно использовать.

Приведем наиболее простой пример математической модели, которая имеет особые решения:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}. \quad (2.54)$$

Это нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Его общее решение имеет следующий вид:

$$F(x, y, C) = y - \frac{1}{4}(x + C)^2 = 0. \quad (2.55)$$

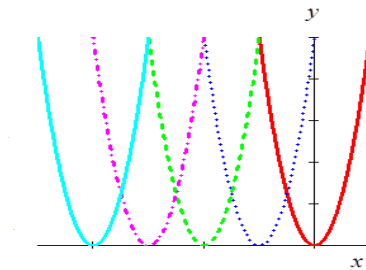


Рис. 2.7. Квадратичные параболы решения уравнения (2.55)

Перебирая значение константы C , мы получим множество частных решений этого уравнения. Каждое из этих частных решений представляет собой квадратичную параболу (смотри рис. 2.7). Однако среди них (среди частных решений) не содержится решение $y = 0$. Однако, как видно из уравнения, это соотношение также удовлетворяет уравнению (2.54), т.е. является

его решением. Это особое решение уравнения (2.54). Такая особенность особых решений, что они не могут быть получены из общего решения путем перебора произвольных постоянных, была одним из первых определений особых решений. Позже стало понятным, что особые решения имеют, возможно, более важную особенность. А именно, в точках этих решений нарушается теорема единственности. Из уравнения (2.54) легко увидеть, что в точках особого решения ($y = 0$) условия Липшица не выпол-

няются. Кроме того, из рисунка видно, что все частные решения проходят через точки особого решения ($y = 0$). Возникает общий вопрос: как найти особые решения дифференциальных уравнений? Для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка это сделать достаточно просто. Существует несколько способов нахождения таких решений. Мы остановимся только на одном из них. По своей сути, особые решения представляют собой траектории или поверхности (различные размерности), которые огибают общее решение дифференциальных уравнений. Поэтому нахождение таких решений может быть связано с нахождением огибающих общего решения. Продемонстрируем это утверждение на системе уравнения (2.54). Для нахождения огибающей, как известно, нам необходимо продифференцировать общее решение (2.55) по произвольной постоянной C и приравнять эту производную к нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial C} = \frac{1}{2}(x + C) = 0. \quad (2.56)$$

Из этого выражения мы должны определить константу C и подставить ее в выражение для общего решения (2.55). В результате находим особое решение $y = 0$. Это решение в данном простом примере, конечно, совпадает с полученным выше решением. К сожалению, такая простая процедура нахождения особых решений характерна только для ОДУ первого порядка. Чтобы проиллюстрировать сложность отыскания особых решений для ОДУ более высокого порядка, рассмотрим один из возможных алгоритмов их отыскания. Для этого запишем систему ОДУ в каноническом виде:

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, \vec{x}). \quad (2.57)$$

Предположим, что мы нашли общее решение этой системы уравнений. Пусть это решение имеет вид:

$$x_k = \varphi_k(t, \vec{C}). \quad (2.58)$$

Видно, что уже на этом первом шаге в большинстве реальных случаев возникают трудности. Теперь, по аналогии с общим принципом нахождения огибающих, нужно отыскать вектор произвольных постоянных \vec{C} . Проще всего это сделать таким способом. Будем считать, что эти постоянные являются функциями времени. Тогда полная производная по времени от общего решения (2.55) будет иметь вид:

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial x_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial C_i} \frac{dC_i}{dt}.$$

Из этого выражения можно увидеть, что если второе слагаемое в правой части обращается в ноль:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial C_i} \frac{dC_i}{dt} = 0 \quad k = \{1, 2, \dots, n\}, \quad (2.59)$$

то общее решение (2.58) остается решением исходного уравнения (2.57) несмотря на зависимость постоянных от времени. Это ключевой момент в алгоритме нахождения особых решений. Система уравнений (2.59) будет основной для определения вектора констант \vec{C} . Прежде всего, отметим, что система (2.59) имеет нетривиальное решение для производных $\frac{dC_i}{dt}$ только в том случае, когда ее детерминант будет обращаться в ноль:

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_k}{\partial C_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_k}{\partial C_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial C_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial C_n} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.60)$$

Это будет второе соотношение для нахождения вектора констант \vec{C} . Предположим, что мы, используя (2.60), выразили одну из констант через другие константы:

$$C_n = F(t, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}). \quad (2.61)$$

Тогда производная ее будет иметь вид:

$$\frac{dC_n}{dt} = \dot{C}_n = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial C_i} \dot{C}_i. \quad (2.62)$$

Подставим выражения (2.61) и (2.62) в первые $(n-1)$ уравнения системы (2.59):

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi_k}{\partial C_i} \frac{dC_i}{dt} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial C_n} C'_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial \varphi_k}{\partial C_i} \frac{dC_i}{dt} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial C_n} \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial C_i} \frac{dC_i}{dt} \right] = 0; \quad (2.63)$$

$$k = \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Система уравнений (2.63) является линейной системой для нахождения производных $\frac{dC_i}{dt}$. Решив эту систему, найдем:

$$\frac{dC_i}{dt} = F_i(t, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}) \quad i = \{1, 2, \dots, n-1\}. \quad (2.64)$$

Здесь \vec{A} – новый вектор независимых постоянных.

Формулы (2.61) и (2.64) позволяют потенциально найти все компоненты вектора \vec{C} . Подставляя их в выражение для общего решения (2.58), найдем множество особых решений. Как видно, реализация рассмотренного алгоритма нахождения особых решений представляет собой в общем случае самостоятельную сложную проблему. Только в редких случаях такой алгоритм может быть реализован аналитически.

Приведем простой пример нелинейного ОДУ, на котором можно проиллюстрировать приведенный выше алгоритм получения особых решений, а также все трудности, которые при этом могут возникнуть. Это модельный пример [56]. Итак, пусть дана следующая система уравнений:

$$xy' + y'^2 + z' - y = 0, \quad (2.65)$$

$$z'y + y'z' - z = 0. \quad (2.65)$$

Здесь $z' \equiv dz/dx$.

В соответствии с приведенным алгоритмом необходимо иметь общее решение системы (2.65). В данном случае эти решения легко находятся:

$$y = c_1x + c_1^2 + c_2, \quad (2.66)$$

$$z = c_2x + c_1c_2.$$

Для этих решений найдем детерминант (2.60):

$$\begin{vmatrix} (x+2c_1) & 1 \\ c_2 & (x+c_1) \end{vmatrix} = (x+2c_1)(x+c_1) - c_2 = 0. \quad (2.67)$$

Из (2.67) находим c_2 :

$$c_2 = (x+2c_1)(x+c_1). \quad (2.68)$$

Подставим выражение для c_2 в систему уравнений (2.59). Для нашего примера эта система имеет вид:

$$(x+2c_1)c_1' + c_2' = 0, \quad (2.69)$$

$$c_2c_1' + (x+c_1)c_2' = 0.$$

В результате подстановки получим: $c_1' = -0.5$ – из первого уравнения системы (2.69). Используя это соотношение и выражение (2.68) для c_2 , найдем одно из множеств особых решений:

$$y = -0.25 \cdot x^2 + Ax + 3A^2; \quad z = 0.5 \cdot x^2 A + 2 \cdot x \cdot A^2 + 2A^3. \quad (2.70)$$

Выражение (2.70) представляет собой однопараметрическое множество особых решений, в котором параметром является новая произвольная постоянная A . Другое множество особых решений может быть получено при использовании второго уравнения (2.69). Полное решение модельной системы (2.65) мы не будем выписывать.

Как видно, использование описанного выше алгоритма отыскания особых решений для реальных систем – сложная проблема. Ею пользоваться не будем. Основной результат, который можно получить из этого алгоритма, заключается в том, что с увеличением числа степеней свободы изучаемой системы растет множество особых решений. Поэтому можно ожидать, что для сложных систем с большим числом степеней свободы они будут играть более значительную роль, чем для простых систем.

В настоящей работе нас будут интересовать, прежде всего, те особенности особых решений, которые заключаются в неопределенности фазовых траекторий, которые попадают в область этих решений. В большинстве случаев это легко решаемая задача. Достаточно провести анализ правых частей системы уравнений (2.57) на предмет выполнения для них условий Липшица. Еще проще: следует посмотреть на производные этих правых частей по зависимым переменным. Если эти производные в некоторых точках фазового пространства будут неограниченно большими, то эти области будут теми областями, при попадании в которые возникает неопределенность.

При учете особых решений могут быть легко реализованы режимы с хаотической динамикой. Для этого необходимо, чтобы фазовые траектории динамической системы периодически попадали в точки особых решений. В крайнем случае, как это будет видно в следующих разделах, эти траектории должны достаточно близко подходить к точкам особых решений. Математических моделей таких систем неограниченное множество. Это будет видно в приведенных ниже примерах.

Осциллятор с нелинейным трением. Некоторые другие математические модели. В качестве характерного примера рассмотрим динамику системы, которая описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= x_1; \\ \dot{x}_1 &= \left(\frac{x_1^2}{2x_0} \right) - 0.5 \cdot x_0. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Динамика такой системы первоначально была рассмотрена в работе [49]. Приведем наиболее важные характеристики этой системы. Прежде всего, легко показать, что функция $\varphi = (x_0 - R)^2 + x_1^2 - R^2 = 0$ является интегралом системы (2.71). Причем параметр R (радиус окружностей) может принимать произвольные значения. Система (2.71) представляет собой модель осциллятора с нелинейным трением. Фазовый портрет системы (2.71) представлен на рисунке 2.8. Интегральными кривыми в этом случае являются окружности. Причем центры окружностей располагаются на оси $x_1 = 0$, а радиусы этих окружностей равны расстоянию этих центров до нулевой точки ($x_0 = 0; x_1 = 0$). Эта точка является общей для всех окружностей. Кроме того, эта точка является особым решением системы (2.71). Покажем это. Проще всего это доказать, если воспользоваться полученным выше интегралом $\varphi = 0$. Из него находим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для нахождения переменной x_0 :

$$\dot{x}_0 = \pm \sqrt{-x_0^2 + 2R \cdot x_0}. \quad (2.72)$$

Из этого уравнения легко увидеть, что точки $x_0 = 0$ и $x_0 = 2R$ являются точками, в которых условия Липшица не выполняются. Кроме того, видно, что эти точки являются решениями уравнения (2.72), т.е. эти точки являются особыми решениями уравнения (2.72). Однако легко также увидеть, что только точка $x_0 = 0$ удовлетворяет исходному уравнению (2.71), т.е. только она является особым решением. Этот же результат можно получить, используя вышеприведенный алгоритм отыскания особых решений. Действительно, общее решение уравнения (2.72) имеет вид:

$$x_0 = R \cdot [1 \pm \sin(t + C)]. \quad (2.73)$$

Используя приведенный выше алгоритм, находим следующие значения «константы» C : $C = -t + \pi(n + 1/2)$. Подставим это выражение в общее решение (2.73). В результате находим два следующих особых решения уравнения (2.72):

$$x_{0s} = R \cdot [1 \pm 1] = \begin{cases} 0 \\ 2R \end{cases}. \quad (2.74)$$

Как и в предыдущем случае, видно, что только одно из них, а именно $x_{0s} = 0$, является особым решением исходного уравнения (2.71). Глядя на интеграл уравнения (2.71), трудно представить, что ди-

динамика системы (2.71) может быть нерегулярной. Однако численные расчеты показывают, что она нерегулярна. Действительно, на рисунке 2.9 показана зависимость переменной x_0 от времени. Видно, что фазовая траектория после прохождения точки особого решения ($x_0 = x_1 = 0$) может перескакивать с одной окружности на другую окружность. Причем эти перескоки являются случайными. Практически любое изменение точности счета меняет временную динамику системы. Кроме того, спектральный анализ динамики системы (2.71) показывает, что спектры этой динамики широкие, а корреляционная функция достаточно быстро спадает (смотри рис. 2.10).

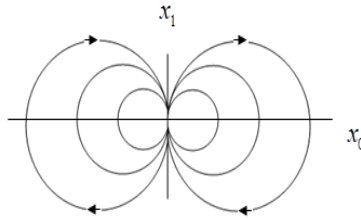


Рис. 2.8. Фазовый портрет системы (2.54)

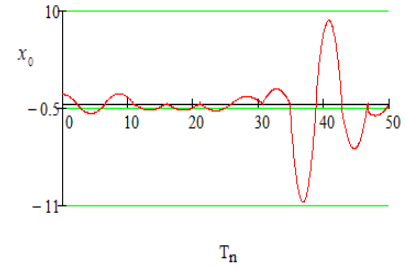


Рис. 2.9. Зависимость от времени переменной x_0

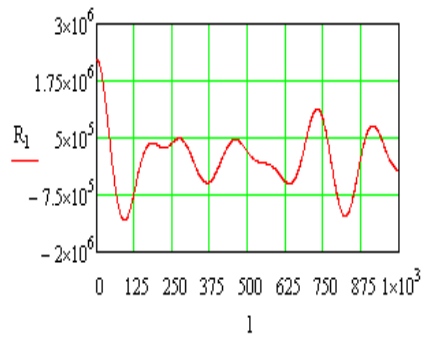


Рис. 2.10. Корреляционная функция переменной x_0

Система (2.71) не является уникальной. В работе [49] была рассмотрена динамика другой системы:

$$\frac{dx_0}{dt} = x_0 \cdot x_1 + \gamma \cdot x_1 \equiv F_1; \quad \frac{dx_1}{dt} = x_1^2 - x_0^4 - \gamma \cdot x_0 \equiv F_2 . \quad (2.75)$$

Было показано, что в окрестности нуля эта система имеет области, в которых нарушается теорема единственности. Кроме того, фазовые траектории периодически попадают в эту область. Динамика этой системы нерегулярна. В работе [49] также показано, как можно построить множество систем, которые обладают нужными свойствами. Коротко опишем эти алгоритмы.

Пусть имеется интегральная кривая, которая задана уравнением: $\varphi(x_0, x_1) = 0$. Тогда система уравнений, интегралом которой будет эта интегральная кривая, может быть представлена в следующем виде (см., например, [57]):

$$\begin{aligned}\frac{dx_0}{dt} &= F_1(\varphi, x_0, x_1) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} M(x_0, x_1); \\ \frac{dx_1}{dt} &= F_2(\varphi, x_0, x_1) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} M(x_0, x_1),\end{aligned}\tag{2.76}$$

где $F_s(\varphi, x_0, x_1)$ – произвольные функции, которые обладают свойством: $F_s(0, x_0, x_1) = 0$; $M(x_0, x_1)$ – произвольная функция.

Используя систему (2.76), можно построить большое разнообразие динамических систем, обладающих нужными свойствами. В качестве примера рассмотрим случай, когда интегральными кривыми является семейство окружностей с радиусом R :

$$\varphi = (x_0 - R)^2 + x_1^2 - R^2 = 0.\tag{2.77}$$

Множество интегральных кривых (2.77) представлено на рисунке 2.8.

Выбором функций F_s и M можно добиться исключения параметра R из системы уравнений (2.76). Действительно, выберем эти функции, например, в виде: $F_1 = 0$; $F_2 = \varphi \cdot f(x_0, x_1)$; $M = -x_0 \cdot f(x_0, x_1)$, здесь $f(x_0, x_1)$ – произвольная функция. Подставляя эти выражения в систему (3), получим множество систем уравнений, в которых параметр R уже исключен:

$$\frac{dx_0}{dt} = 2x_0 \cdot x_1 \cdot f(x_0, x_1); \quad \frac{dx_1}{dt} = (x_1^2 - x_0^2) \cdot f(x_0, x_1).\tag{2.78}$$

Выбирая функцию $f(x_0, x_1)$ в виде $f(x_0, x_1) = 1/2x_0$, получим систему уравнений (2.71).

Следует заметить следующее. Интегральными кривыми системы (2.76) будет семейство окружностей с общей точкой (0,0). Несмотря на

этот факт, характер этой точки и динамика системы будут существенно зависеть от вида функции $f(x_0, x_1)$. Может оказаться, что эта точка будет устойчивой особой точкой. В этом случае хаотическая динамика может быть реализована искусственным изменением характера этой точки. Такая возможность может быть реализована путем добавления в систему уравнений (2.76) членов, пропорциональных первой степени независимых переменных x_j . Другая возможность связана с добавлением внешнего возмущения, которое будет «выбивать» изображающую точку из области начала координат.

Система уравнений (2.71) оказалась достаточно простой. Система (2.75) труднее для анализа. Рассмотрим некоторые результаты анализа этой системы. Если $\gamma = 0$, то эта система имеет следующее семейство интегральных кривых:

$$\varphi = x_0^4 + x_1^2 - Cx_0^2 = 0.$$

Здесь C – произвольная постоянная.

Используя эту формулу для интегральных кривых, правую часть второго уравнения системы (2.75) (при $\gamma = 0$) можно переписать в следующем виде: $F_2 = -2 \cdot x_0^4 + Cx_0^2$. Используя это выражение, легко увидеть, что левая часть неравенства Липшица в окрестности малых значений x_0 будет пропорциональна $x_0^2 |C - \tilde{C}|$. Учитывая, что константы C и \tilde{C} могут существенно отличаться, то в окрестности нулевой точки (но не в самой точке) условие Липшица выполняться не будет. Единственность решения будет нарушаться. Однако такая «урезанная» система уравнений (2.75) будет вести себя вполне регулярно. Более того, очень быстро все начальные точки устремятся к нулевой точке и будут оставаться в ее окрестности сколь угодно долго. Чтобы убрать такую особенность динамики в системе (2.75), были добавлены линейные члены. Они не дают изображающим точкам останавливаться в нулевой точке.

Динамика частиц в центральном поле. Задача Кеплера. В предыдущем разделе были описаны некоторые особенности особых решений ОДУ. Были приведены примеры, как эти особенности влияют на динамику изучаемых систем. Увидели, что учет особых решений может приводить к сложной хаотической динамике даже простых полностью интегрируемых систем. Однако приведенные в этом разделе примеры не содержали ясного физического смысла. Не до конца было ясным, можно ли использовать эти особенности не только для выделенных искусственно сконструированных математических моделей, но и для реальных физических систем. В настоящем и в следующем разделах покажем, что учет особых решений может быть существенен и для хорошо известных физических моделей.

Первым хорошим физическим примером системы с одной степенью свободы может служить задача о движении частиц в центральном поле.

Эта задача, благодаря существованию интеграла, который выражает закон сохранения углового момента, сводится к задаче, имеющей всего одну степень свободы. Более того, учитывая интеграл энергии, данная задача полностью интегрируется. Ниже покажем, что, несмотря на ее интегрируемость, в ее динамике могут наблюдаться режимы, которые напоминают режимы с динамическим хаосом. Такая динамика будет возникать в том случае, когда фазовые траектории будут находиться вблизи особого решения. Итак, пусть мы имеем уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Следуя за [58], запишем выражение для функции Лагранжа в полярной системе координат (r, φ) :

$$L = \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2] - U(r).$$

Подставляя это выражение в уравнение Лагранжа, найдем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которые описывают динамику тел в центральном поле:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{1}{m} \frac{\partial U_{eff}}{\partial r} = -\frac{1}{m} \left(-\frac{M^2}{mr^3} + \frac{\partial U}{\partial r} \right) \\ \dot{\varphi} &= M / mr^2. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Здесь $U_{eff} \equiv \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$, $M \equiv mr^2 \dot{\varphi} = const$ – угловой момент импульса, который является интегралом.

Следует заметить, что третье уравнение системы (2.79) не влияет на динамику первых двух уравнений. Динамика угловой переменной однозначно определяется радиальной динамикой. В этом случае система (2.79) имеет одну степень свободы. Из первых двух уравнений системы (2.79) следует интеграл энергии:

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + U_{eff}. \quad (2.80)$$

Обратим внимание, что при движении в центральном поле область координаты притягивающего центра ($r=0$) такова, что условия Липшица в ней нарушаются. Важно также, что при отличии от нуля углового момента ($M \neq 0$) частицы никогда не падают на притягивающий

центр. Если учесть интеграл энергии, то задача о динамике тел в кулоновском (или в гравитационном) поле полностью интегрируется. Такие решения можно найти во многих курсах механики (смотри, например, [58]). Действительно, с учетом (2.80) систему ОДУ (2.79) можно переписать в виде:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{2mr^2}}. \quad (2.81)$$

$$\dot{\varphi} = M / mr^2.$$

Задача заключается в том, чтобы показать, что, несмотря на полную интегрируемость, динамика рассматриваемой задачи может быть очень сложной и, в некотором смысле, хаотической. Этот случай близок к тому, который был рассмотрен в предыдущем разделе. Отличие будет заключаться, прежде всего, в том, что это хорошо изученная физическая задача. Второе отличие будет заключаться в том, что фазовые траектории изучаемой системы не будут строго проходить через особые решения. Эти траектории будут проходить близко к области нарушения теоремы единственности, не попадая в нее непосредственно. Необходимая для реализации хаотических режимов величина близости будет определяться параметрами системы, точностью проводимых численных расчетов и величиной малых внешних возмущений. Третье отличие заключается в том, что в рассматриваемой задаче появляются особые решения укороченной модели (2.81).

Проиллюстрируем эти особенности. Для этого введем кулоновский (для движения заряженных частиц) или гравитационный (задача Кеплера) потенциал: $U = -Q/r$. Кроме того, для дальнейшего удобно ввести следующие параметры: $M/m = a$; $Q/m = b$. Наиболее интересной является третья особенность. Поэтому начнем анализ с нее. Для кулоновского потенциала система ОДУ (2.81) имеет простое аналитическое выражение для общего решения. Это решение выражает связь между радиусом и угловой переменной. Запишем общее решение в виде, которое представлено у Ландау [58]:

$$r = p / [1 + e \cos(\varphi + C)]. \quad (2.82)$$

Здесь $p = M^2 / mQ$, $e = \sqrt{1 + (2EM^2) / mQ^2}$ – эксцентриситет.

Используя процедуру нахождения особых решений, которая описана в разделе 7.2, в данном случае легко найти следующие значения для константы C :

$$C = -\varphi + n\pi. \quad (2.83)$$

Подставляя это выражение для константы C в общее решение (2.82), найдем следующие выражения для особых решений:

$$r_s = p / [1 \pm e]. \quad (2.84)$$

Эти решения не содержатся в общем решении. Однако они удовлетворяют системе уравнений (2.81). Кроме того, легко увидеть, что в точках этих решений нарушается условие Липшица. Поэтому эти решения являются особыми решениями. Легко также увидеть, что точки особого решения для захваченных частиц ($E < 0$) являются точками возврата. Таким образом, динамика частиц в этих точках должна приобретать некоторые особенности. Отметим также, что, несмотря на тот факт, что особые решения удовлетворяют уравнениям (2.81), эти решения не удовлетворяют полной системе уравнений (2.79). Действительно, в этих точках, в общем случае, на частицу действует сила не равная нулю (см. второе уравнение системы (2.79)). Поэтому полученные особые решения можно назвать условно особыми. Представляет интерес изучить те особенности динамики частиц, которые порождаются этими особыми решениями. Прежде всего, рассмотрим тот случай, который соответствует равенству нулю эксцентриситета ($e = 0$), т.е. рассмотрим динамику частицы на круговой орбите. При этом два особых решения сливаются.

Анализ динамики проведем численными методами. В первом случае выберем начальные условия, которые соответствуют строгому положению частицы на круговой орбите: $r(0) = 0.125$. Параметры системы выбраны равными: $a = 0.5$, $b = 2$. При этих значениях параметров и начальных значениях динамика частиц абсолютно устойчива. В динамике не наблюдается ни колебаний, ни отклонений от круговой орбиты. Радиус траектории не меняется на всех интервалах времени. Время счета практически неограниченно. Однако достаточно незначительно изменить начальное положение частицы, как ее динамика становится неустойчивой (при тех же параметрах численных расчетов). В качестве примера на рисунке 2.11 представлены результаты расчетов при $r(0) = 0.1249$, т.е. изменили начальное положение радиуса всего на $\Delta r(0) = 10^{-4}$. Из рисунка видно, что уже после безразмерного времени 400 радиус частицы начинает быстро расти. Увеличение точности расчетов на два порядка ($TOL = 10^{-6}$) позволяет избежать этой неустойчивости. Однако и в этом случае характер отражения частиц от точек поворота во многом носит случайный характер. Для иллюстрации этого факта на рисунках представлены зависимость радиуса частицы от времени (рисунок 2.12) и корреляционная функция этого движения (рисунок 2.13) при начальном положении частицы $r(0) = 0.075$. Видно, что положение частицы при ее отражении от стенок эффективного потенциала носит случайный характер. Этот факт отражается при статистической обработке. На рисунке 2.13 представлена автокорреляционная функция радиальной динамики частицы. Видно, что корреляции достаточно быстро спадают.

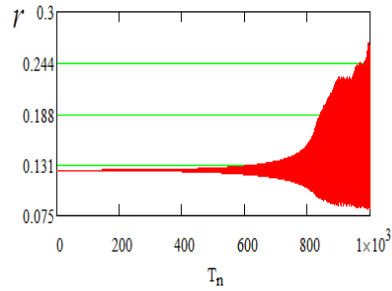


Рис. 2.11. Возникновение неустойчивой динамики частицы при незначительном отклонении ее начального положения ($\Delta r(0) = 10^{-4}$) от круговой орбиты

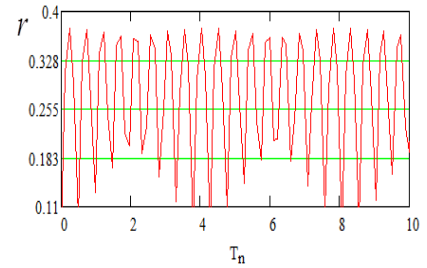


Рис. 2.12. Радиальная динамика частиц. Неустойчивость подавлена. Однако видно, что процесс отражения от стенок эффективного потенциала не является строго регулярным

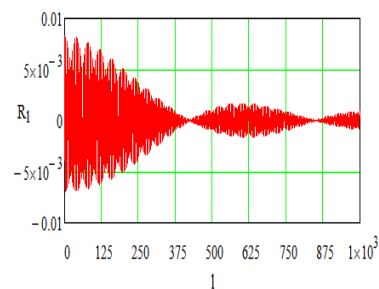


Рис. 2.13. Автокорреляционная функция переменной r

Интересно отметить некоторую асимметрию динамики частицы при уменьшении начального радиуса и при увеличении начального радиуса на ту же величину: $r(0) = 0.175$ (смотри рис. 2.14 и 2.15).

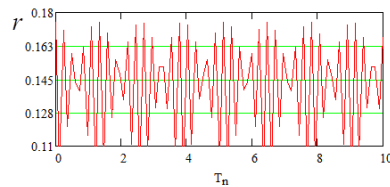


Рис. 2.14. Радиальная динамика частицы при $r(0) = 0.175$. Динамика и процесс отражения от стенок эффективного потенциала отличаются от случая $r(0) = 0.075$

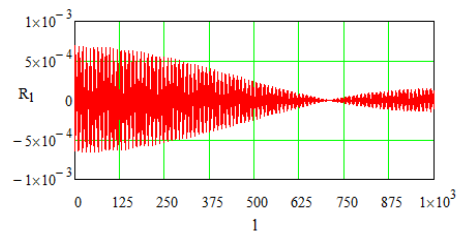


Рис. 2.15. Автокорреляционная функция переменной r . Начальное положение частицы равно $r(0) = 0.075$

Несмотря на кажущееся усложнение динамики, эта динамика оказывается более регулярной. Действительно, в этом случае корреляции сохраняются на больших временах (смотри рисунок 2.15).

Рассмотрим теперь влияние асимметрии формы притягивающего центра и влияние малых возмущения. Для этого в правую часть второго уравнения (2.79) введем добавочный член: $[-\beta \cdot \cos(\omega \cdot t) / x_0^{\gamma}]$. Если $\gamma = 0$ и $\omega \neq 0$, то этот член учитывает внешнее периодическое возмущение. Если же $\gamma = 4, \omega = 0$, то он описывает влияние асимметрии формы притягивающего тела.

Вначале рассмотрим динамику системы (2.79) при отсутствии всяких возмущений $\beta = 0$. Точность расчетов высокая ($TOL=TOL=10^{-15}$). Выберем следующие параметры системы (2.79): $r(0) = 10$; $\dot{r}(0) = 0.1$; $\varphi(0) = 0$; $a = 0.3$; $b = 2$. Характерные результаты численных расчетов кеплеровской динамики системы (2.79) представлены на рисунках 2.16-2.20.

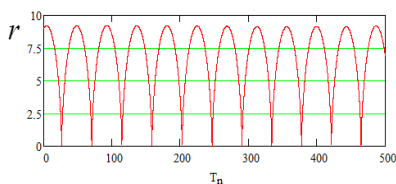


Рис. 2.16. Характерная зависимость от времени расстояния частицы от притягивающего центра

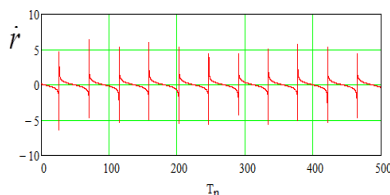


Рис. 2.17. Характерная зависимость скорости частицы от времени

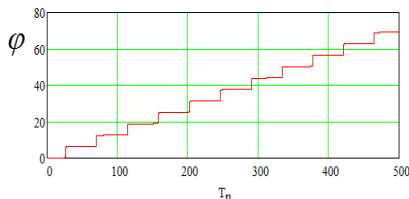


Рис. 2.18. Характерная зависимость фазы частицы от времени

Для дополнительной иллюстрации регулярной динамики частицы на рисунках 2.20 и 2.21 представлены результаты влияния асимметричности формы притягивающего центра. Известно, что отклонение притягивающего потенциала от сферически-симметричной формы приводит к повороту перигелия на угол, отличный от 2π . Кроме того, такая же особенность движения перигелия наблюдается при учете эффектов релятивизма. Возникает так называемая розеточная траектория Зоммерфельда (см. рис. 2.21).

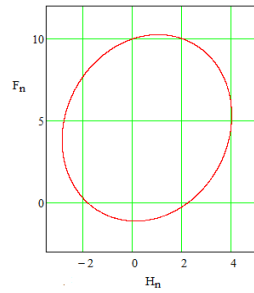


Рис. 2.19. Классическая эллиптическая траектория Кеплера.

Параметры системы (2.79): $r(0) = 10$;
 $\dot{r}(0) = 0.1$; $\varphi(0) = 0$;
 $\beta = 0$; $F_n = r \cdot \cos \varphi$;
 $H_n = r \cdot \sin \varphi$

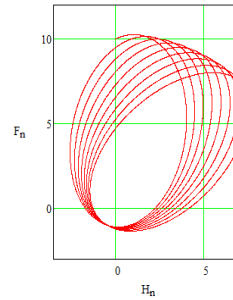


Рис. 2.20. Появление розеточной траектории.

Параметры системы (2.79): $r(0) = 10$;
 $\dot{r}(0) = 0.1$;
 $\varphi(0) = 0$; $\beta = 0.1$;
 $a = 2$; $b = 2$; $\omega = 0$, $\gamma = 4$

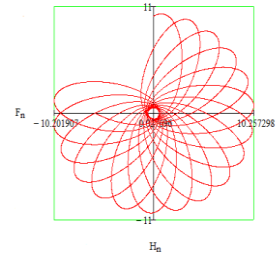


Рис. 2.21. Розеточная траектория, аналогичная траектории Зоммерфельда.

Параметры системы (2.79): $r(0) = 10$;
 $\dot{r}(0) = 0.1$; $\varphi(0) = 0$;
 $\beta = 0.1$; $\omega = 0$, $\gamma = 4$;
 $a = 1.5$; $b = 2$

Из приведенных рисунков видно, что динамика регулярная. Причем можно показать, что чем меньше будет величина углового момента импульса (параметр a), тем ближе траектории легкой частицы будут подходить к притягивающему центру. Координаты притягивающего центра представляют собой особое решение. В этой точке нарушается теорема единственности. Рисунки 2.20 и 2.21 иллюстрируют тот факт, что интегральные кривые в окрестности этой точки «сгущаются». Поэтому даже небольшое возмущение траекторий в этой области может переводить движущееся тело с одной траектории на другую траекторию, положения которых в другой области фазового пространства существенно отличаются. Силы, которые перебрасывают движущееся тело с одной траектории на другую, могут быть очень малы и в общем случае могут быть случайными. Но даже в том случае, когда они регулярные, но периодические, и период этих сил не совпадает с периодом движения тела вокруг притягивающего центра, динамика движущегося тела может оказаться случайной. Действительно, введем малое регулярное периодическое возмущение потенциала: $\beta = 0.0001$; $\gamma = 4$ $\omega = 10$. Такое возмущение потенциала может соответствовать потенциалу иона во внешнем периодическом электрическом поле. Остальные параметры системы (2.79) равны: $r(0) = 10$;
 $\dot{r}(0) = 0.1$; $\varphi(0) = 0$; $a = 0.3$; $b = 2$; (TOL=TOL=10⁻⁶). Характерная динамика движущегося тела в этом случае представлена на рисунках 2.22-2.24. Из этих рисунков видно, что движущееся тело случайным образом перескакивает с одной траектории на другую траекторию. Спектры этого движения широкие, а корреляционная функция быстро спадает. Если численные расчеты проводить при меньшей степени точности, то аналогич-

ная картина (возникновение нерегулярной динамики) появляется и в отсутствие внешнего возмущения.

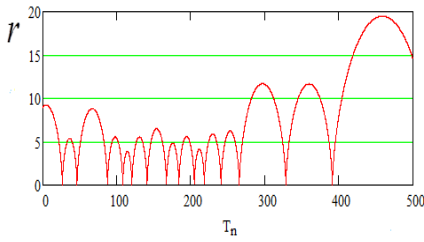


Рис. 2.22. Характерная временная зависимость расстояния частицы от притягивающего центра

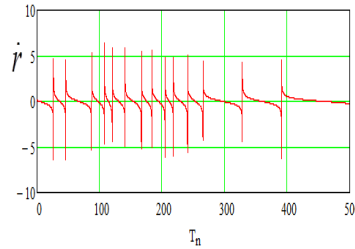


Рис. 2.23. Характерная зависимость скорости частицы от времени

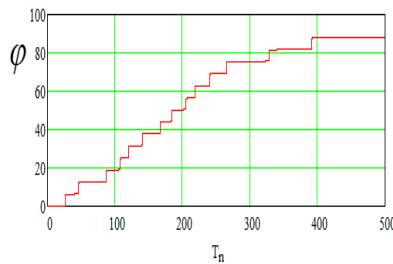


Рис. 2.24. Характерная зависимость фазы частицы от времени

Выше уже упоминалось, что чем ближе траектория частицы подходит к притягивающему центру, тем чувствительнее ее динамика к внешним возмущениям. В качестве дополнительной иллюстрации этого факта ниже приведена зависимость радиуса частицы от времени в отсутствие возмущения (рисунок 2.25). Чтобы частица достаточно близко подходила к области особого решения, были выбраны следующие параметры системы: $a = 0.01$, $b = 2$, $\beta = 0$, $\gamma = 4$, $\omega = 8$, $r(0) = x_0(0) = 5$, $\text{STOL} = \text{TOL} = 10^{-15}$, число шагов равно $N = 3.277 \cdot 10^4$.

На тех же временах, при тех же значениях параметров было введено чрезвычайно малое возмущение $\beta = 10^{-9}$. На рисунке 2.26 видно, что наличие такого возмущения приводит к развитию неустойчивости. Радиус частицы начинает расти. Расчеты проводились до времени, меньшего 250. При больших временах частица уходила на бесконечность.

Таким образом, проводить анализ траектории частиц при параметрах, когда частица близко подходит к точкам особых решений, нужно с большой осторожностью. Неучтенные в модели, даже очень малые члены, могут радикально изменить динамику частиц.

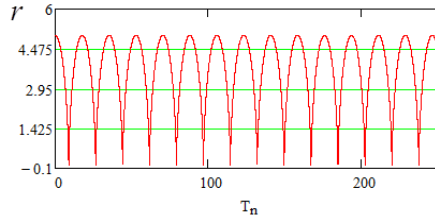


Рис. 2.25. Зависимость от времени Расстояния частицы от притягивающего центра в отсутствие возмущения ($\beta = 0$)

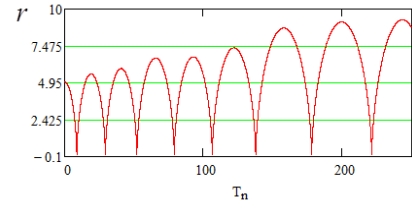


Рис. 2.26. Зависимость от времени Расстояния частицы от притягивающего центра при наличии малого возмущения ($\beta = 10^{-9}$)

Динамика более сложных систем. Динамика трехволнового взаимодействия. Вторым, хорошо изученным физическим процессом, на динамику которого может существенно повлиять учет особых решений, является процесс нелинейного трехволнового взаимодействия. При формулировке математической модели такого взаимодействия часто используется замена зависимых переменных в виде:

$$A_k = a_k \exp(i \cdot \varphi_k). \quad (2.85)$$

Здесь a_k , φ_k – действительная амплитуда и фаза комплексной переменной A_k .

Такая замена очень широко распространена. Примерами таких преобразований могут быть преобразования, которые осуществляются при переходе от уравнений квантовой механики к уравнениям Гамильтона–Якоби классической механики. Кроме того, такие преобразования широко используются в радиофизике, электронике, в физике плазмы. Во всех этих случаях системы уравнений, которые описывают изучаемый процесс в новых переменных, содержат области, в которых нарушается теорема единственности. С этими областями могут быть связаны особенности динамики изучаемых процессов. Ниже на примере нелинейного взаимодействия трех волн в нелинейных средах (в частности, в плазме) покажем, какие при этом могут возникнуть особенности.

Для определенности будем следовать результатам, которые изложены в работе [59]. В этой монографии получена система уравнений, описывающая динамику комплексных амплитуд трех взаимодействующих волн в плазме. Эту систему уравнений можно представить в следующем виде:

$$\dot{x}_0 = -x_1 x_2 \cos x_3; \quad \dot{x}_1 = x_0 x_2 \cos x_3; \quad \dot{x}_2 = x_1 x_0 \cos x_3; \quad (2.86)$$

$$\dot{x}_3 = \Delta \omega - \left[\frac{x_0 x_1}{x_2} + \frac{x_0 x_2}{x_1} - \frac{x_2 x_1}{x_0} \right] \sin x_3 + \delta \cos \omega t.$$

Здесь $x_k = a_k$; $k = \{0; 1; 2\}$ – модули комплексных амплитуд взаимодействующих волн; $x_3 = \varphi_0 - \varphi_1 - \varphi_2 + \Delta\omega \cdot t$; φ_k ; $k = \{0; 1; 2\}$ – действительные фазы взаимодействующих волн.

Если $\Delta\omega = 0$; $\delta = 0$, то система уравнений (2.86) имеет следующие интегралы:

$$x_0^2 + x_1^2 = M_1 = const ; \quad x_0^2 + x_2^2 = M_2 = const . \quad (2.87)$$

Система уравнений (2.86) при $\delta = 0$ детально изучена во многих работах и монографиях. Ниже нас будет интересовать влияние именно этого малого добавочного возмущения на динамику взаимодействия волн.

Из вида системы (2.86) сразу видно, что в точках фазового пространства, где амплитуды взаимодействующих волн стремятся к нулю, теорема единственности будет нарушаться. Кроме того, из этой же системы видно, что координаты этих точек являются решениями системы (2.86). Особыми решениями. В реальной динамике взаимодействия волн фазовые траектории только приближаются к этим точкам. Ситуация во многом аналогична той, которая была описана в предыдущем разделе относительно задачи Кеплера. При прохождении фазовых траекторий вблизи этих точек незначительные, чаще всего малые, неучтенные силы, могут приводить к радикальному изменению динамики. Эти особенности необходимо иметь в виду. Чтобы проиллюстрировать такое влияние малых сил, рассмотрим динамику системы уравнений (2.86) при наличии малого периодического возмущения. Сравним динамику системы (2.86) в отсутствие малого возмущения и при его наличии. Начальные условия для всех случаев выберем в неустойчивой зоне: $x_0 = 0.999$; $x_1 = 0.01$; $x_2 = 0.044$; $x_3 = -0.01$; $\Delta\omega = 0$; ($m=14$; $TOL=STOL=10^{-5}$).

Прежде всего, рассмотрим случай отсутствия возмущения ($\delta = 0$). Результаты численного исследования системы (2.86) в этом случае представлены на рисунках 2.27–2.29. На этих рисунках представлена характерная динамика изменения взаимодействующих амплитуд, а также их статистическая обработка (спектры и автокорреляционная функция). Видна хорошо известная регулярная временная динамика взаимодействующих волн: амплитуды периодически меняются. Спектры узкие, корреляционная функция осциллирует, но максимальная амплитуда ее не меняется. На рис. 2.33 видно хорошее выполнение закона сохранения $M_1 = const$. При выбранных начальных значениях амплитуды взаимодействующих волн достаточно близко приближаются к области нарушения теоремы единственности. Можно ожидать, что при недостаточной точности проведения численных расчетов амплитуды будут попадать в эти области и, как результат, динамика может стать нерегулярной. Действительно, такой процесс имеет место. Однако мы сконцентрируем свое внимание на том случае, когда точность расчета высока, но на си-

стему может действовать малая, в модели неучтенная внешняя сила. Такая ситуация представляет наибольший интерес, так как высокая степень точности численных расчетов может приводить к необоснованной уверенности, что мы в своих исследованиях получаем правильную динамику. Оказывается, что очень малые внешние силы могут серьезно нарушить эту динамику.

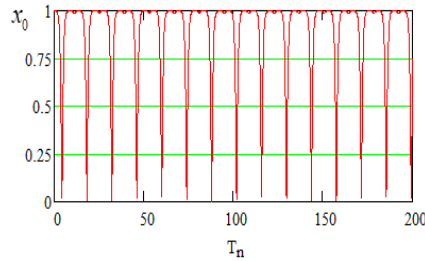


Рис. 2.27. Зависимость амплитуды распадающейся волны от времени

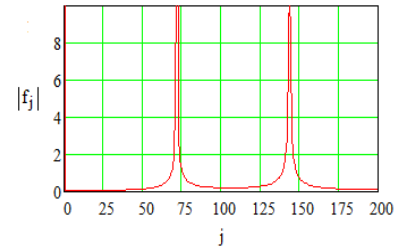


Рис. 2.28. Вид спектра переменной x_0

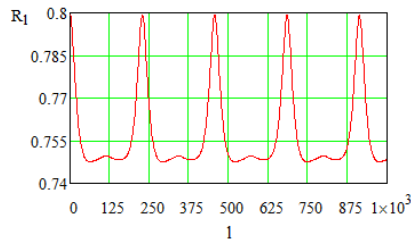


Рис. 2.29. Автокорреляционная функция переменной x_0

Проиллюстрируем сказанное выше расчетами системы уравнения (2.86) при учете малого внешнего возмущения. Будем считать, что амплитуда этого возмущения и его частота равны $\delta = 0.001$; $\omega = 1$. Результаты расчетов этой системы приведены на рисунках 2.30-2.32. Из этих рисунков видно, что динамика уже стала менее регулярной. Спектры значительно расширились, а корреляционная функция достаточно быстро спадает. Все это говорит о том, что в данных условиях учет даже незначительных внешних добавочных сил может приводить к качественному изменению динамики взаимодействия волн.

Рисунки 2.33 и 2.34 демонстрируют изменения величины M_1 . В отсутствие возмущения эта величина является интегралом и практически не меняется. При наличии возмущения (см. рис. 2.34) эта величина изменяется только на величину, пропорциональную этому возмущению.

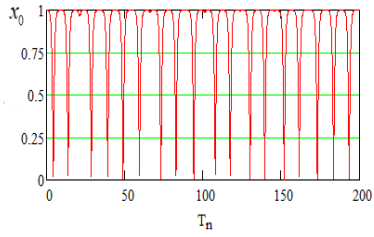


Рис. 2.30. Зависимость амплитуды распадающейся волны от времени

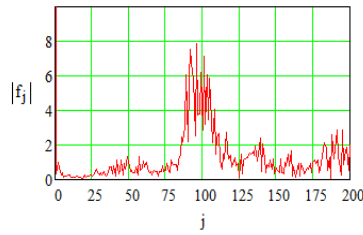


Рис. 2.31. Вид спектра переменной x_0 при наличии возмущения

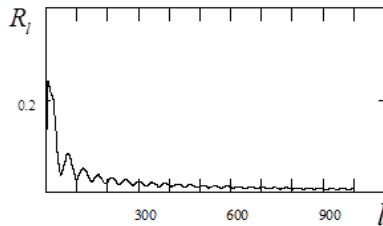


Рис. 2.32. Автокорреляционная функция переменной x_0

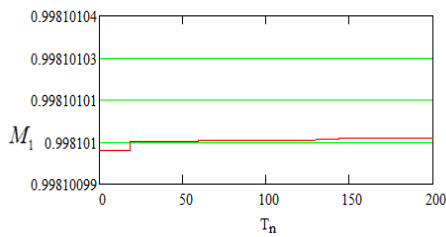


Рис. 2.33. Демонстрация закона сохранения $M_1 = const$

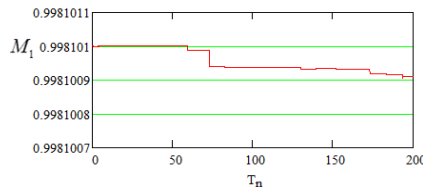


Рис. 2.34. Изменение величины M_1 при наличии возмущения

Хаотическая динамика, порождаемая линейными системами.

Пример. Динамика трех связанных линейных осцилляторов. Пример, который мы хотим рассмотреть, относится к возникновению динамического хаоса в линейных системах. На этом примере постараемся найти те дополнительные условия, которые необходимы для реализации режимов с динамическим хаосом. В работах [60–62] было показано, что многие динамические системы, которые описываются системой линейных уравнений, могут иметь режимы с динамическим хаосом. Такая возможность возникала в тех случаях, когда в исходных линейных дифференциальных уравнениях делалась замена зависимых переменных. Причем эта замена была такова, что исходная линейная система уравнений превращалась в систему нелинейных уравнений. Режимы с динамическим

хаосом в таких нелинейных системах широко распространены. Ниже мы покажем, что возможной причиной динамического хаоса в таких системах являются именно введенные замены переменных. Якобиан таких преобразований в определенных точках фазового пространства обращается в бесконечность. Кроме того, динамика изучаемой системы характеризуется нелинейными резонансами, которые могут перекрываться. Каждая из этих особенностей динамики может определять хаотическую динамику изучаемых линейных систем.

Рассмотрим наиболее простой пример, в котором содержатся указанные особенности. Рассмотрим случай динамики трех взаимодействующих линейных осцилляторов. Будем считать, что два из них одинаковые, а частота третьего слегка отличается от частоты первых двух ($\omega_1 = \omega_0 = \omega$, $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$). Кроме того, мы будем считать, что коэффициенты связи между осцилляторами малы. В этом случае динамика таких осцилляторов может описываться следующей системой уравнений:

$$\ddot{q}_0 + q_0 = -\mu_1 q_1 - \mu_2 q_2; \quad \ddot{q}_1 + q_1 = -\mu_1 q_0; \quad \ddot{q}_2 + (1 + \delta)q_2 = -\mu_2 q_0, \quad (2.88)$$

где $\dot{q} \equiv \frac{dq}{d\tau}$, $\tau = \omega \cdot t$, $\delta \equiv 2\Delta\omega / \omega$, $\mu_i \equiv \mu_i / \omega^2$, $\mu_i \ll 1$, $\delta \ll 1$.

В уравнении (2.88) введены безразмерные коэффициенты связи. Так как правые части (коэффициенты связи) системы уравнений малы, то решение системы уравнений (2.88) удобно искать в виде:

$$q_i = A_i(\tau) \exp(i\omega t). \quad (2.89)$$

В решении (2.89) зависимость комплексных амплитуд $A_i(\tau)$ от времени обусловлена наличием связи между осцилляторами. В том случае, когда эта связь мала, можно считать, что эти амплитуды являются медленно меняющимися функциями. В этом случае для нахождения медленно меняющихся комплексных амплитуд можно воспользоваться методом усреднения. В результате получим следующую систему укороченных уравнений для нахождения этих амплитуд:

$$2i\dot{A}_0 = -\mu_1 A_1 - \mu_2 A_2 \exp(i\delta\tau); \quad 2i\dot{A}_1 = -\mu_1 A_0; \quad (2.90)$$

$$2i\dot{A}_2 = -\mu_2 A_0 \exp(-i\delta\tau).$$

Из (2.90) следует следующая связь между квадратами комплексных амплитуд:

$$\frac{d}{d\tau} [A_0^2 - A_1^2 - A_2^2] = 2 \cdot \mu_2 \cdot A_0 A_2 \sin(\delta\tau).$$

Из этого соотношения следует, что если расстройка по частоте равна нулю ($\delta = 0$), то система (2.90) имеет всего одну степень свободы. Раз-

витие хаотической динамики в такой системе возможно только при наличии особых решений. Мы хотим рассмотреть более общую ситуацию, когда использованная замена не только порождает особые решения, но приводит к возникновению нелинейных резонансов и к возможности их перекрытия. Ниже мы увидим, что именно расстройка определяет расстояние между нелинейными резонансами.

Для дальнейшего анализа динамики комплексных амплитуд $A_i(\tau)$ представим их в виде:

$$A_i(\tau) = a_i(\tau) \exp(i\varphi(\tau)). \quad (2.91)$$

Здесь a_i , φ_i – действительные амплитуды и действительные фазы.

Именно замена комплексных амплитуд $A_i(\tau)$ на действительную амплитуду и фазу, как мы увидим ниже, является источником динамического хаоса. Якобиан такого преобразования в некоторых точках обращается в бесконечность (смотри (2.98) и текст ниже). Подставим (2.91) в (2.90). Тогда для нахождения действительных амплитуд и фаз получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= -(\mu_1/2)a_1 \cdot \sin(\Phi) - (\mu_2/2) \cdot a_2 \cdot \sin(\Phi_1) ; \\ \dot{a}_1 &= (\mu_1/2)a_0 \cdot \sin(\Phi) ; \\ \dot{a}_2 &= (\mu_2/2)a_0 \cdot \sin(\Phi_1) ; \\ \dot{\Phi} &= (\mu_1/2) \left(\frac{a_0}{a_1} - \frac{a_1}{a_0} \right) \cos(\Phi) - (\mu_2/2) \left(\frac{a_2}{a_0} \right) \cos(\Phi_1) , \\ \dot{\Phi}_1 &= (\mu_2/2) \left(\frac{a_0}{a_2} - \frac{a_2}{a_0} \right) \cos(\Phi_1) - (\mu_1/2) \left(\frac{a_1}{a_0} \right) \cos(\Phi) + \delta , \end{aligned} \quad (2.92)$$

где $\Phi \equiv \varphi_1 - \varphi_0$, $\Phi_1 \equiv \varphi_2 - \varphi_0 + \delta\tau$.

Из первых трех уравнений этой системы следует следующий интеграл:

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 = const . \quad (2.93)$$

Интеграл (2.93) практически является интегралом энергии и указывает, что энергия от одного осциллятора может переходить ко второму или третьему осциллятору и наоборот. Динамика такой перекачки, в общем случае, может быть сложной.

Критерий возникновения динамического хаоса. Представляет интерес найти аналитические условия, при выполнении которых динамика нелинейной системы (2.92) будет хаотической. Для этого вначале предположим, что имеется только два осциллятора – первый и второй. Тре-

тый осциллятор отсутствует ($A_2 = 0$). В этом случае из системы уравнений (2.90) следует:

$$A_0^2 - A_1^2 = \text{const}. \quad (2.94)$$

В этом случае динамика комплексных амплитуд A_0 и A_1 очень простая. Они осциллируют с частотой $\mu/2$. Динамика же действительных амплитуд a_i и действительных фаз Φ и Φ_1 значительно более сложная. Действительно, из системы (2.92) можно получить следующее уравнение для нахождения фазы Φ :

$$\ddot{\Phi} = -\frac{\mu_1^2}{8} \left[\frac{(a_0^2 + a_1^2)^2 + (a_0^2 - a_1^2)^2}{a_0^2 a_1^2} \right] \sin(2\Phi). \quad (2.95)$$

Уравнение (2.95) представляет собой уравнение математического маятника, амплитуда которого, в свою очередь, описывается первыми двумя уравнениями системы (2.92). Таким образом, для определения фазы Φ мы получили достаточно сложное нелинейное уравнение. Впрочем, в случае существования только двух связанных осцилляторов мы качественно знаем динамику поведения действительных амплитуд a_i . Она заключается в том, что если в начальный момент времени колебался первый осциллятор, а амплитуда колебаний второго была достаточно мала, то по истечении времени $\tau \sim 2/\mu_1$ амплитуда первого будет стремиться к нулю, в то время как амплитуда второго достигнет своего максимального значения, равного единице. При этом квадратная скобка в уравнении (2.95) по абсолютной величине будет всегда больше единицы. Таким образом, минимальную ширину нелинейного резонанса можно оценить величиной $\Delta \sim \mu_1$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда отсутствует второй осциллятор ($A_1 = 0$). При этом происходит взаимодействие первого и третьего осцилляторов. Уравнение для фазы Φ_1 в этом случае будет иметь вид:

$$\ddot{\Phi}_1 = -\frac{\mu_2^2}{8} \left[\frac{(a_0^2 + a_2^2)^2 + (a_0^2 - a_2^2)^2}{a_0^2 a_2^2} \right] \sin(2\Phi_1) - \frac{\mu_2 \delta}{2} \left(\frac{a_0^2 - a_2^2}{a_0 a_2} \right) \sin(\Phi_1). \quad (2.96)$$

Уравнение (2.96) отличается от уравнения (2.95) прежде всего наличием последнего члена, который обусловлен наличием расстройки частот взаимодействующих осцилляторов. В отсутствие этой расстройки уравнение (2.96) переходит в уравнение (2.95) при естественной замене $a_2 \rightarrow a_1$. Уравнение (2.96) также представляет собой уравнение нелинейного осциллятора, структура которого, однако, значительно более

сложная, чем структура нелинейного осциллятора (2.95). Однако и в этом случае мы знаем качественную динамику действительных амплитуд a_i . Поэтому, также как и в предыдущем случае, мы можем оценить минимальную ширину нелинейного резонанса: $\Delta_1 \sim \mu_2$.

Естественно ожидать, что когда нелинейные резонансы пересекутся, т.е. когда будет выполнено условие $(\mu_1 + \mu_2) > \delta$, то динамика системы (2.92) будет хаотической. Численные расчеты системы (2.92) полностью подтверждают этот вывод (см., например, [60-62]). Действительно, спектры динамики при выполнении этих условий оказываются широкими, корреляционные функции быстро спадают, главные показатели Ляпунова положительны.

Инвариантная мера как критерий возникновения хаотической динамики при замене переменных. Рассмотренные выше примеры являются достаточно простыми. Известен аналитический вид интегральных кривых этих систем. Этот факт позволил определить решения, в которых теорема единственности не выполняется. В более сложных случаях такая возможность возникает довольно редко, поэтому хотелось бы найти более простые и общие критерии, которые позволят определить области фазового пространства, в которых возможно проявление элементов непредсказуемости. Одна из возможностей заключается в использовании инвариантной меры. Действительно, введем меру «отрезка» $\Delta\vec{x}$: $\Delta\mu = p(\vec{x}_i) \cdot \Delta\vec{x}$. Здесь $p(\vec{x}_i)$ – плотность вероятности нахождения изображающей точки в этом отрезке. Пусть в результате временной динамики рассматриваемой системы точка \vec{x}_i переходит в точку \vec{z} (или в результате замены переменных). Таким образом, имеем $\vec{z} = f(\vec{x}_i)$ – образ точки \vec{x}_i ; \vec{x}_i – прообраз точки \vec{z} . Прообразов может быть много. Рассмотрим теперь некий «отрезок» $\Delta\vec{z}$: $([\vec{z} - \Delta\vec{z}/2; \vec{z} + \Delta\vec{z}/2])$. Мера этого отрезка теперь будет определяться формулой:

$$\Delta\mu_z = g(\vec{z}) \cdot \Delta\vec{z} = \sum_i p(\vec{x}_i) \cdot \Delta\vec{x}_i. \quad (2.97)$$

Здесь $g(\vec{z})$ – плотность вероятности нахождения изображающей точки в фазовом объеме $\Delta\vec{z}$. Из этой формулы находим выражение для плотности $g(\vec{z})$:

$$g(\vec{z}) = \sum_i p(\vec{x}_i) \frac{\Delta\vec{x}_i}{\Delta\vec{z}} = \sum_i \frac{p(\vec{x}_i)}{|J_i|}. \quad (2.98)$$

Здесь J_i – якобиан преобразования новых переменных через старые переменные.

Формула (2.98) практически является формулой Перрона–Фробениуса. Из этой формулы видно, что в тех областях, где якобиан преобразования будет иметь какие-то особенности (например, обращаться в бесконечность или в ноль), можно ожидать, что соотношения между исходными плотностями вероятностей и преобразованными станут неопределенными. Эти области могут быть источниками динамического хаоса.

Рассмотрим в качестве примера наиболее часто используемую и наиболее важную замену. Пусть имеется зависящая переменная $\vec{x} = (A', A'')$. Здесь $A = A' + iA''$. Произведем замену: $A = A' + iA'' = a \cdot \exp(i\varphi)$. Здесь a – амплитуда комплексной амплитуды A : $a = \pm\sqrt{A'^2 + A''^2}$, $\varphi = \arctg(A''/A')$ – фаза этой переменной. Легко проверить, что в этом случае $J = 1/a$. Таким образом, если $a \rightarrow 0$, то мы попадаем в область непредсказуемости. Этот результат соответствует тому результату из предыдущего раздела, что при таких преобразованиях точки фазового пространства, в которых $a \rightarrow 0$, соответствуют точкам особых решений.

Отметим также, что рассмотренное преобразование описывает переход от квантового рассмотрения к классическому рассмотрению. При этом условие $a \rightarrow 0$ соответствует стремлению к нулю скорости частицы. Этот факт соответствует известному результату, что переходы от квантового рассмотрения к классическому рассмотрению для частиц с нулевыми скоростями не корректен.

Выше было рассмотрено преобразование, которое наиболее часто встречается в физике, особенно в радиофизике. Кроме этого преобразования часто используют преобразование, которое переводит линейное уравнение второго порядка к уравнению Риккати. Это уравнение первого порядка, но уже нелинейное. Можно ожидать, что при такой замене переменных также могут возникнуть хаотические режимы. Покажем, что замена, которая приводит к уравнению Риккати, эквивалентна той, которая использована выше. Действительно, пусть имеем уравнение $\ddot{x} + \Omega^2 x = 0$. Используем замену $x_0 = \dot{x}/x$. Тогда это линейное уравнение преобразуется в нелинейное уравнение Риккати:

$$\dot{x}_0 = -x_0^2 - \Omega^2. \quad (2.99)$$

Заметим, что старая зависящая переменная связана с новой зависимой переменной соотношением: $x(t) = a \cdot \exp \int_0^t x_0(t) dt$.

Представим комплексную функцию x_0 в таком виде: $x_0 = i\Omega + \alpha(t) + i\delta(t)$. Здесь $\alpha = \text{Re } x_0$, $\Omega + \delta(t) = \text{Im } x_0$. Тогда выражение для старой зависимой переменной можно переписать в виде:

$$x(t) = A(t) \exp(i\Omega t + i\beta(t)). \quad (2.100)$$

$$\text{Здесь } A(t) = a \exp\left(\int_0^t \alpha dt\right), \quad a = \text{const}, \quad \beta(t) = \int_0^t \delta(t) dt.$$

Легко видеть, что выражение для старой комплексной переменной $x(t)$ через новые переменные совпадает с выражением, которое было использовано выше.

В качестве еще одного примера рассмотрим образование каустик в геометрической оптике. Решения дифференциальных уравнений в геометрической оптике могут быть представлены в следующем виде:

$$\vec{r} = \vec{R}(\xi, \eta, s), \quad \vec{p} = \vec{P}(\xi, \eta, s). \quad (2.101)$$

Здесь $\vec{r} = \vec{r}(s)$ – траектория луча; \vec{p} – импульс луча; ξ, η, s – лучевые координаты луча.

Отметим, что лучевые координаты определяются на поверхности источника лучей. При этом можно считать, что координаты ξ и η «нумеруют» лучи, которые покидают исходную поверхность, а координата s определяет длину дуги луча. Уравнения (2.101) определяют семейство лучей, которое порождается заданным распределением поля на исходной поверхности. Можно сказать, что уравнения (2.101) описывают связь лучевых координат с декартовыми координатами. При этом, как известно, на каустиках якобиан преобразования декартовых координат через лучевые координаты должен обращаться в ноль (см., например, [64]). Дальнейшая траектория лучей, прошедших через каустику, будет таковой, что ее детерминант преобразования декартовых координат через каустические координаты будет обращаться в бесконечность. При этом, если при подходе к каустикам динамика лучей была полностью детерминированной, т.е. ее плотность вероятности можно выразить через дельта-функцию: $p(\vec{x}_i) \sim \delta(\vec{x}_i - \vec{x}_i(t))$, то в соответствии с формулой (2.98) плотность вероятности $g(\vec{z})$ в окрестности каустик становится неопределенной. Таким образом, находясь в рамках геометрической оптики, на каустиках можно терять некоторую информацию об индивидуальных лучах. Следует, однако, обратить внимание, что на каустиках происходит группировка лучей только в конфигурационном пространстве. В общем случае, лучи, входящие в каустику, имеют разные наклоны (импульсы). Более того, если уравнения, которые описывают динамику лучей, являются гамильтоновскими, то сжатие конфигурационного пространства автоматически приводит к расширению этого пространства в импульсном направлении. Как результат, полный фазовый объем должен сохраняться. Поэтому можно ожидать, что при прохождении каустик будет потеряна информация только «нумерации» лучей. Однако этот вопрос требует дополнительного рассмотрения.

Скрытая динамика. В настоящем подразделе показано, что использование особых решений позволяет практически любую регулярную функцию представить в виде некоторой комбинации функций, динамика которых хаотична. Для этого рассмотрим такую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x. \quad (2.102)$$

Эта система представляет собой уравнения линейного осциллятора. Нас будет интересовать случай, когда эти переменные представляют собой комплексные функции. Кроме того, нас будут интересовать такие замены, которые приводят к возникновению хаотической динамики. Если воспользоваться тривиальной заменой $x = x_R + i \cdot x_I$, $y = y_R + i \cdot y_I$, то, как легко видеть, действительные и мнимые компоненты разделяются. Действительно:

$$\dot{x}_R = y_R, \quad \dot{y}_R = -x_R. \quad (2.103)$$

$$\dot{x}_I = y_I, \quad \dot{y}_I = -x_I. \quad (2.104)$$

В этом случае динамика реальной и мнимой частей представляют собой динамику линейного осциллятора. Новой динамики не возникает.

Новая динамика возникает при другой замене зависимых переменных. А именно при заменах:

$$x = x_0 \cdot \exp(i \cdot x_2), \quad y = x_1 \cdot \exp(i \cdot x_3). \quad (2.105)$$

Здесь $x_k(t)$ – действительные функции; $k = \{0, 1, 2, 3\}$.

Подставляя (2.105) в (2.102), получим следующую систему ОДУ для нахождения новых зависимых переменных $x_k(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= x_1 \cos(x_3 - x_2), & \dot{x}_1 &= -x_0 \cos(x_3 - x_2), \\ \dot{x}_2 &= \frac{x_1}{x_0} \sin(x_3 - x_2), & \dot{x}_3 &= \frac{x_0}{x_1} \sin(x_3 - x_2). \end{aligned} \quad (2.106)$$

Эти четыре уравнения можно переписать в виде трех уравнений:

$$\dot{x}_0 = x_1 \cos \Phi; \quad \dot{x}_1 = -x_0 \cos \Phi \quad (2.107)$$

$$\dot{\Phi} = \left(\frac{x_0}{x_1} - \frac{x_1}{x_0} \right) \cdot \sin \Phi.$$

Здесь $\Phi = x_3 - x_2$.

Кроме того, из первых двух уравнений системы (2.106) или (2.107) видно, что эти системы имеют следующий интеграл:

$$x_0^2 + x_1^2 = const. \tag{2.108}$$

Таким образом, система уравнений (2.107) имеет всего одну степень свободы. Исходная система (2.102) также имела одну степень свободы.

Вернемся к (2.106). Легко видеть, что эта система имеет решение $x_0 = x_1 = 0$. Это особое решение (в точках этого решения условия теоремы единственности нарушаются). В соответствии с (2.108) такое решение будет реализовано только при нулевых начальных условиях. При других начальных условиях система только периодически будет попадать в точки особого решения. Как только она попадает в точку, например $x_0 = 0$, то соответствующая фаза (x_2) становится неопределенной. Она случайным образом либо не меняется, либо меняется (скачком) на величину π . Эта особенность динамики амплитуды и фазы демонстрируется на рисунках 2.35, 2.36. На рисунке 2.35 видно, что при прохождении нулевого значения производная зависимой переменной либо не меняется, либо обращается в ноль. В соответствии с этой особенностью динамики амплитуды, в те же моменты времени, фаза x_2 либо не меняется, либо меняется на величину π (см. рис. 2.36).

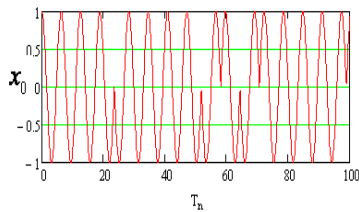


Рис. 2.35. Характерная зависимость переменной x_0 (амплитуды) от времени

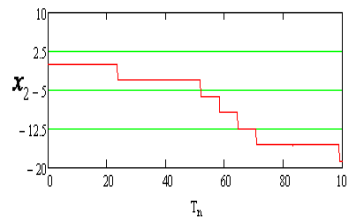


Рис. 2.36. Характерная зависимость переменной x_2 (фазы) от времени

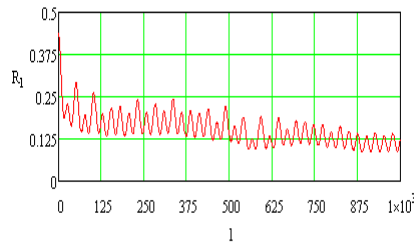


Рис. 2.37. Автокорреляционная функция переменной x_0

Эта особенность в динамике прохождения нулевой точки амплитуды x_0 находится в полном соответствии с тем, что, как показано в предыдущем разделе, в этих точках рождается неопределенность. Система случайным образом выбирает возможные для нее пути дальнейшей динамики. В нашем простейшем случае таких путей только два: либо непрерывная динамика, либо динамика со скачком фазы на π . Следует сказать, что выбор во всех случаях случайный. Он зависит от точности проводимых исследований. Малейшее изменение в параметрах численных расчетов меняет расположение точек, в которых меняется динамика. Тот факт, что эти скачки являются случайными, отражается в поведении автокорреляционной функции как для амплитуды, так и для фазы. Характерный вид автокорреляционной функции для амплитуды представлен на рис. 2.37.

Наиболее важным и интересным является тот факт, что, несмотря на случайную динамику новых зависимых переменных, некоторая комбинация этих переменных ведет себя вполне регулярно. Действительно, если все проведенные замены и проведенный численный анализ вполне адекватны друг к другу, то из новых зависимых переменных можно сконструировать функцию, которая полностью совпадает с исходными зависимыми переменными: $F = x_0 \cdot \sin(x_2) \equiv x_I$, $G = x_0 \cdot \cos(x_2) \equiv x_R$. Такая комбинация должна иметь регулярную динамику. В этом случае, несмотря на тот факт, что переменные x_0 и x_2 ведут себя случайно, функции G и F должны быть регулярными. Более того, их динамика должна совпадать с динамикой функций x_R и x_I . Именно такая динамика этих функций и наблюдается. Этот факт иллюстрируется рис. 2.38 и 2.39. Легко увидеть, что эта динамика полностью совпадает с динамикой функций x_R и x_I . Отметим, что приведенные расчеты проводились при следующих начальных условиях: $x_0 = 0.99999$, $x_1 = 1.999 \cdot 10^{-3}$, $x_2 = 0.1$, $x_3 = 0$.

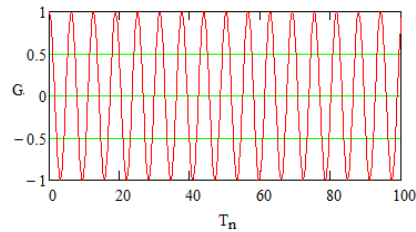


Рис. 2.38. Зависимость функции G от времени. Эта функция регулярна. Легко увидеть, что она полностью совпадает с функцией x_R

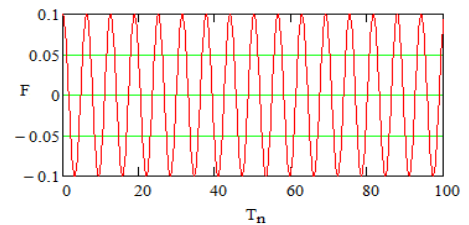


Рис. 2.39. Зависимость функции F от времени. Эта функция регулярна. Легко увидеть, что она полностью совпадает с функцией x_I

Таким образом, видно, что даже самая простая регулярная функция $\sin(\omega \cdot t)$ или $\cos(\omega \cdot t)$ может быть представлена в виде произведения двух функций, динамика каждой из которых является хаотической. Этот факт будет называться скрытой динамикой. Легко увидеть, что и другие, значительно более сложные регулярные функции, также могут быть представлены в виде некоторой комбинации функций со случайной динамикой. Следует заметить, что такой результат, в некотором смысле, не является неожиданным. Действительно, известно много физических систем, динамика которых хаотична (динамический хаос), однако некоторая комбинация переменных этой системы оказывается вполне регулярной или даже просто постоянной. В последнем случае эта постоянная является интегралом изучаемой физической системы. В качестве примера можно указать на интегралы, которые характеризуют движение заряженных частиц в некоторых потенциалах (например в потенциале Хенона–Хейлеса [63]), а также во внешнем постоянном магнитном поле и в поле внешних электромагнитных волн.

Хаотическая динамика квантовых систем. Анализируя полученные выше результаты, может возникнуть такой вопрос: «Что полезного в том факте, что регулярные функции могут быть представлены в виде комбинации нерегулярных функций?» Очевидно, полезным был бы обратный алгоритм, когда можно, имея нерегулярные функции, сформировать из них регулярные функции. Очевидная польза такого разложения заключается в том, что его можно использовать для скрытой передачи информации. Укажем на другую, по-видимому, наиболее существенную причину, когда разложение регулярных функций на нерегулярные компоненты может быть полезным. Такая польза возникает в том случае, когда анализируется достаточно сложная линейная система. Например, сложная квантовая система. При анализе этой сложной системы можно поступать следующим образом. Прежде всего, с помощью подходящей замены зависимых переменных линейную систему переводят в систему нелинейных уравнений. В большинстве случаев анализировать нелинейную систему сложнее, чем анализировать исходную линейную систему. Однако в тех случаях, когда нелинейная система позволяет указать на область параметров, которые соответствуют возникновению режимов с хаотической динамикой, то для анализа нелинейной системы (соответственно, для анализа исходной линейной системы) можно воспользоваться всем арсеналом статистической физики. Следует также заметить, что замена типа (2.85) или (2.91) является характерной для квантовых систем. Действительно, динамика квадрата амплитуды описывает динамику вероятности нахождения квантовой системы в том или ином состоянии. Чтобы проиллюстрировать описанную выше возможность использования такого алгоритма анализа квантовых систем, ниже будет рассмотрена одна из простых, но достаточно важных квантовых систем. Конкретно будет рассмотрена трехуровневая квантовая система, которая находится под воздействием внешнего возмущения. Будет

рассматриваться такая задача в рамках традиционного подхода теории возмущений. Ниже будет видно, что сформулированный алгоритм анализа рассматриваемой системы позволяет получить новые физические результаты. А именно, будет показано, что под воздействием внешнего низкочастотного возмущения в пространстве энергии для квантовой системы возможна диффузия. Причем энергия, которую приобретает квантовая система за определенный интервал времени, может оказаться значительно большей, чем та энергия, которую получает квантовая система в результате многофотонных переходов.

Постановка задачи. Основные уравнения. Рассмотрим квантовую систему, которая описывается гамильтонианом:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1(t). \quad (2.109)$$

Второе слагаемое в правой части описывает возмущение. Волновая функция системы (2.109) подчиняется уравнению Шредингера, решение которого будем искать в виде ряда по собственным функциям невозмущенной задачи:

$$\psi(t) = \sum_n A_n(t) \cdot \varphi_n \cdot \exp(i\omega_n t), \quad (2.110)$$

$$\text{где } \omega_n = E_n / \hbar; \quad i\hbar \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = \hat{H}_0 \varphi_n = E_n \cdot \varphi_n.$$

Подставим (2.110) в уравнение Шредингера и обычным образом получим систему связанных уравнений для нахождения комплексных амплитуд A_n :

$$i\hbar \cdot \dot{A}_n = \sum_m U_{nm}(t) \cdot A_m, \quad (2.111)$$

$$\text{где } U_{nm} = \int \varphi_m^* \cdot \hat{H}_1(t) \cdot \varphi_n \cdot \exp[i \cdot t \cdot (E_n - E_m) / \hbar] \cdot dq.$$

Рассмотрим наиболее простой случай гармонического возмущения: $\hat{H}_1(t) = \hat{U} \cdot \exp(i\Omega t)$. Тогда матричные элементы взаимодействия приобретут следующее выражение:

$$U_{nm} = V_{nm} \exp\{i \cdot t \cdot [(E_n - E_m) / \hbar + \Omega]\}, \quad (2.112)$$

$$V_{nm} = \int \varphi_n^* \cdot \hat{U} \cdot \varphi_m dq.$$

Рассмотрим динамику трехуровневой системы ($|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$). Будем считать, что частота внешнего возмущения и собственные значения энергий этих уровней удовлетворяют соотношениям:

$$m = 1, n = 0, \quad \hbar\Omega = E_1 - E_0; \quad m = 2, n = 0, \quad (2.113)$$

$$\hbar(\Omega + \delta) = E_2 - E_0, \quad |\delta| \ll \Omega.$$

Эти соотношения указывают на тот факт, что частота внешнего возмущения является резонансной для переходов между нулевым и первым уровнями, а энергия третьего уровня мало отличается от энергии второго. Используя эти соотношения в системе (2.111), можно ограничиться тремя уравнениями:

$$\begin{aligned} i \cdot \hbar \cdot \dot{A}_0 &= V_{01}A_1 + V_{02}A_2 \cdot \exp(i \cdot \delta \cdot t); & i \cdot \hbar \cdot \dot{A}_1 &= V_{10}A_0; \\ i \cdot \hbar \cdot \dot{A}_2 &= V_{20}A_0 \cdot \exp(-i \cdot \delta \cdot t). \end{aligned} \quad (2.114)$$

Пусть матричные элементы взаимодействия прямого и обратного переходов равны ($V_{i0} = V_{0i}$, ($i = 1; 2$)). Тогда из (2.114) находим следующую связь между квадратами комплексных амплитуд A_n :

$$\frac{d}{d\tau} [A_0^2 - A_1^2 - A_2^2] = 2 \cdot \mu_2 \cdot A_0 A_2 \sin(\delta\tau), \quad (2.115)$$

где $\tau = \Omega_a \cdot t$, $\delta \equiv \delta / \Omega_a$, $\mu_i = 2 \cdot V_{0i} / \hbar \cdot \Omega_a$; $\Omega_a = U_a / \hbar$; $V_{0i} \ll U_a$ – потенциал, в котором создано исходное стационарное состояние (например, кулоновский потенциал атома).

Из этого соотношения следует, что если третий уровень совпадает со вторым (двухуровневая система, $\delta = 0$), то система (2.114) имеет всего одну степень свободы. Развитие динамического хаоса в такой системе возможно только при наличии особых решений. В общем случае, замены (2.85), (2.91) и (2.116) привносят не только особые решения, но и переводят исходную линейную систему к системе нелинейных уравнений. Причем эти уравнения содержат нелинейные резонансы. Ситуация аналогична той, которая наблюдалась при исследовании линейных систем (смотри (2.90)–(2.96)). Резонансы могут перекрываться. Этот факт открывает дополнительную возможность для возникновения хаотической динамики. Ниже будет видно, что величина δ определяет расстояние между нелинейными резонансами. Отметим, что полученная система (2.114) и соотношение между комплексными амплитудами (2.115) аналогичны тем, которые были получены выше (смотри (2.90)) при анализе динамики трех связанных линейных осцилляторов. Дальнейший анализ динамики комплексных амплитуд $A_i(\tau)$ будем проводить аналогично тому, как это было сделано выше, т.е. представим их в виде:

$$A_i(\tau) = a_i(\tau) \exp(i\varphi(\tau)). \quad (2.116)$$

Здесь a_i , φ_i – действительные амплитуды и действительные фазы.

Подставляя (2.116) в (2.114) для нахождения действительных амплитуд и фаз, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{a}_0 &= \mu_1 \cdot a_1 \cdot \sin(\Phi) + \mu_2 \cdot a_2 \cdot \sin(\Phi_1), & \dot{a}_1 &= -\mu_1 \cdot a_0 \cdot \sin(\Phi), \\ \dot{a}_2 &= -\mu_2 \cdot a_0 \cdot \sin(\Phi_1) \\ \dot{\Phi} &= -\mu_1 \left(\frac{a_0}{a_1} - \frac{a_1}{a_0} \right) \cos(\Phi) + \mu_2 \left(\frac{a_2}{a_0} \right) \cos(\Phi_1), \\ \dot{\Phi}_1 &= -\mu_2 \left(\frac{a_0}{a_2} - \frac{a_2}{a_0} \right) \cos(\Phi_1) + \mu_1 \left(\frac{a_1}{a_0} \right) \cos(\Phi) + \delta, \\ \text{где } \Phi &\equiv \varphi_1 - \varphi_0, \Phi_1 \equiv \varphi_2 - \varphi_0 + \delta\tau.\end{aligned}\tag{2.117}$$

Система уравнений (2.117) аналогична системе уравнений (2.92). Из первых трех уравнений этой системы следует следующий интеграл: $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 = \text{const}$. Система уравнений (2.117) является нелинейной. В принципе, динамика такой системы может быть хаотической. Условия возникновения хаотической динамики совпадают с теми, которые были выписаны выше, после формулы (2.96). Предположим теперь, что условия реализации динамического хаоса выполнены $(\mu_1 + \mu_2) > \delta$. В этом случае изучаемая система будет случайным образом блуждать по трем энергетическим уровням. Представляет интерес дать оценку времени перехода системы с одного уровня на другой. Для оценки времени перехода в стохастическом режиме предположим, что в этом режиме корреляции отсутствуют. Тогда, например, для величины среднего квадрата действительной амплитуды a_1 можно получить следующую оценку: $\langle a_1^2 \rangle \sim \mu^2 \cdot \langle a_0^2 \rangle \cdot \tau \leq 1$.

Таким образом, среднее время переходов между уровнями в стохастическом режиме оказывается порядка квадрата времени перехода в регулярном режиме: $\tau_{ch} \sim (\tau_r)^2 \sim (\hbar \cdot \Omega_a / V_{01})^2$. Оно значительно больше времени перехода при регулярных переходах. Однако в стохастическом режиме возможна диффузия состояния системы по энергетическим уровням.

При этом время диффузии в пространстве энергий на величину ΔE можно оценить величиной: $\tau_{ch} \sim (\Delta E / \hbar \Omega) (\hbar \Omega_a / V_{01})^2$. Интересно сравнить это время со временем возбуждения этих уровней при многофотонном возбуждении. При многофотонном возбуждении энергетических уровней с нулевого уровня на уровни с энергиями в окрестности $E_0 + \Delta E$ время возбуждения будет обратно пропорциональным квадрату составного матричного элемента: $\tau \sim 1/|H|^2$. Здесь H – составной матричный элемент, который равен сумме произведений отдельных матричных элементов, определяющих переходы между промежуточными (чаще всего виртуаль-

ными) состояниями. Каждый матричный элемент является малой величиной. Это время можно оценить формулой: $\tau_D \sim (\hbar\Omega_a / V_{01})^{(\Delta E/\hbar\Omega)}$.

Так как можно считать, что $(\Delta E / \hbar\Omega) \gg 1$, а $(\hbar \cdot \Omega_a / V_{01}) \gg 1$, то практически всегда время переходов, обусловленное стохастической неустойчивостью, значительно меньше времени переходов, вызванных многофотонными процессами. Таким образом, как только условия для развития стохастической неустойчивости выполнены, то именно процессы, связанные с ней, будут определять переходы между энергетическими уровнями, когда частота внешнего возмущения значительно меньше расстояния между этими уровнями ($\Delta E \gg \hbar\Omega$).

Дискретная и непрерывная схемы ускорения Ферми [66]. В настоящем подразделе мы покажем, что при моделировании движения заряженных частиц в потенциалах с помощью дискретных моделей может приводить к неправильным результатам. Это происходит тогда, когда при моделировании исчезают области фазового пространства, в которых нарушается теорема единственности. Часто реальная траектория частиц строго не попадает в точки, в которых нарушается теорема единственности, однако структура фазового пространства в окрестности этих точек такова, что динамика частиц оказывается чувствительной к сколь угодно малым неучтенным при моделировании внешним силам. Эту особенность динамики заряженных частиц ниже мы проиллюстрируем на примере механизма ускорения Ферми.

Простейшая дискретная схема ускорения Ферми представлена на рисунке 2.40. В этой схеме частица движется между двумя упруго-отражающими стенками, одна из которых (нижняя) периодически колеблется. Такая и аналогичные ей схемы изучены достаточно подробно (см., например, [54, 65]).

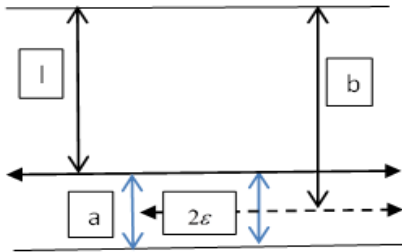


Рис. 2.40. Дискретная схема ускорения Ферми

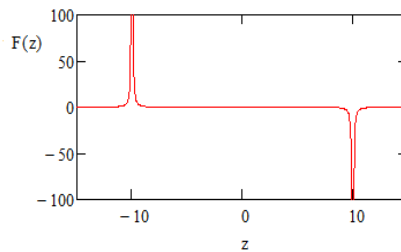


Рис. 2.41. Сила, которая действует на частицы в распределенной схеме ускорения Ферми

Наиболее важным является наличие аналитического критерия появления стохастического ускорения. Пусть параметры схемы ускорения

удовлетворяют следующим неравенствам: $a/l \ll 1$; $a = 2\varepsilon$; $u = v/V_0 \gg 1$; $\Delta u \ll u$. Здесь b – расстояние между неподвижными стенками; V_0 – скорость подвижной стенки; v – скорость частицы. Тогда критерием возникновения хаотической динамики будет условие: $K = 2l/au^2 > 1$.

Вместо дискретной модели введем непрерывную схему ускорения Ферми. Для этого будем предполагать, что частица движется в поле потенциальной ямы, одна из стенок которых периодически вибрирует. Уравнения движения частицы при этом будут иметь вид:

$$\dot{x}_0 = x_1; \quad \dot{x}_1 = F(x_0), \quad (2.118)$$

$$\text{где } F(x_0) = - \left[\frac{1}{(x_0 - (b + \varepsilon \cdot \cos \omega t))^2} - \frac{1}{(x_0 + b)^2} \right].$$

Здесь, также как и в дискретной модели, $2b$ – расстояние между максимумами стационарного потенциала. Обычно такую распределенную модель потенциала моделируют отражающими стенками. В этом случае распределенная модель становится дискретной. При анализе динамики распределенной системы можно было ожидать, что если не будет выполняться условие $K = 2l/au^2 > 1$, то динамика распределенной схемы, также как и динамика дискретной схемы, будет регулярной. Однако динамика распределенной системы не подчиняется этому критерию. Действительно, выберем следующие параметры распределенной схемы: $b = 21$; $\varepsilon = 1$; $\omega = 10$; $v = 100$; $x_0(0) = 1$; $x_1(0) = 100$. Тогда параметр K будет мал: $K = 4 \cdot 10^{-3} \ll 1$. Характерный вид зависимости положения частицы от времени, ее скорости, спектр движения частицы и ее корреляционная функция представлены на рисунках 2.42-2.45. При численных расчетах $TOL = CTOL = 10^{-8}$; $m = 18 \Rightarrow N = 2.622 \cdot 10^5$. Длина реализации = 100.

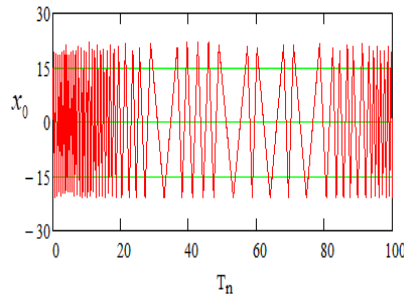


Рис. 2.42. Положение частицы в распределенной схеме ускорения Ферми

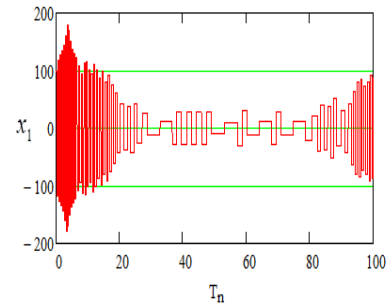


Рис. 2.43. Зависимость от времени скорости частицы в распределенной схеме ускорения Ферми

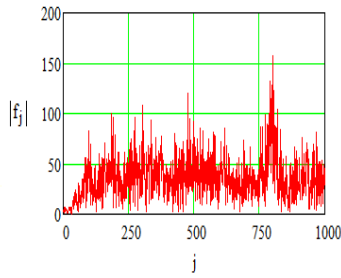


Рис. 2.44. Спектр движения частиц

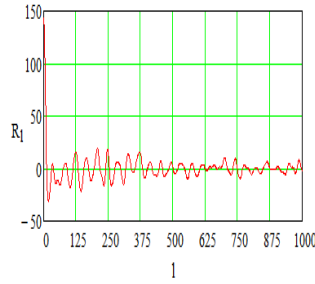


Рис. 2.45. Автокорреляционная функция движения частиц

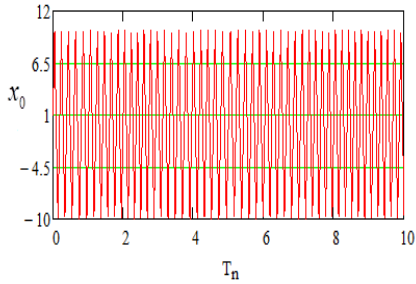


Рис. 2.46. Зависимость положения частицы от времени в распределенной схеме ускорения ($\varepsilon = 0.005$)

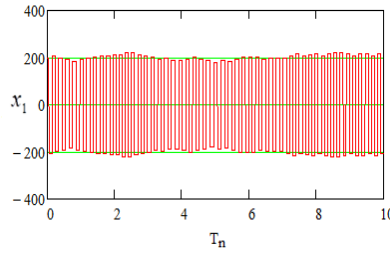


Рис. 2.47. Зависимость скорости частицы в распределенной схеме ускорения Ферми ($\varepsilon = 0.005$)

Из этого видно, что динамика частиц нерегулярна. Такое различие в динамике на первый взгляд похожих схем обусловлено тем, что в распределенной системе на динамику частиц влияет область фазового пространства ($x_0 = \pm b; x_1 = 0$), в окрестности которой нарушаются условия теоремы единственности.

Обратим внимание, что при моделировании рассматриваемых физических систем следует учитывать наличие областей фазового пространства, в которых нарушается теорема единственности. Игнорирование этих областей может приводить к неправильным результатам. Чаще всего такое игнорирование происходит при переходе от распределенных моделей к дискретным моделям. Для иллюстрации этой особенности рассмотрим в качестве простейшего примера такую задачу. Пусть необходимо определить динамику частицы в потенциальной яме, стенки которой неподвижны ($\varepsilon = 0$). Такую задачу можно решать, используя систему уравнений (2.118), то есть анализируя распределенную схему. Результат этого анализа будет таким же, как и при анализе аналогичной дискретной схемы. Пусть теперь положение одной из стенок потенциала слегка вибрирует. Амплитуда этой вибрации мала, а частота достаточно большая. Таким образом, предполагается, что на систему действует некоторое маленькое высокочастотное возмущение. Возникает вопрос: «Как повлияет это возмущение на дискретную и на распределенную схемы?»

Что касается дискретной модели, то можно ожидать, что динамика частиц останется регулярной и мало изменится под действием малого возмущения. Распределенная схема, как будет видно ниже, оказывается очень чувствительной к таким возмущениям. В качестве примера рассмотрим следующие значения параметров схем ускорения: $b=10$; $x_0(0)=1$; $x_1(0)=200$; $\varepsilon=0.005$; $\omega=1000$; $N=32.770$. Длина «реализации»: 100; $\text{TOI}=\text{CTOI}=10^{-10}$. При этих значениях параметров динамика частиц в дискретной схеме остается регулярной. В распределенной же схеме это возмущение качественно меняет динамику частиц. Эта динамика становится хаотической. В качестве примера на рисунках 2.46-2.47 представлены зависимости положения и скорости частиц в распределенной системе. Видно заметное влияние малого возмущения. Кроме того, на рисунках 2.48-2.49 представлена статистическая обработка этой динамики. Видно, что спектры расширились, а корреляционная функция достаточно быстро убывает. Этот результат указывает на то, что, моделируя динамику частиц в потенциалах, необходимо с осторожностью использовать дискретные модели. В таких моделях отсутствует область фазового пространства, в котором нарушается теорема единственности. Поэтому она мало чувствительна к малым возмущениям. Реальная же физическая система может оказаться аномально чувствительной к малым возмущениям.

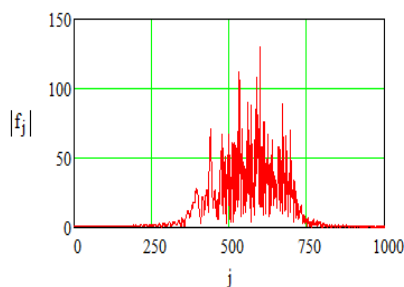


Рис. 2.48. Спектр движения частицы

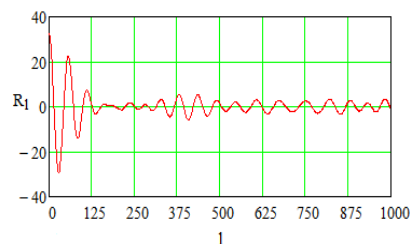


Рис. 2.49. Автокорреляционная функция

Сформулируем наиболее важные результаты, которые получены в разделе 2.5.

1. При анализе динамики физических систем необходимо принимать во внимание наличие особых решений. Отметим, что чем более сложные физические системы изучаются, тем большее количество особых решений они имеют. Поэтому полученные выше результаты, прежде всего, существенны для анализа сложных физических систем. Отметим, кстати, что линейные системы особых решений не имеют. Этот факт выше не был доказан. Однако, используя результаты первого подраздела, он легко доказывается.

2. Учет особых решений расширяет круг динамических систем, в которых возможны режимы с хаотическим поведением. Действительно, как было видно из примеров первого и второго подразделов, хаотическая динамика может проявляться в системах с одной степенью свободы и даже в системах, которые полностью интегрируются. Этот результат нарушает одну из основных парадигм динамического хаоса о том, что хаотическое поведение динамических систем возможно только, если число степеней свободы у них больше или равно 1.5.

3. Необходимо также отметить, что механизм возникновения хаотической динамики, которая обусловлена наличием особых решений, отличается от механизма динамического хаоса. Наиболее важным отличием является отсутствие в среднем разбегания фазовых траекторий. Они могут вначале (после посещения точек особого решения) разбегаться, однако потом могут сближаться. В этом случае усредненный показатель Ляпунова может практически не отличаться от нуля. Рассматриваемый механизм возникновения хаотической динамики больше напоминает игральную кость с бесконечным числом граней, которую бросают в момент попадания фазовых траекторий в область особых решений.

4. Отметим также, что наличие особых решений требует внимательного анализа соответствия физической системы с той математической моделью, которая построена для описания этой физической системы. Действительно, выше, на примере задачи Кеплера, было видно, что если фазовые траектории изучаемой математической модели подходят достаточно близко к области особого решения (не попадая в эту область), то наличие даже очень маленьких, неучтенных при математическом моделировании сил может радикально изменить динамику изучаемой физической системы.

5. Важным результатом является доказательство возможности представить практически любую регулярную функцию в виде некой комбинации функций с хаотическим поведением. Отметим, что этот результат является, в некотором смысле, обобщением того факта, что многие динамические системы имеют интегралы. Эти интегралы содержат комбинацию функций, динамика которых может быть хаотической. Примерами могут служить многие задачи динамики частиц в некоторых сложных стационарных потенциалах. В этом случае энергия частиц не меняется. Она является интегралом. Однако в выражении для энергии содержит координату и скорость частицы, которые могут меняться хаотически.

6. Полученные результаты, похоже, могут найти практическое применение. В частности, тот факт, что регулярные функции могут быть разложены в комбинацию хаотических, может быть использован для скрытой передачи информации. Кроме того, преобразование сложных линейных систем (трудных для анализа) в систему нелинейных уравнений с хаотическим поведением позволяет анализировать эти нелинейные системы (а соответственно, и исходные линейные) с помощью статистических методов. Такой подход может оказаться продуктивным

и вскрыть некоторые важные особенности динамики исходных линейных систем.

7. Отметим отдельно результат анализа возбуждения многоуровневой квантовой системы. Выше, используя элементарные статистические оценки, удалось получить важный физический результат. Он заключается в том, что обнаружен новый канал многофотонного возбуждения квантовых систем. Этот канал вызван хаотической динамикой. При большом количестве поглощенных фотонов при многофотонном возбуждении этот канал перехода на высокие энергетические уровни может оказаться эффективнее традиционного многофотонного механизма возбуждения квантовых систем.

8. Обратим внимание, что при моделировании движения заряженных частиц в потенциалах с помощью дискретных моделей может приводить к неправильным результатам. Этот результат был проиллюстрирован на примере динамики частиц в схеме ускорения Ферми. Однако ясно, что он будет проявляться и в других аналогичных случаях. В частности, при изучении динамики частиц при каналировании в кристаллах.

Здесь основное внимание было сфокусировано на роли особых решений в возникновении режимов с хаотической динамикой. Не исключено, что особые решения могут быть полезны при вскрытии некоторых новых сторон динамики физических систем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги приведенным в обзоре результатам, можно сказать, что регулярная динамика частиц во внешних заданных электромагнитных полях достаточно идеализированная динамика. В общем случае такая динамика реализуется достаточно редко. Кроме того, она реализуется в полях достаточно простой структуры, а также при достаточно умеренных напряженностях полей. В большинстве случаев структура интересующих нас полей, напряженности этих полей таковы, что динамика частиц в этих полях очень сложная и чаще нерегулярная. Как показали случаи учета особых решений, она может проявиться даже в очень простых по своей структуре полях. Еще большую роль такая динамика играет в полях более сложной структуры, в системах с большим числом степеней свободы.

В каждом из разделов первой и второй глав имеется материал, в котором обсуждаются полученные результаты и делаются выводы. Поэтому мы не будем повторять эти выводы и заключения. Обратим внимание только на несколько важных фактов, которые выше мы не обсуждали. Прежде всего вопрос касается о возможности ускорения заряженных частиц в вакууме полем лазерного излучения. Такая возможность представляет чрезвычайный интерес, поэтому любые результаты, каса-

ющиеся анализа и обсуждения такой возможности, представляют несомненный интерес. В работах, в основном китайских исследователей, достаточно давно рассматривается такая возможность [67-69]. При этом авторы рассматривают неоднородные лазерные пучки и делают утверждение, что в этих полях содержится компонента, фазовая скорость которой меньше скорости света в вакууме. Наличие такой компоненты потенциально позволяет эффективно ускорять заряженные частицы в вакууме полем сфокусированного лазерного излучения. С одной стороны, легко показать, что строго такая возможность отсутствует. Действительно, в своем анализе авторы рассматривают неоднородные пучки типа гауссовских пучков. Однако хорошо известно, что гауссовские пучки удовлетворяют не волновому уравнению, а параболическому уравнению. В вакууме параболическое уравнение является упрощенным вариантом волнового уравнения. При этом, если поверхность волновых векторов лазерного излучения в вакууме представляет собой сферу, то огибающая волновых векторов параболического уравнения представляет собой параболу. В соответствии с этим имеется пространственная область волнового пучка (гауссовского пучка), в котором фазовая скорость может быть меньше скорости света. Этот результат достаточно прост и прозрачен. Однако относительно недавно появилась работа [69], в которой группа китайских и американских физиков в эксперименте удалось, как они утверждают, впервые наблюдать в эксперименте резонансное (черенковское) взаимодействие электронных банчей с полем лазерного излучения. Действительно, если посмотреть на функцию распределения заряженных частиц в отсутствие взаимодействия с лазерным полем и сравнить такую же функцию распределения, которая сформулирована после взаимодействия с лазерным импульсом, то все указывает на то, что такое взаимодействие авторы действительно наблюдали. На этой функции распределения видны как ускоренные частицы, так и замедленные частицы. Причем результирующая функция распределения достаточно симметрична – имеется примерно одинаковое количество ускоренных и замедленных частиц. Действительно, такая функция распределения формируется, если электроны банча захвачены в черенковский нелинейный резонанс. Возникает вопрос: «Что же наблюдали авторы в эксперименте и чем можно объяснить их наблюдение?» Прежде всего, отметим, что взаимодействие заряженных частиц с лазерным полем в эксперименте происходило в ограниченной пространственной области. При этом, как мы видели в первой главе, наличие ограниченной области позволяет обмениваться энергией между частицами и полями. Однако в большинстве случаев поля передают энергию частицам. В разделе 1.1 мы показали, что при достаточно больших поперечных скоростях появлялась возможность передачи энергии от частиц волнам. Но это те значения параметров частиц, которые отсутствовали в экспериментах. Поэтому в настоящее время вопрос о природе такого взаимодействия, которое наблюдалось в эксперименте, остается открытым. Возможно, что ограниченность области взаимодействия, граничные условия позволяют

реализовать такое взаимодействие. В рассмотренных выше результатах область взаимодействия ограничивалась чисто кинематически. Ясно, что это не все влияние, которое оказывает на поля и частицы ограничение области взаимодействия. Возможно, что электродинамика границ, наличие линз и других электродинамических элементов могут приводить к результату, который наблюдался в экспериментах. Ситуация во многом похожа на ту, которая возникла в 1979 году. В этом году появилась работа [70], в которой авторы, анализируя решение уравнений Шредингера, показали, что в вакууме существует волновой пакет, который при своем распространении не только не расплывается, но и может двигаться с ускорением в отсутствие внешних сил. На первый взгляд, полученные ими результаты противоречили всем к тому времени известным представлениям о динамике квантовых систем. Волновая функция решений уравнений Шредингера была выбрана ими в виде функции Эйри. Смысл полученного ими решения заключался в том, что полученное решение описывало не одну изолированную частицу, а совокупность частиц, которые были заданы начальными условиями. Результирующая траектория являлась огибающей траекторией отдельных частиц. Таким образом, все неожиданные результаты этой работы были связаны со специфическими начальными (или граничными) условиями. Нужно сказать, что это направление было подхвачено оптиками. Первая их работа в этом направлении появилась в 2007 году [71]. В настоящее время это и аналогичные ему направления бурно развиваются. Может представить интерес работа [72], в которой рассматривается возможность ускорения электронов в таких полях. Однако это направление требует отдельного рассмотрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. 6 изд. – М.: Наука, 1973. – 504 с.
2. Буц В. А., Буц А. В. Динамика заряженных частиц в поле интенсивной поперечной электромагнитной волны // ЖЭТФ. – 1996. – Т. 110, вып. 3(9). – С. 818–831.
3. Buts V. A. Peculiarities of particles and field dynamics at critical intensity of electromagnetic waves (part 1) // Problems of atomic science and technology, 2005, N1. Series: Plasma Physics (10). – P. 119–121.
4. Buts V. A. Peculiarities of particles and field dynamics at critical intensity of electromagnetic waves (part 2) // Problems of atomic science and technology, 2005 N1. Series: Plasma Physics (10). – P. 122–124.
5. Буц В. А., Кузьмин В. В. Динамика частиц в полях большой интенсивности // Успехи современной радиоэлектроники. – 2005. – № 11. – С. 5–20.
6. Буц В. А., Кузьмин В. В. Ускорение заряженных частиц интенсивным лазерным излучением // Успехи современной радиоэлектроники. – 2007. – № 6. – С. 68–75.
7. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. – М.: Наука, 1974. – 392 с.
8. Зельдович Я. Б. Взаимодействие свободных электронов с электромагнитным излучением // УФН. – 1975. – 115. – № 2. – С. 161.
9. Федоров М. В. Электрон в сильном световом поле. – М.: Наука, 1991.
10. Файнберг Я. Б. // Физика плазмы и проблемы УТС. Вып. 3, – К., 1963. – 300 с.
11. Баранова Н. Б., Скалли М. О., Зельдович Я. Б. Ускорение заряженных частиц лазерными пучками // ЖЭТФ. – 1994. – Т. 105, вып. 3. – С. 469–486.

12. Аполлонов В. В., Артемьев А. И., Калачев Ю. П. и др. Electron acceleration by intense laser beam in a static magnetic field // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 97, May 1990. – P.1498–1509 // *ЖЭТФ.* – 1990. – 97. – С. 1498–1509.
13. Shao L., Cline D., Ding X., Ho Y.K., Kong Q., Xu J.J., Pogorelsky I., Yakimenko V., Kusche K. Simulation prediction and experiment setup of vacuum laser acceleration at Brookhaven National Lab-Accelerator Test Facility // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 2013, 701, P. 25–29.
14. David Cline, Lei Shao, Xiaoping Ding, Yukun Ho, Qing Kong, Pingxiao Wang. First Observation of Acceleration of Electrons by a Laser in a Vacuum // *Journal of Modern Physics*, 2013, 4, P. 1–6.
15. Нагорский Г. А., Орлов Ю.Ф. Устойчивое движение и ускорение заряженной частицы в линейно-поляризованной электромагнитной волне в газовой среде // *ЖЭТФ.* – 1973. – 64, 3. – С. 761–767; Nagorsky G.A. and Orlov Yu. F. Stable motion and acceleration of a charged particle in a linearly polarized electromagnetic wave in a gaseous medium // *JETP.* – 1973, 37. – P. 387–389.
16. Маршалл Т. Лазеры на свободных электронах. – М.: Мир, 1987.
17. Sugihara R. The movement of electrons in a nonuniform laser field // *Jap. J. Appl. Phys.* 1991, 30. – P. 76–83.
18. Sugihara R. Electron acceleration in laser field. // *In Proceedings of Workshop on Plasma-Based and Novel Accelerators* // Nagoya, Japan, 1991. – P.17–18.
19. Гапонов А. В., Гольденберг А. Л., Пегелин М. И., Юлпатов В. К. Прибор для генерации сантиметровых, миллиметровых и субмиллиметровых волн // Авторское свидетельство, № 223931 от 24.03.67. – БИОПОТЗ, 1976, № 11. – С. 200.
20. Гиротрон: Сб. научных трудов. Институт прикладной физики АН СССР. – Горький, 1981. – 253 с.
21. Miller R.B. Intense charged particle beams // *Plenum Press New York and London*, 1983.
22. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Авторезонансное движение частицы в плоской электромагнитной волне // *ДАН СССР.* – 1962. – Т. 145, № 6. – С. 1259–1261.
23. Давыдовский В. Я. О возможности резонансного ускорения заряженных частиц электромагнитными волнами в постоянном магнитном поле // *ЖЭТФ.* – 1962. – Т. 43. – С. 886–888.
24. Милантьев В. П. Циклотронный авторезонанс (к 50-летию открытия) // *УФН.* – 2013. – Т. 183, № 8. – С. 875–884.
25. Кравченко В. Ф., Кураев А. А., Синицын А. К. Несинхронные взаимодействия // *УФН.* – 2007. – Т. 177. – С. 511–534.
26. Буц В. А., Мануйленко О. В., Степанов К. Н., Толстолужский А. П. Хаотическая динамика заряженных частиц при взаимодействии типа волна-частица и хаотическая динамика волн при слабонелинейном взаимодействии типа волна-волна // *Физика плазмы.* – 1994. – Т. 20, № 9. – С. 794–801.
27. Крылов Н. С., Фок В. А. О двух основных толкованиях соотношения неопределенности для энергии и времени // *ЖЭТФ.* – 1947. – Т. 17, № 2. – С. 93–107.
28. Buts V. A., Lebedev A. N., Kurilko V. I. The Theory of Coherent Radiation by Intense Electron Beams // *Book. Springer Berlin Heidelberg New York*, 2006. – P. 259.
29. Буц В. А., Лебедев А. Н. Когерентное излучение интенсивных электронных пучков // Книга. РАН. Физический институт им. П. Н. Лебедева. – Москва, 2006. – 333 с.
30. Balakirev V. A., Buts V. A., Tolstoluzhskii A. P., and Turkin Yu.A. Randomization of motion of a beam of phased oscillators // *JETP*, 1983, v. 57(4), – P.741–745; Balakirev V. A., Buts V. A., Tolstoluzhskii A. P., and Turkin Yu.A. The dynamics of the motion of charged particles in the field of two electromagnetic waves // *JETP*, 1989, v. 68(4). – P. 710–717.
31. Буц В. А., Огнивенко В. В. Стохастическая неустойчивость движения частиц в лазерах на свободных электронах // *Письма в ЖЭТФ.* – 1983. – Т. 38, в. 9. – С. 434–436.
32. Балакирев В. А., Буц В. А., Мачехин Ю. П., Толстолужский А. П. Динамика движения нелинейного маятника под воздействием внешней периодической силы // *Письма в ЖТФ.* – 1983. – Т 9, в. 23. – С. 1427–1431.
33. Buts V. A., Machekchin Yu.P. and V.V.Ognivenko. Nonlinear dynamics of particle motion in free-electron lasers // *Nonlinear and turbulent processes in physics* edited by Sagdeev hard-wood academic publishers. – 1984. – V. 111. – P. 1253–1257.
34. Буц В. А., Мачехин Ю. П., Огнивенко В. В. Нелинейная динамика движения частиц в лазерах на свободных электронах // Книга. Проблемы нелинейных и турбулентных процессов в физике. Часть 1. – Киев: Наукова думка, 1985. – С. 286–288.
35. Балакирев В. А., Буц В. А., Толстолужский А. П., Туркин Ю. А. Нелинейная динамика математического маятника с вибрирующим подвесом // *УФЖ.* – 1987. – Т. 32, № 8. – С. 1270–1274.

36. Буц В. А., Степанов К. Н. Стохастический нагрев плазмы полем лазерного излучения // Письма в ЖЭТФ. – 1993. – Т. 58, в. 7. – С. 524–527. Англ. Buts V.A., Stepanov K.N. Stochastic plasma heating by laser light // JETP Lett., 1993, v. 58, N 7. – P. 524–527.
37. Antonov A. N., Buts V. A., Kovpik O. F., Kornilov E. A., Manuilenko O. V., Svichenskii V. G., Stepanov K. N., Turkin Yu.A. Stochastic heating of plasma at electron cyclotron resonance // JETP LETTERS, 1999, v. 69, N 11. – P. 851–857.
38. Gary R. Smith, Allan N. Kaufman. Stochastic acceleration by an obliquely propagating wave. An example of overlapping resonances // Phys. Fluids, 1978, v. 21, №12. – P. 2230–2241.
39. Gell Y. Nanach R. Stochastic ion heating by electrostatic wave in sheared magnetic field // Phys. Fluids, 1980, v.23, №8. – P. 1646–1655.
40. Шкляр Д. Р. Стохастическое движение релятивистских частиц в поле монохроматической волны // ЖЭТФ. – 1981. – Т. 80, № 6. – С. 2272–2282.
41. Буц В. А., Мануйленко О. В., Толстолужский А. П. Хаотическая динамика заряженных частиц при взаимодействии типа волна-частица и хаотическая динамика волн при слабонелинейном взаимодействии типа волна-волна // 9-я зимняя школа-семинар по СВЧ-электронике и радиофизике. Саратов, 1993. – С. 89–101.
42. Buts V. A., Manujlenko O. V., Tolstoluzhskii A. P. Chaotic dynamics at nonlinear interaction of waves in a magnetized plasma wave guide. International simposium // "Physics and Engineering of Millimeter and Submillimeter waves" June 7-10, Kharkov, Ukraine, Conference Proceedings, Institute of Radiophysics and Electronics of National Academy of Science of Ukraine. 1994, v.1. – P.220–224.
43. V. A. Buts, V. V. Kuzmin, A. P. Tolstoluzhsky. Stochastic heating and stochastic acceleration charged particles // Problems of atomic science and technology, Series: Plasma Physics. – 2013, №1(83) – С. 137–139.
44. Buts V. A., Manuilenko O. V., Turkin Yu.A. Stochastic Plasma Heating by Regular Electromagnetic Fields in a Circular Waveguide // Plasma Physics Reports. – 1999. – V. 25, No. 9. – P. 737–745.
45. Antonov A. N., Buts V. A., Kornilov E. A., Svichensky V. G., Kuzmin V. V., Tolstoluzhsky A. P. Stochastic heating of charged particles in absence of first order resonances // ISSN 1562-6016. Problems of atomic science and technology, 2015, №4(98). – P. 161–166.
46. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. – Киев: Наука, 1975. – 240 с.
47. Золотарев В. М., Учайкин В. В., Саенко В. В. Супердиффузия и устойчивые законы // ЖЭТФ. – 1999. – Т. 115, вып. 4. – С. 1411–1425.
48. Буц В. А. Супердиффузия и динамическое «туннелирование» при циклотронных резонансах // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2007. – Т. 12, № 4. – С. 54–59.
49. Buts V. A. Chaotic motion of dynamic systems with "one" degree of freedom // Problems of atomic science and technology, 2012, N 1. Series: Nuclear Physics Investigations (57). – P. 328–332.
50. Buts V. A. Dynamic chaos generated by linear systems // Problems of atomic science and technology, 2012, N 1. Series: Nuclear Physics Investigations (57). – P. 333–336.
51. Буц В. А. Роль особых решений при анализе динамики физических систем // Физические основы приборостроения. – 2015. – Т. 4, № 3(16). – С. 5–32.
52. Buts V. A. The peculiarities of particle dynamics in the Fermi acceleration scheme // Problems of atomic science and technology (VANT). – 2015. – N 6(100). – P. 73–76.
53. Buts V. A. Singular solutions and dynamic chaos // Problems of atomic science and technology, 2014, N 6. Series: Plasma Physics. – 2015. – N 4(98). – P. 232–236.
54. Lichtenberg A. J., Leiberman M. A. Regular and Stochastic Motion // Springer-Verlag, 1983. – P. 499.
55. Стеклов В. А. Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Гостехиздат, 1927. – С. 409.
56. Samodurov A. A. Singular solutions of difference and differential equations // Proceedings of the international scientific conference "Integration of information and pedagogical technologies". – Minsk, BSU, 2008. – P. 463–466.
57. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1970. – С. 1–571.
58. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. – М.: Наука, 1965. – 204 с.
59. Weiland J. and Wilhelmsson H. Coherent non-linear interaction of waves in plasmas // Pergamon Press, 1977. – P. 224.
60. Буц В. А. Хаотическая динамика линейных систем // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2006. – Т. 11. – № 11. – С. 65–70.

61. Buts V. A. and Nerukh A. G. Elements chaotic dynamics in linear systems // The sixth International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Sub-millimeter waves and workshop on Terahertz Technologies. – Kharkov. Ukraine. June 25–30. 2007, v. 1. – P. 363–365.
62. Buts V. A., Nerukh A. G., Ruzhytska N. N., Nerukh D. A. Wave chaotic behaviour generated by linear systems // *Opt Quant Electron*, 2008, 40: Springer. – P. 587–601.
63. Шульга Н. Ф. Некоторые вопросы теории рассеяния быстрых частиц в веществе и во внешних полях. – Киев: Наукова думка, 2010. – С. 199.
64. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. – Москва: Наука, 1980. – 301 с.
65. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. – Москва: Наука, 1984.
66. Buts V. A. The peculiarities of particle dynamics in the Fermi acceleration scheme. *Problems of atomic science and technology // VANT*. – 2015. – N 6(100). – P.73–76.
67. Ho Y. K., Wang J. X., Feng L., Scheild W., Hora H. Electron scattering by an intense continuous laser beam // *Physics Letters A* 220. – 1996. – P. 189–193.
68. Pang J., HoY. K., Yuan X. Q., Cao N., Kong Q., Wang P. X., and Shao L. Subluminous Phase Velocity of a Focused Laser Beam and Vacuum Laser Acceleration. // *Physical Review E*. – Vol. 66, No. 6. – 2002.
69. David Cline, Lei Shao, Xiaoping Ding, Yukun Ho, Qing Kong, Pingxiao Wang. First Observation of Acceleration of Electrons by a Laser in a Vacuum. // *Journal of Modern Physics*. – 2013, 4. – P. 1–6.
70. Berry M. V., Balazs N. L. Nonspreading wave packets // *Am. J. Phys.* – 47, 264. – P. 1979.
71. Siviloglou G. A., Broky J., Dogariu A., Christodoulides D. N. Observation of accelerating Airy beams // *Phys. Rev. Lett.* – 99, 213901. – 2007.
72. Georgios A. Siviloglou and Demetrios N. Christodoulides, Accelerating finite energy // Airy beams, *Opt. Lett.* – Vol. 32. – Issue 8, 2007. – P. 979–981.
73. Jian-Xing Li, Wei-Ping Zang, and Jian-Guo Tian. – Electron acceleration by Airy beams // *Opt. Express*. – Vol. 18, 2010. – P. 7300–7306.

ЧАСТИЦЫ С ВНУТРЕННИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

*В. В. Яновский * , А. В. Тур ***

** Институт монокристаллов, Национальная академия наук Украины,
пр. Ленина 60, 61001 Харьков, Украина*

*** Institut de Recherche en Astrophysique et Planetologie C.N.R.S.-U.P.S., 9, avenue
Colonel-Roche 31028 Toulouse Cedex 4, France.*

Одна из наиболее распространенных абстракций физики – это представление о бесструктурной точечной частице. В качестве таковых рассматриваются не только такие малые объекты, как электроны и протоны, но и множество макроскопических объектов и даже планеты. В этой части рассмотрим явления и эффекты, возникающие при учете конечных размеров и внутренней структуры частиц. Основное внимание уделено случаю небольшого числа внутренних степеней свободы. Это довольно сложный и интересный случай, для которого термодинамические закономерности не применимы. Предложена простая модель структурно-сложных частиц с внутренними степенями свободы. Рассмотрена кинематика таких частиц с небольшим числом внутренних степеней свободы. Обнаружен специфический эффект классического «квантования» состояний свободного движения таких частиц. «Спектр» состояний зависит от числа внутренних степеней свободы. Введен биллиардный формализм для описания кинематических и динамических свойств структурно-сложных частиц. Установлены все возможные режимы свободного движения структурно-сложных частиц с одной и двумя внутренними степенями свободы. Детально рассмотрено отражение структурно-сложной частицы с внутренней степенью свободы от упругого барьера. Установлены необычные законы отражения структурно-сложной частицы. Показано, что отражение такой частицы происходит после конечного числа столкновений с барьером. Число таких столкновений может быть большим и зависит от параметров структурно-сложной ча-

стицы. Обнаружены три качественно различных режима отражения. При одном из них скорость отраженной структурно-сложной частицы превышает скорость падения ее на барьер. Разумеется, законы сохранения импульса и энергии в этом режиме не нарушаются. Рассмотрены законы рассеяния структурно-сложных частиц в рамках обобщенного бильярдного формализма. Обсуждены новые механизмы хаотизации при отражении и рассеянии частиц с внутренними степенями свободы. Найдены обобщенные законы рассеяния, качественно отличающиеся от законов рассеяния точечных частиц. С использованием численного моделирования показано, что полученные закономерности выполняются не только для модели структурно-сложных частиц, но и для любых наночастиц, состоящих из относительно небольшого числа атомов любых веществ. Рассмотрено обобщение бильярдного формализма на случай заряженных структурно-сложных частиц в постоянном электрическом поле. Предложено обобщение принципа Шварца спрямления траекторий на случай заряженных частиц. Используя его, изучена динамика структурно-сложной частицы с одной и двумя внутренними степенями свободы. Установлены все возможные режимы движения таких частиц. Показано, что мощность излучения структурно-сложной частицы с одной заряженной внутренней степенью свободы в постоянном электрическом поле на несколько порядков превосходит мощность излучения эквивалентной точечной бесструктурной частицы. Простая одномерная модель структурно-сложной частицы обобщена на трехмерный случай. Обобщен бильярдный формализм для описания свойств таких частиц. Рассмотрена кинематика таких частиц. Обнаружено своеобразное броуновское блуждание структурно-сложной частицы под воздействием «случайной» силы, действующей изнутри частицы, а не снаружи, как в обычном броуновском движении. Установлены закономерности такого блуждания. Обсуждается перераспределение энергии по внутренним степеням свободы структурно-сложных частиц.

1. В В Е Д Е Н И Е

Рассматривая макроскопическую частицу или тело, довольно часто используется представление о ней как о точечной частице. Это одна из самых распространенных абстракций в физике. В действительности даже такие малые объекты, как элементарные частицы, например, электрон, не являются точечными объектами. Более того, такие фундаментальные частицы, как протоны и нейтроны, не только не являются точечными, но и обладают внутренней структурой. Обычно считается, что представление о точечной частице остается достаточно надежным, если изучать ее свойства на масштабах, значительно превышающих ее размеры. Как мы увидим ниже, это утверждение может нарушаться.

В принципе, существует несколько причин, по которым объекты с внутренними степенями свободы должны привлекать пристальное внимание. Прежде всего, одной из таких причин может служить фундаментальный вопрос о применимости абстракции точечных частиц в физике. Более меркантильный интерес возникает из-за бурно развиваемой области нанофизики. В этой области характерными объектами являются структурно-сложные объекты наноразмеров. Уменьшение размеров приводит к двум исключительно общим явлениям. Это изменение относительной доли поверхности к объему в пользу поверхности. Это обстоятельство приводит к ряду интересных эффектов и интенсивно исследуется. Вторым общим явлением является уменьшение числа внутренних степеней свободы. Такое исключительно важное явление также может приводить к необычному поведению. Сложность этого можно понять, исходя из простых соображений. Уменьшение числа внутренних степеней свободы может привести к нарушению или модификации таких общих закономерностей, как термодинамические. Законы термодинамики могут оказаться неприменимыми к таким наноразмерным частицам или по крайней мере нуждаются в существенных изменениях. Важные свойства, на которых проявляется наличие внутренних степеней свободы, включают даже такие простые и фундаментальные характеристики, как типы свободного движения и характер взаимодействия таких частиц с другими объектами. Это означает необходимость изучения кинематики и динамики таких частиц.

В обзоре обсуждается простая модель структурно-сложной частицы с внутренними степенями свободы (раздел 2) и изучены простейшие кинематические и динамические свойства такой частицы. В третьем разделе детально рассматриваются ее кинематические свойства в простейшем случае частицы с одной внутренней степенью свободы. В четвертом разделе формулируется биллиардный формализм, позволяющий изучать кинематические и динамические свойства структурно-сложных частиц с произвольным числом внутренних степеней свободы. Этот формализм и его обобщения систематически используется на протяжении всего обзора. В пятом разделе он применяется для обсуждения кинематики частиц с двумя и более внутренними степенями свободы. Обсуждается появление классического «квантования» состояний свободного движения структурно-сложных частиц с небольшим числом внутренних степеней свободы. С помощью биллиардного подхода в этой главе получены возможные режимы свободного движения структурно-сложных частиц. В шестом разделе детально анализируется процесс столкновения структурно-сложной частицы с одной внутренней степенью свободы с барьером. Показано, что при отражении такой частицы могут наблюдаться как полное охлаждение внутренней степени свободы, так и их «нагрев». Вычислены основные характеристики столкновения. Обнаружены качественные отличия от столкновений с барьером бесструктурных частиц. Показано, что структурно-сложная частица отражается от барьера после конечного числа столкновений с ним. Получено число столкновений с барьером до отражения

в зависимости от параметров структурно-сложной частицы. Показано, что столкновение структурно-сложной частицы с барьером в определенном смысле проявляет черты простейшего хаотического рассеяния.

В седьмом разделе обсуждается процесс рассеяния структурно-сложных частиц. Для исследования столкновений структурно-сложных частиц используется снова бильярдный подход. В нем движение некоторой точечной частицы в определенном бильярде полностью определяет движение и взаимодействие всех компонент и составных элементов структурно-сложных частиц. Другими словами, показано, что рассеяние структурно-сложных частиц можно рассматривать как движение точечной частицы в специальном открытом бильярде. Применение такого подхода позволяет относительно просто установить ряд общих свойств столкновений структурно-сложных частиц. Показано, как с помощью бильярдного подхода получается полная матрица рассеяния структурно-сложных частиц, определяющая скорости всех компонент таких частиц после рассеяния по их скоростям до столкновения. Установлены общие свойства матрицы рассеяния. Обнаружено, что несмотря на абсолютно упругий характер взаимодействия всех элементов таких частиц рассеяние заканчивается после конечного числа столкновений структурно-сложных частиц. Для небольшого числа внутренних степеней свободы максимально возможное число столкновений удается получить точно. В случае более сложных структурно-сложных частиц удается оценить число и время столкновений при их рассеянии. Кроме этого обсуждены необычные режимы рассеяния, при которых происходит обмен между внутренними степенями свободы и поступательными степенями свободы. Установлены эффекты, связанные с наличием у частиц небольшого числа внутренних степеней свободы.

В восьмом разделе показано, что полученные эффекты могут наблюдаться при отражении обычных наночастиц от упругих барьеров.

В девятом разделе бильярдный формализм обобщается на случай заряженных структурно-сложных частиц. С его помощью в десятом разделе рассмотрено движение заряженной структурно-сложной частицы в постоянном электрическом поле. Используя бильярдный формализм, найдены точные законы движения такой частицы с одной внутренней степенью свободы. Обсуждается применение бильярдного формализма для описания движения частицы с несколькими внутренними степенями свободы в постоянном поле. Предложено обобщение принципа Шварца спрямления траекторий при наличии поля в одиннадцатом разделе. В двенадцатом разделе обсуждены режимы движения структурно-сложной частицы с двумя степенями свободы в постоянном поле в рамках бильярдного формализма. В разделе 13 приведены свойства излучения заряженной структурно-сложной частицы в постоянном поле. Показана эффективность излучения структурно-сложными частицами.

В последних двух разделах обсуждается обобщение структурно-сложных частиц на трехмерный случай и исследуются их кинематические свойства. Приводится обобщение бильярдного подхода на этот случай.

Обсуждаются механизмы хаотизации таких частиц. Показано наличие своеобразного блуждания структурно-сложных частиц, качественно отличного от броуновского движения.

2. СТРУКТУРНО-СЛОЖНАЯ ЧАСТИЦА С ВНУТРЕННИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Введем простую модель структурно-сложной частицы, имеющей внутренние степени свободы [1]. Начнем с одномерной модели частицы с минимальным числом внутренних степеней свободы. Такая модель должна быть максимально простой. Пусть оболочка частицы – это цилиндр длиной L , закрытый с торцов. Оболочка имеет массу M . Внутри оболочки свободно движется внутренняя частица массы m (см. рис. 1). Разумеется, внутрь оболочки можно поместить и несколько внутренних частиц как одинаковых, так и разных масс. Эти внутренние частицы свободно двигаются внутри оболочки и могут сталкиваться друг с другом и торцами оболочки. Такую систему будем рассматривать как одномерную модель структурно-сложной частицы, обладающей внутренними степенями свободы [1]. Специфика этой модели в том, что при столкновении внутренней частицы с оболочкой или другой внутренней частицей она обменивается импульсом и энергией с соответствующими элементами. Обмен осуществляется в соответствии с законом сохранения суммарного импульса и энергии системы частица-оболочка или частица-частица. Все типы столкновений будем предполагать абсолютно упругими.

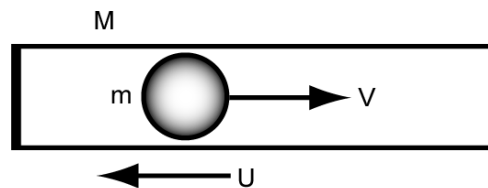
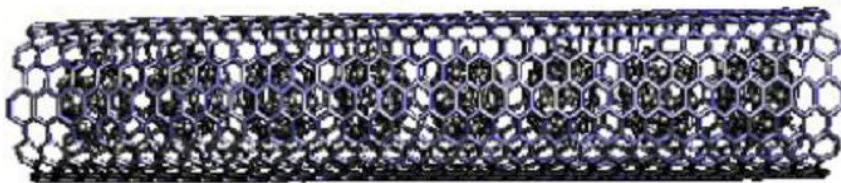


Рис. 1. Одномерная модель сложной частицы с одной внутренней степенью свободы

Обратим внимание, что несмотря на максимальную простоту модели динамика такой частицы выглядит довольно сложно. Причина этого во взаимодействии внутренних степеней свободы друг с другом и с оболочкой. Напомним, что известная задача трех тел уже является неинтегрируемой. Далее покажем, насколько далеко можно продвинуться в изучении ограниченной задачи n -тел, соответствующей структурно-сложной частице. Начнем изучение с простейшего случая структурно-сложной частицы с одной внутренней степенью свободы.

Интересно отметить, что существует множество реальных физических систем, которые в точности совпадают с этой моделью. В качестве простого примера приведем *nanorearods* [2]. Этот объект представляет собой закрытую нанотрубку с фуллереном или несколькими фуллеренами внутри (см. рис. 2). Такие материалы уже созданы экспериментально [3], [4]. Сейчас «*nanorearods*» являются интереснейшими и перспективными материалами для наноэлектроники. Их можно использовать для создания нанодиодов, транзисторов, элементов памяти и логических схем, а также аккумуляторов водорода и высокотемпературных сверхпроводников. Кроме этого они являются одним из элементов наноконструктора, который позволяет создавать разнообразные наномшины и наноустройства. Другим примером реализации модели структурно-сложной частицы могут служить ротаксаны [4]. Название происходит от латинского «*rota*», что означает колесо, и «*axis*» — ось. Это соединение, состоящее из молекулы гантелевидной формы и циклической молекулы, «надетой» на неё. Расширения на концах линейной компоненты препятствуют возможности циклической молекулы покинуть линейную «ось». Естественно, на линейный участок может быть надето и несколько циклических молекул. Эти компоненты ротаксанов связаны чисто механически без участия химической связи. Такой способ соединения молекул называется топологической связью. Роль внутренних степеней свободы выполняют циклические молекулы, надетые на ось.



*Рис. 2. Показано часть *nanorearods*. Видна внешняя структура нанотрубки и фуллерены, размещающиеся внутри*

Нетрудно установить эквивалентность ротаксанов с предложенной моделью структурно-сложной частицы.

Более того, частица любого материала достаточно малого размера должна обладать свойствами, близкими к рассматриваемой модели. Действительно, если речь идет о частице некоторого материала, то следует понимать, что это компактный объект, состоящий из атомов. Поэтому можно представлять ее как некоторое число атомов, находящихся в некоторой эффективной потенциальной яме. Положение такой частицы совпадает с положением потенциальной ямы, и этот потенциал можно представлять как оболочку частицы. Атомы, находящиеся в яме, взаимодействуют друг с другом, а смещение их центра инерции приводит к смещению потенциальной ямы или оболочки. Близость такой картины к модели структурно-сложной частицы легко заметить. Далее мы убедимся в этом, используя численное моделирование.

Разумеется, модель структурно-сложной частицы можно обобщить, включая в нее ряд других черт, которые отсутствуют в простейшем варианте. Некоторые важные обобщения этой модели будут также обсуждены в последующих разделах.

3. КИНЕМАТИКА СТРУКТУРНО-СЛОЖНОЙ ЧАСТИЦЫ С ОДНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

При изучении структурно-сложных частиц прежде всего возникает очевидный вопрос о свойствах свободного движения такой частицы. Для частицы без внутренних степеней свободы ответ на него тривиален — свободная частица сохраняет начальную скорость. Другими словами, при отсутствии воздействий она движется прямолинейно с постоянной скоростью. Ясно, что для структурно-сложной частицы это уже не всегда так. Поэтому интересно выяснить, какие состояния свободного движения реализуются для такой частицы и как они зависят от числа ее внутренних степеней свободы. Такую зависимость легко обнаружить в рамках модели структурно-сложной частицы. Ясно, что, увеличивая число внутренних частиц, можно увеличивать число внутренних степеней свободы такой частицы. Следует подчеркнуть, что вводимые таким образом степени свободы взаимодействуют друг с другом и оболочкой частицы. С физической точки зрения это особенно интересный случай. Изучая все состояния свободного движения такой структурно-сложной частицы, можно выяснить зависимость их от числа внутренних степеней свободы. Из общих соображений с увеличением числа внутренних степеней свободы следует ожидать перехода к макроскопической частице. Модель структурно-сложной частицы при $M \rightarrow \infty$ переходит в известную модель одномерного газа частиц на отрезке [5, 6].

Перейдем к обсуждению состояний свободного движения простой структурно-сложной частицы с одной внутренней степенью свободы. Основные принципы, которые нужно использовать, это законы сохранения импульса и энергии структурно-сложной частицы. Обозначим скорость внутренней частицы до n -го столкновения с оболочкой V_n , а скорость оболочки U_n . Очевидно, что между столкновениями эти скорости сохраняются. Поэтому смену состояний можно изучать в дискретном времени n столкновений между оболочкой и внутренней частицей.

Прежде всего легко установить среднюю скорость движения структурно-сложной частицы. Очевидно, что средняя скорость структурно-сложной частицы совпадает со скоростью движения центра инерции,

$$\bar{V} = \frac{MU_0 + mV_0}{M + m}, \quad (3.1)$$

которая сохраняется для замкнутых систем (см., например, [7]). Разумеется, средняя скорость движения и для более сложных частиц с любым числом внутренних степеней свободы также совпадает со скоростью движения ее центра инерции. Это важный инвариант свободных движений замкнутых систем.

Теперь перейдем к более детальному анализу свободного движения. Из закона сохранения импульса

$$mV_{n+1} + MU_{n+1} = mV_n + MU_n \quad (3.2)$$

и закона сохранения энергии при столкновениях

$$mV_{n+1}^2 + MU_{n+1}^2 = mV_n^2 + MU_n^2 \quad (3.3)$$

легко получить обычную связь между скоростями до и после столкновения внутренней частицы с оболочкой

$$V_{n+1} - U_n = U_{n+1} - V_n. \quad (3.4)$$

Это выражение легко преобразовать к виду $V_{n+1} - U_{n+1} = U_n - V_n$, и следовательно, в такой системе сохраняется $|U_n - V_n| = const$. Окончательно получим отображение, определяющее эволюцию скоростей внутренней частицы и оболочки в дискретном времени столкновений

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \frac{m-M}{m+M}V_n + \frac{2M}{m+M}U_n \equiv f(V_n, U_n), \\ U_{n+1} &= \frac{2m}{m+M}V_n + \frac{M-m}{m+M}U_n \equiv g(V_n, U_n). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Таким образом, скорости оболочки и внутренней степени свободы частицы определяются линейным отображением после каждого столкновения оболочки с внутренней частицей. Следует отметить, что свойство линейности может нарушаться при более сложном взаимодействии оболочки и внутренней частицы. Замечательным свойством отображения (3.5) является его инволютивность.

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} V_{n+2} &= f(f(V_n, U_n), g(V_n, U_n)) \equiv V_n, \\ U_{n+2} &= g(g(V_n, U_n), f(V_n, U_n)) \equiv U_n. \end{aligned}$$

Это означает, что скорости оболочки и внутренней степени свободы при свободном движении могут находиться только в двух состояниях,

определяемых начальными скоростями и массами частицы и оболочки. Смена этих состояний периодическая. Таким образом, в случае общего положения скорость оболочки может принимать только два значения U_0 и $U_1 = g(V_0, U_0)$. Эти значения зависят от начальной скорости внутренней степени свободы V_0 . Аналогично, состояния внутренней степени свободы также могут принимать только два значения скорости V_0 и $V_1 = f(V_0, U_0)$. Интересно отметить своеобразную «квантовость» состояний классической структурно-сложной частицы. Отличие от чисто квантового случая состоит в том, что значения этих «квантов» могут меняться. Кроме этого возможен и вырожденный случай, когда $V_0 = U_0$ и частица движется с постоянной скоростью как точечная частица. В этом предельном случае внутренняя частица не сталкивается с оболочкой.

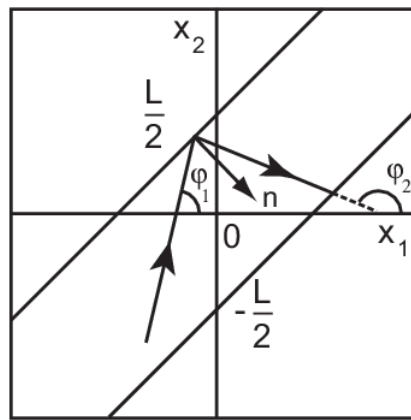


Рис. 3. Область между наклонными под 45° прямыми – конфигурационное пространство обсуждаемого бильярда. Показаны также траектории системы до и после n -го столкновения. Нормаль в точке столкновения обозначена n

Полученные «спектры» скорости структурно-сложной частицы не исчерпывают все кинематические характеристики ее свободного движения. Для полного описания нужно установить времена смены этих состояний. Хотя период колебаний частицы легко получить из предыдущих соотношений, здесь удобно ввести другой подход к описанию поведения структурно-сложной частицы, который понадобится и при изучении ее динамики. Роль этого подхода возрастает и с увеличением внутренних степеней свободы. Причина этого в том, что двух законов сохранения уже недостаточно для детального анализа кинематических состояний таких частиц.

4. БИЛЛИАРДНЫЙ ФОРМАЛИЗМ

Для анализа геометрического и физического смысла реализации двухуровневого свободного движения перейдем к другому подходу, используемому при сведении некоторых механических задач к математическим бильярдам (см. [5], [6], [8]). Рассмотрим конфигурационное пространство структурно-сложной частицы. Для этого введем координату x_1 положения внутренней частицы и координату x_2 положения центра ее оболочки. Тогда все возможные состояния такой системы определяются неравенствами

$$|x_1 - x_2| \leq \frac{L}{2}.$$

Легко понять, что конфигурационное пространство состояний такой системы – это полоса шириной L , показанная на рис. 3.

Рассмотрим, как выглядит в конфигурационном пространстве движение внутренней частицы и оболочки частицы. Начальное положение внутренней частицы x_{01} и оболочки x_{02} естественно находятся в полосе. Обозначим их начальные скорости V_0 и U_0 , соответственно. Тогда координаты внутренней частицы и оболочки меняются со временем до момента столкновения как

$$\begin{aligned} x_1 &= tV_0 + x_{01}, \\ x_2 &= tU_0 + x_{02}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Эти уравнения определяют параметрически прямую линию в конфигурационном пространстве с углом наклона $\tan(\varphi) = \frac{U_0}{V_0}$,

проходящую через точку (x_{02}, x_{01}) (см. рис. 3). Точка столкновения внутренней частицы с оболочкой соответствует точке пересечения этой прямой с границей конфигурационной области. После столкновения траектория снова прямая линия, параметрически определяемая уравнениями

$$\begin{aligned} x_1 &= (t - t_{cl})V_1 + x_{cl1}, \\ x_2 &= (t - t_{cl})U_1 + x_{cl2}. \end{aligned}$$

Здесь для удобства введены координаты некоторой 1-й точки пересечения (x_{cl2}, x_{cl1}) линии с границей конфигурационного

пространства в момент времени t_{cl} и соответствующих скоростей V_1 и U_1 после столкновения. На рис. 3 показаны характерные изменения траекторий после столкновения. Угол φ_1 определяется из уравнения $\tan(\varphi_1) = \frac{U_0}{V_0}$, а угол φ_2 – из $\tan(\varphi_2) = \frac{U_1}{V_1}$. Внешне эти изменения напоминают столкновение частицы со стенкой незамкнутого бильярда. Остается обсудить закон такого столкновения. Определим угол падения на «стенку» θ_1 и угол отражения θ_2 . Для этого надо найти угол между прямой $x_2 = x_1 + L/2$

$$x_2 = \frac{U_0}{V_0}(x_1 - x_{01}) + x_{02}, \quad x_2 = \frac{U_1}{V_1}(x_1 - x_{(1)1}) + x_{(1)2}.$$

В нашем случае легко заметить, что $\theta_1 = \varphi_1 - \pi/4$, а $\theta_2 = \pi + \pi/4 - \varphi_2$. Важным наблюдением из этого является, что угол падения не равен углу отражения. Следовательно, такое отражение нельзя трактовать как упругое отражение от границы бильярда некоторой эффективной «частицы». Перейдем теперь к новым бильiardным координатам конфигурационного пространства, выполняя замену

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \sqrt{m}x_1, \\ \tilde{x}_2 &= \sqrt{M}x_2. \end{aligned}$$

Фактически это соответствует масштабным преобразованиям координат. Первый вопрос – как изменится конфигурационное пространство при такой замене координат? Ясно, что в новых координатах область конфигурационного пространства удовлетворяет условию

$$\left| \frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{m}} - \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{M}} \right| \leq \frac{L}{2}.$$

Это означает, что изменится угол наклона полосы и конфигурационное пространство системы будет выглядеть как на рис. 4.

Теперь определим закон изменения траектории при столкновении с границей бильярда. Сами траектории преобразуются очевидным образом. До столкновения

$$\tilde{x}_2 = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{m}} \frac{U_n}{V_n} (\tilde{x}_1 - \mathbf{n} \tilde{x}_{01}) + \tilde{x}_{02},$$

и после столкновения

$$\tilde{x}_2 = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{m}} \frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} (\tilde{x}_1 - n \tilde{x}_{n1}) + \tilde{x}_{n2}.$$

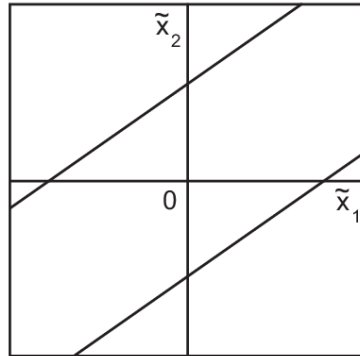


Рис. 4. Конфигурационное пространство системы в новых координатах.

Точка пересечения верхней границы с осью \tilde{x}_2 совпадает с $L\sqrt{M} / 2$,

а нижней с $-L\sqrt{M} / 2$

Используя полученные выражения, легко доказать, что в этих переменных угол падения траектории на границу равен углу отражения. Действительно, вектор, направленный по касательной к границе, $\vec{\tau} = (\sqrt{M}, \sqrt{m})$, а вектор вдоль падающей траектории $\vec{v}_{in} = (\sqrt{M}U_n, \sqrt{m}V_n)$ и отраженной $\vec{v}_{out} = (\sqrt{M}U_{n+1}, \sqrt{m}V_{n+1})$. Угол между ними легко определить из скалярного произведения соответствующих векторов. Так,

$$\sin \theta_1 = \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{v}_{in}}{|\vec{\tau}| |\vec{v}_{in}|} \equiv \frac{MU_n + mV_n}{(\sqrt{m+M})(\sqrt{MU_n^2 + mV_n^2})},$$

$$\sin \theta_2 = \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{v}_{out}}{|\vec{\tau}| |\vec{v}_{out}|} \equiv \frac{MU_{n+1} + mV_{n+1}}{(\sqrt{m+M})(\sqrt{MU_{n+1}^2 + mV_{n+1}^2})}.$$

Легко заметить, что правая часть этих выражений определяется только сохраняющимися величинами — импульсом и энергией системы. Следовательно, угол падения равен углу отражения $\theta_1 = \theta_2$. Физическая причина, по которой эффективна такая замена, связана с преобразованием скоростей. Действительно, в бильярдных координатах скорости оболочки и внутренней частицы становятся $U\sqrt{M}$ и $V\sqrt{m}$ соответ-

венно. Тогда величина скорости вдоль траектории $\vec{v} = (U\sqrt{M}, V\sqrt{m})$ совпадает с удвоенной энергией частицы и, следовательно, сохраняется после отражения от границ бильярда или при столкновении оболочки с внутренней частицей.

Таким образом, задача о свободном движении структурно-сложной частицы сводится к обычному бильярду в полосе.

Отличие заключается только в трактовке этого бильярда. Так, точка конфигурационного пространства соответствует состоянию как внутренней частицы, так и оболочки. Сегмент траектории до пересечения с границей соответствует свободному движению оболочки и внутренней частицы. Отражение от границы бильярда – столкновению внутренней частицы с оболочкой.

Естественный переход к такому простому бильярду позволяет наглядно представить и перечислить все типы свободных движений такой структурно-сложной частицы.

1. Движение с постоянной скоростью. Инфинитные движения. Вырожденный случай $V_0 = U_0$. Соответствует траекториям бильярда, параллельным его границам.

2. Периодическая смена скоростей с нулевой скоростью центра масс. Финитные движения. Также вырожденный случай. Соответствует бильярдным траекториям, падающим ортогонально на границу бильярда. Далее под периодом траекторий удобно понимать число различных скоростей оболочки или внутренней частицы, после которых они повторяются. Тогда период таких движений равен 2.

3. Периодическая осцилляция скоростей с постоянным уходом на бесконечность. Инфинитные движения. Случай общего положения. Соответствует траекториям, падающим на границу под углами, не равными $\pi/2$. Период осцилляций 2.

Теперь легко определить временной период смены скоростей простой структурно-сложной частицы при свободном движении. Действительно, используя параметрический вид траектории, легко вычислить время столкновений траекторий, начинающихся на одной границе бильярда и достигающих второй границы

$$t_c = \frac{L}{|U_0 - V_0|}.$$

Учитывая симметрию траекторий и сохранение $|U_n - V_n| = \text{const}$ при отражениях (см. (3.4)), легко получить период смены состояний частицы в виде

$$T = \frac{2L}{|U_0 - V_0|}. \quad (4.2)$$

Полученные характеристики исчерпывают полное описание кинематических состояний свободной структурно-сложной частицы с одной внутренней степенью свободы. Обратим внимание, что с физической точки зрения все кинематические свойства частицы с одной внутренней степенью свободы определяются наличием двух инвариантов свободного движения: это скорость центра масс и относительная скорость оболочки и внутренней частицы $|U_n - V_n| = \text{const}$.

Представление структурно-сложной частицы с одной степенью свободы в терминах бильярда в полосе позволяет легко установить отсутствие эргодичности при свободном движении, не говоря уже о перемешивании. Однако ситуация принципиально изменится при увеличении числа внутренних степеней свободы.

В заключение этого раздела обсудим интересный вопрос. Можно ли определить полное состояние частицы с одной внутренней степенью свободы по данным наблюдения? Для точечной частицы ответ на аналогичный вопрос положителен. Для того чтобы ответить на этот вопрос, необходимо уточнить, какие данные можно получить из кинематических наблюдений. Будем считать, что можно установить основные характеристики оболочки. Другими словами, из эксперимента можно установить L , U_0 , U_1 , \bar{V} и T . Таким образом, по этим данным требуется установить m , M и V_0 , V_1 . На первый взгляд, ответ на этот вопрос положительный, так как для определения 4 неизвестных имеется система 4 уравнений (3.1), (3.5) и (4.2). Однако легко заметить, что в уравнения (3.5) и (3.1) входит только отношение масс, например m/M . Поэтому установить массы m и M из перечисленных выше наблюдаемых невозможно. Следовательно, даже для структурно-сложной частицы с одной внутренней степенью свободы по данным наблюдения нельзя определить полное состояние частицы. Для того чтобы это стало возможным, необходимо измерение массы оболочки или полной массы такой частицы.

5. ЧАСТИЦА С ДВУМЯ И БОЛЕЕ ВНУТРЕННИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Обсудим, как меняются кинематические свойства структурно-сложной частицы с увеличением числа внутренних степеней свободы [1]. Рассмотрим частицу с двумя внутренними степенями свободы. Теперь в оболочку поместим две частицы. Снова начнем с конфигурационного пространства системы. В этом случае исходными координатами будут координаты двух внутренних частиц x_1 и x_2 с массами m_1 и m_2

и координата центра оболочки x_3 с массой M . Условия, ограничивающие допустимые состояния такой системы, имеют вид

$$\begin{aligned} x_1 &\leq x_2, \\ |x_3 - x_1| &\leq \frac{L}{2}, \\ |x_3 - x_2| &\leq \frac{L}{2}. \end{aligned}$$

Первое условие определяет порядок размещения частиц в оболочке и является следствием одномерности модели. Все приведенные условия определяют некоторую область в пространстве \mathbb{R}^3 с координатами (x_1, x_2, x_3) . Легко понять, что это трубчатая область с треугольной границей. Сечение этой области, например, плоскостью $x_3 = \text{const}$ показано на рис. 5.

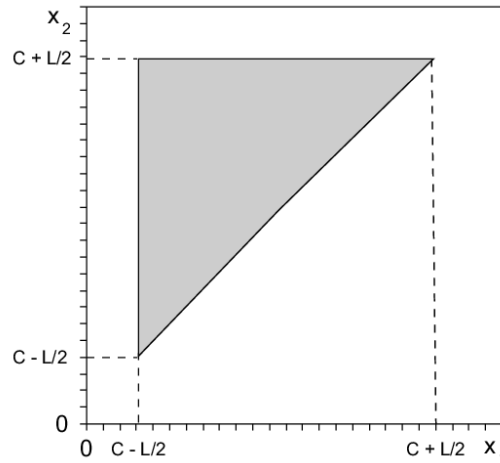


Рис. 5. Светло-серым цветом показана область сечения конфигурационного пространства $x_3 = c$

Отметим, что достижение бильярдной траекторией грани в сечении, образующей гипотенузу прямоугольного треугольника, соответствует столкновению внутренних частиц между собой, а достижение граней в сечении, образующих катеты, – столкновению соответствующей внутренней частицы с оболочкой. Все характеристики этой области определяются размером оболочки L . Перейдем теперь к координатам

$$\tilde{x}_1 = \sqrt{m_2} x_1, \quad \tilde{x}_2 = \sqrt{m_2} x_2, \quad \tilde{x}_3 = \sqrt{M} x_3.$$

Легко доказать, что в этих координатах закон отражения траектории системы от границ нового конфигурационного пространства имеет в точности бильярдный характер, угол падения равен углу отражения. Причина этого, как отмечалось ранее, в сохранении величины скорости вдоль бильярдной траектории после отражения ее от границы бильярда. В результате получаем удобную и эффективную бильярдную модель описания кинематики частицы с двумя внутренними степенями свободы. Таким образом, остается описать поведение лучей в трехмерном незамкнутом бильярде специального вида.

С физической точки зрения достаточно рассмотреть частицу с двумя внутренними степенями свободы в системе центра масс. Так как скорость центра масс сохраняется, то это наиболее подходящее сечение исходного открытого бильярда. Такое сечение определяется соотношением

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + M x_3 = 0$$

и в новых координатах:

$$\sqrt{m_1} \tilde{x}_1 + \sqrt{m_2} \tilde{x}_2 + \sqrt{M} \tilde{x}_3 = 0.$$

Очевидно, что данное уравнение описывает собой плоскость с вектором нормали $\vec{n} = (\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \sqrt{M})$.

Уравнения плоскостей, которые ограничивают треугольную призму и формируют бильярд, определяются как

$$\sqrt{m_1} \tilde{x}_2 + \sqrt{m_2} \tilde{x}_1 = 0,$$

$$-\sqrt{M} \tilde{x}_1 + \sqrt{m_1} \tilde{x}_3 - \sqrt{M m_1} \frac{L}{2} = 0,$$

$$-\sqrt{M} \tilde{x}_2 + \sqrt{m_2} \tilde{x}_3 - \sqrt{M m_2} \frac{L}{2} = 0.$$

Отсюда направляющие вектора сечений этих плоскостей с плоскостью, в которой происходит движение, легко найти:

$$\vec{a}_1 = (-\sqrt{m_1 M}, -\sqrt{m_2 M}, m_1 + m_2),$$

$$\vec{a}_2 = (-\sqrt{m_1 m_2}, -M - m_1, \sqrt{m_2 M}),$$

$$\vec{a}_3 = (M + m_2, -\sqrt{m_1 m_2}, \sqrt{M m_1}).$$

Теперь можно вычислить тангенсы углов между этими векторами

$$\begin{aligned}\tan(\angle \vec{a}_1 \vec{a}_2) &= \sqrt{\frac{m_1(m_1 + m_2 + M)}{m_2 M}}, \\ \tan(\angle \vec{a}_3 \vec{a}_2) &= \sqrt{\frac{M(m_1 + m_2 + M)}{m_1 m_2}}, \\ \tan(\angle \vec{a}_3 \vec{a}_1) &= \sqrt{\frac{m_2(m_1 + m_2 + M)}{m_1 M}}.\end{aligned}\quad (5.1)$$

Таким образом, для описания кинематики сложной частицы с двумя внутренними степенями свободы достаточно изучить траектории в треугольном бильярде, углы которого определяются соотношением масс (5.1). Легко проверить, что полученный треугольный бильярд при любом соотношении масс – остроугольный. Интересно отметить, что в точности такой треугольный бильярд появляется при изучении 3-х частиц, движущихся в трубчатом кольце [9]. Для описания кинематики структурно-сложной частицы используем замечательные результаты, полученные при изучении треугольных бильярдов. Прежде всего для них основную роль играет соотношение углов треугольника. Хорошо известно, что бильярд в треугольнике с рационально соизмеримыми углами не эргодичен [5]. В принципе доказана и более общая теорема. Для рационального полигона и любого направления бильярдный поток не перемешиваемый [10]. На основании численных экспериментов утверждается, что если только один угол треугольника рационально соизмерим с π , то бильярд в нем эргодичен и слабо перемешивающий [11]. В работе [9] численно показано, что в треугольнике с рационально несоизмеримыми с π тремя углами бильярд является перемешивающим. Разумеется, сильный хаос с экспоненциальным разбеганием траекторий в таких бильярдах не возникает. Причина в строго доказанном равенстве нулю топологической энтропии для треугольных и даже полигональных бильярдов [12]. Механизм хаотизации в таких бильярдах более тонкий и связан с наличием разрывов в динамических законах эволюции лучей [13]. Кроме этого, достаточно много известно о периодических траекториях в треугольных бильярдах. В книгах [6, 8] детально обсуждаются периодические траектории в треугольных бильярдах и приводится частичная бифуркационная диаграмма периодических траекторий для них.

Разумеется, все эти результаты очевидным образом переносятся на кинематические свойства сложной частицы с двумя степенями свободы. Опишем, основываясь на этих результатах, типы свободных движений частицы с двумя внутренними степенями свободы.

1. Инфинитное движение, аналогичное точечной частице. Вырожденный случай при $U = V_1 = V_2$. Биллиардная траектория не пересекается с границами биллиарда.

2. При рационально соизмеримых углах (5.1) движение не эргодично. Это означает, что «спектр» скоростей конечен.

3. При одном несоизмеримом с π углом (5.1) большинство траекторий эргодично.

4. При несоизмеримых с π углах (5.1) возникает перемешивание и появляется слабый хаос, который проявляется в спадании корреляционной функции и забывании начальных условий.

5. При определенных начальных условиях и различных соотношениях масс возможны периодические режимы периодов 3, 5, 7, 9, 11, ... как с регулярным дрейфом со скоростью центра масс, так и без дрейфа. Режим периода 3 возможен при любых соотношениях масс. Области существования показаны на рис. 6 в пространстве относительных масс внутренних частиц к массе оболочки и соответствуют известной бифуркационной диаграмме [6, 8].

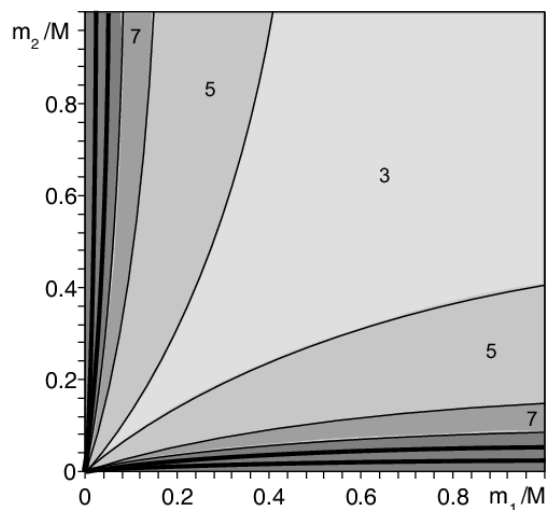


Рис. 6. В пространстве относительных масс показаны области различных периодических режимов. В области 3 реализуется режим периода 3. В области 5 возможны 3-периодические режимы и 5-периодические. В области 7 возможны 7, 5 и 3-периодические режимы. Аналогично устроены и более узкие зоны с еще более высокими периодическими режимами 9, 11, ...

Важно заметить, что кинематические свойства сложной частицы с двумя степенями свободы существенно зависят от соотношения масс, входящих в нее. В определенном смысле появляется необычная чувствительность к массам. При этом внутренние степени свободы могут

приводить к регулярным периодическим режимам, к эргодическим и хаотическим режимам. Все эти режимы качественно отличны от допустимых режимов частицы с одной внутренней степенью свободы. Например, режимы периода 2 невозможны для частицы с двумя внутренними степенями свободы. С ростом числа внутренних степеней свободы кинематические свойства могут быть исследованы аналогично, но возникающие биллиарды становятся «открытыми призмами» в пространствах высокой размерности, и многие вопросы для них остаются невыясненными. Например, анализ режимов свободного движения частицы с тремя внутренними степенями свободы в системе центра масс сводится к анализу биллиардных траекторий в трехмерном биллиарде, граница которого – обычная пирамида.

6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СТРУКТУРНО-СЛОЖНОЙ ЧАСТИЦЫ С БАРЬЕРОМ

После анализа кинематики структурно-сложных частиц естественно перейти к обсуждению их динамики. Одной из наиболее важных динамических задач является задача о столкновении макроскопических тел. Надо отметить, что изучение столкновений макроскопических частиц начато достаточно давно. Собственно анализ таких столкновений позволил понять и установить основные законы взаимодействия (см., например, [14]) макроскопических частиц или масс. Для макроскопических частиц с гигантским числом внутренних степеней свободы столкновение с массивной стенкой (бесконечно большой массы), согласно гипотезе Ньютона, описывается соотношением $e \cdot V = -V'$, где V и V' – скорости макроскопического тела до и после столкновения со стенкой, а e – коэффициент восстановления. Гипотеза Ньютона хорошо согласуется с экспериментами [14]. Для абсолютно упругих столкновений $e = 1$, а для абсолютно неупругих $e = 0$. Для большинства реальных тел $0 < e < 1$. Другими словами, скорость макроскопической частицы по абсолютной величине после столкновения может быть меньше скорости падения на стенку. Это совершенно естественное свойство, оказывается, может нарушаться для частиц с небольшим числом внутренних степеней свободы.

Перейдем к рассмотрению взаимодействия частицы с одной внутренней степенью свободы с твердой стенкой или с барьером (см. рис. 7). Взаимодействие оболочки с барьером предполагается абсолютно упругим.

Фактически это означает изучение закона отражения структурно-сложной частицы. Подход с использованием биллиардной идеологии исключительно эффективен для этой задачи. Рассмотрим структурно-

сложную частицу, падающую на плоскую твердую стенку. Наличие стенки меняет конфигурационное пространство такой частицы. В введенных ранее билиардных координатах конфигурационное пространство будет представлять собой наклонную полосу $\left| \frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{m}} - \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{M}} \right| \leq \frac{L}{2}$,

ограниченную снизу прямой $\tilde{x}_2 = \frac{L}{2} \sqrt{M}$. Последнее ограничение связано с положением

стенки в начале координат. Доступное положение оболочки $\tilde{x}_2 \geq \frac{L}{2} \sqrt{M}$.

Угол наклона полосы α определяется отношением масс оболочки и внутренней частицы $\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{m}}$. Кроме этого, обозначим для удобства

расстояние между стенкой и внутренней частицей в момент первого столкновения оболочки со стенкой l_1 (см. рис. 8). В новых координатах

$\tilde{l}_1 = l_1 \sqrt{m}$. Вид конфигурационного пространства и обозначения приведены на рис. 8. Легко доказать, что билиардная траектория отражается от стенок эффективного билиарда по обычному правилу – угол падения равен углу отражения.

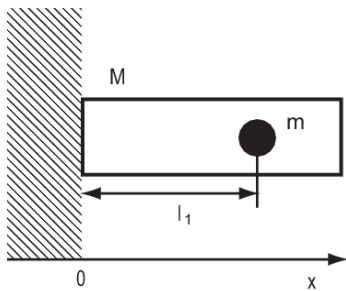


Рис. 7. Показан геометрический смысл расстояния l_1 . Это расстояние до барьера от внутренней частицы в момент столкновения оболочки с барьером. Положение барьера отмечено штриховкой. Направление движения до столкновения структурно-сложной частицы противоположно направлению координатной оси

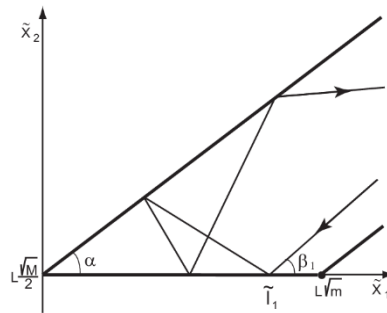


Рис. 8. Область внутри полосы, ограниченная жирными линиями, является конфигурационным пространством сталкивающейся с барьером структурно-сложной частицы. Показан пример траектории, соответствующей двум столкновениям оболочки с барьером до ее отражения. \tilde{l}_1 обозначено расстояние от вершины угла до точки первого столкновения оболочки с барьером

Очевидно, что столкновениям оболочки с барьером в конфигурационном пространстве соответствуют отражения бильярдной траектории от границы $\tilde{x}_2 = \frac{L}{2}\sqrt{M}$. Таким образом, характер столкновения частицы с барьером определяется бильярдными траекториями в «угловом» бильярде (см. рис. 8). Траектории в угловом бильярде были детально изучены Синаем [15] даже в многомерном случае. В рассматриваемом случае конфигурация бильярда несколько более сложная (см. рис. 8, 9). Однако вывод о выходе траектории из угла за конечное число столкновений сохраняется. Общий качественный вывод из этих соображений, что структурно-сложная частица отразится от стенки только после некоторого конечного числа столкновений с ней. Ясно, что число столкновений частицы с барьером является исключительно важной характеристикой взаимодействия. Поэтому вычислим его, используя метод выпрямления бильярдных траекторий, предложенный Шварцем (см., например, [8]). Построение развертки бильярда для спрямления траектории при взаимодействии с барьером приведено на рис. 9. Из него ясно, что максимально возможное число столкновений оболочки с барьером N_{max} при $\pi = 2k\alpha$ (где k — целое положительное число) совпадает с $N_{max} = [\pi/2\alpha]$ и в остальных случаях с $N_{max} = 1 + [\pi/2\alpha]$. Таким образом, максимально возможное число столкновений возрастает с уменьшением α или отношения масс M/m . Разумеется, реальное число столкновений с барьером $1 \leq N \leq N_{max}$ зависит от параметров структурно-сложной частицы и ее состояния до столкновения с барьером. Определим эту зависимость, выбирая в качестве удобных начальных характеристик структурно-сложной частицы \tilde{l}_1 в момент первого столкновения с барьером и угол падения (см. рис. 9) бильярдной траектории β_1 , который определяется соотношением $\tan(\beta_1) = U_1\sqrt{M}/V_1\sqrt{m}$. Здесь U_1 и V_1 — скорости оболочки и внутренней частицы непосредственно перед столкновением с барьером. При фиксированном \tilde{l}_1 число столкновений с барьером зависит от угла β_1 . При углах падения $\beta_{C(N-1)} \geq \beta_1 \geq \beta_{CN}$ структурно-сложная частица будет испытывать ровно N столкновений с барьером (см. рис. 9). Критические углы β_{CN} определяются геометрически соотношениями

$$\tan(\beta_{CN}) = \frac{l_1 \sin(2N\alpha)}{L - l_1 \cos(2N\alpha)},$$

где $N = 1, 2, \dots, N_{max}$, а $\beta_{C(0)}$ по определению будем считать $\beta_{C(0)} = \pi$, что распространяет критерий числа столкновений $\beta_{C(N-1)} \geq \beta_1 \geq \beta_{CN}$ и на одно столкновение ($N = 1$). Спектр критических углов зависит от начальных значений l_1 и характеристик структурно-сложной частицы L, α .

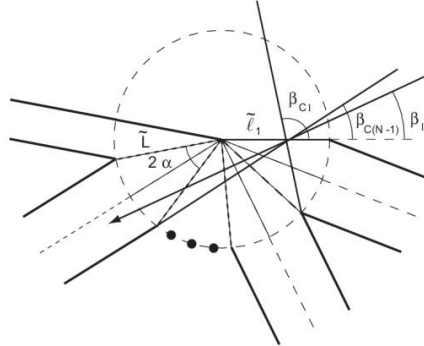


Рис. 9. Иллюстрирует способ спрямления траектории за счет укладки плоскости соответствующим «бильярдом». Точки символизируют все пропущенные сегменты бильярда. Показана бильiardная траектория (прямая с направлением). Пересечение жирных отрезков соответствует столкновению с барьером. Радиус пунктирной окружности равен $\tilde{L} = \sqrt{m}L$. Обозначение \tilde{l}_1 соответствует расстоянию от общей вершины углов α до 1-го пересечения бильiardной траекторией, падающей под углом β_1 . Показаны также два критических угла β_{C1} и $\beta_{C(N-1)}$

Естественно, используя простые геометрические соображения, можно установить и явную зависимость числа столкновений с барьером в зависимости от основных характеристик столкновения. Для этого используем число пересечений с радиальными линиями, между которыми углы 2α с прямой линией с углом падения β_1 на первую радиальную линию с расстоянием от центра l_1 (см. рис. 9). Условие, определяющее число пересечений, а следовательно, и число столкновений с барьером, состоит в том, что расстояние последнего пересечения не превышает \tilde{L} от центра радиальных линий. Используя теорему синусов, легко доказать, что

$$N = 1 + \left\lceil \frac{\pi - \beta_1 - \arcsin\left(\frac{l_1}{L} \sin(\beta_1)\right)}{2\alpha} \right\rceil, \tag{6.1}$$

здесь [...] — целая часть числа. Важным следствием является разрывность зависимости числа столкновений N от начальных характеристик столкновения и параметров структурно-сложной частицы (см. рис. 10). Такая зависимость определяет чувствительность характеристик рассеяния структурно-сложной частицы на барьере к неопределенности состояния до столкновения.

Зависимость \tilde{l}_1 и β_1 от первичных начальных условий структурно-сложной частицы (\vec{x}_0, V_0, U_0) также легко установить [1].

Рассмотрим теперь, как меняются скорости структурно-сложной частицы в результате отражения от барьера. Для этого удобно использовать алгебраический подход. Матрица столкновений внутренней частицы с оболочкой определяется соотношением (3.5). Используем для нее обозначение

$$\begin{pmatrix} V_{n+1} \\ U_{n+1} \end{pmatrix} = \hat{S}_c \begin{pmatrix} V_n \\ U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m-M}{m+M} & \frac{2M}{m+M} \\ \frac{2m}{m+M} & \frac{M-m}{m+M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_n \\ U_n \end{pmatrix}.$$

Матрица, определяющая изменение скоростей структурно-сложной частицы при столкновении оболочки с барьером, имеет простой вид

$$\begin{pmatrix} V_{n+1} \\ U_{n+1} \end{pmatrix} = \hat{S}_b \begin{pmatrix} V_n \\ U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_n \\ U_n \end{pmatrix},$$

который определяется изменением скорости оболочки на противоположную при столкновении с барьером. Так как столкновение оболочки с барьером строго чередуется столкновениями оболочки с внутренней частицей, можно легко получить и матрицу рассеяния для N кратных столкновений

$$\hat{S}_{int(N)} = \hat{S}_b \cdot (\hat{S}_c \cdot \hat{S}_b)^{(N-1)}.$$

Таким образом, число столкновений с барьером, вычисленное выше, и определяет изменение скоростей структурно-сложной частицы при взаимодействии с барьером. Вычисление этой матрицы достаточно простая задача. После несложных преобразований легко записать ее окончательный вид

$$\hat{S}_{int(N)} = \begin{pmatrix} \cos(2(N-1)\alpha) & -\frac{\sqrt{mM}}{m} \sin(2(N-1)\alpha) \\ -\frac{m}{\sqrt{mM}} \sin(2(N-1)\alpha) & -\cos(2(N-1)\alpha) \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

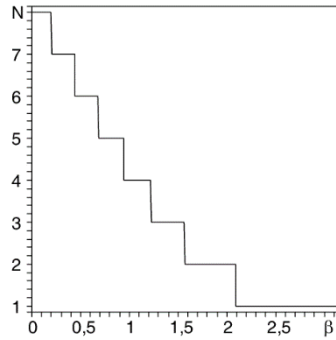


Рис. 10. Зависимость числа столкновений от угла β_1 при параметрах структурно-сложной частицы $\alpha = 0.2$, $L = 1$ и $l_1 = 0.7$

Основные характеристики матрицы рассеяния $\det(\hat{S}_{int(N)}) = -1$ и $sp(\hat{S}_{int(N)}) = 0$. Таким образом, скорости структурно-сложной частицы в результате столкновения с барьером меняются согласно соотношениям

$$V_N = \cos(2\alpha(N-1))V_1 - \sqrt{\frac{M}{m}} \sin(2\alpha(N-1))U_1,$$

$$U_N = -\sqrt{\frac{m}{M}} \sin(2\alpha(N-1))V_1 - \cos(2\alpha(N-1))U_1. \quad (6.3)$$

Легко видеть, что основным параметр, определяющий изменение скоростей, это число $N = N(V_1, U_1)$ столкновений с барьером. Обратим внимание, что отображение $(V_1, U_1) \rightarrow (V_N, U_N)$ нелинейное и даже разрывное именно из-за зависимости $N = N(V_1, U_1)$. Фактически этим формально и исчерпывается описание изменения скоростей структурно-сложной частицы при N кратном столкновении с барьером. Однако, с физической точки зрения, важно обсудить изменение скорости центра масс и разности скоростей внутренней степени свободы и оболочки в результате столкновения. Дело в том, что разность скоростей внутренней степени свободы и оболочки можно связать с условной температурой структурно-сложной частицы, а скорость центра масс – со скоростью ее поступательного движения. При этом возникает возможность нагрева или охлаждения структурно-сложной частицы при взаимодействии с барьером. Кроме этого причина такого выбора связана с физически ясными соображениями. Процесс свободного движения структурно-сложной частицы можно представить как движение ее с постоянной

скоростью центра масс и колебаниями оболочки. При столкновении оболочки с внутренней частицей скорость центра масс не меняется, и следовательно, она сохраняется при свободном движении. Таким образом, отражение от барьера может произойти только после смены скорости центра масс на противоположную. Если импульс оболочки мал, то за одно столкновение ее с барьером скорость центра масс не сможет изменить свое направление, и в этом случае должны происходить последующие столкновения с барьером до тех пор, пока не изменится направление скорости центра масс. Исходя из этой качественной картины, осуществим анализ рассеяния структурно-сложной частицы. Естественно из соотношений (6.3) легко восстановить преобразование скорости центра масс $\bar{V} = (mV + MU) / (m + M)$ и относительную скорость внутренней частицы $V_T = U - V$ в результате столкновения с барьером. Переход к таким переменным является линейным преобразованием координат. Поэтому его легко осуществить в матричном виде. В результате получим нужное преобразование скоростей вида

$$\begin{aligned}\bar{V}_N &= \bar{V}_1 \cos(2\alpha N) - V_{T1} \frac{\sin(2\alpha)}{2} \sin(2\alpha N), \\ V_{T(N)} &= -\bar{V}_1 \frac{2}{\sin(2\alpha)} \sin(2\alpha N) - V_{T1} \cos(2\alpha N).\end{aligned}\quad (6.4)$$

При отсутствии столкновения с барьером \bar{V} и $|V_T|$ сохраняются со временем (см. соотношение (3.4)). Это еще одно обстоятельство в пользу введения этих переменных.

Найдем еще одну важную характеристику взаимодействия с барьером – время взаимодействия с ним. Очевидно, если структурно-сложная частица взаимодействует с барьером посредством однократного столкновения, то взаимодействие мгновенно. Конечное время взаимодействия возникает только при многократном столкновении с барьером. Определим его как время между 1-м и последним столкновением оболочки со стенкой. Поскольку при переходе к новым координатам не выполнялось преобразование времени, то очевидно, что интервал времени между двумя любыми состояниями $\Delta t = \tilde{S} / |\vec{v}|$, где \tilde{S} – длина спрямленной бильярдной траектории между этими состояниями, а $|\vec{v}|$ – модуль скорости в бильярдных координатах вдоль бильярдной траектории, который не меняется, т.к. $|\vec{v}| = \sqrt{2E}$ (E – полная энергия сложной частицы).

Пусть структурно-сложная частица испытала N столкновений при взаимодействии с барьером. Тогда вычислим длину бильярдной

траектории между первым и последним столкновением оболочки с барьером (см. рис. 7), используя теорему синусов

$$S = \tilde{l}_1 \frac{\sin(2\alpha(N-1))}{\sin(\pi - \beta_1 - 2\alpha(N-1))} \equiv n\tilde{l}_1 \frac{\sin(2\alpha(N-1))}{\sin(\beta_1 + 2\alpha(N-1))}.$$

Естественно этот путь зависит от начальных характеристик взаимодействия с барьером β_1 и \tilde{l}_1 и параметров структурно-сложной частицы α . Тогда время взаимодействия равно

$$\Delta t_{int} = \frac{S}{|\tilde{v}|} = \tilde{l}_1 \frac{\sin(2\alpha(N-1))}{\sin(\beta_1 + 2\alpha(N-1))\sqrt{mV^2 + MU^2}},$$

где N зависит от характеристик структурно-сложной частицы и условий взаимодействия согласно уравнению (6.1). Время взаимодействия возрастает с уменьшением полной энергии частицы и зависит от параметров столкновения разрывным образом:

$$\Delta t_{max} = \frac{S_{max}}{|\tilde{v}|} = \frac{2L\sqrt{m} \sin\left(\frac{N\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2E}}.$$

Обсудим теперь, какие изменения скоростей происходят в результате взаимодействия с барьером. Как отмечалось ранее, важными наблюдаемыми являются скорость центра масс структурно-сложной частицы и относительная скорость внутренней частицы и оболочки. Первую можно рассматривать как поступательную скорость частицы, вторую – как характеристику внутренней степени свободы. Именно эта скорость характеризует внутреннюю энергию частицы. В этом смысле можно говорить, что она характеризует «температуру» структурно-сложной частицы. Поэтому далее будем говорить о режимах охлаждения или нагрева частицы, понимая под этим уменьшение или увеличение V_T , соответственно, в результате взаимодействия с барьером. Разумеется, при этом будет меняться и скорость поступательного движения \bar{V} . Начнем с режимов полного охлаждения структурно-сложной частицы. При таком режиме столкновения скорость V_T обращается в нуль. Идеология бильярдов позволяет легко обнаружить существование и критерии таких режимов. Пример бильiardных траекторий, соответствующих им, приведен на рис. 11.

Необходимые критерии возможности полного охлаждения структурно-сложной частицы при взаимодействии с барьером посредством N столкновений оболочки с ним приводят к следующим условиям на соотношение масс оболочки и внутренней частицы (см. [1]):

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(2\alpha N + \alpha)} > 1,$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(2\alpha(N-1) + \alpha)} \leq 1,$$

здесь α определяется соотношением $\tan(\alpha) = \sqrt{M/m}$. Например, для полного охлаждения при однократных столкновениях $N=1$ эти необходимые условия дают ограничение на массы $\sqrt{M/m} > 1$. Для $N=2$ соотношение масс должно удовлетворять $\sqrt{3}/3 < \sqrt{M/m} < 1$. Для $N=3$ необходимые условия $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} < \sqrt{M/m} < \sqrt{3}/3$.

При этом угол падения бильiardной траектории на ребро, соответствующее барьеру, строго фиксирован:

$$\beta_1 = \pi - 2\alpha(N-1) - \alpha.$$

При выполнении этих условий все частицы с начальным параметром \tilde{l}_1 , лежащим в интервале

$$\tilde{L} \cdot \frac{\sin(2\alpha N + \alpha)}{\sin(2\alpha N - \alpha)} < n\tilde{l}_1 < \tilde{L} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(2\alpha(N-1) + \alpha)},$$

будут испытывать полное охлаждение при взаимодействии с барьером с N -кратным столкновением оболочки с ним. Разумеется, следует помнить, что N определяется соотношением (6.1) и также зависит как от параметров частицы, так и начальных условий.

Таким образом, при взаимодействии с барьером может наблюдаться режим полного охлаждения частицы, при этом поступательная скорость частицы увеличивается согласно соотношениям (6.4)

$$\bar{V}_N = \bar{V}_1 \cdot \frac{1}{\cos(2\alpha N)}.$$

Другими словами, частица ускоряется после взаимодействия с барьером. Интересно отметить, что вообще отражение частицы от барьера является неупругим, несмотря на участие при взаимодействии только абсолютно упругого отражения при столкновении любых элементов структурно-сложной частицы и барьером. Кроме этого для такого режима отражения коэффициент восстановления $e > 1$, что соответствует необычному эффекту отражения частиц с малым числом

внутренних степеней свободы. Разумеется, случай $\cos(2\alpha N) = 0$ не соответствует режиму полного охлаждения.

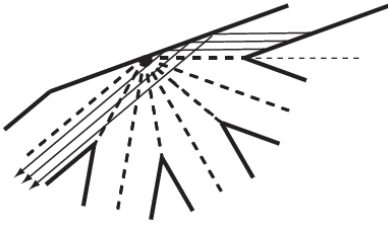


Рис. 11. Биллиардные траектории, для которых реализуется режим полного охлаждения структурно-сложной частицы при взаимодействии с барьером с 4-кратным столкновением оболочки с ним

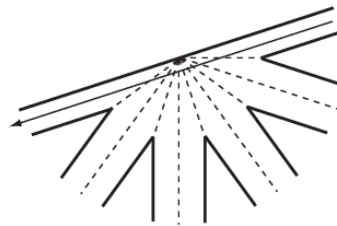


Рис. 12. Режим абсолютно упругого отражения «холодной» частицы. Показана развертка соответствующего биллиарда и биллиардная траектория. Угол α выбран равным $\pi/10$. Легко увидеть, что оболочка при взаимодействии испытывает $n = 5$ столкновений с барьером и 4 столкновения с внутренней частицей

Перейдем теперь к обсуждению в каком-то смысле обратных режимов нагрева структурно-сложной частицы. Легко строго доказать, что режим полного нагрева (при котором $\bar{V}_N = 0$) невозможен. Однако, предполагая $\bar{V}_N \ll \bar{V}_1$, легко получить возможность нагрева

$$V_{TN} \approx -V_{T1} \cdot \frac{1}{\cos(2\alpha N)}$$

в результате N -кратного взаимодействия с барьером.

Обратим внимание еще на один качественный эффект, возникающий при отражении «холодной» частицы ($V_1 = U_1$) от барьера. При выполнении условия $2\alpha n = \pi$, с целым $n > 2$, возможен режим отражения, показанный на рис. 12, соответствующий упругому отражению $\bar{V}_N = -\bar{V}_1$.

Коэффициент восстановления $e = 1$. При этом после n -кратного взаимодействия с барьером отраженная частица остается «холодной» $V_N = U_N$. Разумеется, в процессе взаимодействия внутренняя частица испытывает также $n - 1$ столкновений с оболочкой. В определенном смысле это даже более неожиданный эффект, чем нагрев или охлаждение частицы.

Разумеется, уравнения (6.4) позволяют после определения N , согласно уравнению (6.1), точно находить значения обеих скоростей после взаимодействия с барьером при любых параметрах и начальных значениях структурно-сложной частицы. Однако это не означает отсутствия чувствительности к изменению начальных условий.

При упругом отражении обычной частицы от барьера начальная неопределенность скорости частицы сохраняется, а неопределенность координат растет пропорционально времени. Другими словами, рассеяние обычной частицы не хаотическое. Рассеяние структурно-сложной частицы на барьере уже можно отнести к хаотическому рассеянию. Биллиардная идеология позволяет легко понять основной механизм чувствительности характеристик рассеяния к неопределенности в начальных условиях структурно-сложной частицы. На рис. 13 показан геометрический механизм такой чувствительности.

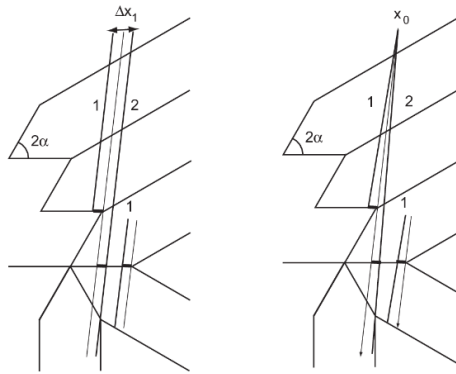


Рис. 13. Показан пучок биллиардных траекторий до и после столкновения с барьером. Слева параллельный пучок с неопределенностью по положению, но с одинаковыми начальными скоростями. Справа неопределенность только в начальных скоростях структурно-сложной частицы. Хорошо видны разрывы значений \tilde{l}_1 при малых неопределенностях и изменение числа столкновений оболочки с барьером для разных биллиардных траекторий пучка

Легко видеть, что увеличение неопределенностей связано с направлениями биллиардных траекторий, попадающих на углы развертки биллиарда. Для пучков с малым расхождением вдоль этих направлений угол β_1 падения на барьер непрерывно зависит от начальных неопределенностей, но значение \tilde{l}_1 меняется скачкообразно.

При этом неопределенность \tilde{l}_1 становится порядка \tilde{L} . Значение

$$\Delta \tilde{l} \approx \tilde{L} \left(1 - \frac{\sin(\beta - 2\alpha)}{\sin(\beta)} \right)$$

легко оценить и заметить, что эта неопре-

деленность практически не зависит от начальной неопределенности скоростей и положения. Это означает, что бильiardные траектории, входящие в узкий пучок, будут испытывать разное число столкновений оболочки с барьером при взаимодействии с ним (см. рис. 13). Это, в свою очередь, приводит к конечной неопределенности в скоростях структурно-сложных частиц после рассеяния. В этом смысле рассеяние структурно-сложной частицы на барьере имеет хаотический характер. Следует отметить, что точное знание положения внутренней частицы с физической точки зрения вообще выглядит сомнительным. Ее естественная неопределенность сравнима с размером структурно-сложной частицы L . Кроме этого, при большой удаленности частиц от барьера она дополнительно возрастает со временем. Это обстоятельство только усиливает хаотичность рассеяния из-за достаточно большой ширины пучка, сравнимой с периодом развертки бильiardа и возможности одновременного вхождения нескольких «опасных» направлений в такой широкий пучок.

Аналогично можно рассмотреть отражение структурно-сложной частицы с двумя внутренними степенями свободы от барьера. Бильiardная идеология остается исключительно полезной как для этого случая, так и большего числа внутренних степеней свободы. Однако этот случай значительно более разнообразный и требует отдельного изложения. Кроме этого, такая идеология полезна и при изучении законов столкновения или рассеяния таких частиц. Можно заметить, что рассмотренные выше закономерности взаимодействия с барьером автоматически переносятся на столкновение двух одинаковых структурно-сложных частиц с симметричными начальными условиями.

Подобным образом можно рассмотреть и закономерности столкновения двух разных структурно-сложных частиц [16].

7. РАССЕЯНИЕ СТРУКТУРНО-СЛОЖНЫХ ЧАСТИЦ

Рассмотрим столкновение двух структурно-сложных частиц в рамках бильiardного подхода. Пусть первая частица характеризуется массой оболочки m_0 , ее длиной $2L_1$ и положением центра оболочки x_0 , а также массами и положениями внутренних точечных частиц m_i , x_i (см. рис. 14). Целочисленный индекс i нумерует внутренние частицы и для первой структурно-сложной частицы принимает значения $i = 1, 2, \dots, k$. Соответственно, вторая частица характеризуется подобным набором величин. Массу оболочки второй частицы обозначим m_{k+1} , а положение ее центра x_{k+1} , ее длину $2L_2$.

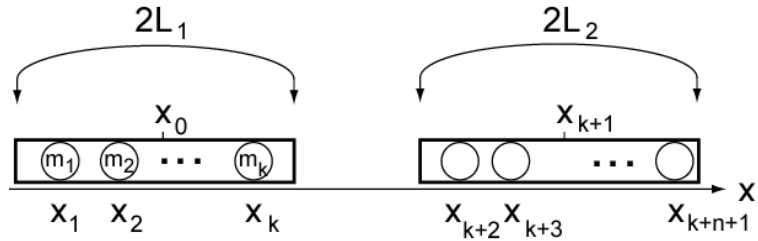


Рис. 14. Показаны две структурно-сложные частицы. Положения центров оболочек обозначены как x_0 и x_{k+1} . Массы внутренних частиц нумеруются в соответствии с нумерацией их координат. Для примера массы внутренних частиц первой структурно-сложной частицы приведены явно

Число внутренних частиц во второй структурно-сложной частице обозначим целым числом n . В общем случае число внутренних степеней свободы частиц может не совпадать. Координаты ее внутренних частиц обозначим $x_{k+2}, x_{k+3}, \dots, x_{k+n+1}$. Обратим внимание, что нумерация элементов каждой структурно-сложной частицы начинается с оболочки, а нумерация внутренних частиц производится последовательно слева направо. Полная масса системы двух частиц – $M = \sum_{i=0}^{k+n+1} m_i$. Положение всех компонент двух структурно-сложных частиц однозначно определяется вектором $\vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+n+1})$ в евклидовом пространстве размерности $k+n+2$.

После введения обозначений обсудим конфигурационное пространство двух структурно-сложных частиц. Конфигурационное пространство такой системы состоит из всех возможных положений структурно-сложных частиц и составляющих их компонент. Основное физическое ограничение заключается в непроницаемости всех компонент, образующих эти две структурно-сложные частицы. В одномерном случае, который и рассматривается, это означает невозможность изменить первоначальный порядок расположения элементов или компонент вдоль одномерной оси их положений и движений (см. рис. 14). Сформулируем условия, определяющие конфигурационное пространство. В первую очередь, это условие непроницаемости оболочек друг для друга:

$$x_{k+1} - x_0 \geq L_1 + L_2. \quad (7.1)$$

Геометрически это условие означает деление евклидова пространства \mathbb{R}^{k+n+2} гиперплоскостью размерности $k+n+1$ на две части. Конфигурационное пространство принадлежит только одной из частей, соответствующей неравенству (7.1). Часть гиперплоскости

$x_{k+1} - x_0 = L_1 + L_2$ образует его границу. Теперь учтем, что внутренние частицы каждой структурно-сложной частицы не могут покинуть оболочку, а также изменить порядок расположения внутри оболочки. Это приводит к следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &\geq -L_1, \\ x_2 - x_1 &\geq 0, \\ &\dots \\ x_k - x_{k-1} &\geq 0, \\ x_0 - x_k &\geq -L_1. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Эта система неравенств определяет ограничения, возникающие для первой структурно-сложной частицы. Так, первое неравенство соответствует невозможности первой внутренней частицы выйти за пределы оболочки, т.е. стать левее ее. Следующие неравенства означают, что соответствующая внутренняя частица не может проникнуть через ближайшую внутреннюю частицу, расположенную левее ее. Наконец, последнее неравенство отражает невозможность самой правой внутренней частицы выйти за пределы оболочки и стать правее ее. Аналогичная система неравенств связана со второй структурно-сложной частицей:

$$\begin{aligned} x_{k+2} - x_{k+1} &\geq -L_2, \\ x_{k+3} - x_{k+2} &\geq 0, \\ &\dots \\ x_{k+n+1} - x_{k+n} &\geq 0, \\ x_{k+1} - x_{k+n+1} &\geq -L_2. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Таким образом, возникает $k+n+3$ условий или неравенств, определяющих конфигурационное пространство. Каждое из приведенных неравенств представляет собой гиперплоскость в евклидовом пространстве \mathbb{R}^{k+n+2} . В целом они ограничивают область пространства \mathbb{R}^{k+n+2} , которая и является конфигурационным пространством двух структурно-сложных частиц. Другими словами, конфигурационное пространство – это открытый выпуклый многогранник или полиэдр с границами, составленными из частей приведенных выше гиперплоскостей.

Разумеется, для описания динамики таких частиц следует задать не только положения, но и скорости движения оболочек и всех внутренних частиц. Между столкновениями их скорости постоянны и направлены

вдоль оси x . Набор всех скоростей определим, вводя обозначение $\vec{v} = (\dot{x}_0, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{k+n+1})$. Этот набор сохраняется до момента столкновения внутренних частиц или внутренней частицы с оболочкой или самих оболочек. При этом изменение координат всех элементов структурно-сложных частиц определяется равенством $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + t\vec{v}$, где \vec{x}_0 начальный набор положений всех элементов структурно-сложных частиц, принадлежащий конфигурационному пространству. Таким образом, до момента столкновений движение всех элементов структурно-сложных частиц с постоянными скоростями задает параметрически прямую линию в конфигурационном пространстве. В момент столкновений эта линия достигает границы конфигурационного пространства. Границы конфигурационного пространства являются гиперповерхностями, определяемыми равенствами (7.1), (7.2), (7.3). Каждая гиперплоскость, образующая границу, соответствует столкновению двух определенных элементов структурно-сложных частиц. Таким образом, движение всех элементов структурно-сложных частиц между столкновениями можно рассматривать как движение одной бесструктурной частицы, но в конфигурационном пространстве размерности $k+n+2$. При столкновении с границей конфигурационного пространства координаты этой бесструктурной частицы не меняются, а изменяется направление и величина ее скорости. Иными словами, происходит ее «отражение» от границ конфигурационного пространства. Характер изменения направления скорости и ее величины определяется законами сохранения энергии и импульса отдельных компонент. Как и ранее, такое поведение напоминает движение частицы в многомерном полигональном бильярде. Для того, чтобы аналогия стала полной, необходимо достичь правильного бильярдного закона отражения. Другими словами, при столкновении нормальная к гиперплоскости компонента скорости должна менять знак, а тангенциальная – сохраняться. Для достижения такого закона отражения перейдем к бильярдным координатам [1], [6]. В качестве бильярдных координат введем $\vec{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{k+n+1})$, координаты которого связаны с исходными как

$$y_i = \sqrt{m_i} x_i, \quad i = 0, 1, \dots, k+n+1.$$

Естественно переход к таким координатам приводит к изменению компонент скоростей согласно

$$\vec{u} = (\dot{y}_0, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_{k+n+1}) = (\sqrt{m_0} \dot{x}_0, \sqrt{m_1} \dot{x}_1, \dots, \sqrt{m_{k+n+1}} \dot{x}_{k+n+1}).$$

Очевидное удобство таких координат заключается в том, что квадрат длины вектора скоростей теперь равен удвоенному значению кинетической энергии системы

$$2E = \sum_{i=0}^{k+n+1} m_i \dot{x}_i^2 = \sum_{i=0}^{k+n+1} \dot{y}_i^2 = |\vec{u}|^2.$$

Соответственно, в бильярдных координатах закон сохранения энергии обеспечивает равенство длин векторов скоростей до и после отражения от границ конфигурационного пространства. Также легко проверить, что из закона сохранения импульса в новых координатах следует зеркальный закон отражения. Покажем это на примере отражения от границы, определяемой равенством в условии (7.1). В бильярдных координатах эта граница определяется уравнением

$$\frac{y_0}{\sqrt{m_0}} - \frac{y_{k+1}}{\sqrt{m_{k+1}}} = L_1 + L_2.$$

Эта граница представляет собой гиперплоскость с единичной нормалью

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{m_0 + m_{k+1}}} \left(-\sqrt{m_{k+1}}, 0, \dots, 0, \sqrt{m_0}, 0, \dots, 0 \right). \quad (7.4)$$

Напомним, что при достижении этой границы бесструктурной частицей происходит столкновение только оболочек структурно-сложных частиц. Следовательно, меняются только скорости оболочек. Остальные элементы сохраняют свои скорости. Теперь проверим бильярдный характер столкновения. Ясно, что для этого нужно проверить выполнимость условия

$$\vec{u}_\perp = -\vec{u}'_\perp, \quad \vec{u}_\parallel = \vec{u}'_\parallel,$$

где $\vec{u}_\perp = u_\perp \vec{n}_0$ — нормальная компонента скорости к заданной гиперплоскости, а \vec{u}_\parallel — касательная. Штрихами помечены соответствующие компоненты скорости после столкновения. Вектор продольной скорости \vec{u}_\parallel определяется как скоростями внутренних частиц не участвующих в столкновении оболочек, так и скоростями сталкивающихся оболочек. Компонента \vec{u}_\parallel , связанная с оболочками, может быть записана как $\vec{u}_\parallel(\vec{u}\vec{\tau})$, где $\vec{\tau}$ имеет вид:

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{m_0 + m_{k+1}}} \left(\sqrt{m_0}, 0, \dots, 0, \sqrt{m_{k+1}}, 0, \dots, 0 \right).$$

В координатном виде сохранение величины $\vec{u}\vec{\tau}$ записывается следующим образом:

$$\dot{y}_0 \sqrt{m_0} + \dot{y}_{k+1} \sqrt{m_{k+1}} = \dot{y}'_0 \sqrt{m_0} + \dot{y}'_{k+1} \sqrt{m_{k+1}}.$$

Возвращаясь к исходным координатам, легко заметить, что это равенство совпадает с законом сохранения импульса оболочек при столкновении:

$$m_0 \dot{x}_0 + m_{k+1} \dot{x}_{k+1} = m_0 \dot{x}'_0 + m_{k+1} \dot{x}'_{k+1}.$$

Проверим теперь изменение знака нормальной компоненты скорости \vec{u}_\perp . Для этого запишем равенство $\vec{u} \cdot \vec{n}_0 = -\vec{u}' \cdot \vec{n}_0$ в координатной форме

$$-\frac{\dot{y}_0}{\sqrt{m_0}} + \frac{\dot{y}_{k+1}}{\sqrt{m_{k+1}}} = \frac{\dot{y}'_0}{\sqrt{m_0}} - \frac{\dot{y}'_{k+1}}{\sqrt{m_{k+1}}}.$$

Снова, переходя к исходным координатам, получим закон упругого столкновения двух тел, известный со времен Ньютона [14]:

$$\dot{x}_0 - \dot{x}_{k+1} = -(\dot{x}'_0 - \dot{x}'_{k+1}).$$

При упругом столкновении двух тел разность их скоростей меняет знак. Этот закон – следствие законов сохранения энергии и импульса (см. например [14], [1]).

Таким образом, отражение бесструктурной точечной частицы от этой границы конфигурационного пространства происходит согласно зеркальному закону отражения. Абсолютно аналогично можно доказать зеркальность отражения от всех границ конфигурационного пространства в биллиардных координатах. Поэтому столкновение двух структурно-сложных частиц можно описывать как движение одной бесструктурной, точечной частицы в многомерном полигональном биллиарде вида:

$$\frac{y_0}{\sqrt{m_0}} - \frac{y_{k+1}}{\sqrt{m_{k+1}}} \geq L_1 + L_2,$$

$$\frac{y_1}{\sqrt{m_1}} - \frac{y_0}{\sqrt{m_0}} \geq -L_1,$$

$$\frac{y_2}{\sqrt{m_2}} - \frac{y_1}{\sqrt{m_1}} \geq 0,$$

...

$$\frac{y_k}{\sqrt{m_k}} - \frac{y_{k-1}}{\sqrt{m_{k-1}}} \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{y_0}{\sqrt{m_0}} - \frac{y_k}{\sqrt{m_k}} &\geq -L_1, \\ \frac{y_{k+2}}{\sqrt{m_{k+2}}} - \frac{y_{k+1}}{\sqrt{m_{k+1}}} &\geq -L_2, \\ \frac{y_{k+3}}{\sqrt{m_{k+3}}} - \frac{y_{k+2}}{\sqrt{m_{k+2}}} &\geq 0, \\ &\dots \\ \frac{y_{k+n+1}}{\sqrt{m_{k+n+1}}} - \frac{y_{k+n}}{\sqrt{m_{k+n}}} &\geq 0, \\ \frac{y_{k+1}}{\sqrt{m_{k+1}}} - \frac{y_{k+n+1}}{\sqrt{m_{k+n+1}}} &\geq -L_2. \end{aligned}$$

Из этой системы уравнений легко заметить, что форма этого бильярда в многомерном пространстве определяется исключительно значениями масс отдельных компонент системы и линейными размерами оболочек. Далее для изучения столкновений структурно-сложных частиц будем использовать такой бильярдный подход.

При описании формы бильярда в многомерном пространстве важное значение играют нормали к граням бильярда. Запишем выражения для внутренних нормалей всех граней бильярда. Нормаль для выбранной грани легко получить из равенства, определяющего эту грань. Как показано выше, грань, соответствующая столкновению оболочек, имеет нормаль:

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{m_0 + m_{k+1}}} \left(-\sqrt{m_{k+1}}, 0, \dots, 0, \sqrt{m_0}, 0, \dots, 0 \right).$$

Четыре грани, достижение траекторией которых соответствуют столкновению крайних внутренних частиц с оболочками, имеют нормали вида

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= \frac{1}{\sqrt{m_0 + m_1}} \left(-\sqrt{m_1}, \sqrt{m_0}, 0, \dots, 0 \right), \\ \vec{n}_{k+1} &= \frac{1}{\sqrt{m_0 + m_k}} \left(\sqrt{m_k}, 0, \dots, 0, -\sqrt{m_0}, 0, \dots, 0 \right), \end{aligned}$$

$$\vec{n}_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{m_{k+1} + m_{k+2}}} (0, \dots, 0, -\sqrt{m_{k+2}}, \sqrt{m_{k+1}}, 0, \dots, 0),$$

$$\vec{n}_{k+n+2} = \frac{1}{\sqrt{m_{k+1} + m_{k+n+1}}} (0, \dots, 0, \sqrt{m_{k+n+1}}, 0, \dots, 0, -\sqrt{m_{k+1}}). \quad (7.5)$$

Остальные нормали к $k+n-2$ граням, соответствующим столкновениям между двумя внутренними степенями свободы, имеют вид:

$$\vec{n}_p = \frac{1}{\sqrt{m_{\gamma-1} + m_\gamma}} (0, \dots, 0, -\sqrt{m_{\gamma-1}}, \sqrt{m_\gamma}, 0, \dots, 0), \quad (7.6)$$

где индекс p пробегает значения из диапазона $2, \dots, k, k+3, \dots, k+n+1$. Далее будем нумеровать грани биллиарда и соответствующие нормали греческим индексом $\gamma = 0, 1, \dots, k+n+2$.

Естественно, знание нормалей всех граней позволяет легко установить значения всех углов эффективного биллиарда. В свою очередь, это определяет форму полиэдра. Знание углов важно и с другой точки зрения. Так, для замкнутых n -мерных биллиардов в форме полиэдра, углы которого соизмеримы с π , доказана конечность возможных направлений траектории движения в замкнутых многогранниках [6]. Для открытого биллиарда, который получается удалением одной или двух граней такого полиэдра, это означает конечность возможных направлений вылета из открытого биллиарда при заданном направлении влета в открытый биллиард. С физической точки зрения это означает конечность спектра возможных скоростей после рассеяния двух структурно-сложных частиц при фиксированных начальных значениях скоростей отдельных компонент. Другими словами, при всевозможных положениях внутренних частиц в момент столкновения значения скоростей отдельных компонент после рассеяния будут принимать соответствующее значение только из конечного множества значений.

Разумеется, дискретность скоростей отдельных компонент скорости \vec{u} автоматически означает дискретность таких важных физических величин, как, например, скоростей центров масс, сталкивающихся структурно-сложных частиц и относительных скоростей движения внутренних частиц:

$$v_{c1} = \frac{\sum_{i=0}^k \sqrt{m_i} u_i}{\sum_{i=0}^k m_i}, \quad v_{c2} = \frac{\sum_{i=k+1}^{k+n+1} \sqrt{m_i} u_i}{\sum_{i=k+1}^{k+n+1} m_i},$$

здесь V_{c1} и V_{c2} — скорости центра масс, соответственно, первой и второй структурно-сложной частицы. Таким образом, в результате подобного рассеяния, в зависимости от состояния внутренних степеней свободы, скорости структурно-сложных частиц будут принимать лишь конечное число значений. Такое поведение совершенно не типично для классических систем. Оно более напоминает сценарий квантового рассеяния с конечным спектром.

Для понимания устройства границы бильярда важную роль играют несколько направлений в конфигурационном пространстве. Эти направления имеют простой физический смысл. Так, направление $\vec{\sigma}$, определяющее величину скорости центра масс $u_c = \vec{u} \cdot \vec{\sigma}$ двух структурно-сложных частиц. Это направление в конфигурационном пространстве определяется единичным вектором

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{M}} (\sqrt{m_0}, \sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_{k+n+1}}).$$

Скорость центра масс структурно-сложных частиц сохраняется со временем даже при произвольных столкновениях их компонент. Еще два важных направления определяют скорости центра масс отдельных структурно-сложных частиц $u_{c1} = \vec{u} \cdot \vec{\sigma}_1$ и $u_{c2} = \vec{u} \cdot \vec{\sigma}_2$. Эти единичные векторы имеют компоненты

$$\vec{\sigma}_1 = \frac{1}{\sqrt{M_1}} (\sqrt{m_0}, \sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_k}, 0, 0, \dots, 0),$$

$$\vec{\sigma}_2 = \frac{1}{\sqrt{M_2}} (0, 0, \dots, 0, \sqrt{m_{k+1}}, \sqrt{m_{k+2}}, \dots, \sqrt{m_{k+n+1}}),$$

где $M_1 = \sum_{i=0}^k m_i$ и $M_2 = \sum_{i=k+1}^{k+n+1} m_i$ — массы соответствующих структурно-сложных частиц. Значение скоростей центра масс структурно-сложных частиц меняется только при отражении бильiardной траектории от грани с нормалью \vec{n}_0 , отражение от любых других граней не приводит к их изменению. Также важный смысл имеет величина $\vec{u}(\vec{\sigma}_2 - \vec{\sigma}_1)$. Отрицательная величина этой разности для достаточно удаленных частиц однозначно указывает на неизбежность столкновения оболочек частиц в будущем, поскольку первая частица догоняет вторую. Верно и обратное. Положительная разность $\vec{u}(\vec{\sigma}_2 - \vec{\sigma}_1)$ означает, что столкновение произошло ранее и более не произойдет.

Вернемся теперь к обсуждению формы эффективного бильярда. Отметим, что в случае движения бильярдной траектории вдоль векторов $\vec{\sigma}_1$ и $\vec{\sigma}_2$ столкновения между отдельными внутренними степенями свободы будут отсутствовать. Как следствие, такая траектория может столкнуться только с одной гранью бильярда, которая соответствует столкновению оболочек частиц. Из этого следует, что рассматриваемый бильярд является открытым по направлениям $-\vec{\sigma}_1$ и $\vec{\sigma}_2$. В рамках бильярдного подхода этот факт просто интерпретируется как возможность ухода частицы 1 на $-\infty$ и частицы 2 на $+\infty$, соответственно. Эти соображения позволяют понять, что добавление двух граней к конфигурационному пространству приведет к закрытому бильярду в форме полиэдра. Действительно, можем поместить структурно-сложные частицы между двумя стенками, которые будут препятствовать уходу на бесконечность. Это соответствует добавлению к исходной системе неравенств (7.2), (7.3) пары условий:

$$\frac{y_0}{m_0} > C_1, \quad \frac{y_{k+1}}{m_k + 1} < C_2.$$

Для такого суммарного конфигурационного пространства отсутствуют направления движения, вдоль которых можно уйти в бесконечность, не встречая на пути препятствий. Это означает, что исходный бильярд, дополненный двумя гиперплоскостями, соответствующими приведенным неравенствам, будет закрытым. Следует заметить, что в выборе гиперплоскостей-«крышек» имеется некоторая свобода. Поэтому выберем в качестве таких гиперплоскостей две гиперплоскости, нормальные к векторам $-\vec{\sigma}_1$ и $\vec{\sigma}_2$, соответственно. Это можно сделать, так как очевидно, что, ограничив положение центра массы частицы, мы ограничим и положение ее оболочки. Следовательно, исходный бильярд, дополненный парой гиперплоскостей с нормальными $-\vec{\sigma}_1$ и $\vec{\sigma}_2$, станет закрытым.

Таким образом, мы полностью описали форму эквивалентного бильярда. Она представляет собой многомерный полиэдр, лишенный двух граней. Поскольку все грани бильярда плоские, то для изучения траекторий в нем удобно использовать метод спрямления траекторий или принцип Шварца [6], [8]. Этот принцип заключается в замене отражения траектории от грани отражением бильярда относительно этой грани с сохранением прямолинейного движения траектории в достроенном объеме. Повторяя эту процедуру необходимое число раз, можно добиться полного спрямления участка траектории, соответствующего всему процессу рассеяния. В частности, используя простые соображения, можно понять, что количество столкновений при рассеянии структурно-сложных частиц будет конечным. Для этого рассмотрим полиэдр, закрытый гранями, которые описаны выше. Тогда ясно, что возврат бильярдной траектории после столкновений с другими гранями на эти грани означает

окончание процесса рассеяния и переход к кинематическому разлету структурно-сложных частиц. Теперь используем теорему Пуанкаре о возврате траекторий в окрестность начальной точки за конечное время [5], [6]. Это означает окончание рассеяния структурно-сложных частиц после конечного числа столкновений. Естественно, согласно этой теореме, мера нуль траекторий может не возвращаться в окрестность начальной точки. Для гамильтоновых систем общего положения этим свойством обладают неподвижные точки гиперболического и эллиптического типа и сепаратрисы, входящие и выходящие из гиперболических точек за бесконечное время. Однако, для бильярдов в полигонах в фазовом пространстве отсутствуют неподвижные точки. Это следует из доказанной теоремы о выходе траекторий из многогранного угла (см. [6], [15]) за конечное время. Поэтому следует ожидать, что в замкнутом полиэдре бильярдная траектория после конечного числа столкновений возвращается на соответствующие начальные грани, с которых началась бильярдная траектория. Более того, поскольку интересующая нас окрестность возврата представляет собой всю отсутствующую грань бильярда, а не малую окрестность точки, то число столкновений с гранями будет относительно невелико.

Перейдем теперь к описанию характеристик рассеяния структурно-сложных частиц. Основное внимание сосредоточим на матрице рассеяния, полностью описывающей процесс рассеяния структурно-сложных частиц. Вначале определим матрицу рассеяния при столкновении бильярдной траектории с гранью бильярда γ . Эта матрица \hat{S}^γ показывает, как преобразуется скорость бильярдной частицы при столкновении с соответствующей гранью бильярда:

$$\vec{u}' = \hat{S}^\gamma \vec{u}.$$

Чтобы определить компоненты этой матрицы, выясним, как преобразуются компоненты скорости бильярдной частицы в результате столкновения с гранью γ . Как уже обсуждалось выше, при таком столкновении будет выполняться зеркальный закон отражения. Иными словами, нормальная компонента скорости \vec{u}_\perp к выбранной грани с нормалью \vec{n}^γ ($\vec{u}_\perp \equiv \vec{n}^\gamma (\vec{n}^\gamma \vec{u})$) изменит знак на противоположный, а тангенциальная компонента скорости ($\vec{u}_\parallel \equiv \vec{u} - \vec{n}^\gamma (\vec{n}^\gamma \vec{u})$) сохранится:

$$\vec{u}'_\perp = -\vec{u}_\perp, \quad \vec{u}'_\parallel = \vec{u}_\parallel. \quad (7.7)$$

В результате преобразование скорости при отражении от грани γ с нормалью \vec{n}^γ имеет вид:

$$\vec{u}' = \vec{u}'_\perp + \vec{u}'_\parallel = \vec{u} - 2\vec{n}^\gamma (\vec{n}^\gamma \vec{u}).$$

Это преобразование легко переписать в матричном виде, определив таким образом матричные коэффициенты матрицы рассеяния \hat{S}_{ij}^γ :

$$\vec{u}'_i = \hat{S}_{ij}^\gamma \vec{u}_j = (\delta_{ij} - 2n_i^\gamma n_j^\gamma) \vec{u}_j. \quad (7.8)$$

Таким образом, после первого столкновения с гранью под номером 0, соответствующей столкновению оболочек, вектор скорости преобразуется как

$$\vec{u}' = \hat{S}^0 \vec{u}.$$

Каждое последующее столкновение с соответствующей гранью γ будет приводить к умножению матрицы преобразования скоростей на матрицу рассеяния \hat{S}^γ . Процесс будет продолжаться до последнего столкновения траектории с гранью, соответствующей последнему столкновению оболочек. В результате полная матрица рассеяния \hat{S} будет иметь такой вид:

$$\hat{S}(m_0, \dots, m_{n+k+1}, \Gamma) = \hat{S}^0 \dots \hat{S}^\gamma \dots \hat{S}^0, \quad (7.9)$$

здесь Γ означает маршрут $(0, \dots, \gamma, \dots, 0)$, по которому траектория сталкивается с гранями биллиарда. В результате каждому маршруту соответствует строго определенная матрица рассеяния, зависящая только от величин масс всех компонент сталкивающихся структурно-сложных частиц. Этот результат является очень важным, поскольку означает, что матрица рассеяния не зависит явно от вектора скорости частицы. Она определяется гораздо более грубой характеристикой — маршрутом посещения траекторией граней биллиарда в процессе рассеяния. С физической точки зрения это означает, что она определяется порядком столкновения компонент структурно-сложных частиц. Для структурно-сложных частиц с малым числом внутренних степеней свободы $((k, n))$ общее число таких маршрутов относительно невелико. Оно может быть оценено через максимальное число возможных столкновений N_{max} как $(N_{max} - 2)^{k+n+2}$. Здесь учтено, что в маршруте первая и последняя грань фиксированы, а также что нельзя столкнуться с одной гранью два раза подряд. Таким образом, число маршрутов определяет точное число возможных матриц рассеяния при фиксированных массах всех компонент структурно-сложной частицы.

В наиболее простом случае рассеяния структурно-сложной частицы с одной степенью свободы на бесструктурной частице число столкновений легко находится (см. [16]). Для более сложного случая рассеяния структурно-сложной частицы с одной степенью свободы на другой такой же структурно-сложной частице оценка величины N_{max} получена в работе

[16]. В общем случае, оценку числа N_{max} можно получить, основываясь на значении N_{max} для случая рассеяния двух структурно-сложных частиц с одной внутренней степенью свободы. Для этого достаточно заменить все внутренние степени свободы одной с массой, равной сумме масс внутренних степеней свободы.

Конечность числа столкновений означает, что множество матриц рассеяния, определяющих рассеяние структурно-сложных частиц с внутренними степенями свободы, также конечно. Более того, набор этих матриц легко получить аналитически (см. соотношение (7.9)). Интересно отметить, что такая своеобразная дискретность матриц рассеяния не характерна для классических систем, скорее напоминает процесс квантового рассеяния с дискретным энергетическим спектром. С увеличением числа внутренних степеней свободы число матриц рассеяния в спектре быстро растет, превращая его в сплошной.

Следует обратить внимание, что сохранение скорости движения бесструктурной частицы вдоль оси $\vec{\sigma}$ указывает на возможность изучения ее поведения с помощью проекции траекторий на гиперплоскость, перпендикулярную этому вектору. При таком проектировании получаем бильярд меньшей размерности $k+n+1$. В случае столкновения структурно-сложной частицы с одной внутренней степенью свободы с бесструктурной частицей ($k=1$ и $n=0$), а также для столкновения двух структурно-сложных частиц с одной внутренней степенью свободы ($k=1$ и $n=1$) проекция конфигурационного пространства оказывается двухмерной и трехмерной соответственно. Поэтому движение траекторий в таких бильярдах может быть полностью исследовано. Ниже рассмотрим детально простой случай столкновений структурно-сложной частицы с бесструктурной.

Упругие столкновения двух бесструктурных частиц были изучены еще при возникновении классической механики. В идеализированном виде основные свойства таких столкновений сводятся к нулевому времени взаимодействия или столкновения и сохранению разности скоростей частиц до и после удара. Рассмотрим теперь, какие принципиально новые явления могут наблюдаться в случае наличия у частиц внутренних степеней свободы. Начнем с самого простого случая столкновения частицы, обладающей одной внутренней степенью свободы, с обычной бесструктурной частицей. Этот случай соответствует столкновению структурно-сложных частиц при частном выборе значений параметров:

$$k=1, \quad n=0, \quad m_3=0, \quad L_2=0.$$

Конфигурационное пространство такой системы упрощается и задается неравенствами:

$$-\frac{y_0}{\sqrt{m_0}} + \frac{y_2}{\sqrt{m_2}} \geq L_1,$$

$$-\frac{y_0}{\sqrt{m_0}} + \frac{y_1}{\sqrt{m_1}} \geq -L_1,$$

$$\frac{y_0}{\sqrt{m_0}} - \frac{y_1}{\sqrt{m_1}} \geq -L_1.$$

Теперь конфигурационное пространство – это область в трехмерном пространстве, ограниченная тремя плоскостями (см. рис. 15).

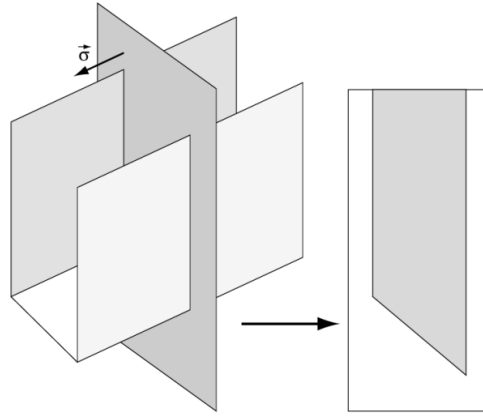


Рис. 15. Справа показано конфигурационное пространство столкновения структурно-сложной частицы с бесструктурной и сечение его плоскостью с нормалью $\vec{\sigma}$. Слева показана граница сечения этой плоскостью конфигурационным пространством

Как и ранее, столкновение структурно-сложной частицы с бесструктурной эквивалентно движению одной точечной частицы в конфигурационном пространстве, показанном на рис. 15, с зеркальными отражениями от его границ. Достижение бильярдной траекторией граней этого бильярда соответствует столкновению определенных двух компонент. Так, достижение «нижней» грани с нормалью

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{m_0 + m_2}} (-\sqrt{m_2}, 0, \sqrt{m_0})$$

соответствует столкновению оболочки

структурно-сложной частицы с бесструктурной частицей. Достижение «боковых» граней с нормальями $\vec{n}_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{m_0 + m_1}} (-\sqrt{m_1}, \sqrt{m_0}, 0)$

соответствует столкновению внутренней частицы с левой или правой границей оболочки структурно-сложной частицы. Очевидно, что такой

бильярд является открытым по двум направлениям, каждое из которых соответствует уходу на бесконечность структурно-сложной и бесструктурной частицы. Проекция скорости вдоль бильярдной траектории на направление $\vec{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{M}}(\sqrt{m_0}, \sqrt{m_1}, \sqrt{m_2})$ определяет

величину скорости движения центра масс бесструктурной и структурно-сложной частиц. Эта скорость не меняется даже при столкновении частиц. Геометрически это соответствует тому, что грани бильярда параллельны этому вектору (см. рис. 15). Поэтому сконцентрируем внимание на нетривиальной динамике бильярдных траекторий в системе отсчета центра масс. Для этого выберем сечение конфигурационного пространства плоскостью, например $\vec{y} \cdot \vec{\sigma} = 0$, и спроецируем бильярдную траекторию на эту плоскость. Проекция исходного трехмерного бильярда на такую плоскость будет представлять собой полубесконечную полосу шириной $2L_1 \sqrt{m_0 m_1 / (m_0 + m_1)}$, срезанную под углом $\alpha = \arctan \sqrt{m_0 M / m_1 m_2}$ (см. рис. 16). Этот угол фактически является единственным параметром, который определяет форму бильярда.

Длина основания полосы $\tilde{L} = 2L_1 \sqrt{m_1 (m_0 + m_2) / M}$. Важно отметить тот факт, что процедура проецирования на плоскость, перпендикулярную σ , сохраняет бильярдные свойства траектории. Это следует из свойства сохранения вектора скорости вдоль σ . Другими словами, для описания взаимодействия частиц в системе центра масс достаточно рассмотреть движение траекторий в простом планарном бильярде (рис. 16).

Используя принцип Шварца спрямления траектории (см. [6], [8]), легко найти число столкновений N структурно-сложной частицы с бесструктурной частицей в процессе рассеяния (аналогично как в разделе 6)

$$N = 1 + \left[\frac{\beta + \arccos\left(\frac{l}{2L_1} \cos \beta\right)}{2\alpha} \right],$$

где $[\]$ — квадратными скобками обозначена целая часть числа, l — расстояние между бесструктурной и внутренней частицами в момент первого столкновения структурно-сложной частицы с бесструктурной, а β — угол падения траектории в этот момент на нижнюю грань. Собственно эти параметры играют роль начальных условий. Именно они определяют число столкновений структурно-сложной частицы с бесструктурной частицей в процессе рассеяния.

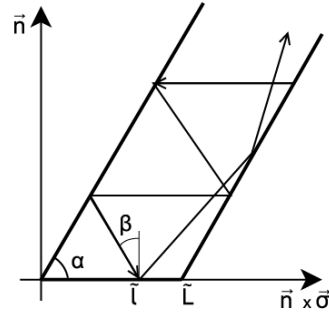


Рис. 16. Биллиард, эквивалентный столкновению структурно-сложной частицы с бесструктурной в проекции на плоскость, перпендикулярную направлению σ . Показаны угол α , определяющий форму биллиарда, и угол β первого падения траектории на грань, соответствующую столкновению бесструктурной частицы и оболочки структурно-сложной частицы

Кроме этого при спрямлении траектории легко вычислить длину Δl траектории между первым и последним столкновением оболочки с бесструктурной частицей. Соответственно, зная скорость u движения эффективной точечной частицы в биллиарде, легко оценить время рассеяния:

$$\Delta t_{int} = \frac{\Delta l}{u} \approx \sqrt{\frac{m_1(m_0 + m_2)}{M}} \frac{2L_1}{\sqrt{2E - P^2/M}} \frac{\sin 2\alpha(N-1)}{\cos \beta},$$

где E — суммарная кинетическая энергия, а P — суммарный импульс системы сталкивающихся частиц. Легко заметить, что время взаимодействия существенно зависит от числа столкновений N и начальных условий β . В зависимости от значений параметров α , β и l/L_1 число столкновений меняется в интервале $1 \leq N \leq N_{max}$. Следует подчеркнуть, что максимально возможное число столкновений $N_{max} = 1 + [\pi/2\alpha]$ определяется только соотношением масс и не зависит от условий столкновения. Для вырожденного случая, при котором угол 2α соизмерим с $\pi = k2\alpha$, где k — целое число, $N_{max} = 1 + \pi/2\alpha$. Таким образом, при рассеянии структурно-сложной частицы с очень легкой оболочкой ($m_0 \ll m_1, m_2$) на бесструктурной частице число столкновений может быть сколь угодно велико.

Интересно отметить, что при отсутствии информации о начальных данных β и l возникает специфическая непредсказуемость даже числа столкновений при рассеянии таких частиц. В этом случае можно указать только спектр возможных значений.

Следующей важной количественной характеристикой столкновения частиц является матрица рассеяния. Матрица рассеяния \hat{S} связывает начальные скорости всех компонент с их скоростями после рассеяния:

$$\begin{pmatrix} u'_0 \\ u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \hat{S} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь u_i – скорости соответствующих компонент ($i = 0, 1, 2$) до первого столкновения, а u'_i – скорости после последнего столкновения бесструктурной частицы с оболочкой структурно-сложной частицы. В работе [16], используя принцип Шварца, получен точный вид матрицы рассеяния \hat{S} :

$$\begin{aligned} \hat{S} = & \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{m_2}{m_0+m_2}} & \sqrt{\frac{m_1 m_0}{M(m_0+m_2)}} & \sqrt{\frac{m_0}{M}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{m_0+m_2}{M}} & \sqrt{\frac{m_1}{M}} \\ \sqrt{\frac{m_0}{m_0+m_2}} & \sqrt{\frac{m_1 m_2}{M(m_0+m_2)}} & \sqrt{\frac{m_2}{M}} \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} \cos 2N\alpha & \sin 2N\alpha & 0 \\ -\sin 2N\alpha & \cos 2N\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{m_2}{m_0+m_2}} & 0 & \sqrt{\frac{m_0}{m_0+m_2}} \\ \sqrt{\frac{m_1 m_0}{M(m_0+m_2)}} & -\sqrt{\frac{m_0+m_2}{M}} & \sqrt{\frac{m_1 m_2}{M(m_0+m_2)}} \\ \sqrt{\frac{m_0}{M}} & \sqrt{\frac{m_1}{M}} & \sqrt{\frac{m_2}{M}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где N – полное число столкновений бесструктурной частицы с оболочкой структурно-сложной частицы. Важно отметить универсальность матрицы рассеяния. Действительно, из вида матрицы рассеяния

\hat{S} ясно, что изменение скоростей в результате рассеяния частиц определяется только соотношением масс и числом столкновений N . Более тонкие детали не влияют на характер рассеяния. Зависимость процесса рассеяния от начальных условий содержится только в общем числе столкновений. Еще одно важное свойство – это унитарность матрицы \hat{S} . Это означает, что $\hat{S} \cdot \hat{S}^+ = I$, где I – единичная матрица, а $+$ обозначает транспонирование матрицы. Действительно, при использовании спрямления траектории ясно, что длина вектора скорости не меняется. Возврат к исходному бильярду сводится к поворотам и отражениям, что не меняет величину скорости, а только ее направление.

От скоростей отдельных компонент в бильярдной системе координат u_0, u_1, u_2 удобно перейти к величинам, имеющим ясный физический смысл:

скорости центра масс структурно-сложной частицы $v_c = \frac{\sqrt{m_0}u_0 + \sqrt{m_1}u_1}{m_0 + m_1}$,

скорости движения внутренней частицы относительно центра масс структурно-сложной частицы $v_i = \sqrt{\frac{m_0}{m_1}} \frac{-\sqrt{m_1}u_0 + \sqrt{m_0}u_1}{m_0 + m_1}$ и скорости

бесструктурной частицы $v_2 = \frac{u_2}{\sqrt{m_2}}$. Относительную скорость v_i можно

рассматривать как «температуру» структурно-сложной частицы.

Закон изменения этих величин в результате столкновений имеет вид

$$\begin{pmatrix} v'_c \\ v'_i \\ v'_2 \end{pmatrix} = \hat{S}_r \begin{pmatrix} v_c \\ v_i \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

Точный вид матрицы рассеяния \hat{S}_r также получен в [16]. Соотношение (7.10) однозначно определяет характеристики скоростей структурно-сложной и бесструктурной частицы после рассеяния. Однако интересно обсудить, как модифицируется закон столкновения Ньютона $e \cdot (V_1 - V_2) = -(V_1' - V_2')$ при наличии внутренней степени свободы структурно-сложной частицы.

Для этого запишем матрицу поворота, входящую в \hat{S}_r , в базисе собственных векторов. В результате получим следующие три соотношения между величинами v_c , v_i и v_2 до и после рассеяния:

$$v'_c - v'_2 - \frac{m_1}{m_0} v'_i = (v_c - v_2) \left(\cos 2N\alpha - \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_0 M}} \sin 2N\alpha \right) + \frac{m_1}{m_0} v_i \left(\cos 2N\alpha + \sqrt{\frac{M m_0}{m_1 m_2}} \sin 2N\alpha \right), \quad (7.11)$$

$$v'_c - v'_2 + \frac{M}{m_2} v'_i = (v_c - v_2) \left(\cos 2N\alpha + \sqrt{\frac{M m_0}{m_1 m_2}} \sin 2N\alpha \right) - \frac{M}{m_2} v_i \left(\cos 2N\alpha - \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_0 M}} \sin 2N\alpha \right),$$

$$(m_0 + m_1)v_c + m_2 v_2 = (m_0 + m_1)v'_c + m_2 v'_2.$$

Очевидно, что третье соотношение соответствует закону сохранения импульса.

Два первых уравнения играют роль дополнительных уравнений, определяющих столкновения частиц. Из этих соотношений следует обобщенный закон Ньютона для столкновения структурно-сложной и бесструктурной частицы:

$$v'_c - v'_2 = -e (v_c - v_2) - e_t (v'_i - v_i). \quad (7.12)$$

Далее будем называть e и e_t коэффициентами рассеяния.

Простым, но важным следствием этого соотношения является зависимость скоростей частиц после столкновений от изменения скорости внутренней частицы. Прежде всего заметим, что коэффициенты, входящие в это соотношение, точно вычисляются в явном виде

$$e = 1, \quad e_t = \sqrt{\frac{m_1 M}{m_0 m_2}} \cdot \frac{\sin 2N\alpha}{1 - \cos 2N\alpha}.$$

Равенство коэффициента e единице указывает на упругую природу отдельных столкновений в процессе рассеяния. Из вида выражения для коэффициента e_t следует, что его величина может принимать любые положительные значения и зависит от числа столкновений N . Это означает чувствительность этого коэффициента к состоянию внутренней степени свободы в начальный момент столкновений. В определенном смысле возникает специфическая непредсказуемость результата рассеяния при отсутствии данных о внутренних степенях свободы.

Однако, в качестве характеристики рассеяния частиц можно ввести эффективный коэффициент восстановления e_{eff} . Определим этот эффективный коэффициент восстановления e_{eff} согласно соотношению $(V_1' - V_2') = -e_{eff} \cdot (V_1 - V_2)$. Обратим внимание, что величина эффективного коэффициента восстановления легко определяется экспериментально. Важно подчеркнуть, что этот коэффициент, в отличие от обычного коэффициента восстановления, зависит не только от свойств материала, но и от относительных скоростей сближения частиц. Из соотношений (7.11) можно получить зависимость e_{eff} от начальных параметров столкновения:

$$e_{eff} = -\frac{v_c' - v_2'}{v_c - v_2} = -\left(\cos 2N\alpha + \sqrt{\frac{m_1 M}{m_0 m_2}} \frac{v_i}{v_c - v_2} \sin 2N\alpha \right). \quad (7.13)$$

Легко заметить, что этот коэффициент достаточно удобен в качестве характеристики степени неупругости столкновений частиц.

Соотношение (7.13) позволяет проанализировать процесс рассеяния в ряде предельных случаев.

Наиболее простой из них – случай легкой внутренней частицы $m_1 \rightarrow 0$. В этом случае очевидно, что рассеяние произойдет за одно столкновение $N = 1$, а из зависимости α от масс следует, что $\alpha \rightarrow \pi/2$ и соответственно $\cos 2N\alpha \rightarrow -1$. Иными словами, выполняется обычный закон Ньютона для упругих столкновений пары тел с $e_{eff} \approx 1$.

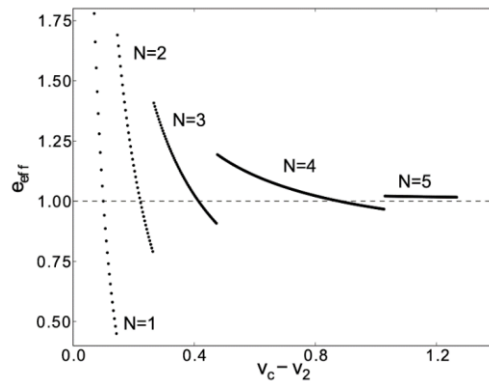


Рис. 17. Зависимость эффективного коэффициента восстановления от относительной скорости центров масс сталкивающихся частиц. Параметры частиц: $m_0 = 1.1$, $m_1 = 2.0$, $m_2 = 1.0$, $v_i = 0.2$, $N_{max} = 2$. Отдельные гладкие участки зависимости соответствуют рассеянию с одинаковым числом столкновений N

Так же легко получить выражение для эффективного коэффициента восстановления легкой бесструктурной частицы $m_2 \rightarrow 0$ на структурно-сложной в случае однократного столкновения. При этом рост величины $\sqrt{\frac{m_1 M}{m_0 m_2}}$ компенсируется уменьшением $\sin 2\alpha \rightarrow 0$, и в результате получим:

$$e_{eff} \approx 1 - 2 \frac{m_1}{m_0} \frac{v_i}{v_c - v_2}.$$

Основной особенностью в этом предельном случае можно считать зависимость эффективного коэффициента восстановления от скорости сближения частиц до столкновения.

Третьим важным предельным случаем является случай рассеяния структурно-сложной частицы с легкой оболочкой $m_0 \rightarrow 0$. Поскольку для такой частицы $v_i \rightarrow 0$, процесс рассеяния будет происходить с большим числом столкновений $N \gg 1$, таким, что $2N\alpha \rightarrow \pi$. Благодаря этому величина $v_i \sin 2N\alpha$ стремится к нулю быстрее, чем $\sqrt{m_0}$. В результате сохраняется обычный закон Ньютона для столкновения упругих тел $e_{eff} \approx 1$.

Также отметим важный частный случай, когда $\cos 2N\alpha = 1$. При этом $e_{eff} = 1$, иными словами, рассеяние происходит по упругому закону, несмотря на многократные соударения частиц в процессе рассеяния и конечное время взаимодействия. В определенном смысле можно говорить об особом типе упругих столкновений, когда изменение скоростей подчиняется упругому закону, но время взаимодействия конечно и может быть достаточно большим. В графической интерпретации такой режим рассеяния будет выглядеть как траектория 1 на рис. 18.

Вернемся к факту, что величина e_{eff} , согласно соотношению (7.13), зависит от $v_c - v_2$ по гиперболическому закону, то есть с уменьшением разности скоростей сталкивающихся частиц коэффициент восстановления растет, а при увеличении – стремится к определенной константе (см. рис. 17).

На фоне этой общей зависимости легко заметить наличие резких скачков в величине (7.13). Этот интересный эффект скачкообразного характера изменения эффективного коэффициента восстановления определяется наличием малого числа внутренних степеней свободы. Структура этих скачков усложняется в режимах с большим числом $N_{max} \gg 1$. Следует ожидать, что при увеличении числа внутренних

степеней свободы амплитуды скачков будут убывать и в пределе макроскопического числа внутренних степеней свободы исчезнут.

В экспериментах по определению упругих свойств материалов обычно измеряется эффективный коэффициент восстановления при столкновении двух шаров из исследуемого материала. Любопытно отметить, что в экспериментах с реальными материалами графики зависимости этого коэффициента от относительной скорости сталкивающихся тел качественно ведут себя похожим образом. При больших относительных скоростях столкновения металлических шаров коэффициент восстановления выходит на стационарное значение. При уменьшении этой скорости коэффициент восстановления увеличивается, но по понятным причинам не может превысить 1 [17].

Обсудим теперь новые эффекты, возникающие при столкновении таких частиц. Прежде всего заметим, что снова относительная скорость разлета структурно-сложной и бесструктурной частицы может превышать начальную скорость сближения частиц до столкновения (см. раздел 6). Это достаточно необычный и интересный эффект, связанный с наличием внутренней степени свободы у структурно-сложной частицы. Особенно с учетом упомянутого выше закона столкновения макроскопических тел. Согласно ньютоновскому закону, скорость разлета тел меньше скорости столкновений, и только при абсолютно упругих столкновениях они равны по величине. Разумеется, такой характер движения после столкновений рассмотренных выше частиц также возможен при определенных соотношениях масс и начальных скоростей. С физической точки зрения относительная скорость поступательного движения частиц при столкновении изменяется лишь за счет энергии внутренней степени свободы структурно-сложной частицы. Это указывает на перераспределение энергии между этими двумя степенями свободы при рассеянии частиц. Важно отметить, что направление и количество переданной энергии для заданного числа столкновений определяются лишь числом и массами отдельных элементов системы, то есть в определенном смысле параметрами «материала».

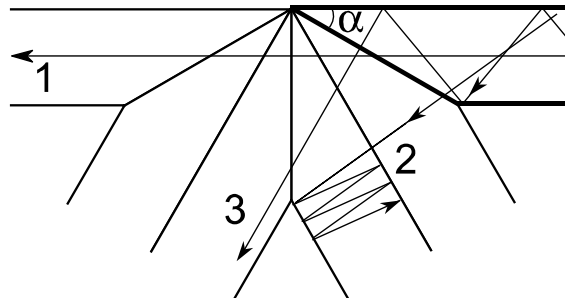


Рис. 18. Показаны траектории, соответствующие особым режимам рассеяния структурно-сложной частицы на бесструктурной. 1 — режим «квазиупругого» рассеяния. 2 — режим нагрева внутренней степени свободы. 3 — режим охлаждения внутренней степени свободы

Рассмотрим специфические режимы рассеяния, возникающие в процессе столкновения структурно-сложной и бесструктурной частицы. Для этого используем графическую интерпретацию, выполненную в рамках бильярдных представлений и с применением принципа спрямления траектории. На рис.18 представлены несколько особых траекторий для различных режимов рассеяния. Как уже упоминалось ранее, траектория 1 соответствует вырожденному случаю – «квазиупругому» сценарию рассеяния. Для простой интерпретации закономерностей процесса рассеяния достаточно помнить, что проекция скорости на ось полосы бильярда соответствует относительной скорости движения структурно-сложной и бесструктурной частиц, а проекция на поперечное направление соответствует скорости внутренней частицы. Исходя из этого, легко понять, что в результате рассеяния в общем случае будет происходить перераспределение энергии между внутренней степенью свободы и кинетической энергией относительного движения частиц. При этом возможны два предельных случая. Например, при реализации траектории 2 почти вся энергия относительного движения перешла в энергию внутренней степени свободы структурно-сложной частицы. Иными словами, эффективный коэффициент восстановления e_{eff} в данном случае близок к 0. Более того, используя соотношение (7.13), легко получить оценку отношения скоростей $v_i / (v_c - v_2)$, при котором такой эффект будет наблюдаться для случая однократного столкновения частиц в процессе рассеяния:

$$\frac{v_i}{v_c - v_2} \approx -\frac{1}{2} \left(\frac{m_2}{M} - \frac{m_0}{m_1} \right).$$

Отметим при этом, что из-за обычных свойств эквивалентного бильярда невозможно рассеяние с $e_{eff} = 0$, поскольку наличие такой бильярдной траектории приводило бы к нарушению обратимости по времени. Однако для определенных значений масс можно сколь угодно близко приблизить e_{eff} к нулевой величине. Например, при $m_0 = 0.25, m_1 = 1, m_2 = 1$ минимальное значение $e_{eff} \sim 0.066$ при $v_i / (v_c - v_2) = -0.12$.

В случае, соответствующем траектории 3, наблюдается обратная ситуация. Видно, что произошла практически полная остановка внутренней частицы и возрастание относительной скорости движения структурно-сложной и бесструктурной частиц после столкновения. Критерий такого режима рассеяния легко получить, поскольку из анализа соотношений (7.11) следует:

$$v'_i = -v_i \cos 2N\alpha + (v_c - v_2) \sqrt{\frac{m_0 m_2}{m_1 M}} \sin 2N\alpha.$$

Соответственно, при $\frac{v_i}{v_c - v_2} = \sqrt{\frac{m_0 m_2}{m_1 M}} \cos^{-1} \theta \tan 2N\alpha$ будет

происходить полное охлаждение внутренней степени свободы.

Таким образом, в рамках бильярдного подхода установлены точные закономерности столкновения бесструктурной частицы и структурно-сложной частицы с одной внутренней степенью свободы и полностью описаны все возможные режимы столкновений. Аналогично рассмотрены столкновения двух структурно-сложных частиц с одной внутренней степенью свободы [16]. Полученный закон столкновения демонстрирует неожиданный механизм перехода к неупругому рассеянию частиц, все компоненты которых взаимодействуют абсолютно упругим образом. Его смысл состоит в перераспределении энергии между кинетической энергией движения структурно-сложных частиц и энергией их внутренних степеней свободы. Найдены критерии, при выполнении которых этот механизм приводит как к абсолютно неупругому рассеянию, так и рассеянию с коэффициентом восстановления, превышающим единицу.

8. СТОЛКНОВЕНИЕ НАНОЧАСТИЦ С БАРЬЕРОМ

Может показаться, что рассмотренные выше эффекты далеки от более реалистических частиц с небольшим числом внутренних степеней свободы. Покажем, что это не так. Рассмотрим в этом разделе столкновение более реалистической частицы с малым числом внутренних степеней свободы с бесструктурной плоскостью. Для этого используем метод молекулярной динамики и смоделируем частицу, состоящую из относительно небольшого числа атомов. Применение методов молекулярной динамики сейчас нашло широкое применение в физике и химии твердого тела [18] и при описании кластеров, состоящих из нескольких атомов до несколько тысяч (см., например, [19], [20]). Атомы, входящие в такую частицу, взаимодействуют согласно потенциалу Леннарда–Джонса. Используя такую частицу, выполним моделирование столкновения ее с плоскостью [21]. Интервал скоростей столкновения выбирается не приводящим к ее разрушению при столкновении.

Пусть исходно атомы в наночастице располагаются в узлах кубической решетки с расстоянием между атомами $a = 4.816$ Е. При моделировании число атомов N массы $m = 39.9$ а.е. = $3.5 \cdot 10^{-30}$ кг, входящих в наночастицы, выбиралось равным $N = 64$ и $N = 512$. Взаимодействие атомов происходит согласно потенциалу Леннарда–Джонса. Выбор параметров этого потенциала соответствует атомам аргона Ar: $\varepsilon = 0.0104$ eV, $\sigma = 3.405$ Е. На первом этапе вычислений система

взаимодействующих атомов релаксирует до температуры $2K^\circ$ в течение 20 ps. Затем осуществляется нагрев частицы до определенной температуры T . Все атомы системы получают случайные смещения, после чего система релаксирует также в течение 20 ps. Характерное время столкновений оценивается как $\tau = \sigma(m/\varepsilon)^{1/2} \approx 5.16 \cdot 10^{-14}$ s, и поэтому выбранное время релаксации достаточно для установления равновесного состояния. Диапазон смещений подобран так, чтобы температура системы атомов приняла требуемые значения $T = 10K^\circ$, а в другом случае $T = 25K^\circ$. Разумеется, начальная кристаллическая структура наночастицы меняется в зависимости от ее температуры. Так, при низких температурах $T = 10K^\circ$ она сохраняется и при более высоких $T = 25K^\circ$ становится мало заметной (см. рис. 19). Уравнения движения решаются с помощью алгоритма Верле [22] со скоростями [23] с временным шагом $dt = 10^{-2}\tau - 10^{-3}\tau$. Выбранные для моделирования температуры ниже температуры плавления аргона $T_f = 83.4K^\circ$, что обеспечивает устойчивость наночастицы.

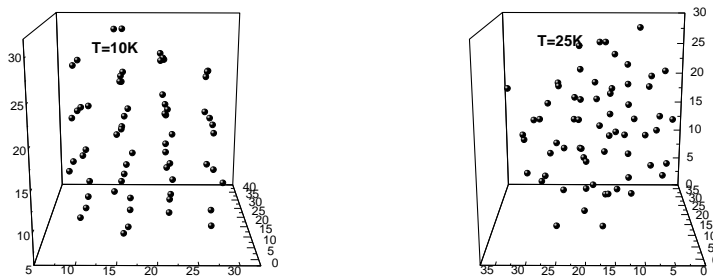


Рис. 19. Слева показано положение атомов наночастицы в некоторый момент времени при $T = 10K^\circ$, справа при $T = 25K^\circ$

Для определенной наночастицы, состоящей из N атомов, создаётся Q случайных реализаций с соответствующей температурой T . Для частиц, содержащих $N = 64$ атома, число реализаций $Q = 50$, а для содержащих 512 атомов – $Q = 10$. Затем моделируется столкновение с бесструктурной плоскостью каждой из них. Для создания направленного движения к плоскости и моделирования столкновения все атомы наночастицы в определенный момент времени получают одинаковую добавку к скорости V_1 в направлении, перпендикулярном плоскости. После этого производится интегрирование уравнений движения описанным выше методом. При достижении любым из атомов системы

плоскости компоненты его скорости мгновенно меняются на зеркально отражённые от плоскости, после чего решение уравнений движения производится в прежнем режиме. Диапазон значений начальной скорости наночастицы v_1 меняется в пределах 25–220 м/с. На этих скоростях столкновение с плоскостью не приводит к разрушению наночастиц.

Начнем с изучения зависимости скорости отражения наночастиц от бесструктурной плоскости в зависимости от ее скорости падения. В случае макроскопических тел эта зависимость достаточно проста $v' = -ev_1$ и сводится к линейному закону. Определяя эффективный коэффициент восстановления как $e_{ef} = \frac{|v_2|}{v_1}$, рассмотрим его зависимость от

безразмерной скорости поступательного движения наночастицы $q = \frac{v_1}{v_T}$

в нормальном направлении к бесструктурной плоскости. Здесь v_T характерной скорости теплового движения ее атомов

$$q = \frac{v_1}{v_T}. \quad (8.1)$$

Скорость теплового движения определяется как $v_T = \left(\frac{2T}{m}\right)^{1/2}$. Все представленные далее зависимости являются усреднёнными по Q случайным реализациям при температуре $T = 10K^\circ$ и $25K^\circ$.

Зависимость эффективного коэффициента восстановления e_{ef} от $qN^{1/3}$ представлена на рис. 20. Множитель $N^{1/3}$ введен для демонстрации универсальной зависимости эффективного коэффициента восстановления от числа атомов, входящих в наночастицу. Прежде всего из полученной зависимости следует зависимость, близкая к обратной пропорциональности от $qN^{1/3}$:

$$\frac{v_2}{v_1} = e + const \frac{v_T}{N^{1/3}v_1}, \quad (8.2)$$

здесь e и $const$ – некоторые постоянные. Это означает, что введенный таким образом эффективный коэффициент восстановления зависит не только от свойств материала, но и от скорости налетающей наночастицы на плоскость. Это принципиально отличается от независимости e от скорости налетающего бесструктурного макроскопического тела. Другими словами, такой коэффициент не подходит в качестве характеристики

материала, определяющей закон столкновения наночастицы с бесструктурной плоскостью. В принципе это приводит к необходимости введения другого закона столкновений для наночастиц или частиц с небольшим числом внутренних степеней свободы (см. предыдущий раздел).

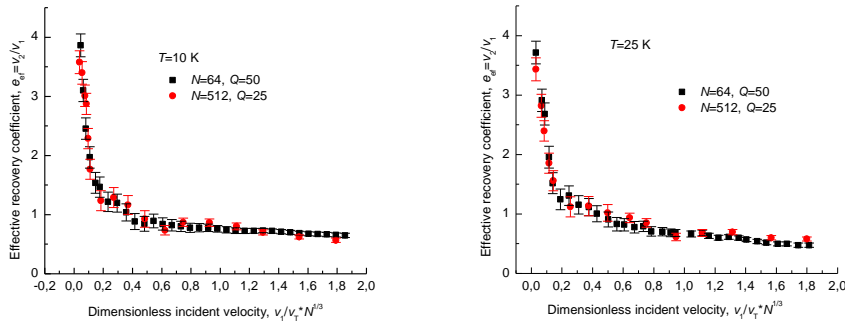


Рис. 20. Эффективный коэффициент восстановления $e_{ef} = \frac{v_2}{v_1}$ в зависимости от q — отношения начальной скорости к тепловой и числа частиц N . Слева показаны данные о e_{ef} , полученные численным моделированием при температуре наночастиц $T = 10\text{K}^\circ$. Данные, соответствующие наночастице, содержащей $N = 64$ атомов, показаны черными квадратами, а соответствующие $N = 512$ — красными кругами. Вертикальные отрезки соответствуют погрешности вычислений. Справа аналогичная зависимость при температуре $T = 25\text{K}^\circ$

Кроме этого полученная зависимость эффективного коэффициента восстановления демонстрирует еще одно необычное и нереализуемое свойство для макроскопических бесструктурных тел при столкновении. Скорость отраженного макроскопического тела может быть только меньше скорости падения его на плоскость. Для наночастицы из данных моделирования следует, что при $qN^{1/3} \ll 1$ скорость отражённой частицы больше по модулю начальной, т.е. $e_{ef} > 1$. Разумеется, законы сохранения при этом не нарушаются. Такой режим отражения сопровождается охлаждением её внутренних степеней свободы. При возрастании q конечная скорость становится по модулю меньше начальной и медленно убывает ($e_{ef} < 1$), что сопровождается нагревом частицы. При этом полная энергия частицы по данным моделирования сохраняется с точностью до $10^{-6}\%$. Таким образом, в отличие от макроскопической частицы, для модельной наночастицы скорость отражённой частицы может превышать её начальную скорость.

Проведенное моделирование даёт критическое значение q_{cr} , при котором происходит переход от $e_{ef} > 1$ к $e_{ef} < 1$:

$$q_{cr} \approx \frac{1}{2N^{1/3}}. \quad (8.3)$$

Ясно, что для макроскопических тел с гигантским числом внутренних степеней свободы $N \rightarrow \infty$, а $q_{cr} \rightarrow 0$, и соответственно, такой эффект наблюдать невозможно. Интересно заметить, что, как следует из рис. 20, вид зависимости e_{ef} , в том числе переходное значение q_{cr} , в исследованном диапазоне значений практически не зависят от размеров и температуры наночастиц.

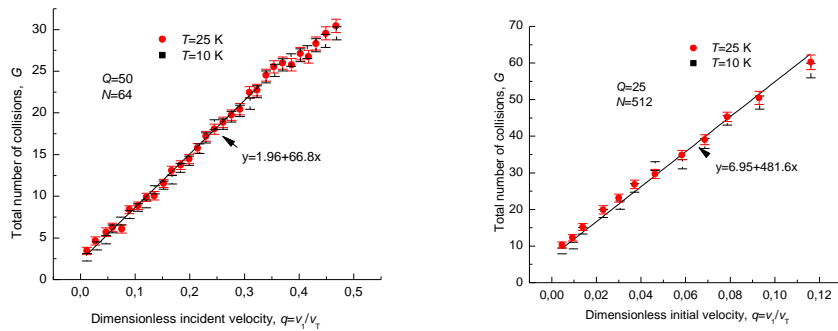


Рис. 21. Число соударений G атомов наночастицы с плоскостью в зависимости от q — отношения начальной скорости к тепловой. Линейная зависимость

наблюдается в широком диапазоне скоростей $0 < v_1 \leq \frac{v_T}{2}$

Еще одной интересной характеристикой является G — полное число столкновений атомов наночастицы с плоскостью за время столкновений и ее отражением. Численные данные о числе соударений атомов наночастицы с плоскостью, в зависимости от q , представлено на рис. 21 для температуры $T = 10$ и 25 K°. Зависимость G от q является линейной функцией с коэффициентом пропорциональности k , близким к N . Численное моделирование приводит к значению $k = 66.8$ (см. рис. 21) для числа атомов $N = 64$ и к $k = 481.6$ для $N = 512$.

Возвращаясь к установлению закономерности для отражения частиц с небольшим числом внутренних степеней свободы, проанализируем отношение скоростей отражения к скорости падения

в зависимости от отношения изменения средней тепловой скорости атомов Δv_T к начальной скорости падения. Введем обозначение $\beta = \frac{\Delta v_T}{v_1}$, где

Δv_T – изменение тепловой скорости атомов с учетом знака. Результаты численного моделирования приведены на рис. 22. Легко заметить, что в широком диапазоне значений $\beta < 0$ наблюдается линейная зависимость

$$\frac{v_2}{v_1} = e + k\beta$$

с коэффициентом $k \approx 120$ для $N = 64$ и $k \approx 127$ для $N = 512$. Интересно заметить, что эти значения практически не зависят от N . В принципе и в области $\beta > 0$ также зависимость близка к линейной, но с другими значениями k . Важно подчеркнуть, что значение этого коэффициента не зависит от температуры наночастицы. Так, его величина сохраняется при $T = 10K^\circ$ и $25K^\circ$ с точностью погрешности вычислений.

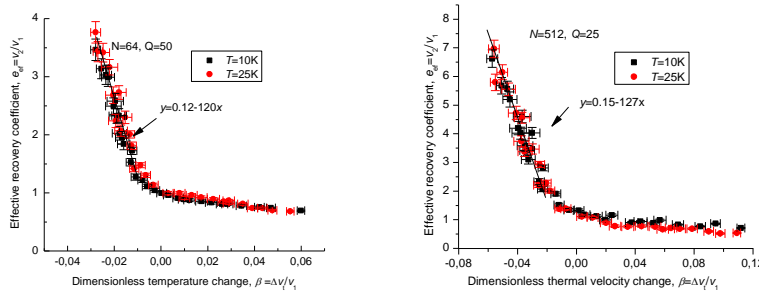


Рис. 22. Зависимость отношения $\frac{v_2}{v_1}$ от величины β для наночастиц с температурами $T = 10K^\circ$ и $25K^\circ$

Таким образом, обобщение закона изменения скорости тел с малым числом внутренних степеней свободы при столкновении с бесструктурной стенкой имеет простую универсальную форму

$$v_2 = ev_1 + k\Delta v_T. \tag{8.4}$$

В этом законе уже присутствуют две постоянные, не зависящие от скорости налетающей частицы, – это e и k . В определенном смысле эти постоянные зависят только от свойств материала наночастицы и материала стенки. За коэффициентом e естественно сохранить название коэффициента восстановления. Коэффициент k , характери-

зующий свойства наночастицы, можно назвать коэффициентом трансформации. Легко заметить, что из этого закона столкновений следуют зависимости, приведенные на рис. 22, и устанавливают точную

обратно пропорциональную зависимость $e_{ef} = e + k \frac{\Delta v_T}{v_1}$ от q . Следует

отметить, что величина коэффициента k зависит от знака β . Для положительных β этот коэффициент принимает меньшие значения и зависит по другому от числа частиц. Предварительные данные указывают на обратно пропорциональную зависимость от $N^{1/3}$. Таким образом, величина этого коэффициента зависит от режима столкновений.

Перейдем к обсуждению закономерностей, полученных в результате численного моделирования. Для их объяснения используем простые соображения. Сначала сосредоточимся на области аномального отражения наночастицы, когда $v_T \gg v_1$. При таком соотношении между направленной и хаотической, тепловой компонентами следует ожидать, что при столкновении частицы со стенкой передача импульса $P_1 = mNv_1$ будет осуществляться за счет столкновений атомов, имеющих тепловую скорость, направленную на стенку. В определенном смысле это напоминает своеобразное ускорение Ферми. Пусть после G столкновений таких «горячих» атомов импульс частицы изменится на противоположный и частица отразится от препятствия. Тогда импульс атома при каждом ударе о стенку изменится на противоположный, и импульс отраженной частицы станет равным

$$P_2 = -mG(v_1 + v_T).$$

Естественно предположить, что оставшая часть направленной кинетической энергии перейдет в энергию хаотических движений и не войдет в импульс частицы после усреднения по хаотическим скоростям. Таким образом, суммарный средний импульс атомов и составляет импульс частицы, равный

$$P_2 = -mNv_2.$$

Сравнивая эти выражения, получим для скорости v_2 отраженной частицы выражение

$$Nv_2 = G(v_1 + v_T)$$

или, вычисляя отношение скоростей, получим

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{G}{N} + \frac{Gv_T}{Nv_1}. \quad (8.5)$$

Таким образом, в области $v_T > v_1$ можно ожидать гиперболической зависимости $\frac{v_2}{v_1}$ от q , как и наблюдалось при численном моделировании (см. рис. 20). Разумеется, эти грубые соображения можно сделать более детальными, проводя более громоздкое усреднение по функции распределения скоростей. Однако нам важно отметить, что уже из таких простых соображений следует механизм отражения частицы со скоростью, превышающей скорость налета на стенку. Он реализуется в области скоростей $v_T \gg v_1$. Этот тип режимов аномального отражения и наблюдался при численном моделировании.

Таким образом, остается обсудить число G столкновений атомов с массивной стенкой за время ее отражения. Разумеется, при оценке G по-прежнему рассматриваем область $v_T \gg v_1$. Для оценки числа столкновений используем факт, что со стенкой сталкиваются атомы, лежащие на одной грани даже при незначительной скорости v_1 . Число атомов на грани можно оценить как $\frac{N^{2/3}}{6}$. Кроме этого ясно, что чем больше скорость падения, тем больше столкновений нужно для изменения импульса mNv_1 на противоположный. Учитывая, что каждое столкновение атома передает импульс, примерно равный mv_T , запишем общую формулу в виде

$$G \approx \frac{N^{2/3}}{6} + N \frac{v_1}{v_T}. \quad (8.6)$$

Полученная зависимость хорошо согласуется с данными моделирования (см. рис. 21). Так, из левой части рисунка 21 для $N = 64$ линейный коэффициент при $\frac{v_1}{v_T}$ близок к N , также как и для $N = 512$ справа. Аддитивная добавка для $N = 64$ составляет 1.96, а для $N = 512$ равна 6.95. Соотношение (8.6) дает соответственно 2.67 и 10.67, что довольно близко к наблюдаемым численно. Особенно если учесть, что деление на 6 дает завышенное значение атомов на грани и не учитывает отклонения формы частицы от кубической. При делении на 8 совпадение с экспериментальными данными существенно улучшается: так, для $N = 64$ составляет 2, а для $N = 512$ равна 8. Кроме этого, легко

заметить, что такая зависимость G приводит к универсальной зависимости $\frac{v_2}{v_1}$ от параметра $N^{1/3} q$, наблюдаемой на рис. 20.

Перейдем теперь к обсуждению критерия реализуемости аномального режима отражения. Возвращаясь к соотношению (8.5), легко получить это условие

$$\frac{G}{N} \frac{v_T}{v_1} \geq 1.$$

Здесь учтено условие $\frac{v_T}{v_1} \gg 1$, при котором и наблюдается аномальный

режим. Напомним, что число столкновений атомов $G \sim N^{2/3}$ определяется поверхностными атомами. Таким образом, условие принимает вид

$$\frac{v_1}{v_T} N^{1/3} \leq 1,$$

который хорошо согласуется с полученным из численного моделирования соотношением (8.3)

$$\frac{v_1}{v_T} N^{1/3} \leq \frac{1}{2}.$$

При оценке по порядку величин отличие правых частей неравенств несущественно. Если определить критическое значение отношения скоростей, разделяющее режимы как

$$q_{cr} \approx \frac{1}{2N^{1/3}}, \quad (8.7)$$

можно сравнить его значения с определяемым q_{cr} непосредственно из результатов численного моделирования. А именно, для $N = 64$ численный эксперимент даёт $q_{cr} = 0.11$, а соотношение (8.7) — $q_{cr} \approx 0.13$, для другого значения $N = 512$ численный эксперимент даёт $q_{cr} = 0.06$, а из (8.7) следует значение $q_{cr} = 0.07$ (см. результаты, представленные на рис. 20).

Теперь обсудим линейную зависимость отношения $\frac{v_2}{v_1}$ от $\beta = \frac{\Delta v_T}{v_1}$

(см. соотношение (8.4)). Предсказать такую зависимость в области $\frac{v_T}{v_1} \gg 1$

достаточно просто. Действительно, в этой области передача импульса осуществляется «горячими атомами» со скоростями $v \approx v_T$, и следовательно, изменение температурной скорости Δv_T пропорционально v_T . Тогда из соотношения (8.2) следует линейная зависимость от β как в соотношении (8.5).

Остается обсудить отражение наночастицы в области скоростей $v_1 \geq v_T$. В этой области характер отражения частиц более традиционен. Действительно, в этой области передача импульса осуществляется атомами, имеющими скорость порядка v_1 . Следовательно, импульс после отражения от стенки суммируется из импульсов атомов

$$P_2 = -mGv_1$$

и определяет импульс частицы после отражения

$$P_2 = -mNv_2.$$

Приравнивая эти выражения, получим

$$v_2 = \frac{G}{N} v_1,$$

используя оценку числа столкновений (8.6), но теперь в другом предельном случае $v_1 \gg v_T$ легко получить линейную зависимость

$$\frac{v_2}{v_1} \sim \frac{v_1}{v_T}.$$

Такая линейная зависимость не противоречит экспериментальным данным, которые приведены на рис. 20.

Таким образом, при отражении от бесструктурной плоскости для начальных скоростей частицы, малых по сравнению со скоростью теплового движения его атомов, эффективный коэффициент восстановления e_{ef} может превышать единицу. Причина этого связана с изменением соотношения, определяющего скорость частицы после столкновения со стенкой. Это новое соотношение установлено в работе. Свойства частицы определяются уже двумя «материальными» характеристиками, коэффициентом восстановления e , который всегда меньше единицы, и коэффициентом трансформации (см. (7.12)). С увеличением числа атомов, входящих в наночастицу, такой аномальный режим исчезает. Другими словами, аномальные свойства присущи только наночастицам, и для макрочастиц такое поведение невозможно. Условие реализации $e_{ef} > 1$

определяется неравенством $q_{cr} < \frac{1}{2N^{1/3}}$. Проведенное численное моделирование демонстрирует применимость закономерностей, полученных в рамках модели структурно-сложных частиц для более реалистических случаев наночастиц обычных материалов.

9. БИЛЛИАРДНЫЙ ФОРМАЛИЗМ ЗАРЯЖЕННОЙ СТРУКТУРНО-СЛОЖНОЙ ЧАСТИЦЫ ВО ВНЕШНИХ ПОЛЯХ

Следующий важный вопрос, который связан с динамикой структурно-сложных частиц, касается их поведения во внешних полях. Для того чтобы исследовать его, прежде всего нужно обобщить структурно-сложные частицы на случай заряженных частиц. Естественно начать с простого случая такой частицы с одной внутренней степенью свободы. При этом существуют разные варианты введения заряженной компоненты такой частицы. Далее обсудим это более детально. Рассмотрим движение структурно-сложной частицы с одной внутренней степенью свободы в постоянном электрическом поле E . Предположим, что заряд q имеет только внутренняя частица, а оболочка нейтральна или незаряжена. Пусть оболочка частицы – это цилиндр длиной L с закрытыми торцами, имеет массу M (см. рис. 14). Внутри оболочки свободно движется внутренняя частица массы m . Для описания общих закономерностей движения такой частицы используем бильярдный подход [24]. Начнем с уравнений движения для внутренней частицы и оболочки:

$$m\ddot{x}_1 = Eq, \quad M\ddot{x}_2 = 0, \quad (9.1)$$

где x_1 — координата внутренней частицы, а x_2 — координата положения центра ее оболочки. Далее перейдем к новым координатам $\tilde{x}_1 = \sqrt{m}x_1$ и $\tilde{x}_2 = \sqrt{M}x_2$, которые далее будем называть бильярдными. Уравнения движения в бильярдных координатах принимают вид

$$\sqrt{m}\ddot{\tilde{x}}_1 = qE, \quad \sqrt{M}\ddot{\tilde{x}}_2 = 0. \quad (9.2)$$

Рассмотрим конфигурационное пространство структурно-сложной частицы. Ясно, что все возможные состояния такой системы определяются неравенством

$$\left| \frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{m}} - \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{M}} \right| \leq \frac{L}{2},$$

которое означает, что внутренняя частица не может выйти за пределы оболочки. Легко понять, что конфигурационное пространство состояний такой системы – это полоса шириной L , показанная на рис. 15. Эта полоса наклонена по отношению к оси x_1 под углом α , который определяется отношением масс оболочки и внутренней частицы как

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{M}{m}}.$$

В бильярдных координатах отражение траектории от стенок эффективного бильярда в полосе или от границ конфигурационного пространства будет абсолютно упругим. Это означает, что угол отражения траектории от границы будет равен углу падения. Физически это легко объяснить. Дело в том, что законы столкновения масс локальны и не зависят от наличия или отсутствия поля. Поэтому доказательство в бильярдных координатах факта равенства угла падения углу отражения повторяет доказательство в случае отсутствия электрического поля [1].

Таким образом, движение оболочки и частицы, согласно уравнениям (9.2), определяют параметрически, некоторую кривую $(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t))$ в конфигурационном пространстве – до момента достижения ею границы этого пространства (см. рис. 24). После этого происходит, согласно законам столкновения масс оболочки и внутренней частицы, изменение их скоростей.

Используя их как начальные условия при решении уравнений (9.2), снова получим параметрически заданную кривую (см. рис. 24). В этих координатах закон отражения кривой от границы совпадает с абсолютно упругим отражением ее от границы (см. рис. 24). Это означает, что движение структурно-сложной частицы с одной внутренней степенью свободы в постоянном электрическом поле эквивалентно движению заряженной точечной частицы бильярда в постоянном электрическом поле, направленном вдоль оси \tilde{x}_1 . Нетрудно понять, что аналогично к бильярдам сводится и движение структурно-сложных частиц с любым числом внутренних степеней свободы. При этом конфигурационное пространство такого бильярда имеет призматическую форму в размерности пространства, равной $N+1$, где N – число внутренних степеней свободы. Траектория бильярдной частицы в таком бильярде определяется движением заряженной точечной частицы, которая движется в постоянном электрическом поле, имеющем отличные от нуля компоненты вдоль осей координат, определяемых заряженными внутренними степенями свободы.

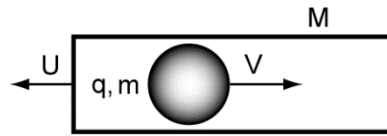


Рис. 23. Схематическое устройство структурно-сложной частицы, движущейся в постоянном электрическом поле E . Внутренняя частица с зарядом q имеет массу m . Оболочка нейтральна с массой M . Скорость оболочки обозначена U , а внутреннюю частицы – V

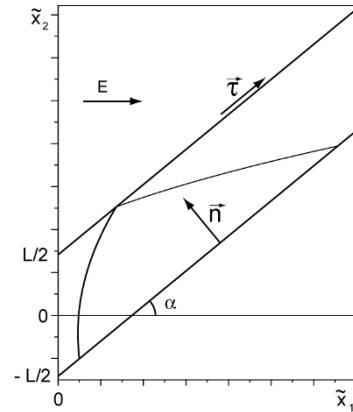


Рис. 24. Изображено конфигурационное пространство структурно-сложной частицы. Достижение траекторией нижней границы означает столкновение внутренней частицы с правой стенкой оболочки. Достижение верхней границы соответствует ее столкновению с левой стенкой оболочки. Направление электрического поля также показано на рисунке

10. РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ С ОДНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ В ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Рассмотрим движение заряженной структурно-сложной частицы в рамках бильярдной идеологии. Основное внимание в этом разделе сосредоточим на эволюции скоростей оболочки и внутренней степени свободы. Описание скоростей удобно осуществить, переходя к дискретному времени. Дискретизация достигается определением или фиксацией скоростей сразу после столкновения траектории с границами бильярда. Между столкновениями изменение скоростей тривиально. Скорость оболочки сохраняется, а скорость заряженной частицы меняется равноускоренно. В таком дискретном времени законы изменения

скоростей можно описать с помощью отображений. Для вывода такого отображения используем скорости элементов сразу после n отражения от границы и установим скорости элементов структурно-сложной частицы после следующего $n+1$ отражения от границы бильярда. Детальные вычисления можно найти в работе [24]. Попутно вычисляются и времена между столкновениями. При заданном направлении электрического поля и знаке заряда существует два режима движения. Один из них соответствует столкновению бильярдной траектории, например, только с нижней границей бильярда, а второй — с верхней и нижней границей бильярда. Ясно, что вид отображений в этих случаях будет различным. Начнем с более сложного случая столкновения бильярдной траектории с обеими границами бильярда. Этот режим реализуется при выполнении условия

$$\left(\frac{\tilde{U}_n}{\sqrt{M}} - \frac{\tilde{V}_n}{\sqrt{m}} \right)^2 \geq \frac{2qEL}{m},$$

которое означает, что кинетическая энергия относительных движений должна превышать потенциальную энергию заряженной внутренней частицы в постоянном электрическом поле. Для построения полного отображения нужно получить отображение для скоростей всех компонент при отражении от верхней и от нижней границ. Следуя работе [24], приведем эти отображения. Так, закон преобразования скоростей при столкновении с верхней границей бильярда имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{n+1} &= \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}} \tilde{U}_n - \frac{\sqrt{m}(m-M)}{m+M} \sqrt{\left(\frac{\tilde{U}_n}{\sqrt{M}} - \frac{\tilde{V}_n}{\sqrt{m}} \right)^2 - \frac{2qEL}{m}}, \\ \tilde{U}_{n+1} &= U_n - \frac{2m\sqrt{M}}{m+M} \sqrt{\left(\frac{\tilde{U}_n}{\sqrt{M}} - \frac{\tilde{V}_n}{\sqrt{m}} \right)^2 - \frac{2qEL}{m}}. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Полученное нелинейное отображение определяет преобразование скорости $(\tilde{V}_n, \tilde{U}_n)$, которое имеет структурно-сложная частица непосредственно после столкновения с нижней границей, в значения скорости $(\tilde{V}_{n+1}, \tilde{U}_{n+1})$ сразу после столкновения с верхней границей бильярда. После этого траектория снова достигает нижней границы бильярда.

Приведем теперь вид отображения при отражении от нижней границы:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{n+2} &= \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}} \tilde{U}_{n+1} + \frac{\sqrt{m(m-M)}}{m+M} \sqrt{\left(\frac{\tilde{U}_{n+1}}{\sqrt{M}} - \frac{\tilde{V}_{n+1}}{\sqrt{m}}\right)^2 + \frac{2qEL}{m}}, \\ \tilde{U}_{n+2} &= \tilde{U}_{n+1} + \frac{2m\sqrt{M}}{m+M} \sqrt{\left(\frac{\tilde{U}_{n+1}}{\sqrt{M}} - \frac{\tilde{V}_{n+1}}{\sqrt{m}}\right)^2 + \frac{2qEL}{m}}.\end{aligned}\quad (10.2)$$

Таким образом, эволюция скоростей в дискретном времени определяется последовательным применением нелинейных отображений (10.1) и (10.2). Эти отображения описывают изменение скоростей в режиме, когда бильiardная траектория последовательно отражается то нижней, то верхней границ бильiardа. Условия реализации такого режима обсуждались выше. Физически это означает, что внутренняя частица последовательно сталкивается то с левой, то с правой границей оболочки.

Однако, как отмечалось выше, такой режим движения не единственный. Существует режим движения, при котором внутренняя частица сталкивается только с одной стороной границы оболочки, или в бильiardной идеологии только с одной границей бильiardа. Такой режим реализуется, если $\left(\frac{\tilde{U}_n}{\sqrt{M}} - \frac{\tilde{V}_n}{\sqrt{m}}\right)^2 \leq \frac{2qEL}{m}$. Смысл этого условия

обсудим детально в следующем разделе. Рассмотрим теперь, как преобразуются скорости в этом режиме. Вывод этого отображения достаточно прост.

Пусть на некотором шаге эволюции траектория отразилась от нижней границы. Сразу после отражения скорости внутренней частицы и оболочки равны $(\tilde{V}_n, \tilde{U}_n)$ в бильiardных переменных.

Точка отражения $(\tilde{x}_{10}, \tilde{x}_{20})$ лежит на нижней границе бильiardа

$$\frac{\tilde{x}_{20}}{\sqrt{M}} = \frac{\tilde{x}_{10}}{\sqrt{m}} - \frac{L}{2}.$$

После этого траектория не достигает верхней границы, а падает на нижнюю границу бильiardа. Другими словами, в момент столкновения с нижней границей координаты удовлетворяют уравнению

$$\frac{\tilde{x}_2(t)}{\sqrt{M}} = \frac{\tilde{x}_1(t)}{\sqrt{m}} - \frac{L}{2}.$$

Используя законы движения, легко найти время столкновения из этого уравнения:

$$t_c = \frac{2m}{Eq} \left(\frac{\tilde{U}_n}{\sqrt{M}} - \frac{\tilde{V}_n}{\sqrt{m}} \right).$$

После этого легко найти скорости оболочки и частицы в момент столкновения:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t_c - 0) &= \frac{Eq}{\sqrt{m}} t_c + \tilde{V}_n = 2 \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}} \tilde{U}_n - n \tilde{V}_n \\ \tilde{U}(t_c - 0) &= \tilde{U}_n. \end{aligned}$$

Используя законы преобразования скоростей при столкновении с границей бильярда, перейдем к скоростям $\tilde{V}_{n+1} = \tilde{V}(t_c + 0)$, $\tilde{U}_{n+1} = \tilde{U}(t_c + 0)$ сразу после столкновения с нижней границей [24]:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{n+1} &= \frac{2m\sqrt{m}}{\sqrt{M}(m+M)} \tilde{U}_n + \frac{M-m}{m+M} \tilde{V}_n, \\ \tilde{U}_{n+1} &= \frac{3m+M}{m+M} \tilde{U}_n - \frac{2\sqrt{mM}}{m+M} \tilde{V}_n. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Так как в этом режиме столкновения всегда происходят с нижней границей бильярда, то это отображение полностью описывает изменение скоростей в дискретном времени. Интересно отметить, что в это отображение не входит электрическое поле явно. Разумеется, это не означает отсутствие влияния электрического поля. Его влияние сказывается на шаге дискретизации.

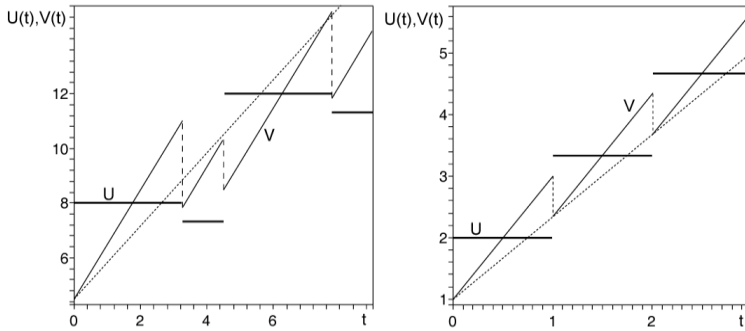


Рис. 25. Слева показан типичный характер изменения скорости оболочки и внутренней частицы в режиме, когда столкновения происходят с обеими границами оболочки. Справа в режиме, когда внутренняя частица сталкивается только с одной границей оболочки. Жирной линией показано изменение скорости оболочки, тонкой — внутренней частицы. Точечная линия, для сравнения, демонстрирует ускорение бесструктурной частицы с зарядом q и массой $m + M$ в таком же электрическом поле, а ее начальная скорость выбрана V_1

После вывода законов эволюции в билиардных координатах можно вернуться и к исходным координатам. Нетрудно записать отображения (10.1) и (10.2), соответствующие режиму столкновений с обеими стенками, в исходных координатах как

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_n - \frac{m-M}{m+M} \sqrt{(U_n - V_n)^2 - \frac{2qEL}{m}}, \\ U_{n+1} &= U_n - \frac{2m}{m+M} \sqrt{(U_n - V_n)^2 - \frac{2qEL}{m}}, \\ V_{n+2} &= U_{n+1} + \frac{m-M}{m+M} \sqrt{(U_{n+1} - V_{n+1})^2 + \frac{2qEL}{m}}, \\ U_{n+2} &= U_{n+1} + \frac{2m}{m+M} \sqrt{(U_{n+1} - V_{n+1})^2 + \frac{2qEL}{m}}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Отображения, соответствующие режиму отражения только от одной границы билиарда, в этих координатах принимают вид

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \frac{2m}{m+M} U_n - \frac{m-M}{m+M} V_n, \\ U_{n+1} &= \frac{3m+M}{m+M} U_n - \frac{2m}{m+M} V_n. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Еще одна форма этих отображений удобна для интерпретации поведения структурно-сложной частицы. Это переход к физически важным координатам, соответствующим скорости движения центра масс $C_n = (mV_n + MU_n)/(m+M)$ структурно-сложной частицы и относительной скорости $R_n = U_n - V_n$. Отображения (10.5) в этих переменных принимают более простой вид

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= -\sqrt{R_n^2 - \frac{2qEL}{m}}, \\ R_{n+2} &= \sqrt{R_{n+1}^2 + \frac{2qEL}{m}}, \\ C_{n+1} &= C_n + \frac{m}{m+M} (R_n + R_{n+1}), \\ C_{n+2} &= C_{n+1} + \frac{m}{m+M} (R_{n+1} + R_{n+2}). \end{aligned} \quad (10.6)$$

Легко заметить два важных свойства этих отображений. Прежде всего поведение относительных скоростей не зависит от скорости центра масс. Кроме этого можно заметить, что композиция $R_{n+2} \circ R_{n+1} = I$ дает тождественное отображение. Это означает, что величина относительной скорости после отражения от фиксированной стенки не меняется. Другими словами, если связывать относительную скорость с тепловой скоростью внутренних степеней свободы, можно сказать, что нагрев внутренней степени свободы такой структурно-сложной частицы не происходит. А увеличение скорости центра масс происходит пропорционально сумме относительных скоростей при столкновении с противоположными концами оболочки $(R_n + R_{n+1})$.

В этом смысле последнее отображение из отображений (10.6) лишнее и полностью совпадает с предшествующим ему.

Наконец, отображения (10.3) переходят в

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= R_n, \\ C_{n+1} &= C_n + \frac{2m}{m+M} R_n. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Поведение структурно-сложной частицы при реализации столкновений только с одной из границ оболочки описывается особенно просто. Действительно, как следует из отображений (10.7), относительная скорость в моменты столкновений оболочки и внутренней частицы не меняется. С физической точки зрения это означает отсутствие «нагрева» внутренней степени свободы.

Скорость центра масс монотонно нарастает при каждом столкновении. Скорость центра масс при каждом столкновении увеличивается на постоянную величину, пропорциональную относительной скорости. Зависимость от времени скоростей внутренней частицы и оболочки легко восстанавливается по данным отображений. На рис. 25 приведены примеры изменения скоростей в обоих режимах.

11. ОБОБЩЕНИЕ ПРИНЦИПА СПРЯМЛЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ

При изучении движения лучей в бильярдах один из наиболее эффективных и широко используемых приемов был предложен Шварцем (см. рис. 26). Он основан на идее спрямления бильiardной траектории [8] или в переходе от движения в бильярде к свободному движению луча в пространстве без границ.

Разумеется, такую идеологию удобно использовать и при обсуждении движения структурно-сложной частицы в постоянном электрическом поле. Однако для этого не достаточно отразить бильярд относительно границы, на которую падает траектория. Кроме этого, нужно еще обобщить прием Шварца и изменить подходящим образом вид электрического поля в отраженном бильярде. Поэтому правильное продолжение траектории в отраженном бильярде предполагает и правильное изменение потенциала электрического поля. В результате появляется возможность ввести общий потенциал, движение в котором и будет описывать такую траекторию уже во всем пространстве без отражений от границ полосы. Электрическое поле такого потенциала будет скачкообразно меняться при переходе из полосы в полосу (см. рис. 28). В определенном смысле этим достигается переход к свободному движению в определенном поле.

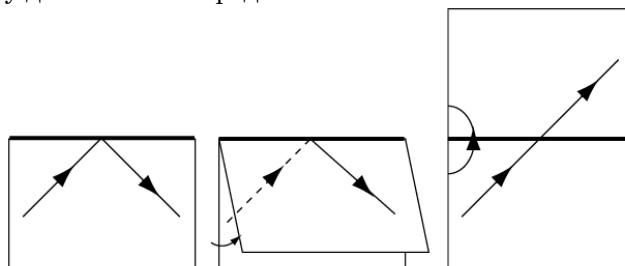


Рис. 26. Показан прием спрямления траекторий, предложенный Шварцем для обычных бильярдов. Жирной линией отмечена граница бильярда, на которую падает луч

Для реализации этой возможности предварительно удобно перейти к новой системе координат, в которой границы бильярда параллельны одной из осей координат. Такой переход не принципиален, а просто упрощает последующие вычисления. Напомним, что угол, под которым наклонена полоса, обозначен на рис. 24 как α и определяется

отношением масс согласно соотношению $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{M}{m}}$ ($\cos \alpha = \sqrt{\frac{m}{m+M}}$,

а $\sin \alpha = \sqrt{\frac{M}{m+M}}$). Поэтому перейдем к новой системе координат

$$\begin{aligned} y_1 &= \tilde{x}_1 \cos \alpha + \tilde{x}_2 \sin \alpha, \\ y_2 &= -\tilde{x}_1 \sin \alpha + \tilde{x}_2 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (11.1)$$

повернутой на угол $-\alpha$ относительно исходной, и запишем уравнения движения в новых координатах (y_1, y_2)

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= \frac{Eq}{\sqrt{m}} \cos \alpha = \frac{Eq}{\sqrt{m+M}}, \\ \ddot{y}_2 &= -\frac{Eq}{\sqrt{m}} \sin \alpha = -\frac{Eq\sqrt{M}}{\sqrt{m(m+M)}}.\end{aligned}\quad (11.2)$$

Далее обозначим d — ширину полосы, которая определяется соотношением $d = L\sqrt{\frac{mM}{m+M}}$. Обратим внимание, что в этой системе координат электрическое поле имеет составляющие вдоль обеих осей координат $\vec{E} = (mE/\sqrt{m+M}, -\sqrt{mM}E/\sqrt{m+M})$. В этих координатах конфигурационное пространство устроено исключительно просто и приведено на рис. 24. Дополнительное преимущество этих координат связано с их физическим смыслом. Обсудим теперь физический смысл скоростей \dot{y}_1 и \dot{y}_2 в новых координатах.

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \dot{x}_1 \cos \alpha + \dot{x}_2 \sin \alpha, \\ \dot{y}_2 &= -\dot{x}_1 \sin \alpha + \dot{x}_2 \cos \alpha.\end{aligned}$$

Используем далее связь масс с углом наклона полосы в исходном конфигурационном пространстве $\cos \alpha = \sqrt{\frac{m}{m+M}}$, а $\sin \alpha = \sqrt{\frac{M}{m+M}}$, и преобразуем эти выражения к удобному виду

$$\dot{y}_1 = \frac{mV + MU}{\sqrt{m+M}}, \quad \dot{y}_2 = \sqrt{\frac{mM}{m+M}}(U - V).\quad (11.3)$$

Таким образом, скорость вдоль координаты y_1 пропорциональна скорости центра масс, $\bar{V} = \frac{\dot{y}_1}{\sqrt{m+M}} = \frac{mV + MU}{m+M}$ — скорость центра масс.

Скорость \dot{y}_2 пропорциональна относительной скорости, $U - V = \sqrt{\frac{m+M}{mM}}\dot{y}_2 = V_T$, которой можно придать смысл температурной скорости. При этом такой же физически удобный смысл приобретают и новые координаты

$$y_1 = \frac{mx_1 + Mx_2}{\sqrt{m+M}},$$

$$y_2 = \sqrt{\frac{mM}{m+M}} (x_2 - x_1) \quad (11.4)$$

как координата центра масс и относительная координата оболочки и внутренней частицы. Разумеется, с точностью до постоянного множителя.

В введенных координатах уравнение движения вдоль оси y_1 не ограничено границами. Поэтому уравнение движения вдоль нее может быть проинтегрировано в силу независимости от поперечных движений. В поперечном направлении столкновения с границами неизбежны, и интегрирование уравнения движения должно учитывать наличие границ.

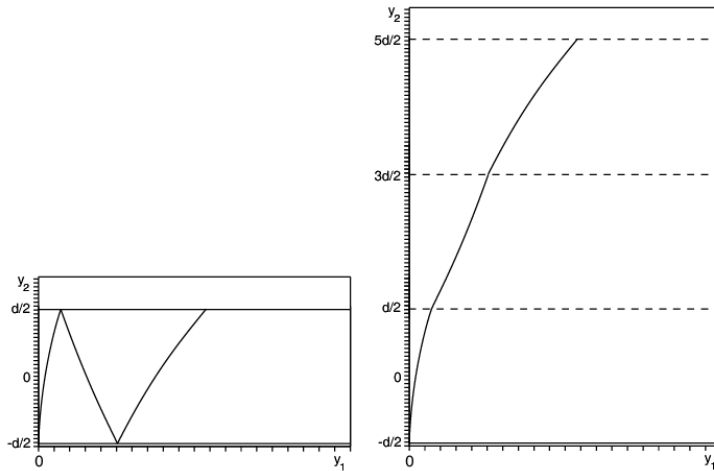


Рис. 27. Слева показан бильярд в выбранной системе координат (y_1, y_2) и несколько сегментов траектории. Справа — результат спрямления траектории, приведенной слева. Хорошо заметно смена характера движения из-за изменения направления вертикальной компоненты электрического поля

Проинтегрируем уравнения (1.42) по времени и получим

$$\dot{y}_1 = \frac{Eq}{\sqrt{m+M}} t + \dot{y}_1|_{t=0} = \frac{Eq}{\sqrt{m+M}} t + v_{10},$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{Eq\sqrt{M}}{\sqrt{m(m+M)}} t + \dot{y}_2|_{t=0} = -\frac{Eq\sqrt{M}}{\sqrt{m(m+M)}} t + v_{20},$$

где v_{10} и v_{20} — соответствующие начальные скорости, естественно в системе координат (y_1, y_2) . Повторное интегрирование приводит к решениям вида

$$y_1 = \frac{Eq}{\sqrt{m+M}} \frac{t^2}{2} + v_{10}t + y_{10}, \quad (11.5)$$

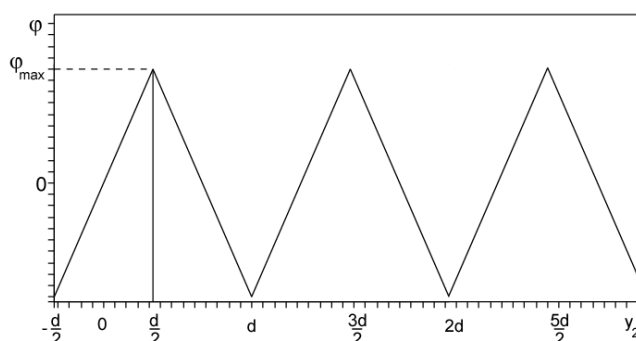
$$y_2 = -\frac{Eq\sqrt{M}}{\sqrt{m(m+M)}} \frac{t^2}{2} + v_{20}t + y_{20}.$$

Характерный вид участка траектории $(y_1(t), y_2(t))$, начинающийся на нижней границе конфигурационного пространства до достижения верхней границы, приведен на рис. 24. Разумеется, на нем приведена точная траектория для выбранных определенных значений характеристик электрического поля и структурно-сложной частицы.

Теперь достаточно очевидно, что, переключая полосу, как и в обычном бильярде, нужно одновременно изменить и электрическое поле. Ясно, что в выбранной системе координат при переходе из полосы в полосу вертикальная составляющая поля должна менять знак, а горизонтальная компонента поля не меняется. Поэтому горизонтальная компонента скорости и изменение координаты $y_1(t)$ глобально описываются едиными соотношениями, приведенными выше. Нетривиальным изменениям при «спрямлении» подвергается только вертикальная компонента скорости и координаты. Фактически ее можно описывать в точности как движение заряженной частицы в пилообразном потенциале (см. рис. 28). Таким образом, задача о движении в таком бильярде сводится к движению заряженной частицы в безграничном пространстве, но в потенциале определенного вида. По переменной y_1 потенциал линейная функция y_1 , а по поперечной координате y_2 периодическая пилообразная функция, как на рис. 28. Переход от безграничной к исходной задаче в бильярде сводится к складыванию траектории. Например, траектория, показанная на рис. 24, после спрямления принимает вид, как показано на рис. 24 справа. Уже исходя только из вида потенциала, можно установить ряд качественных выводов о характере движения. Прежде всего все траектории такой системы относятся к инфинитным, по крайней мере по направлению y_1 . Более того, движение центра масс структурно-сложной частицы происходит равноускоренно с ускорением, равным $\frac{qE}{\sqrt{m+M}}$, в соответствии с точным решением (11.5). Другими словами, ускорение

центра масс такой структурно-сложной частицы происходит в точности как у бесструктурной точечной частицы с массой $m + M$. Однако внутренняя структура частицы должна проявляться в характере смены направления движения центра масс при противоположных направлениях начальной скорости центра масс и направления действия электрического поля. Кроме этого в таком потенциале могут реализоваться два качественно различных режима в направлении оси y_2 или «температурной» скорости. Эти режимы принято называть как режим захваченных частиц и режим пролетных. Приведенный пример траектории на рис. 24 соответствует пролетной частице. Режим движения, соответствующий захваченной частице, выглядит совершенно иначе (см. рис. 30).

Для описания режимов движения перейдем от качественного описания поведения к точным количественным решениям [24]. Естественно, для этого достаточно получить решение для эволюции координаты y_2 в пилообразном потенциале.



Таким образом, остается найти движение заряженной частицы в пилообразном электрическом потенциале. Максимальное значение электрического потенциала $\varphi_{\max} = \frac{M}{m+M} EqL$.

Интегрирование этого уравнения приводит к закону сохранения энергии в виде

$$\dot{y}_2^2 + \varphi(y_2) = const . \quad (11.7)$$

Этот закон сохранения позволяет сразу установить фазовый портрет для этого уравнения (см. рис. 29).

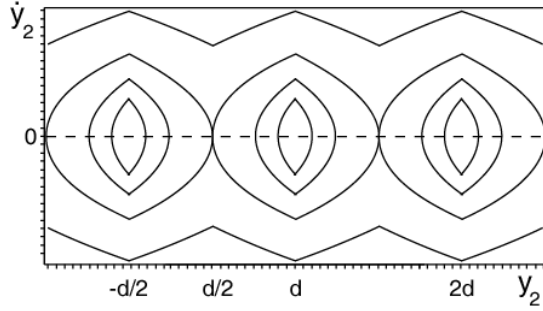


Рис. 29. Фазовый портрет уравнения (11.7). Замкнутые траектории в фазовом пространстве соответствуют захваченным режимам, верхняя и нижняя траектория — пролетным режимам

Естественно, траектории движения делятся на два класса – захваченные и пролетные – в соответствии с величиной кинетической энергии по отношению к максимальному значению электрического потенциала. В обоих режимах скорость меняется периодически от минимального до максимального значения. В пролетном случае период пролета над ямой легко вычислить:

$$T = \frac{2m}{Eq} \left[U_0 - V_0 - \sqrt{(V_0 - U_0)^2 - \frac{2EqL}{m}} \right], \quad (11.8)$$

здесь V_0 и U_0 – скорости после столкновения с правой стенкой в момент времени $t = 0$. Так же легко получить изменение скорости в пролетном режиме как

$$\dot{y}_2(t) = \sqrt{\frac{mM}{m+M}} \begin{cases} \frac{Eq(t-nT)}{m} - (U_0 - V_0), & nT \leq t \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)T \\ \frac{Eq(t-nT)}{m} - (U_0 - V_0) + 2\sqrt{(U_0 - V_0)^2 - \frac{2EqL}{m}}, & \left(n + \frac{1}{2}\right)T \leq t \leq (n+1)T \end{cases} . \quad (11.9)$$

Используя полученное решение и решение (11.5), легко получить соответствующие отображения для скоростей, полученные в предыдущем разделе.

Перейдем теперь к случаю, когда начальной энергии частицы не хватает, чтобы долететь до левого края оболочки, т.е. к захваченному режиму (см. рис. 30). Решение (11.5) для y_1 не изменится, изменится только вид решения для y_2 . Для периода движения в яме имеем:

$$T_1 = \frac{2m(U_0 - V_0)}{Eq}, \quad (11.10)$$

и соответственно, для координаты y_2 и скорости вдоль этого направления получим

$$y_2(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{mM}{m+M}} \begin{cases} \frac{Eq t^2}{m} - \frac{m}{Eq} (U_0 - V_0)^2, & nT_1 \leq t \leq (n + \frac{1}{2})T_1 \\ \frac{1}{Eqm} \left(-\frac{Eq t}{m} + 3(U_0 - V_0) \right) \left(-\frac{Eq t}{m} + (U_0 - V_0) \right), & T_1 \left(n + \frac{1}{2} \right) \leq t \leq (n+1)T_1. \end{cases} \quad (11.11)$$

$$\dot{y}_2(t) = \sqrt{\frac{mM}{m+M}} \begin{cases} \frac{Eq t}{m}, & \text{if } nT_1 \leq t \leq \left(n + \frac{1}{2} \right) T_1 \\ \frac{Eq t}{m} - 2(U_0 - V_0) & \text{if } \left(n + \frac{1}{2} \right) T_1 \leq t \leq (n+1)T_1 \end{cases} \quad (11.12)$$

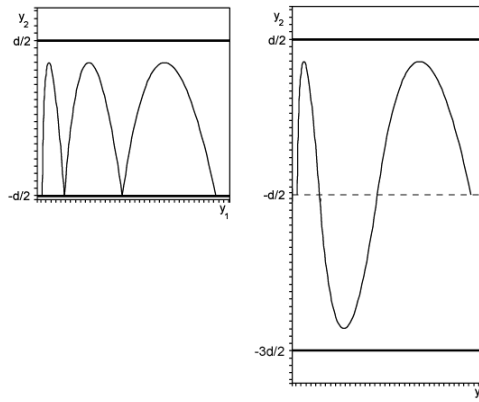


Рис. 30. Слева траектория в бильярде, соответствующая захваченному режиму по направлению оси y_2 . Справа эта же траектория после применения «спрямления»

Из этих соотношений легко получить приведенные выше отображения для скорости центра масс и относительной скорости, соответствующие этому режиму.

Легко установить, что

$$\det \hat{A} = 1. \quad (11.13)$$

Перемножая эти матрицы, можно установить полезное свойство

$$A^n = \begin{pmatrix} -\frac{((2 \cdot n - 1)m - M)}{(m + M)} & \frac{2nm}{(m + M)} \\ -\frac{2nm}{(m + M)} & \frac{((2n + 1)m + M)}{(m + M)} \end{pmatrix}.$$

Это свойство позволяет легко установить закон изменения скорости в виде

$$V_n = -\frac{((2n - 1)m - M)}{(m + M)} V_0 + \frac{2nm}{(m + M)} U_0,$$

$$U_n = -\frac{2nm}{(m + M)} V_0 + \frac{((2n + 1)m + M)}{(m + M)} U_0.$$

Кажется довольно странным, но преобразование скоростей не зависит от величины поля. На самом деле зависимость от величины поля присутствует в величине временного шага между столкновениями.

Таким образом, сколь бы малым ни было поле, оно кардинально влияет на характер движения. Эти формулы удобно записать и в другом наглядном виде

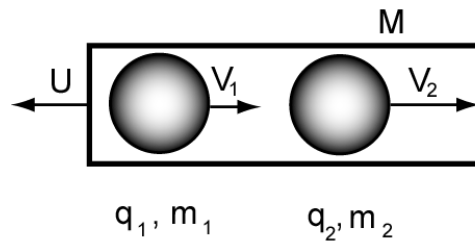
$$V_n = n \frac{2m}{(m + M)} (-V_0 + U_0) + V_0,$$

$$U_n = n \frac{2m}{(m + M)} (-V_0 + U_0) + U_0.$$

Из них следует сохранение относительной скорости $V_n - U_n = V_0 - U_0$ и «квант» скорости, на который увеличиваются скорости оболочки и внутренней частицы – один шаг по времени.

12. РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ СТРУКТУРНО-СЛОЖНОЙ ЧАСТИЦЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Переход к бильярдной идеологии для структурно-сложной частицы с одной степенью свободы только упрощал рассмотрение. С ростом числа внутренних степеней свободы значение бильярдного подхода возрастает и получение результатов без его использования становится невозможным. Рассмотрим структурно-сложную частицу с двумя внутренними степенями свободы (см. рис. 31).



*Рис. 31. Структурно-сложная частица с двумя внутренними степенями свободы.
Скорости внутренних частиц V_1 и V_2 соответственно*

Конфигурационное пространство такой частицы определяется неравенствами

$$|x_1 - x_3| \leq \frac{L}{2},$$

$$|x_2 - x_3| \leq \frac{L}{2}.$$

Эти неравенства означают невозможность выйти внутренним частицам за пределы оболочки (координаты центра оболочки обозначены как x_3 , а ее массу удобно обозначать как m_3).

Еще одно неравенство $x_2 \geq x_1$ отражает невозможность прохождения одной частицы сквозь другую. Переход к бильярдным координатам осуществляется стандартным способом. Так, $\tilde{x}_1 = \sqrt{m_1} x_1$, $\tilde{x}_2 = \sqrt{m_2} x_2$ и наконец $\tilde{x}_3 = \sqrt{M} x_3$. В этих координатах конфигурационное пространство принимает вид внутренности трехгранной призмы (см. рис. 32). Действительно, образование треугольной призмы

пересечением трех плоскостей, согласно аналитической геометрии [25], происходит, когда определитель, составленный из коэффициентов, определяющих уравнения трех плоскостей, должен обращаться в нуль.

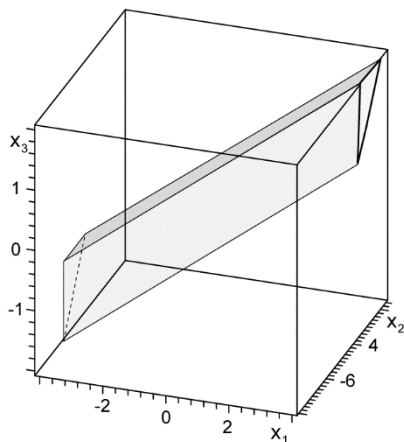


Рис. 32. Конфигурационное пространство структурно-сложной частицы с двумя внутренними степенями свободы

При этом строки не должны быть пропорциональны. В рассматриваемом случае, записывая уравнения плоскостей в биллиардных координатах, получим определитель в виде

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{m_3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}} & -\frac{1}{\sqrt{m_3}} \\ \frac{1}{\sqrt{m_1}} & -\frac{1}{\sqrt{m_2}} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Его обращение в нуль очевидно. Здесь и далее для уравнений $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$, определяющих плоскости, используются стандартные обозначения коэффициентов. Тогда критерий формирования плоскостями треугольной призмы сводится к необращению в нуль по крайней мере одного из определителей [25]

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_1 & C_1 & D_1 \\ B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}.$$

В этом легко убедиться непосредственной подстановкой значений коэффициентов. Для дальнейшего важно установить направление оси этой призмы. Это направление определяется вектором $\vec{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ (см. например [25]), который имеет компоненты

$$\zeta_1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \zeta_2 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad \zeta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Учитывая, что $A_1 = \frac{1}{\sqrt{m_1}}$, $B_1 = 0$, $C_1 = -\frac{1}{\sqrt{m_3}}$, а $A_2 = 0$, $B_2 = \frac{1}{\sqrt{m_2}}$, $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{m_3}}$, и наконец $A_3 = \frac{1}{\sqrt{m_1}}$, $B_3 = \frac{1}{\sqrt{m_2}}$, $C_3 = -\frac{1}{\sqrt{m_3}}$, координаты этого вектора легко вычисляются

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{1}{\sqrt{m_2 m_3}}, \frac{1}{\sqrt{m_1 m_3}}, \frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}} \right),$$

или единичный вектор

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{\zeta}}{|\vec{\zeta}|} = \frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \left(\frac{1}{\sqrt{m_2 m_3}}, \frac{1}{\sqrt{m_1 m_3}}, \frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}} \right).$$

Этот вектор определялся направлением линии пересечения первых двух плоскостей. Естественно, определение его по пересечению другой пары плоскостей дает то же направление. Таким образом, направление оси треугольной призмы определяется только массами внутренних степеней свободы и оболочки. После выяснения геометрического устройства границы бильярда перейдем к обсуждению движения структурно-сложной частицы.

Движение внутренних частиц и оболочки теперь можно рассматривать как движение некоторой одной фиктивной частицы с координатами $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ в бильярде указанного выше типа. На характер движения этой эффективной частицы действует электрическое поле. Перейдем к обсуждению влияния поля на эту частицу. Пусть в случае общего положения внутренние частицы обладают зарядами e_1 , e_2 , а оболочка зарядом e_3 . Тогда изменение координат эффективной частицы до столкновения с границей происходит согласно уравнениям

$$\tilde{x}_1 = \frac{e_1 E t^2}{2\sqrt{m_1}} + \tilde{V}_{10} t + \tilde{x}_{10} \equiv \frac{e \tilde{E}_1 t^2}{2m} + \tilde{V}_{10} t + \tilde{x}_{10},$$

$$\tilde{x}_2 = \frac{e_2 E t^2}{2\sqrt{m_2}} + V_{20} t + x_{20} \equiv \frac{e \tilde{E}_2 t^2}{2m} + \tilde{V}_{20} t + \tilde{x}_{20},$$

$$\tilde{x}_3 = \frac{e_3 E t^2}{2\sqrt{m_3}} + V_{30} t + x_{30} \equiv \frac{e \tilde{E}_3 t^2}{2m} + \tilde{V}_{30} t + \tilde{x}_{30},$$

где постоянное эффективное электрическое поле имеет отличными от нуля все компоненты

$$\vec{\tilde{E}} = (\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3),$$

которые определяются следующим образом: $\tilde{E}_1 = \frac{e_1 m}{e \sqrt{m_1}} E$,

$$\tilde{E}_2 = \frac{e_2 m}{e \sqrt{m_2}} E \text{ и } \tilde{E}_3 = \frac{e_3 m}{e \sqrt{m_3}} E, \text{ а } e \text{ и } m \text{ произвольно выбранные}$$

отличные от нуля эталонный заряд и масса соответственно. В частности их можно выбрать единичными. Направление и величина поля зависят от величин и знаков зарядов, входящих в структурно-сложную частицу частиц. Начальные скорости $\tilde{V}_{10} = \sqrt{m_1} V_{10}$, $\tilde{V}_{20} = \sqrt{m_2} V_{20}$, $\tilde{V}_{30} = \sqrt{m_3} V_{30}$ и начальные координаты $\tilde{x}_{10} = \sqrt{m_1} x_{10}$, $\tilde{x}_{20} = \sqrt{m_2} x_{20}$, $\tilde{x}_{30} = \sqrt{m_3} x_{30}$.

Начальные координаты $(\tilde{x}_{10}, \tilde{x}_{20}, \tilde{x}_{30})$ удобно выбрать принадлежащими границе бильярда, хотя это и не важно. Важно, что движение «частицы» происходит во внутренней области бильярда. Таким образом, движение структурно-сложной частицы с двумя внутренними степенями свободы сводится к движению одной заряженной частицы в указанном выше бильярде с зеркальным отражением от границ (см. например [24]) и помещенном в определенное постоянное электрическое поле. Величина и направление этого эффективного поля зависит не только от величины внешнего электрического поля, но и от масс и зарядов внутренних степеней свободы и оболочки.

Аналогично можно доказать, что структурно-сложная частица с любым числом внутренних степеней свободы и с произвольным распределением зарядов сводится к многомерному бильярду с одной заряженной частицей, помещенной в постоянное электрическое поле. Форма бильярда определяется пересечением заданных плоскостей в пространстве соответствующей размерности и сводится к определенному типу многогранников. В принципе уже такое представление позволяет качественно понять многое в поведении структурно-сложной частицы.

Перейдем теперь к выяснению динамических свойств частицы, движущейся в таком бильярде. Прежде всего обратим внимание, что движение эффективной частицы можно разложить на две компоненты. Это движение вдоль оси бильярда и поперечные к ней. Ясно, что

продольное движение не связано со столкновением частицы со стенкой и является просто равноускоренным движением. Это означает, что продольная скорость $V_{\parallel} = \vec{V} \cdot \vec{\tau}$ растет пропорционально времени

$$V_{\parallel} = \frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \left(\frac{\tilde{V}_1}{\sqrt{m_2 m_3}} + \frac{\tilde{V}_2}{\sqrt{m_1 m_3}} + \frac{\tilde{V}_3}{\sqrt{m_1 m_2}} \right) = \frac{e}{m} \tilde{E}_{\parallel} t + \tilde{V}_{0\parallel},$$

здесь $\tilde{E}_{\parallel} = \vec{E} \cdot \vec{\tau}$, $\tilde{V}_{0\parallel} = \vec{V}_0 \cdot \vec{\tau}$ — начальная продольная скорость

$$\tilde{E}_{\parallel} = \frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \left(\frac{\tilde{E}_1}{\sqrt{m_2 m_3}} + \frac{\tilde{E}_2}{\sqrt{m_1 m_3}} + \frac{\tilde{E}_3}{\sqrt{m_1 m_2}} \right),$$

а изменение координат в продольном направлении определяется соотношением

$$\tilde{x}_{\parallel} = \vec{x} \cdot \vec{\tau} = \frac{e}{m} \tilde{E}_{\parallel} \frac{t^2}{2} + \tilde{V}_{0\parallel} t + \tilde{x}_{0\parallel}.$$

Таким образом, сразу обнаруживается первый частный режим движения. Этот режим реализуется при равенстве нулю начальной поперечной скорости \vec{V}_{\perp} к оси призмы и отсутствии эффективного электрического поля в поперечном направлении $\vec{E}_{\perp} = 0$. При выполнении этих условий частица движется равноускоренно вдоль оси призмы, не испытывая столкновений с границей бильярда. Для структурно-сложной частицы это означает отсутствие взаимодействия между ее компонентами. Это самый простой режим движения. Изменение скоростей и координат эффективной частицы определяется приведенными выше соотношениями. Ясно, что при наличии сколь угодно малой начальной поперечной скорости или малого поперечного поля этот режим разрушается.

Для описания других режимов удобно перейти в равноускоренную систему отсчета, движущуюся в продольном направлении со скоростью V_{\parallel} . В этой системе отсчета $V_{\parallel} = 0$ и $\tilde{x}_{\parallel} = 0$. Переход в такую систему отсчета геометрически означает выбор определенного сечения призмы плоскостью $\tilde{x}_{\parallel} = 0$. Уравнение этой плоскости

$$\vec{x} \cdot \vec{\tau} = \frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \left(\frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{m_2 m_3}} + \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{m_1 m_3}} + \frac{\tilde{x}_3}{\sqrt{m_1 m_2}} \right) = 0.$$

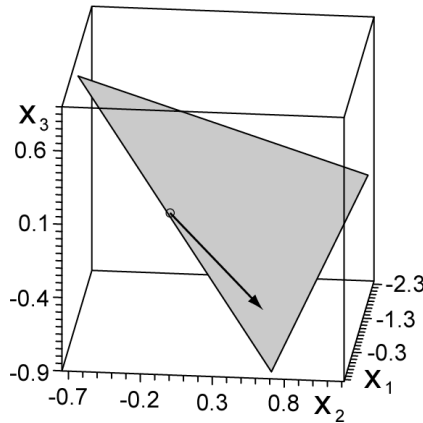


Рис. 33. Показан вид сечения призмы плоскостью $\tilde{x}_{\parallel} = 0$ при значениях масс $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 3$ и $L = 2$. Область треугольного бильярда окрашена серым. Направление эффективного электрического поля \vec{E} показано вектором при $e_1 = 1, e_2 = 2$ и $e_3 = -2$

Таким образом, достаточно следить за проекцией траектории эффективной частицы на это сечение. Сечение треугольной призмы такой плоскостью приводит к треугольному бильярду (см. рис. 33). Точные координаты вершин треугольника легко вычисляются явно. Они зависят только от масс и размера L . Другими словами, для описания всех режимов движения достаточно изучить движение заряженной частицы в треугольном бильярде под действием постоянного электрического поля \vec{E}_{\perp} . Однако исследование таких движений в теории бильярдов пока отсутствует. Ниже обсудим качественные черты возможных режимов.

Начнем с обсуждения движения заряженной частицы под воздействием постоянного электрического поля в угле. Для обычного углового бильярда доказана теорема о неизбежном выходе частицы из угла. Эта замечательная теорема и ее обобщения на многомерные углы была доказана Синаем [15]. В случае наличия электрического поля эта теорема нарушается при наличии компоненты силы, действующей на частицу в направлении вершины угла. Для того чтобы понять это, начнем с простого угла, кратного π . Пусть в угол величиной $\pi/4$ помещена положительно заряженная частица, имеющая некоторую начальную скорость. Выберем направление электрического поля параллельно одной из сторон треугольника (см. рис. 34).

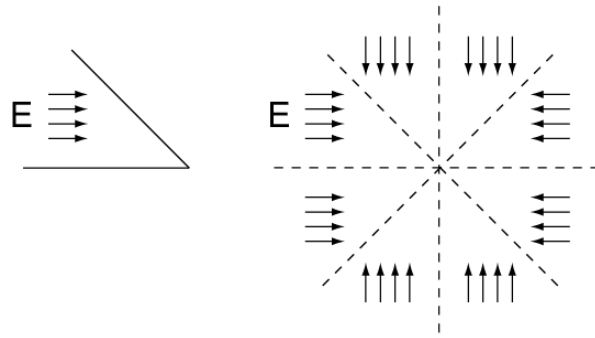


Рис. 34. Слева показан бильярд в форме угла, равного $\pi/4$, и направление электрического поля в нем. Справа показана область движения частицы и направления электрического поля после применения «спрямления» траектории с использованием обобщенного приема Шварца

Используя обобщение приема Шварца, можно понять, что движение заряженной частицы в угле эквивалентно движению на плоскости в определенном электрическом поле (см. рис. 34). Учитывая, что величина поля постоянна, легко установить вид потенциальной энергии, в которой движется заряженная частица (см. рис. 35). После этого становится очевидным, что движение заряженной частицы в такой потенциальной яме ограничено начальной энергией частицы. Все траектории движения частицы финитные и квазипериодические или периодические. Это означает, что частица не выйдет из угла ни при каких начальных условиях. Интересно отметить, что траектории движения в этом потенциале находятся точно аналитически и, как легко понять, складываются из частей парабол. Совершенно аналогично можно доказать отсутствие вылета из углов, кратных π . В этом случае потенциальная энергия усложняется, увеличивается число граней соответствующей пирамиды, а также меняются углы расположения граней. Однако важно только наличие компоненты силы, действующей на заряженную частицу в направлении вершины угла. Разумеется, при направлении силы, действующей на частицу от вершины угла, ее выход из угла неизбежен как и при отсутствии поля. В этом случае яма превращается в барьер, «скатывание» с которого ускоряет выход из угла. В этом случае можно сказать, что барьером ограничен вход в угол. Интересно заметить, что при увеличении электрического поля и следовательно увеличении угла наклона эффективного потенциала возникает своеобразный вторичный бильярд, который характеризует траектории в угле. Так, в рассмотренном выше примере при угле $\pi/4$ задача, в нулевом приближении, сводится к движению частицы в квадратном бильярде. Все типы траекторий такого бильярда достаточно хорошо изучены [6]. Топологическая энтропия такого бильярда равна нулю [26]. Хаотические траектории отсутствуют. Учет

наклона потенциальной ямы в следующем приближении ведет к мягким бильярдам [27]. Отличие таких бильярдов состоит в характере отражения, состоявшего в наличии дуги в точке отражения, а не излома траектории — согласно закону угол падения равен углу отражения. Таким образом, для описания движения заряженной частицы в угле и постоянном поле можно использовать обычные бильярды в многоугольниках без внешних полей.

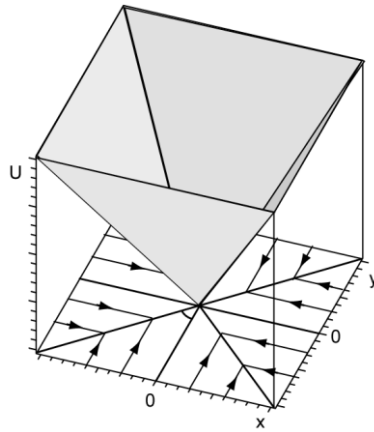


Рис. 35. Вид потенциальной энергии для рассматриваемого выше случая

13. ИЗЛУЧЕНИЕ СТРУКТУРНО-СЛОЖНОЙ ЧАСТИЦЫ

Рассмотрим излучение, возникающее при движении заряженной структурно-сложной частицы в постоянном электрическом поле [28]. В качестве такой заряженной структурно-сложной частицы используем частицу, состоящую из нейтральной оболочки и заряженной внутренней частицы (см. рис. 23). Внутренняя частица движется свободно, сталкиваясь абсолютно упруго с оболочкой. Несмотря на простоту устройства такой частицы, результаты могут быть легко обобщены на более сложные случаи.

Движение структурно-сложной частицы с заряженной внутренней частицей в постоянном электрическом поле подробно исследовано в разделе 10. Установлено, что такие частицы могут находиться в двух различных режимах движения. В первом режиме внутренняя частица периодически сталкивается лишь с одной стенкой оболочки, во втором режиме — попеременно с обеими стенками оболочки. Важно отметить, что в обоих случаях движение является периодическим. В первом случае

скорость внутренней частицы в моменты столкновения с оболочкой t_n описывается простой формулой:

$$V_n = n \frac{2m}{m+M} (U_0 - V_0) + V_0.$$

Типичный график зависимости скорости оболочки и внутренней частицы от времени представлен на рис. 25. Период колебаний определяется соотношением (см. работу [24])

$$\tau = \frac{2m}{qE} (U - V), \quad (13.1)$$

здесь $U - V$ — разность скоростей оболочки и внутренней частицы в момент их столкновения, а E — напряженность электрического поля и q — заряд внутренней частицы.

Детально рассматривая движение заряженной внутренней частицы, можно заметить, что оно представляет собой композицию равноускоренного движения и периодических столкновений с нейтральной оболочкой. Соответственно, суммарное излучение структурно-сложной частицы состоит из тормозного излучения и излучения равноускоренного разряда. Интерференция этих компонент будет приводить к возникновению излучения, обладающего специфическим спектром.

В нерелятивистском случае излучение ускоренно движущегося заряда в телесный угол на определенной частоте описывается простой формулой:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi^2 c^2} \sin^2 \theta \left| \int \dot{v} e^{i\omega t} dt \right|^2.$$

Угол θ отсчитывается от направления движения заряда. Угловая зависимость $\sin^2 \theta$ является характерной для излучения заряда, движущегося с нерелятивистской скоростью. Такая зависимость означает, что излучение в основном происходит в плоскость, которая перпендикулярна к направлению движения частицы. Поскольку мы ограничиваемся случаем нерелятивистских скоростей, то для получения спектральной зависимости достаточно осуществить преобразование Фурье ускорения частицы $\dot{v}(t)$.

Рассмотрим спектральное распределение излучения структурно-сложной частицы, движущейся в постоянном поле в течение времени T . Учитывая, что ускорение внутренней частицы имеет периодическую компоненту с периодом τ , удобно выбрать общее время движения, кратное длительности этого периода $T = N\tau$. Движение внутренней частицы можно представить себе как равноускоренное движение

с последовательными ударами. Поэтому зависимость ускорения от времени имеет такой вид:

$$\dot{v}(t) = a + \sum_{n=0}^N \Delta v \delta(t - t_n),$$

где Δv — скачок скорости внутренней частицы после столкновения с оболочкой, а $t_n = n\tau$. Используя Фурье преобразование $a(t) = \dot{v}(t)$, получим спектр излучения структурно-сложной частицы:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi^2 c^2} \sin^2 \theta \left| \int_0^T a e^{i\omega t} dt + \Delta v \sum_{n=0}^N e^{i\omega t_n} \right|^2.$$

Первое слагаемое соответствует излучению частицы, движущейся равноускоренно. Как обсуждалось, например в [30], такое излучение является трудно наблюдаемым. Действительно, при $T \rightarrow \infty$ спектр излучения равномерно ускоренной частицы переходит в δ -функцию. Иными словами, такое излучение будет сконцентрировано на очень низких частотах. Соответственно, эту компоненту можно исключить из рассмотрения. Суммирование вкладов от отдельных столкновений внутренней частицы с оболочкой легко выполняется, поскольку столкновения происходят через равные промежутки времени $t_n = n\tau$. В результате спектр излучения приобретает такой вид:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{q^2 \sin^2 \theta}{4\pi^2 c^3} \left(\frac{2M(U_0 - V_0)}{M + m} \right)^2 \frac{\sin^2 N\omega\tau / 2}{\sin^2 \omega\tau / 2}.$$

График типичного спектра излучения представлен на рис. 36. Легко убедиться, что максимальное значение мощности излучения

достигается на частотах, кратных $\omega = \frac{\Omega_0}{2} = \frac{\pi}{\tau} = \frac{\pi q E}{2m(U_0 - V_0)}$, и при этих

частотах достигает величины $\frac{q^2 \sin^2 \theta}{4\pi^2 c^2} N^2$. Характерную ширину пиков

$\Delta\omega$ также легко оценить, и она совпадает с $\Delta\omega \approx \frac{\pi}{\tau N}$.

Таким образом, спектр оказывается сконцентрированным на основной частоте столкновений внутренней частицы с оболочкой и на кратных ей частотах. В полученной формуле амплитуда пиков на кратных гармониках остается постоянной с увеличением частоты. Подобная проблема наблюдается и при получении спектра тормозного излучения от отдельного столкновения. Решение этой проблемы лежит в обрезании спектра на некоторой частоте. Для одиночного столкновения

значение этой частоты определяется характерным временем соударения оболочки и внутренней частицы τ_{coll} [29]. Соответственно, и в случае заряженной структурно-сложной частицы линейчатый спектр излучения обрезается по таким же причинам на частоте $\omega_{max} \sim 1/\tau_{coll}$. Обладая информацией о спектральном излучении структурно-сложной частицы, вычислим среднюю мощность излучения структурно-сложной частицы:

$$P_{comp} = \frac{2q^2}{3\pi c^3} \left(\frac{\Delta v}{\tau_{col}} \right)^2 \frac{\tau_{col}}{\tau} = \frac{2q^2}{3\pi c^3} (a_{col})^2 \frac{\tau_{col}}{\tau},$$

где a_{col} — ускорение внутренней частицы при столкновении с оболочкой. Чтобы сравнить, во сколько раз структурно-сложная частица является более эффективным излучателем, чем бесструктурная частица, достаточно сравнить полученную мощность с полной мощностью излучаемой бесструктурной частицей массы $m+M$ и заряда q в электрическом поле E . Эту мощность легко получить с помощью известной формулы Лармора [29]:

$$P_{solid} = \frac{2q^2}{3c^3} \dot{v}^2 = \frac{2q^2}{3c^3} \left(\frac{qE}{m+M} \right)^2.$$

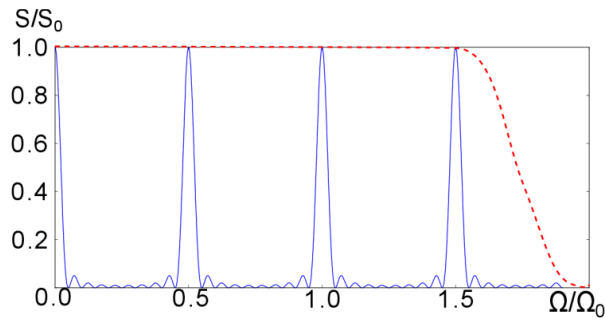


Рис. 36. Типичный спектр мощности излучения заряженной структурно-сложной частицы. $\Omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}$ — частота соударения внутренней частицы с оболочкой

Сравнивая полученные мощности излучения, можно оценить эффективность излучения структурно-сложной частицы по сравнению с бесструктурной. Действительно, их отношение определяется как

$$\eta = \frac{P_{comp}}{P_{solid}} = \frac{2a_{col}^2 (U_0 - V_0)}{\pi(qE/m)\tau_{col}} \sim \frac{\tau}{\tau_{col}}.$$

Более того, учитывая, что изменение скорости внутренней частицы за время удара сопоставимо с ее изменением за время между ударами, эффективность можно оценить простым соотношением

$$\eta \sim \frac{\tau}{\tau_{col}}.$$

Обычно время столкновения внутренней частицы с оболочкой обычно очень мало по сравнению со временем между отдельными ударами о стенки. Поэтому структурно-сложная частица как излучатель оказывается на несколько порядков эффективнее бесструктурной частицы.

Возвращаясь к зависимости периода от характерных параметров структурно-сложной частицы (13.1), следует отметить легкость управления спектром излучения структурно-сложной частицы путем изменения величины электрического поля. В этом смысле рассмотренная система обладает и дополнительным преимуществом, ее частота может быть выбрана в нужном для наблюдения диапазоне, выбирая подходящим образом величину поля или масс внешней и внутренних степеней свободы. В свою очередь, это дает возможность передачи более сложной информации с использованием частотной модуляции. Кроме этого, такую частицу можно использовать в качестве детектирующего устройства постоянных электрических полей.

В более сложном случае столкновения внутренней частицы попеременно с обеими стенками оболочки в результирующую формулу для спектра мощности добавляется множитель, соответствующий интерференции между столкновениями с передней и задней стенками. Естественно, что этот множитель не зависит от частоты. Таким образом, вид спектра мощности остается прежним и в более сложном случае.

В заключение следует отметить, что результаты, полученные в работе, предсказывают характерные особенности излучения структурно-сложной частицы с заряженными внутренними степенями свободы при ее движении в постоянном электрическом поле. Такая система может рассматриваться как своеобразная наноантенна. Важным для этого является наличие взаимодействия между внутренними и внешней степенями свободы. В определенном смысле свойства такого излучения несут информацию о внутреннем устройстве структурно-сложной частицы. Учитывая, что с уменьшением размеров тел число внутренних степеней свободы уменьшается, следует ожидать появления таких свойств и эффектов у наночастиц общей природы.

14. ОБОБЩЕНИЕ СТРУКТУРНО-СЛОЖНЫХ ЧАСТИЦ НА ТРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

В этом разделе введем более общие структурно-сложные частицы, чем были рассмотрены выше. Обобщим их на трехмерный случай [31]. Пусть внутри сферической оболочки находится N шаров, которые могут упруго сталкиваться как друг с другом, так и с оболочкой (см. рис. 37). Частицы, заключенные в оболочку, играют роль внутренних степеней свободы. Для простоты будем предполагать, что сферическая оболочка радиуса R_0 и массы m_0 имеет нулевую толщину. Внутренние частицы радиусов $R_i \ll R_0$ обладают массами m_i . Индекс $i = 1, \dots, N$ нумерует внутренние частицы. Обсудим возможность описания кинематики и динамики таких структурно-сложных частиц с помощью бильярдного подхода [6], [1]. В рамках такого подхода описание движения структурно-сложной частицы и их столкновений определяется движением одной точечной частицы в многомерном бильярде специальной формы.

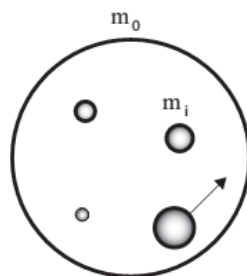


Рис. 37. Показано сечение структурно-сложной частицы с несколькими внутренними частицами различных радиусов и масс

Полное описание положений всех составляющих структурно-сложную частицу элементов достигается определением положений центра оболочки \vec{r}_0 и центров всех внутренних шаров \vec{r}_i . Далее удобно ввести единое обозначение для всех этих векторов

$$\vec{r} = (\vec{r}_0, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N).$$

Разумеется, каждый элемент структурно-сложной частицы может двигаться с некоторой скоростью. Так, скорость оболочки будем обозначать как $\dot{\vec{r}}_0$, а скорости внутренних частиц как $\dot{\vec{r}}_i$. Также естественно ввести единое обозначение для этих скоростей в виде

$$\vec{u} = (\dot{\vec{r}}_0, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N).$$

Таким образом, положение всех элементов структурно-сложной частицы описывается точкой в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{3(N+1)}$. Однако не любая точка $\mathbb{R}^{3(N+1)}$ соответствует возможным положениям элементов структурно-сложной частицы. Поэтому перейдем к обсуждению ее конфигурационного пространства. Конфигурационное пространство – это пространство всех возможных положений элементов структурно-сложной частицы. Основное ограничение конфигурационного пространства связано с невозможностью проникновения твердых шаров друг в друга и сквозь оболочку структурно-сложной частицы. Условие невозможности i внутренней частицы проникнуть в j внутреннюю частицу записывается как

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 \geq (R_i + R_j)^2, \quad i, j = 1 \dots N. \quad (14.1)$$

Число таких условий, соответствующих невозможности взаимопроникновения любых пар внутренних частиц, равно $N(N-1)/2$. Каждое такое неравенство определяет часть $\mathbb{R}^{3(N+1)}$, принадлежащую конфигурационному пространству. Равенство определяет эллиптический цилиндр с двумерным основанием в виде сферы S^2 (см. например [32]). Физически это равенство определяет границу конфигурационного пространства, которая соответствует столкновению строго определенной пары внутренних частиц. Таким образом, каждое неравенство определяет внешнюю часть определенного эллиптического цилиндра в $\mathbb{R}^{3(N+1)}$. Все эти неравенства выделяют часть $\mathbb{R}^{3(N+1)}$, соответствующую пересечению всех внешних частей $N(N-1)/2$ цилиндров.

Условия, запрещающие выход внутренних частиц за пределы оболочки, имеют вид:

$$(\vec{r}_0 - \vec{r}_i)^2 \leq (R_0 - R_i)^2, \quad i = 1 \dots N, \quad (14.2)$$

и каждое такое условие определяет внутреннюю часть эллиптического цилиндра с основанием в виде сферы S^2 в пространстве $\mathbb{R}^{3(N+1)}$. Равенство определяет эллиптический цилиндр, который соответствует столкновению определенной внутренней частицы с оболочкой. Таких условий N . Таким образом, конфигурационное пространство структурно-сложной частицы определяется пересечением внешних частей $N(N-1)/2$ цилиндров и внутренних частей N цилиндров.

Рассмотрим теперь движение элементов, составляющих структурно-сложную частицу. До столкновения каких-нибудь ее элементов изменение их координат описывается уравнением

$$\vec{r}(t) = \vec{r} \Big|_{t=0} + \vec{u}t,$$

причем в этом уравнении легко узнать параметрически заданную прямолинейную траекторию движения точечной частицы в $3(N+1)$ -мерном конфигурационном пространстве. В момент столкновения пары составляющих структурно-сложной частицы эта линия достигает определенной границы конфигурационного пространства. Далее, определяя скорости этих элементов после столкновений из законов сохранения, можно продолжить траекторию. Такое ее продолжение будет выглядеть в конфигурационном пространстве как отражение ее от его границы. Остается позаботиться о выполнении обычного для бильярдных закона отражения. При бильярдном отражении касательная скорость в точке отражения сохраняется, а нормальная меняет знак. Легко понять, что в рассматриваемом случае он не выполняется. Для обеспечения выполнения такого закона отражения перейдем к бильярдным координатам $\vec{\rho}_i = \sqrt{m_i} \vec{r}_i$ или $\vec{\rho} = (\sqrt{m_0} \vec{r}_0, \sqrt{m_1} \vec{r}_1, \dots, \sqrt{m_N} \vec{r}_N)$.

Вектор скоростей в бильярдных координатах записывается как

$$\vec{v} = (\sqrt{m_0} \dot{\vec{r}}_0, \sqrt{m_1} \dot{\vec{r}}_1, \dots, \sqrt{m_N} \dot{\vec{r}}_N).$$

Одно из преимуществ новых координат состоит в том, что длина вектора скорости $\vec{v} = \dot{\vec{\rho}}$ определяется полной кинетической энергией структурно-сложной частицы:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\sum_{i=0}^{N+1} m_i \dot{r}_i^2} = \sqrt{2E}.$$

Соответственно, закон сохранения энергии обеспечивает сохранение длины вектора скорости при отражении эффективной точечной частицы от границ конфигурационного пространства. Вторым необходимым условием зеркального отражения является изменение знака нормальной компоненты скорости. Для границ конфигурационного пространства, соответствующих столкновению внутренних частиц, выполнение бильярдного закона отражений было доказано в [6]. Поэтому нам нужно проверить выполнение такого закона отражений только для границ конфигурационного пространства, соответствующих столкновению внутренних частиц с оболочкой структурно-сложной частицы.

Рассмотрим столкновение оболочки с i внутренней частицей. Пусть траектория точечной эффективной частицы достигает границы (14.2) конфигурационного пространства в точке $\vec{\rho}$. Разумеется, уравнение (14.2) следует записать в бильярдных координатах. Вычислим нормаль к границе в этой точке. Вектор, направленный по нормали к этой поверхности, легко найти:

$$\vec{\sigma} = \left(\frac{2}{\sqrt{m_0}} \left(\frac{\vec{\rho}_0}{\sqrt{m_0}} - \frac{\vec{\rho}_i}{\sqrt{m_i}} \right), 0, \dots, 0, -\frac{2}{\sqrt{m_i}} \left(\frac{\vec{\rho}_0}{\sqrt{m_0}} - \frac{\vec{\rho}_i}{\sqrt{m_i}} \right), 0, \dots, 0 \right),$$

нормируя его на длину, получим единичный нормальный к границе вектор в точке $\vec{\rho}$:

$$\vec{n} = \frac{1}{|R_0 - R_i| \sqrt{m_0 + m_i}} \left(\sqrt{m_i} \left(\frac{\vec{\rho}_0}{\sqrt{m_0}} - \frac{\vec{\rho}_i}{\sqrt{m_i}} \right), 0, \dots, 0, -\sqrt{m_0} \left(\frac{\vec{\rho}_0}{\sqrt{m_0}} - \frac{\vec{\rho}_i}{\sqrt{m_i}} \right), 0, \dots, 0 \right).$$

В точке столкновений траектории с границей вектора $\frac{\vec{\rho}_0}{\sqrt{m_0}}$ и

$\frac{\vec{\rho}_i}{\sqrt{m_i}}$ связаны определенным образом (см. рис. 38). Другими словами,

$$\frac{\vec{\rho}_i}{\sqrt{m_i}} - \frac{\vec{\rho}_0}{\sqrt{m_0}} = \vec{R}_0 - \vec{R}_i, \text{ а направление вектора } \vec{R}_i \text{ совпадает с направ-$$

лением вектора \vec{R}_0 . Вектор \vec{R}_0 соединяет точку касания сфер с центром оболочки. Это позволяет записать нормаль как

$$\vec{n} = \frac{1}{|R_0 - R_i| \sqrt{m_0 + m_i}} \left(-\sqrt{m_i} (\vec{R}_0 - \vec{R}_i), 0, \dots, 0, \sqrt{m_0} (\vec{R}_0 - \vec{R}_i), 0, \dots, 0 \right).$$

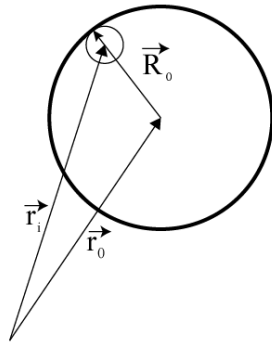


Рис. 38. Показаны соответствующие вектора в момент столкновения оболочки и i -й внутренней частицы. Важно заметить, что точка касания сфер и их центры лежат на одной прямой

Учитывая, что длина вектора \vec{v} сохраняется, то для проверки бильярдного закона отражения достаточно убедиться, что при отражении от точки $\vec{\rho}$ выполняется равенство:

$$\vec{v}_\perp = -\vec{v}'_\perp.$$

В координатном виде этот закон можно записать как

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \frac{\sqrt{m_0 m_i}}{|R_0 - R_i| \sqrt{m_0 + m_i}} (\vec{u}_i - \vec{u}_0) \cdot (\vec{R}_0 - \vec{R}_i).$$

Столкновение оболочки и внутренней частицы абсолютно упругое, следовательно, выполняется ньютоновский закон для столкновений. Для сталкивающихся частиц сферической формы это означает, что проекция разности скоростей $\vec{u}_i - \vec{u}_0$ на направление, соединяющее центры частиц, меняет знак. Соответственно, и нормальная компонента скорости бильярдной частицы изменяет знак при отражении от границы конфигурационного бильярда. Аналогичным образом может быть доказана справедливость бильярдного закона отражения от границ конфигурационного пространства, соответствующих столкновению любых двух компонент структурно-сложной частицы. Таким образом, доказано, что движение структурно-сложной частицы может быть описано как движение эффективной частицы в многомерном бильярде. Форма этого бильярда определяется размерами отдельных компонент структурно-сложной частицы и в общем случае представляет собой пересечение $N(N+1)$ цилиндров. Граница бильярда содержит как наружные, так и внутренние стенки цилиндров, соответственно имеет участки с положительной и отрицательной кривизной. Это позволяет предположить существование хаотических режимов движения структурно-сложных частиц. Однако в самом простом случае одной внутренней частицы задача сильно упрощается. Рассмотрим этот случай подробнее.

15. РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим кинетический режим движения структурно-сложной частицы с одной внутренней степенью свободы. Как уже обсуждалось выше, такая система может быть сведена к бильярду в шестимерном пространстве. В силу присутствия только одной внутренней частицы границы конфигурационного пространства определяются одним условием невозможности ее выхода за пределы оболочки

$$\left(\frac{\vec{\rho}_0}{\sqrt{m_0}} - \frac{\vec{\rho}_1}{\sqrt{m_1}} \right)^2 = (R_0 - R_1)^2,$$

здесь R_0 — радиус оболочки, а R_1 — радиус внутренней частицы. Как обсуждалось выше, это цилиндр с основанием S^2 в шестимерном

пространстве $(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}_1) \in \mathbb{R}^6$. Обратим внимание, что сама по себе структурно-сложная частица представляет замкнутую систему. И следовательно, ее центр масс перемещается с постоянной скоростью. Скорость его движения определяется суммарным импульсом, деленным на суммарную массу оболочки и внутренней частицы $\vec{V}_c = (\sqrt{m_0}\vec{v}_0 + \sqrt{m_1}\vec{v}_1) / (m_0 + m_1)$. Другими словами, положение центра масс меняется согласно уравнению

$$\sqrt{m_0}\vec{\rho}_0 + \sqrt{m_1}\vec{\rho}_1 = (t\vec{V}_c + \vec{r}_c)(m_0 + m_1), \quad (15.1)$$

где \vec{r}_c — начальное положение центра масс при $t = 0$. С геометрической точки зрения эти соотношения определяют трехмерную гиперплоскость в конфигурационном пространстве

$$\sqrt{m_0}\rho_{01} + \sqrt{m_1}\rho_{11} = tV_{c1} + r_{c1},$$

$$\sqrt{m_0}\rho_{02} + \sqrt{m_1}\rho_{12} = tV_{c2} + r_{c2},$$

$$\sqrt{m_0}\rho_{03} + \sqrt{m_1}\rho_{13} = tV_{c3} + r_{c3}.$$

Область пересечения этой гиперплоскости с цилиндрическим бильярдом в конфигурационном пространстве легко установить. Проецируя бильiardную траекторию на это пересечение, перейдем к движению точечной частицы в трехмерном бильярде. Закон отражения проекции траектории от границ этого бильярда сохраняет зеркальный характер. Поэтому достаточно изучить движение эффективной частицы в бильярде такого сечения. Уравнение, определяющее границу сечения, легко найти:

$$\left(\vec{\rho}_0 - \sqrt{m_0}(t\vec{V}_c + \vec{r}_c)\right)^2 = \frac{m_0 m_1^2 (R_0 - R_1)^2}{(m_0 + m_1)^2}. \quad (15.2)$$

В этом уравнении нетрудно узнать сферу \mathbb{S}^2 в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3 \ni \vec{\rho}_0$. Центр этой сферы расположен в точке $\vec{\rho}_0 = \sqrt{m_0}(t\vec{V}_c + \vec{r}_c)$. Учитывая, что трехмерная гиперповерхность со временем смещается параллельным образом, в качестве удобного сечения можно выбрать гиперплоскость, проходящую через начало координат, и проецировать бильiardную траекторию на сечение цилиндра этой гиперплоскостью. Таким образом, эффективная точечная частица движется в сферическом бильярде радиуса $R_{ef} = \frac{\sqrt{m_0 m_1} |R_0 - R_1|}{m_0 + m_1}$.

Свойства траекторий в таком бильярде определяются простым фактом.

Вектора скорости падающей и отраженной траектории лежат в плоскости, проходящей через центр сферы. Это означает, что движение бильярдной траектории происходит только в этой плоскости. Тогда достаточно рассмотреть движение эффективной частицы в этой плоскости. Это существенно упрощает вид бильярда. Бильярд, возникающий в сечении сферы этой плоскостью, совпадает с бильярдом в круге радиуса R_{ef} (см. рис. 39). Тип траекторий в круге хорошо изучен (см. например [33]). Все определяется углом φ , показанным на рис. 39. Если этот угол

соизмерим с π , то траектория периодическая. Так, в случае $\varphi = 2\pi \frac{n}{m}$ (n и m — несократимые целые числа) траектория m — периодическая и делает n оборотов вокруг круга. Число вращений такой траектории равно $\mu = \frac{n}{m}$. В случае несоизмеримости φ с π точки отражения траектории

заполняют окружность всюду плотно. Таким образом, могут существовать только два типа поперечных движений. Это периодические любого периода и квазипериодические. Совмещение их с постоянным продольным движением приводит к полному описанию типов траекторий эффективной точечной частицы в исходном бильярде и, следовательно, к описанию всех возможных режимов движения структурно-сложной частицы с одной внутренней степенью свободы. Такое простое устройство кинетического режима структурно-сложной частицы связано с тем, что эволюция частицы содержит пять интегралов движения, находящихся в инволюции. Это — три проекции суммарного импульса, проекция суммарного момента импульса на плоскость движения и величина полной энергии структурно-сложной частицы.

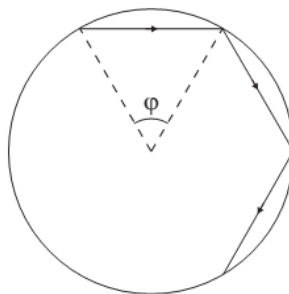


Рис. 39. Бильярд в сечении гиперплоскостью, проходящей через начало координат и начальный сегмент траектории поперечных движений. Показаны три сегмента бильярдной траектории

Рассмотрим теперь, как движение эффективной бильярдной частицы интерпретируется в терминах движения отдельных компонент структурно-сложной частицы. Легко заметить, что проекция траектории эффективной частицы в бильярде (15.2) имеет простой физический

смысл движения оболочки. Иными словами, оболочка структурно-сложной частицы движется так, как будто она зеркально отражается от стенок кругового бильярда с радиусом

$$R_s = \frac{m_1 |R_0 - R_1|}{m_0 + m_1}. \quad (15.3)$$

Центр этого бильярда движется по закону $t\vec{V}_c + \vec{r}_c$, соответствующему движению центра масс структурно-сложной частицы. Траектория в круговом бильярде представляет собой ломаную линию, каждый сегмент которой повернут относительно предыдущего на угол φ (рис. 39). Этот угол определяется начальными условиями:

$$\varphi = 2 \arccos \left[\frac{\sqrt{\frac{((\vec{r}_0 - \vec{r}_c)(\vec{u}_0 - \vec{V}_c))^2}{(\vec{u}_0 - \vec{V}_c)^2} + R_s^2 - (\vec{r}_0 - \vec{r}_c)^2}}{(\vec{r}_0 - \vec{r}_c) + \left(\sqrt{\frac{((\vec{r}_0 - \vec{r}_c)(\vec{u}_0 - \vec{V}_c))^2}{(\vec{u}_0 - \vec{V}_c)^2} + R_s^2 - (\vec{r}_0 - \vec{r}_c)^2} - \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_c)(\vec{u}_0 - \vec{V}_c)}{|\vec{u}_0 - \vec{V}_c|} \right) \frac{|\vec{u}_0 - \vec{V}_c|}{|\vec{u}_0 - \vec{V}_c|}} \right],$$

здесь \vec{r}_0 и \vec{u}_0 обозначают положение и скорость оболочки в начальный момент времени $t=0$. Величина этого угла определяет, будет траектория периодической или квазипериодической. Также легко оценить время, за которое оболочка сделает полный оборот вокруг центра масс структурно-сложной частицы:

$$T \approx \frac{2\pi}{\varphi} \tau_s,$$

где τ_s — время между отдельными столкновениями оболочки с внутренней частицей. Естественно, что это равенство является точным лишь для траекторий, замыкающихся за один оборот вокруг центра масс. Величина τ_s легко определяется благодаря свойству сохранения величины скорости в бильярде:

$$\tau_s = \frac{2R_s \sin \frac{\varphi}{2}}{|\vec{u}_0|}.$$

Таким образом, оболочка движется по ломаной спирали радиуса R_s . Ее ось направлена вдоль \vec{V}_c . Время пролета отдельного сегмента спирали — τ_s , время полного оборота — T . Шаг такой спирали равен $s = TV_c$.

В структурно-сложной частице с одной степенью свободы положение внутренней частицы напрямую связано с положением оболочки $m_0(\vec{r}_0 - t\vec{V}_c - \vec{r}_c) = -m_1(\vec{r}_1 - t\vec{V}_c - \vec{r}_c)$ (см. соотношение (15.1)). Соответственно, внутренняя частица в кинематическом режиме также движется по похожей ломаной спирали, но другого радиуса —

$$R_i = \frac{m_0 |R_0 - R_1|}{m_0 + m_1}.$$

Рассмотрим колебания, которые совершает оболочка в кинематическом режиме движения структурно-сложной частицы. Оболочка структурно-сложной частицы совершает циклическое движение радиуса R_s вокруг центра инерции в плоскости с нормалью:

$$\vec{N} = \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_c) \times (\vec{u}_0 - \vec{V}_c)}{|(\vec{r}_0 - \vec{r}_c) \times (\vec{u}_0 - \vec{V}_c)|}.$$

Ось спирали составляет определенный угол ψ с нормалью к плоскости, в которой происходит «вращение» оболочки вокруг центра инерции. Его величина:

$$\psi = \arccos \frac{\vec{V}_c \vec{N}}{|\vec{V}_c| |\vec{N}|}.$$

Соответственно, в проекции на направление движения центра масс амплитуда продольных колебаний составит:

$$a_l = 2R_s \sin\psi.$$

В плоскости, поперечной к направлению движения, оболочка будет двигаться по ломаной линии, вписанной в эллипс. Большая полуось этого эллипса направлена вдоль направления $\vec{V}_c \times \vec{N}$. Амплитуда поперечных колебаний в этом направлении равна $a_{l\max} = 2R_s$. В ортогональном направлении амплитуда поперечных колебаний равна $a_{l\min} = 2R_s \cos\psi$. Естественно, что частоты этих колебаний одинаковы и равны $1/T$. Напомним, что указанные колебания не являются синусоидальными, а составлены из отдельных участков прямолинейного движения. Каждый такой участок имеет длительность τ_s .

Рассмотрим еще один важный аспект движения структурно-сложной частицы — распределение энергии между внутренней степенью свободы и оболочкой. Относительные координаты внутренней частицы и оболочки жестко связаны: $m_0(\vec{r}_0 - t\vec{V}_c - \vec{r}_c) = -m_1(\vec{r}_1 - t\vec{V}_c - \vec{r}_c)$. Соответ-

венно, также связаны и их относительные скорости: $m_0(\vec{u}_0 - \vec{V}_c) = -m_1(\vec{u}_1 - \vec{V}_c)$. Поскольку и оболочка, и внутренняя частица движутся по бильiardному закону относительно центра инерции, то величины их относительных скоростей со временем будут сохраняться. Соответственно, отношение их энергии относительного кинетического движения имеет простой вид:

$$\frac{E_0}{E_1} = \frac{m_1}{m_0}. \quad (15.4)$$

Из этого соотношения следует, что в случае легкой внутренней частицы и тяжелой оболочки почти вся кинетическая энергия относительного движения будет сосредоточена во внутренней степени свободы. Таким образом, мы полностью описали характеристики кинетического режима движения структурно-сложной частицы.

Рассмотрим теперь, какие из этих характеристик могут быть определены в эксперименте. Естественно, что наблюдать мы можем лишь за оболочкой структурно-сложной частицы. Поэтому представляет интерес вопрос определения внутреннего состояния структурно-сложной частицы по наблюдаемым данным. Как обсуждалось выше, оболочка структурно-сложной частицы совершает колебательные движения в некоторой плоскости вокруг центра инерции, движущегося равномерно и прямолинейно. Соответственно, наблюдая за оболочкой продолжительное время и усреднив ее положение, можно определить скорость движения центра масс структурно-сложной частицы \vec{V}_c . Благодаря этому можно определить относительную скорость движения оболочки $\vec{u}_0 - \vec{V}_c$, а также направление относительной скорости внутренней частицы, поскольку оно противоположно направлению относительной скорости оболочки. Также можно определить вектор нормали к плоскости, в которой оболочка совершает колебательные движения \vec{N} . В этой плоскости оболочка и внутренняя частица движутся по ломаной линии, вписанной в окружность. В эксперименте можно определить радиус этой окружности для оболочки R_s . Если по косвенным данным мы можем предположить, что размер внутренней свободы R_1 мал по сравнению с размером оболочки R_0 , то легко получить оценки масс внутренней частицы и оболочки:

$$m_0 \simeq \left(1 - \frac{R_s}{R_0}\right) M, \quad m_1 \simeq \frac{R_s}{R_0} M,$$

где M — масса структурно-сложной частицы. В этом случае, используя связь между расположением оболочки и внутренней частицы

относительно центра масс, по положению оболочки легко определить положение внутренней частицы. Иными словами, наблюдая за движением оболочки структурно-сложной частицы с внутренней степенью малой массы, можно установить свойства внутренней степени свободы.

Перейдем теперь к обсуждению поведения структурно-сложной частицы с двумя внутренними степенями свободы. Прежде всего следует обсудить структуру бильярда, в котором происходит движение эффективной точечной частицы. Граница этого бильярда в 9-мерном пространстве $\vec{\rho} \in R^9$ определяется тремя условиями. Это условие невозможности взаимного проникновения внутренних частиц при столкновении

$$\left(\frac{\vec{\rho}_1}{\sqrt{m_1}} - \frac{\vec{\rho}_2}{\sqrt{m_2}} \right)^2 = (R_1 + R_2)^2,$$

которое определяет часть границы бильярда с вогнутой или рассеивающей поверхностью. Более точно полурассеивающий бильярд [34], который имеют участки с кривизной, отличной от нуля только в двух направлениях. Эта граница соответствует части эллиптического цилиндра с 2-основанием (основание двумерный эллипсоид) [32]. Конфигурационное пространство содержится во внешней части этого цилиндра. Два других условия, соответствующие невозможности внутренним частицам покинуть оболочку, имеют вид

$$\left(\frac{\vec{\rho}_0}{\sqrt{m_0}} - \frac{\vec{\rho}_1}{m_1} \right)^2 = (R_0 + R_1)^2,$$

$$\left(\frac{\vec{\rho}_0}{\sqrt{m_0}} - \frac{\vec{\rho}_2}{\sqrt{m_2}} \right)^2 = (R_0 + R_2)^2.$$

Эти условия определяют часть выпуклой или фокусирующей границы бильярда. Как и выше, граница – это часть пересечения двух эллиптических цилиндров с 2-основаниями. Конфигурационное пространство — внутренняя часть пересечения этих цилиндров. Таким образом, движение эффективной точечной частицы происходит в бильярде, имеющем в случае общего положения как рассеивающие, так и фокусирующие компоненты границ. В соответствии с современными представлениями движение частицы в таком бильярде будет хаотическим (см. например [33]). Следует заметить, что взаимное расположение этих цилиндров играет важную роль при классификации возможных режимов движения. В частности, важно проверить, возможно ли взаимное расположение цилиндров, при котором границы бильярда содержат только рассеивающие границы. Легко понять, что такой случай

не реализуется. Как не реализуется и случай бильярда только с фокусирующими границами. Условие совместности приведенной выше системы уравнений всегда выполнено. Таким образом, движение эффективной частицы происходит в бильярде с фокусирующими и рассеивающими границами. Однако следует отметить, что такой многомерный бильярд относится к открытым бильярдам. Существуют направления, двигаясь вдоль которых точечная частица никогда не столкнется с границей бильярда. Все направления, обладающие этим свойством, натянуты на три ортогональных вектора $\vec{n}_1 = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $\vec{n}_2 = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$, $\vec{n}_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$ ($\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j = 0$ если $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$). Соответственно, траектории, движущиеся в направлениях $\vec{k} = a\vec{n}_1 + b\vec{n}_2 + c\vec{n}_3$, никогда не столкнутся с границей бильярда. Здесь a , b и c — произвольные числа. Динамика частицы вдоль этих направлений тривиальна. Это означает, что такое подпространство можно не рассматривать, а основное внимание уделить 6-мерному пространству ортогональных направлений.

Еще одно интересное следствие из анализа структуры бильярда касается бильярдов с несколькими частицами, которые могут сталкиваться при движении в бильярде. Такие бильярды относительно недавно рассматривались в работе [35]. Интересно отметить, что такой бильярд в круге с двумя сталкивающимися дисками внутри сводится к многомерному обычному бильярду с одной эффективной точечной частицей в специальном бильярде, описанном выше. Это означает, что ряд свойств обычного бильярда переносится на свойства бильярда с учетом столкновений между частицами. В частности, газ сталкивающихся частиц в сферическом сосуде соответствует рассмотренной выше структурно-сложной частице с массой оболочки, стремящейся к бесконечности.

Возвращаясь к кинематике структурно-сложной частицы, из общих соображений ясно, что в таком бильярде реализуется хаотическое движение траекторий с положительным показателем Ляпунова. Другими словами, реализуется сильный хаос. Разумеется, в фазовом пространстве присутствует и счетное число периодических траекторий. В силу многомерности фазового пространства вычисление показателя Ляпунова и визуальная демонстрация хаотического поведения затруднено. Однако с физической точки зрения интересно выяснить поведение оболочки такой структурно-сложной частицы. Причина этого в том, что именно поведение оболочки является наблюдаемым. Это означает, что основное внимание нужно уделить степеням свободы, связанными с оболочкой.

Поэтому обсудим отклонение оболочки от положения центра масс при столкновении с внутренними частицами. Для оценки смещения оболочки с N внутренними степенями свободы предположим для простоты, что их массы близки к некоторой характерной массе $m_i \approx m$,

а размеры внутренних частиц $R_i \approx R$. Тогда, переходя в систему отсчета с центром инерции в начале координат, оценим характерное смещение оболочки за счет столкновений с внутренними частицами. Легко доказать, что такое отклонение оболочки от положения центра инерции определяется соотношением

$$\Delta \vec{r}_0 = -\frac{m}{m_0 + Nm} \sum_i^N \Delta \vec{r}_i,$$

где $\Delta \vec{r}_i$ — вектор расстояния между i внутренней частицей и оболочкой.

Длина этого вектора ограничена сверху величиной $(R_0 - R)$ в системе отсчета центра инерции. Тогда легко оценить среднеквадратичное отклонение оболочки как

$$\Delta r_0 \approx (R_0 - R) \sqrt{\frac{m^2 N}{(m_0 + Nm)^2}}. \quad (15.5)$$

При выводе этого соотношения использовалось предположение о хаотичности направлений положений внутренних частиц и обращение в нуль среднего вектора положений внутренних частиц в системе центра масс. Легко заметить, что для одной внутренней степени свободы это соотношение совпадает с полученным ранее соотношением (15.3). Кроме этого важно отметить, что величина смещения падает с увеличением числа внутренних степеней свободы $\Delta r_0 \sim 1/\sqrt{N}$, и поэтому для макроскопических тел такое смещение исчезает. Этот эффект должен наблюдаться для частиц только с небольшим числом внутренних степеней свободы. Следует заметить, что наличие такого специфического блуждания должно приводить к качественному изменению законов рассеяния частиц. Как следствие этого блуждания должно наблюдаться хаотическое рассеяние частиц с внутренними степенями свободы при столкновениях.

Разумеется, характер смещения со временем, в силу хаотичности движения такой частицы, будет иметь в случае общего положения вид хаотических блужданий (при $N \geq 2$). Этот необычный процесс блужданий оболочки возникает под воздействием ударов внутренних частиц об оболочку. Следует заметить, что при таком блуждании положение центра инерции системы всегда расположено внутри оболочки. В наличии хаотических движений заключается важное отличие от периодического движения частицы с одной внутренней степенью свободы (см. раздел 3). Следует отметить, что в вырожденных случаях могут реализоваться и периодические режимы движения оболочки и при большем числе внутренних степеней свободы. Наличие периодических режимов — следствие существования счетного числа

неустойчивых орбит в хаотической области фазового пространства. В качестве простого примера двупериодической траектории для частицы с двумя внутренними степенями свободы $m_1 = m_2$ и $R_1 = R_2$ можно привести траекторию, которая до столкновения с границей движется вдоль направления $\vec{u} = (\vec{u}_0 = 0, \vec{u}_1, -\vec{u}_1)$, затем, сталкиваясь с ней в момент времени $T = \frac{R_0 - 2R_1}{u_1}$, отражается в направлении

$\vec{u} = (\vec{u}_0 = 0, -\vec{u}_1, \vec{u}_1)$ и снова движется время $T = \frac{R_0 - 2R_1}{u_1}$ до следующего

столкновения с границей. Далее цикл повторяется. Период такой траектории равен $2T$. Для этой траектории начальные положения внутренних частиц выбраны симметричными относительно оболочки.

Обсудим теперь распределение энергий по степеням свободы. Напомним, что в системе центра инерции суммарный импульс оболочки и внутренних частиц нулевой. Соответственно выполняется следующее уравнение

$$m_0 v_0 = - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \equiv M_{in} V_{in},$$

здесь M_{in} — суммарная масса внутренних степеней свободы, а V_{in} — скорость центра инерции только внутренних степеней свободы. Используя это соотношение, получим соотношение между энергией оболочки и внутренних степеней свободы в системе центра инерции

$$\frac{E_{in}}{E_0} \approx \frac{m_0}{m}, \tag{15.6}$$

где E_0 — энергия оболочки, а E_{in} — энергия внутренних степеней свободы в системе отсчета центра масс и m — характерная масса внутренней частицы. Это соотношение переходит в полученное ранее уравнение (15.4) для одной степени свободы. Предполагая равномерное распределение энергии по внутренним степеням свободы, из этого соотношения легко получить отношение энергии оболочки к энергии E , приходящейся на одну внутреннюю частицу:

$$\frac{E}{E_0} \approx \frac{m_0}{M_{in}}. \tag{15.7}$$

Разумеется, эти соотношения выполняются в системе отсчета центра инерции всей системы. При выводе этих соотношений предполагались близкими массы внутренних степеней свободы. Естественно, возникает

вопрос о реализации равномерного распределения энергии между внутренними степенями свободы. Для наблюдения за свойствами частиц с двумя и более внутренними степенями свободы используем численное моделирование. Собственно это наиболее сложный случай — сравнимых масс всех компонент.

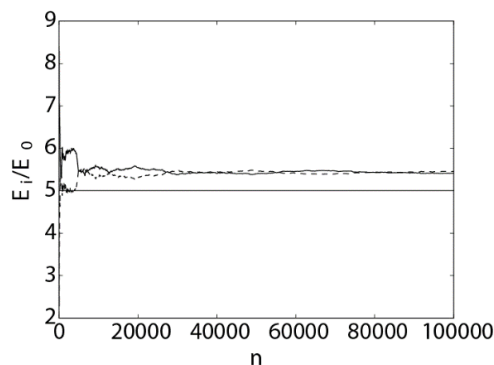


Рис. 40. Показано изменение относительной средней энергии внутренних степеней свободы со временем безразмерного времени n . Это случай двух внутренних степеней свободы. Пунктирная линия соответствует одной, а сплошная — второй внутренней частице

Начнем с моделирования выхода на равномерное распределение по энергиям внутренних степеней свободы. Учитывая предположение о близости масс внутренних степеней свободы, используем при численном моделировании внутренние частицы с равными массами и суммарной массой $M_{in} = 1$, массу оболочки также выберем $m_0 = 5$. Другими словами, это случай массивной оболочки и «легких» внутренних степеней свободы. Начнем с проверки распределения энергии по степеням свободы (15.7). Для этого удобно по результатам моделирования строить зависимость средней энергии внутренних частиц от времени. Усреднение будем выполнять по времени от начального момента до текущего значения t .

Значение, предсказываемое соотношением (15.7), удобно приводить на рисунках для сравнения с результатом численного моделирования. На рис. 40 приведен результат в случае двух внутренних степеней свободы. Нетрудно заметить, что после некоторого времени релаксации наблюдается выход на равномерное распределение по энергии внутренних степеней свободы. Значение энергии близко к предсказанному соотношением (15.7) и показанному на рисунке прямой линией. Увеличивая число внутренних степеней свободы и для простоты сохраняя их суммарную массу единичной, приведем результаты моделирования на рис. 41. Важно отметить, что частота столкновений о стенки при выбранных условиях превышает частоту столкновений внутренних степеней свободы примерно в 7 раз. Другими словами,

в этих условиях доминирует обмен энергией через столкновения с оболочкой или столкновения бильярдной частицы с фокусирующими участками многомерного бильярда.

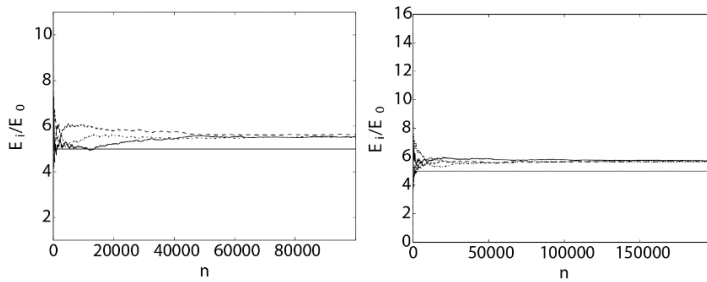


Рис. 41. Слева показано изменение средней энергии внутренних степеней свободы, нормированных на энергию оболочки в случае трех, а справа — в случае 4 внутренних степеней свободы. Прямые по-прежнему предсказанное значение (15.7)

Во всех случаях наблюдается тенденция к установлению равнораспределения на уровне, близком к (15.7). Отличие состоит только в увеличении времени релаксации с увеличением числа внутренних степеней свободы. Кроме этого значение, наблюдаемое в численных экспериментах, отличается на 10% от предсказываемого соотношением (15.7). Из численных экспериментов следует более сложная зависимость

$$\frac{E}{E_0} \approx \frac{m_0}{M_{in}} \left(1 + N \frac{M_{in}^2}{m_0^2} \right),$$

которая хорошо совпадает с численными результатами.

При численном моделировании частиц с большим числом внутренних степеней свободы были обнаружены необычные режимы синхронизации внутренних степеней свободы. Пример таких режимов показан на рис. 42. Типичным для таких режимов является возникновение двух групп частиц, которые двигаются в каждой группе синхронным образом. Эффект и природа такой синхронизации заключается в образовании одной группы внутренних степеней свободы, не сталкивающейся с оболочкой, по крайней мере достаточно долго. Другими словами, эта группа не обменивается энергией и импульсом с оболочкой. Вторая группа формируется внутренними степенями свободы, которые при столкновении с оболочкой в среднем не влияют на ее скорость движения. Это означает, что суммарный импульс этой группы в системе отсчета оболочки нулевой. Обмен энергией между этими группами отсутствует или сильно подавлен. Ясно, что при формировании таких двух групп состояние структурно-сложной частицы не меняется достаточно долго. Нарушение такого состояния может быть вызвано достижением группой внутренних частиц, покоящихся или обладающих малой скоростью относительно оболочки. При возник-

новении такого синхронизма ясно, что в соотношение, определяющее равномерного распределения по энергии, будет входить не полное число внутренних степеней свободы, а число внутренних частиц, входящих в группу, которая обменивается энергией с оболочкой.

Численное моделирование движения внутренних частиц позволяет изучить не только перераспределение энергии по внутренним степеням свободы, но и установить некоторые качественные свойства их движений. Естественно, что, начиная с двух внутренних степеней свободы, типичными являются хаотические режимы. При этом численное моделирование обнаруживает два характерных типа хаотизации траекторий и поведения энергии частиц со временем. Это сильный хаос, по-видимому с отличным от нуля показателем Ляпунова, и перемежаемый хаос (см. рис. 42). Причину наличия таких режимов можно легко понять исходя из устройства многомерного бильярда. Возникновение таких режимов связано с доминированием либо столкновений с выпуклыми рассеивающими участками, либо с вогнутыми фокусирующими участками границы бильярда. Как было показано выше, режимов столкновений только с определенным типом границ не существует.

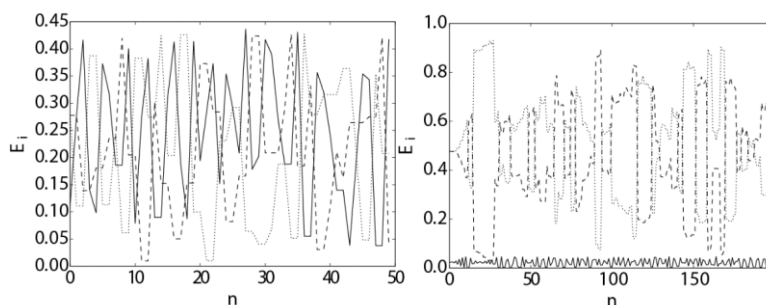


Рис. 42. Слева показано изменение энергий внутренних частиц со временем в типично сильно хаотическом режиме, справа характерный режим перемежаемости. Число внутренних степеней свободы равно 2. Сплошной линией показана энергия оболочки

Таким образом, установлены кинематические свойства частиц, обладающих небольшим числом внутренних степеней свободы. С увеличением числа внутренних степеней свободы до макроскопического числа происходит исчезновение этих свойств. Обнаружен специфический режим блужданий частиц с небольшим числом внутренних степеней свободы. Показано, что типичные режимы движения внутренних степеней свободы являются хаотическими. При этом возможны режимы как сильно хаотические с положительным ляпуновским показателем, так и перемежаемые режимы. Установлены закономерности перераспределения энергии по внутренним степеням свободы. Следует подчеркнуть, что закономерности, обнаруженные в этой простой модели, должны наблюдаться и в обычных наноразмерных телах, для которых число внутренних степеней свободы становится относительно небольшим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Яновский В. В., Тур А. В., Масловский Ю. Н. Столкновение структурно-сложной частицы с барьером // ЖЭТФ. – 2008. – Т.133, В.1. – С.1–17.
- [2] Smith B. W., Monthioux M., and Luzzi D. E. Encapsulated C60 in carbon nanotubes // Nature. – 1998. – V. 396. – P. 323–324; Monthioux M. Filling single-wall carbon nanotubes // Carbon. – 2002. – V.40. – P.1809–1823.
- [3] Yudasaka M., Iijima S. Nano-extraction and nano-condensation for C60 incorporation into single-wall carbon nanotubes in liquid phases // Phys. Rev. Lett. – 2003. – V. 380. – P. 42.
- [4] Шилл Г. Катенаны, ротаксаны и узлы. – М.: Мир, 1973. – 213 с.
- [5] Синай Я. Г. Введение в эргодическую теорию. – М.: ФАЗИС, 1996. – 132 с.
- [6] Гальперин Г. А., Земляков А. Н. Математические бильярды. – М.: Наука, 1990. – 288 с.
- [7] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. – М.: Наука, 1988. – 216 с.
- [8] Гальперин Г. А., Чернов Н. И. Бильярды и хаос. – М.: Знание, 1991. – 48 с.
- [9] Casati G., Prosen T. Mixing property of triangular billiards // arXiv:chao-dyn/9908022, v1, 26 Aug. 1999.
- [10] Katok A. Interval exchange transformations and some special flows are not mixing // Isr. J. Math. – 1980. V.35. – P. 301–310.
- [11] Artuso R., Casati G., Guarneri I. // Phys. Rev. E. – 1997. – V.55. – P. 63–84
- [12] Gutkin E., Haydn N. Topological entropy of generalized polygon exchanges // Bull. AMS. – 1995. – V. 32. – P. 50–57.
- [13] Найденов С. В., Наплеков Д. М., Яновский В. В. Новый механизм хаоса в треугольных бильярдах // Письма в ЖЭТФ. – 2013. – Т.98, В.8. – С. 554–560.
- [14] Козлов В. В., Трещев Д. В. Бильярды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – С.168.
- [15] Синай Я. Г. Бильярдные траектории в многогранном угле // УМН. – 1987. – Т.33, В.1. – С.229–330.
- [16] Слипушенко С. В., Тур А. В., Яновский В. В. Рассеяние частиц с внутренними степенями свободы // ЖЭТФ. – 2013. – Т.144, В.1(7). – С.319–339.
- [17] Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – М.: Издательство лит-ры по строительству, 1965. – 448 с.
- [18] Ercolessi, in: Proc. Spring College in Computational Physics, ICTP, Trieste (1997) p.19.
- [19] Shimizu A., Tachikawa H. Molecular dynamics simulation on diffusion of lithium ... at very low temperatures // Electrochimica Acta. – 2003. – V. 48. – P. 1727–1733.
- [20] Webb R., Kerford M., Way A., Wilson I. Comparison of gold and carbon cluster impacts on graphite using Molecular Dynamics simulation // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. – 1999. – V. B153. – P. 284–291.
- [21] Ratner M. A., Tur A. V., Yanovsky V. V., Peculiarities of nanoparticle reflection from a barrier // Journal of Computational and Theoretical Nanoscience. – 2015. – V. 12. – P. 589–594.
- [22] Verlet L. Computer “experiments” on classical fluids // Phys. Rev. – 1967. – V. 165 (1). – P. 201–214.
- [23] Andersen C. Algorithm for Molecular Dynamics Calculations, // J. Comput. Phys. – 1983. – V. 52 (1). – P. 24–34.
- [24] Яновский В. В., Тур А. В., Масловский Ю. Н. Заряженная структурно-сложная частица в постоянном электрическом поле // ТМФ. – 2013. – Т.175, No.2. – С. 247–278.
- [25] Делоне В. Н., Райков Д. А. Аналитическая геометрия, Т.2. – М.: Гос. Изд-во технико-теоретической литературы, 1949. – 518 с.
- [26] Gutkin E., Haydn N. Topological entropy of generalized polygon exchanges // Bull. AMS. 1995. – V. 32. – P. 50.
- [27] Baldwin PR. Soft billiard systems // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1988. – V. 29, No. 3. – P. 21–342.
- [28] Maslovsky Yu. N., Slipushenko S.V., Tur A.V., Yanovsky V. V. Emission of composite particles in a constant electric field // East European Journal of Physics. – 2014. – V.4, N.4. – P. 26–30.
- [29] Джексон Дж. Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965. – 703 с.
- [30] Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы. – М.: Наука, 1981. – 502 с.
- [31] Maslovsky Yu. N., Slipushenko S. V., Tur A. V., Yanovsky V. V. 3D composite particle // Functional Materials. – 2015. – V.22, №1. – P. 69–78.
- [32] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. – М.: Наука, 1966. – 648 с.
- [33] Табачников С. Геометрия и бильярды. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. – 180 с.
- [34] G. Sinai Ya. Entropy per particle for the dynamical system of hard spheres // Preprint, Harvard University, 1978.
- [35] Бунимович А. Рассеяние, дефокусировка и астигматизм // Математическое просвещение. – 2001. – Сер.3, вып.5. – С. 106–124.

Рухадзе А. А., Силин В. П. Путь создания физических представлений о плазме без столкновений // Проблемы теоретической физики. Научные труды. Выпуск 2/ В.А. Буц, А. Г. Загородний, А. В. Киричок, В. М. Конторович, В. М. Куклин, А. А. Рухадзе, В. П. Силин, А. В. Тур, В. В. Яновский; под общей редакцией А. Г. Загороднего, Н. Ф. Шульги, ред. вып. В. М. Куклин – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2016. – Вып. 2. – 376 с. (Серия «Проблемы теоретической и математической физики. Научные труды»).

Аннотация

Кратко излагается история возникновения современных представлений физики бесстолкновительной (власовской) плазмы, начиная от предсказания лордом Дж. Рэлеем в 1906 г. явления плазменных колебаний. В работе показаны основные этапы эволюции взглядов на описание бесстолкновительной плазмы: простая механическая модель электронно-ионной плазмы, сформулированная И. Ленгмюром и Л. Тонксом, переход к кинетическому описанию, впервые выполненный Л. Д. Ландау, учет самосогласованного электромагнитного поля, предложенный А. А. Власовым, разработка Н. Н. Боголюбовым общего метода получения кинетических уравнений для газа слабовзаимодействующих частиц, развитие метода Боголюбова для описания быстропеременных процессов в плазме, в том числе и в присутствии сильного магнитного поля, а также волнового взаимодействия частиц, связанного с именами В. П. Силина, А. Ленарда и Р. Балеску.

Ключевые слова: бесстолкновительная плазма, кинетическая теория плазмы, история физики плазмы.

Реферат

Кратко излагается история возникновения современных представлений физики бесстолкновительной (власовской) плазмы, начиная от предсказания лордом Дж. Рэлеем в 1906 г. явления, заключающегося в том, что электроны, находящиеся на поверхности нейтрализующей их заряд положительно заряженной сферы (модель атома Дж. Дж. Томсона 1903 г.), могут совершать колебания в электрическом поле, создаваемом ими же. Он не только предсказал, но и получил уравнения колебаний и определил их частоту. Спустя 20 лет (в 1924 г.) И. Ленгмюр (возможно независимо от Дж. Рэлея), начав последовательное исследование спектров колебаний плазмы газового разряда, действительно обнаружил такие колебания с частотой, совпадающей с предсказанной Дж. Рэлеем. Опираясь на свои экспериментальные результаты, И. Ленгмюр вместе с Л. Тонксом развили простую механическую модель электронно-ионной плазмы с полным самосогласованным электромагнитным полем, которая качественно объяснила эксперименты И. Ленгмюра.

Для количественного объяснения эксперимента требовалось использование кинетической теории. Существующая в то время кинетическая теория Больцмана, однако, для описания плазмы была не пригодной из-за расходимости интеграла столкновений при кулоновском взаимодействии частиц. Первый, кто сделал уравнение Больцмана применимым для описания плазмы, был Л. Д. Ландау, который в 1937 г. учел дебаевскую экранировку кулоновского поля в плазме, и, тем самым, интеграл столкновений в уравнении Больцмана оказался конечным. Однако поля,

фигурирующие в уравнении Больцмана, Л. Д. Ландау считал заданными (внешними), и поэтому полученное им уравнение было непригодным для описания волновых процессов в плазме. Смелый шаг при построении кинетической теории бесстолкновительной плазмы сделал А. А. Власов, который в 1938 г. записал кинетическое уравнение с самосогласованными полями, уравнениями Максвелла и силой Лоренца. Это уравнение было в 1946 г. признано Л. Д. Ландау пригодным для плазмы, и даже, основываясь на нем, он получил свое знаменитое «затухание Ландау» плазменной волны в максвелловской бесстолкновительной плазме. В этом же 1946 г. вышла книга Н. Н. Боголюбова, в которой развит общий метод вывода кинетических уравнений для газов со слабым взаимодействием частиц. В частности, для газа с экранированным кулоновским взаимодействием частиц в первом приближении по взаимодействию он получил уравнение Власова, а во втором – интеграл столкновений Ландау.

Дальнейшее развитие кинетической теории плазмы связано с именами В. П. Силина, А. Ленарда и Р. Балеску, которые развили метод Боголюбова и получили интегралы столкновений в виде, пригодном для описания быстропеременных процессов в плазме и наличия сильного магнитного поля, а также волнового взаимодействия частиц, обусловленного учетом динамической поляризации плазмы. В. П. Силин со своими сотрудниками показали, что учет такого взаимодействия кардинально меняет наши представления о процессах переноса и релаксации в неизотермической плазме с горячими электронами.

Ключевые слова: бесстолкновительная плазма, кинетическая теория плазмы, история физики плазмы.

PACS numbers: 01.65.+g, 52.25.Dg, 52.35.-g

Рухадзе А. А., Силін В. П. Шлях формування фізичних уявлень про плазму без зіткнень

Анотація

Коротко викладається історія виникнення сучасних уявлень фізики беззітшовхувальної (власівської) плазми, починаючи від передбачення лордом Дж. Релеєм у 1906 р. явища плазмових коливань. В роботі показані основні етапи еволюції поглядів на опис беззітшовхувальної плазми: проста механічна модель електронно-іонної плазми, сформульована І. Ленгмюром і Л. Тонксом, перехід до кінетичного опису, вперше виконаний Л. Д. Ландау, включення до кінетичного рівняння самоузгодженого електромагнітного поля, запропоноване А. О. Власовим, розробка М. М. Боголюбовим загального методу виведення кінетичних рівнянь для газу слабозаємодіючих частинок, розвиток методу Боголюбова для опису швидкозмінних процесів у плазмі, в тому числі і в присутності сильного магнітного поля, а також хвильової взаємодії частинок, пов'язаний з іменами В. П. Силина, А. Ленарда і Р. Балеску.

Ключові слова: беззітшовхувальна плазма, кінетична теорія плазми, історія фізики плазми.

Реферат

Коротко викладається історія виникнення сучасних уявлень фізики беззітшовхувальної (власівської) плазми, починаючи від передбачення лордом Дж. Релеєм у 1906 р. явища, яке полягає в тому, що електрони, які знаходяться на поверхні позитивно зарядженої сфери, що нейтралізує їх заряд (модель атома Дж. Дж. Томсона 1903 р.), можуть здійснювати коливання в електричному полі, створеному ними ж. Він не тільки передбачив, але й отримав рівняння таких

коливань і визначив їх частоту. Через 20 років (1924 р.) І. Ленгмюр (можливо незалежно від Дж. Релея), почавши послідовне дослідження спектрів коливань плазми газового розряду, дійсно виявив такі коливання з частотою, що збігається з передбаченою Дж. Релеєм. Спираючись на свої експериментальні результати, І. Ленгмюр разом з Л. Тонксом розвинули просту механічну модель електронно-іонної плазми з повним самоузгодженим електромагнітним полем, яка якісно пояснила експерименти І. Ленгмюра. Для кількісного пояснення експерименту було потрібно використання кінетичної теорії. Існуюча в той час кінетична теорія Больцмана, однак, для опису плазми була не придатною через розбіжність інтеграла зіткнень при кулонівській взаємодії частинок. Перший, хто зробив рівняння Больцмана придатним для опису плазми, був Л. Д. Ландау, який у 1937 р. врахував дебаївське екранування кулонівського поля в плазмі, і, тим самим, інтеграл зіткнень у рівнянні Больцмана виявився кінцевим. Однак поля, що фігурують у рівнянні Больцмана, Л. Д. Ландау вважав заданими (зовнішніми), і тому отримане ним рівняння було непридатним для опису хвильових процесів у плазмі. Сміливий крок при побудові кінетичної теорії беззіштовхувальної плазми зробив А. О. Власов, який в 1938 році записав кінетичне рівняння з самоузгодженими полями, рівняннями Максвелла і силою Лоренца. Це рівняння було в 1946 р. визнано Л. Д. Ландау придатним для плазми, і навіть, виходячи з нього, він отримав своє знамените «згасання Ландау» плазмової хвилі у максвелівській беззіштовхувальній плазмі. У цьому ж 1946 р. вийшла книга М. М. Боголюбова, в якій був розвинений загальний метод виведення кінетичних рівнянь для газів зі слабкою взаємодією частинок. Зокрема, для газу з екранованою кулонівською взаємодією частинок в першому наближенні по взаємодії він отримав рівняння Власова, а в другому – інтеграл зіткнень Ландау. Подальший розвиток кінетичної теорії плазми пов'язаний з іменами В. П. Силіна, А. Ленарда і Р. Балеску, які розвинули метод Боголюбова і отримали інтеграл зіткнень у вигляді, придатному для опису швидкозмінних процесів у плазмі, в тому числі і за наявності сильного магнітного поля, а також хвильової взаємодії частинок, обумовленої урахуванням динамічної поляризації плазми. В. П. Силін зі своїми співробітниками продемонстрували, що врахування такої взаємодії кардинально змінює наші уявлення про процеси переносу і релаксації в неізотермічній плазмі з гарячими електронами.

Ключові слова: беззіштовхувальна плазма, кінетична теорія плазми, історія фізики плазми.

PACS numbers: 01.65.+g, 52.25.Dg, 52.35.-g

Rukhadze A. A., Silin V. P. The path of the evolution of ideas about collisionless plasma physics

Annotation

The history of origins of modern collisionless (Vlasov) plasma conception is outlined, starting from the phenomenon of plasma oscillations, predicted by Lord J. Rayleigh in 1906. The key stages of the evolution of ideas about collisionless plasma are presented: a simple mechanic model of electron-ion plasma which was formulated by I. Lengmuir and L. Tonks, a transition to the kinetic description for the first time made by L. D. Landau, the inclusion in calculation the self-consistent electromagnetic field, proposed by A. A. Vlasov, the development by N. N. Bogolyubov of a general method for obtaining kinetic equations for gas of weakly interacting particles, the generalization of Bogolyubov's method for description the fast-varying processes in a plasma including the plasma in the presence of strong

magnetic fields as well as consideration of wave interaction between particles, associated with names of Silin V. P., A. Lenard and R. Balescu

Keywords: collisionless plasma, kinetic theory of a plasma, history of plasma physics.

Abstract

The history of origins of modern collisionless (Vlasov) plasma conception is outlined, starting from the phenomenon, predicted by Lord J. Rayleigh in 1906, that assumes the electrons located on the surface of a positively charged sphere, which neutralizes their charge (the atom model of J.J. Thomson, 1903), can oscillate in the self-generated electric field. He not only predicted but also got the relevant equations of the oscillations and determined their frequency. 20 years later (in 1924), I. Langmuir (possibly regardless of J. Rayleigh), began a systematic study of the spectra of gas-discharge plasma oscillations, actually discovered such oscillations with the frequency predicted by J. Rayleigh. Based on their experimental results, I. Langmuir together with L. Tonks have developed a simple mechanical model of the electron-ion plasma with fully self-consistent electromagnetic field, which qualitatively explained Langmuir's experiments. For a quantitative explanation of the experiment, the use of kinetic theory was required. However, the Boltzmann kinetic theory existing at the time was not suitable for description of the plasma because of the divergence of the collision integral due to the Coulomb interaction of particles. The first one who made the Boltzmann equation applicable to description of the plasma was L.D. Landau, who in 1937 took into account the Debye screening of the Coulomb field in the plasma and as a result the collision integral in the Boltzmann equation was found to be finite. However, L.D. Landau considered the fields incorporated in the Boltzmann equation as prescribed (external) and therefore the equation was unusable for description of the wave processes in the plasma. In 1938, A.A. Vlasov took a bold step in building a kinetic theory of collisionless plasma when formulated the kinetic equation incorporating self-consistent fields, Maxwell's equations and the Lorentz force. In 1946, this equation was recognized by L.D. Landau as suitable for description of plasma and, he even derived from it his famous "Landau damping" of plasma waves in a Maxwellian collisionless plasma. In the same 1946 year, N.N. Bogolyubov published the book, where he developed a general method of deriving the kinetic equations for gases of weakly interacting particles. In particular, for a gas of particles with screened Coulomb interaction, he derived Vlasov's equation as a first approximation on the interaction parameter and the Landau collision integral as a second approximation. Further development of the kinetic theory plasma is associated with names of V.P. Silin, A. Lenard and R. Balescu, who developed the Bogolyubov method and obtained collision integrals in the form suitable for describing the fast-alternating processes in a plasma in the presence of strong magnetic fields as well as for wave interaction between particles caused by the dynamic plasma polarization. V.P. Silin together with his collaborators showed that the inclusion of such interaction dramatically change our understanding of the transport and relaxation processes in non-isothermal plasma with hot electrons.

Keywords: collisionless plasma, kinetic theory of a plasma, history of plasma physics.

PACS numbers: 01.65.+g, 52.25.Dg, 52.35.-g

Загородний А.Г., Киричок А.В., Куклин В.М. Одномерные модели модуляционной неустойчивости интенсивных ленгмюровских колебаний в плазме на основе уравнений Захарова и Силина // Проблемы теоретической физики. Научные труды. Выпуск 2/ В. А. Буц, А. Г. Загородний, А. В. Киричок, В. М. Конторович, В. М. Куклин, А. А. Рухадзе, В. П. Силин, А. В. Тур, В. В. Яновский; под общей редакцией А. Г. Загороднего, Н. Ф. Шульги, ред. вып. В. М. Куклин. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2016. – Вып. 2 – 376 с. (Серия «Проблемы теоретической и математической физики. Научные труды»).

Аннотация

Рассмотрены механизмы развития модуляционной неустойчивости интенсивных ленгмюровских колебаний в плазме в условиях, когда плотность энергии поля меньше (модель Захарова) или больше (модель Силина) плотности тепловой энергии среды. На примере одномерного представления показано, что обнаруженный В. Е. Захаровым механизм нелинейного поглощения ленгмюровских колебаний в плазме оказывается применимым и для интенсивных полей в холодной плазме, описываемых моделью, разработанной В. П. Силиным. Показано, что процессы модуляционной неустойчивости ленгмюровских колебаний в неизотермической и в холодной плазме подобны. Детально анализируются гибридные модели (электроны описаны с помощью уравнений квазигидродинамики, а ионы как частицы), которые позволяют исследовать прямой механизм передачи энергии ионам в процессе развития неустойчивости.

Ключевые слова: модуляционная неустойчивость, параметрическая неустойчивость, неизотермическая и холодная плазма, модель Захарова, модель Силина, гибридные модели.

Реферат

На примере одномерного представления показано, что обнаруженный В. Е. Захаровым механизм нелинейного поглощения ленгмюровских колебаний в плазме оказывается применимым и для интенсивных полей в холодной плазме, описываемых моделью, разработанной В. П. Силиным. Процессы модуляционной неустойчивости длинноволновых ленгмюровских колебаний в неизотермической и в холодной плазме, для представления которых используют соответственно уравнения Захарова и Силина, оказываются подобны. Показано, что уравнения модели Захарова (применимые для неизотермической плазмы, в условиях, когда плотность энергии поля меньше плотности тепловой энергии среды) могут быть получены из уравнений модели Силина (справедливых для низкотемпературной плазмы, когда плотность энергии поля существенно превышает плотность тепловой энергии среды) при уменьшении интенсивности поля накачки. Отмечается, что гидродинамическое описание не вполне корректно представляет поведение частиц в неоднородном в пространстве поле, фактически пренебрегая их инерцией, что формирует не только весьма мелкомасштабные и глубокие каверны плотности плазмы, но и режимы с обострением. Так как особый интерес представляет прямой механизм передачи энергии поля ионам, то детально рассматриваются так называемые гибридные модели (электроны описаны уравнениями квазигидродинамики, а ионы – частицами), что позволяет увидеть поя-

вление групп быстрых ионов и преждевременное разрушение во множестве возникающих различных каверн плотности из-за выгорания ВЧ поля и пересечения траекторий ионов. Подобные модели позволяют найти энергию, передаваемую ионам и коллективным НЧ степеням свободы. Использование для 1D моделирования ионов $2 \div 5 \times 10^4$ частиц (что в 3D модели соответствовало бы $10^{13} \div 10^{14}$ частиц) позволяет без применения приближенных методов корректно рассматривать взаимодействие ионов с полем (и, кстати, дает возможность проверить эффективность приближенных методов). Проводится сравнение гибридных моделей Захарова и Силина, причем особое внимание уделяется обсуждению динамики нагрева ионов при неустойчивости интенсивных ленгмюровских колебаний в неизоотермической (модель Захарова) и холодной (модель Силина) плазме. В неизоотермической плазме в условиях, когда плотность энергии поля меньше плотности тепловой энергии среды, доля энергии поля, которая передается ионам, пропорциональна отношению энергии поля к тепловой энергии плазмы. В холодной плазме доля энергии поля, которая передается ионам, порядка отношения инкремента к частоте, или, что практически то же самое, пропорциональна кубическому корню из отношения масс электрона и иона. В случае тяжелых ионов энергия, переданная ионному компоненту, заметно меньше, чем для случая легких ионов. Причем доля энергии, переданная ионам, в случае холодной плазмы обратно пропорциональна кубическому корню из отношения массы электрона к массе иона, а в случае горячей плазмы с ростом массы ионов падение доли энергии, переданной ионам, значительнее. Показано, что в обоих случаях можно говорить о температуре ионов, причем в модели Силина оказывается почти в два раза больше быстрых ионов, чем в модели Захарова. Интенсивность НЧ спектра (ионно-звуковые волны) в случае неизоотермической плазмы (модель Захарова) одного порядка в широком интервале волновых чисел. В холодной плазме (модель Силина) в НЧ спектре доминируют длинноволновые колебания. Уменьшение уровня поглощения ВЧ поля соответствует замедлению выгорания ВЧ поля в кавернах и уширяет спектр ВЧ мод, что приводит к углублению каверн плотности плазмы, к увеличению кинетической энергии выталкиваемых из каверн ионов и росту температуры ионов.

Ключевые слова: модуляционная неустойчивость, параметрическая неустойчивость, неизоотермическая и холодная плазма, модель Захарова, модель Силина, гибридные модели.

PACS numbers: 52.35.-g, 52.65.-y

Загородній А.Г., Киричок О.В., Куклін В.М. Одномірні моделі модуляційної нестійкості інтенсивних ленгмюрівських коливань у плазмі на основі рівнянь Захарова і Силіна

Анотація

Розглянуто механізми розвитку модуляційної нестійкості інтенсивних ленгмюрівських коливань у плазмі в умовах, коли щільність енергії поля менше (модель Захарова) або більше (модель Силіна) щільності теплової енергії середовища. На прикладі одновимірної моделі показано, що виявлений В.С. Захаровим механізм нелінійного поглинання ленгмюрівських коливань в плазмі виявляється застосовним і для інтенсивних полів у холодній плазмі, що описуються моделлю, розробленою В. П. Силіним. Показано, що процеси модуляційної нестійкості ленгмюрівських коливань у неізотермічній і у холодній плазмі подібні. Детально аналізуються гібридні моделі (електрони описані за допомогою рівнянь

квазігідродинаміки, а іони як частинки), які дозволяють досліджувати прямий механізм передачі енергії іонів у процесі розвитку нестійкості.

Ключові слова: модуляційна нестійкість, параметрична нестійкість, неізотермічна та холодна плазма, модель Захарова, модель Силіна, гібридні моделі.

Реферат

На прикладі одновимірного розгляду показано, що виявлений В.С. Захаровим механізм нелінійного поглинання ленгмюрівських коливань у плазмі виявляється застосовним і для інтенсивних полів у холодній плазмі, що описується моделлю, яка розроблена В. П. Силіним. Процеси модуляційної нестійкості довгохвильових ленгмюрівських коливань в неізотермічній і в холодній плазмі, для опису яких використовують відповідно рівняння Захарова і Силіна, виявляються подібні. Показано, що рівняння моделі Захарова (застосовані для неізотермічної плазми, в умовах, коли густина енергії поля менше щільності теплової енергії середовища) можуть бути отримані з рівнянь моделі Силіна (справедливих для низькотемпературної плазми, коли густина енергії поля істотно перевищує щільність теплової енергії середовища) при зменшенні інтенсивності поля накачування. Відзначається, що гідродинамічний опис не цілком коректно описує поведінку частинок в неоднорідному в просторі полі, фактично нехтуючи їх інерцією, що формує не тільки вельми дрібномасштабні і глибокі каверни густини плазми, але і режими з загостренням. Оскільки особливий інтерес представляє прямий механізм передачі енергії поля іонам, то детально розглядаються так звані гібридні моделі (електрони описані рівняннями квазігідродинаміки, а іони – частинками), що дозволяє побачити появу груп швидких іонів та передчасне руйнування численних каверн густини через вигорання ВЧ поля і перегин траєкторій іонів. Подібні моделі дозволяють знайти енергію, передану іонам і колективним НЧ ступеням свободи. Використання для 1D моделювання іонів $2 \div 5 \times 10^4$ частинок (що в 3D моделі відповідало б $10^{13} \div 10^{14}$ частинок) дозволяє без застосування наближених методів коректно розглядати взаємодію іонів з полем (і, до речі, дає можливість перевірити ефективність наближених методів). Проводиться порівняння гібридних моделей Захарова і Силіна, причому особлива увага приділяється обговоренню динаміки нагріву іонів при нестійкості інтенсивних ленгмюрівських коливань в неізотермічній (модель Захарова) і холодній (модель Силіна) плазмі. У неізотермічній плазмі в умовах, коли густина енергії поля менше густини теплової енергії середовища, частка енергії поля, яка передається іонам, пропорційна відношенню енергії поля до теплової енергії плазми. У холодній плазмі частка енергії поля, яка передається іонам, за порядком дорівнює відношенню інкременту нестійкості до частоти, або, що практично те ж саме, пропорційна кубічному кореню з відношення мас електрона і іона. У разі важких іонів енергія, передана іонному компоненту, помітно менше, ніж для випадку легких іонів. Причому частка енергії, передана іонам, в разі холодної плазми пропорційна кубічному кореню з відношення маси електрона до маси іона, а в разі гарячої плазми з ростом маси іонів падіння частки енергії, переданої іонам, збільшується. Показано, що в обох випадках можна говорити про температуру іонів, причому в моделі Силіна виявляється майже в два рази більше швидких іонів, ніж в моделі Захарова. Інтенсивність НЧ спектра (іонно-звукові хвилі) в разі неізотермічної плазми (модель Захарова) одного порядку в широкому інтервалі хвильових чисел. У холодній плазмі (модель Силіна) в НЧ діапазоні домінують довгохвильові коливання. Зменшення рівня поглинання ВЧ поля відповідає уповільненню вигорання ВЧ поля в кавернах і розширенню спектра

ВЧ мод, що призводить до поглиблення каверн густини плазми, до збільшення кінетичної енергії іонів, які виштовхуються з каверн, і росту температури іонів.

Ключові слова: модуляційна нестійкість, параметрична нестійкість, неізо-термічна та холодна плазма, модель Захарова, модель Силіна, гібридні моделі.

PACS numbers: 52.35.-g, 52.65.-y

Zagorodny A. G., Kirichok A. V., Kuklin V. M. 1D models of the modulational instability of intense Langmuir waves in plasma based on Zakharov's and Silin's equations

Annotation

The modulational instability mechanisms of intense Langmuir oscillations in a plasma are reviewed both for field energy densities below (Zakharov's model) and above (Silin's model) the plasma's thermal energy density. It is shown by a one-dimensional example that V E Zakharov's mechanism involving nonlinear absorption of Langmuir oscillations in plasma also holds for intense cold plasma fields described by V P Silin's model. It is also shown that the development mechanisms of the modulational instability of Langmuir oscillations are similar for nonisothermal and cold plasmas. Hybrid models treating electrons quasihydrodynamically and ions as particles are analyzed in detail, which allows the study of the direct mechanism by which energy is transferred to ions in the instability development process.

Keywords: modulational instability, parametric instability, noni-sothermal and cold plasmas, Zakharov's model, Silin's model, hybrid models.

Abstract

It is shown by the example of 1D representation, that the mechanism of nonlinear absorption of Langmuir waves in a non-isothermal plasma, discovered by V.E. Zakharov [1], is turns out to be applicable for intense fields in a cold plasma, described by the model developed by V.P. Silin [2,3]. The processes of long-wave modulation instability of Langmuir oscillations in a non-isothermal, and in a cold plasma, which are described by Zakharov's and Silin's equations respectively, occur to be similar. It has been demonstrated that the equations of Zakharov's model (applicable to non-isothermal plasma, when the field energy density is less than the thermal energy density of the medium) can be obtained from the equations of Silin's model (usable for a low-temperature plasma, when the field energy density is significantly higher than the thermal energy density) with reducing the intensity of the pump field.

It is noted that the hydrodynamic description is not entirely suited for description of the behavior of particles in a spatially non-uniform field, since it neglects their inertia that leads to formation of not only small-scale and deep plasma density caverns but also to blow-up regimes.

Since the mechanism of direct energy transfer from the field to ions is of particular interest, the detailed examination of the so-called hybrid models (the electrons are described by the equations of quasi-hydrodynamics, and the ions as particles) is presented that allows to study in details the appearance of groups of fast ions and premature collapsing of density caverns due to burnout of the HF field and the intersection of ion trajectories. These models enable calculation of the energy transferred to the ions and collective LF modes. The use of $2 \div 5 \times 10^4$ particles for 1D modelling of ion dynamics (that corresponds to $10^{13} \div 10^{14}$ particles in 3D modelling) allows correct consideration of interaction between the ions and plasma

field without using of approximate methods (and besides, gives an opportunity to test the effectiveness of approximate methods).

A comparison of Zakharov's and Silin's hybrid models is presented with particular attention to consideration of the dynamics of ion heating with development of the intense plasma wave instability in a non-isothermal (Zakharov's model) and cold (Silin's model) plasma. In a non-isothermal plasma, when the field energy density is less than the thermal energy density, the portion of the field energy which is transferred to the ions is proportional to the ratio of the field energy to the thermal energy of the plasma. In a cold plasma, the field energy transferred to the ions is of the order of the ratio of the increment to the frequency, or that practically the same, to the cube root of the electron-ion mass ratio. For heavy ions, the energy transferred to the ionic component is much smaller than for light ions. Moreover, the amount of energy transferred to ions in the cold-plasma case is inversely proportional to the cube root of the ion mass, while in the hot-plasma case the portion of energy transferred to ions decreases with the ion-mass growth faster.

It is shown that in both cases it is possible to speak about the ion temperature, and the number of fast ions is almost twice as much in Silin's model than in Zakharov's model. The intensity of modes of the LF spectrum (ion-acoustic waves) in the case of a non-isothermal plasma (Zakharov's model) occurs to be of the same order in a wide range of wave numbers. In a cold plasma (Silin's model), the long-wave oscillations dominate in the LF spectrum. The decrease of the damping rate of the HF field corresponds to the inhibition of the HF field burnout in the cavities and leads to the broadening of the HF spectrum that causes the deepening of the cavities and increase of the temperature of ions ejected from them.

Keywords: modulational instability, parametric instability, non-isothermal and cold plasmas, Zakharov's model, Silin's model, hybrid models.

PACS numbers: 52.35.-g, 52.65.-y

Конторович В. М. Линейные и нелинейные волны: элементарное введение в теорию с применениями к физике плазмы и астрофизике. Стохастический подход // Проблемы теоретической физики. Научные труды. Выпуск 2 / В. А. Буц, А. Г. Загородний, А. В. Киричок, В. М. Конторович, В. М. Куклин, А. А. Рухадзе, В. П. Силян, А. В. Тур, В. В. Яновский; под общей редакцией А. Г. Загороднего, Н. Ф. Шульги, ред. вып. В. М. Куклин. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2016. – Вып. 2 – 376 с. (Серия «Проблемы теоретической и математической физики. Научные труды»).

Аннотация

Обзор посвящен кинетическим уравнениям слабой турбулентности, включая точные методы получения неравновесных распределений. Представлены прозрачные квантово-механические аналогии. Для описания взаимодействий когерентных и стохастических систем используется гамильтонов формализм. Особое место уделяется астрофизическим приложениям. Приведены примеры применения кинетического уравнения Смолуховского к анализу процессов слияния галактик и формирования их спектров масс. Рассмотрены нелокальные распределения и частично когерентные системы.

Ключевые слова: стохастические кинетические уравнения, нелинейные процессы в астрофизике, слияние галактик.

Реферат

Данный обзор посвящен кинетическим уравнениям для волн (и частиц) и получению на их основе степенных слаботурбулентных распределений. Эти существенно неравновесные распределения обладают определенной универсальностью и часто реализуются в природе в условиях, когда источник и сток энергии (или других сохраняющихся величин) разнесены по частотам или длинам волн, и между ними формируется поток сохраняющейся величины по спектру, параметризующий распределения подобно тому, как температура параметризует равновесные распределения. Характерная для слабой турбулентности малость энергии взаимодействия по сравнению с полной энергией волнения позволяет использовать теорию возмущений и описывать турбулентность с помощью замкнутых систем кинетических уравнений для функций распределения. Описание слабой турбулентности оказывается аналогичным кинетическому описанию слабо неидеального газа. Роль функции распределения играет величина $N_{\mathbf{k}}$, пропорциональная среднему квадрату амплитуды волны с волновым вектором \mathbf{k} . Наиболее просто кинетическое уравнение для $N_{\mathbf{k}}$ может быть получено с помощью квантово-механической аналогии с использованием понятий спонтанного и вынужденного излучения, введенных А. Эйнштейном. Идеи (слабой или волновой) колмогоровской турбулентности были распространены на новые объекты, и это привело к результатам, важным для понимания структуры самих слаботурбулентных потоковых спектров. Стационарные решения систем кинетических уравнений приводят к степенным спектрам как для волн, так и для частиц (при наличии потока по их спектру). Существование равновесных и турбулентных стационарных решений поставило вопрос о том, каким должно быть распределение при совместном воздействии термостата, формирующего равновесный, и источника, формирующего турбулентный спектр. Оказывается, что одновременное

наличие потока и температуры приводит к формированию единого распределения, вид которого существенно зависит от соотношения между потоками и температурой. Типичным для него является возникновение промежуточной асимптотики, существенно искажающей «хвост» распределения при самых малых потоках. В качестве примера турбулентной системы с потоком по спектру рассмотрен плазменный турбулентный реактор. Наблюдательные данные последних трех десятилетий, в особенности данные космического телескопа Хаббла и крупнейших наземных телескопов, дают убедительные доказательства определяющей роли слияний в космогонии галактик. Корреляция между активностью галактик, их взаимодействием и слияниями также является сейчас уже хорошо установленным наблюдательным фактом. Это позволило сформулировать модель, описывающую эволюцию функции распределения масс галактик на основе стохастического кинетического уравнения Смолуховского. Оказалось, что в системе сливающихся галактик происходит аналог кинетического фазового перехода Стокмайера. Система разделяется на две фазы: гигантскую галактику, в которой заключена макроскопическая часть массы, и много мелких галактик. Возникающую гигантскую галактику можно отождествить с реальными с D-галактиками в центрах групп и скоплений. Среди мелких большинство составляют галактики, ни разу не испытавшие слияния. Процесс слияний может носить взрывной характер, и «эпоха квазаров» может соответствовать эпохе «сборки» массивных галактик из строительных блоков путем «сильных» слияний (major mergers) с галактикой сравнимой массы.

Ключевые слова: стохастические кинетические уравнения, нелинейные процессы в астрофизике, слияние галактик.

PACS numbers: 05.10.Gg, 98.62. Ck, 98.65.Fz

Конторович В. М. Лінійні і нелінійні хвилі: елементарне введення в теорію із застосуванням до фізики плазми та астрофізики. Стохастичний підхід

Анотація

Огляд присвячений кінетичним рівнянням слабкої турбулентності, включаючи точні методи виведення нерівноважних розподілів. Представлені прозорі квантово-механічні аналогії. Для опису взаємодій когерентних і стохастичних систем використовується гамільтонів формалізм. Особливе місце приділяється астрофізичним застосуванням. Наведені приклади використання кінетичного рівняння Смолуховського для аналізу процесів злиття галактик і формування їх спектрів мас. Розглянуті нелокальні розподіли і частково когерентні системи.

Ключові слова: стохастичні кінетичні рівняння, нелінійні процеси в астрофізиці, злиття галактик.

Реферат

Даний огляд присвячено кінетичним рівнянням для хвиль (і частинок) та отриманню на їх основі степеневих слаботурбулентних розподілів. Ці суттєво нерівноважні розподіли мають певну універсальність і часто реалізуються в природі в умовах, коли джерело та стік енергії (або інших величин, що зберігаються) рознесені по частотах або довжинах хвиль, і між ними формується потік по спектру величини, що зберігається, який параметризує розподіл подібно до того, як температура параметризує рівноважні розподіли. Характерна для слабкої турбулентності малість енергії взаємодії в порівнянні з повною енергією хвилювання дозволяє використовувати теорію збурень і описувати турбулентність за допомогою замкнутих систем кінетичних рівнянь для функцій розподілу. Опис

слабкої турбулентності виявляється аналогічним кінетичному опису слабо неідеального газу. Роль функції розподілу відіграє величина N_k , пропорційна середньому квадрату амплітуди хвилі з хвильовим вектором \mathbf{k} . Найбільш просто кінетичне рівняння для N_k може бути отримано за допомогою квантово-механічної аналогії з використанням понять спонтанного і вимушеного випромінювання, введених А. Ейнштейном. Ідеї (слабкої або хвильової) колмогорівської турбулентності були поширені на нові об'єкти, і це привело до результатів, важливих для розуміння структури самих слабкотурбулентних потокових спектрів. Стаціонарні рішення систем кінетичних рівнянь призводять до степеневих спектрів як для хвиль, так і для частинок (при наявності потоку по їх спектру). Існування рівноважних і турбулентних стаціонарних рішень поставило питання про те, яким має бути розподіл при спільному впливі термостата, що формує рівноважний спектр, і джерела, яке формує турбулентний спектр. Виявляється, що одночасна наявність потоку і температури призводить до формування єдиного розподілу, вид якого істотно залежить від співвідношення між потоками і температурою. Типовим для нього є виникнення проміжної асимптотики, що істотно спотворює «хвости» розподілу при найменших потоках. Як приклад турбулентної системи з потоком по спектру розглянуто плазмовий турбулентний реактор. Дані спостереження останніх трьох десятиліть, особливо дані космічного телескопа Хаббла і найбільших наземних телескопів, дають переконливі докази визначальної ролі злиття в космогонії галактик. Кореляція між активністю галактик і їх взаємодією та злиттям також є зараз вже добре встановленим фактом, підтвердженим багатьма спостереженнями. Це дозволило сформулювати модель, що описує еволюцію функції розподілу галактичних мас на основі стохастичного кінетичного рівняння Смолуховського. Виявилось, що в системі галактик, що зливаються, відбувається аналог кінетичного фазового переходу Стокмайєра. Система поділяється на дві фази: гігантську галактику, в якій міститься макроскопічна частина маси, і багато дрібних галактик. Гігантську галактику, що виникає при цьому, можна ототожнити з реальними cD-галактиками в центрах груп і скупчень. Серед дрібних більшість становлять галактики, що жодного разу не випробували злиття. Процес злиття може мати вибуховий характер, і «епоха квазарів» може відповідати епосі «збирання» масивних галактик з будівельних блоків шляхом «сильних» злиттів (major mergers) з галактикою порівнянної маси.

Ключові слова: стохастичні кінетичні рівняння, нелінійні процеси в астрофізиці, злиття галактик.

PACS numbers: 05.10.Gg, 98.62. Ck, 98.65.Fz

Kontorovich V. M. Linear and nonlinear waves: An elementary introduction to the theory with applications to plasma physics and astrophysics. Stochastic approach

Annotation

The review focuses on the kinetic equations of weak turbulence, including the accurate methods for deriving non-equilibrium distributions. The transparent quantum-mechanical analogies are presented. The Hamiltonian formalism is used for describing the interaction between coherent and stochastic systems. Emphasis is put on the astrophysical applications. The examples are presented of application of the Smoluchowski kinetic equation to analysis of the galaxy mergers and formation of their mass spectra. The non-local distributions and partially coherent system are considered.

Keywords: stochastic kinetic equations, nonlinear processes in astrophysics, galaxy mergers.

Abstract

This review focuses on the kinetic equations for waves (and particles) and power-series weakly turbulent distributions derived from them. These essentially non-equilibrium distributions have a certain universality and often may be detected in nature under conditions, when the source and drain of the energy (or any other conserved quantity) are separated on frequency or wavelength and the spectrum flux of the conserved quantity appears, which parametrizes the distribution just as the temperature parametrizes the equilibrium distributions. The smallness of interaction energy as compared to the total energy of wave perturbations, which is typical for the weak turbulence allows the use of the perturbation theory to describe the turbulence by a closed system of kinetic equations for the distribution function. The consideration of the weak turbulence is analogous to the kinetic description of a weakly non-ideal gas. The value $N_{\mathbf{k}}$, which is proportional to the mean square of the amplitude of the wave with wave vector \mathbf{k} , plays the role of the distribution function. The simplest method for deriving the kinetic equation for $N_{\mathbf{k}}$ is a use of the quantum-mechanical analogy and applying the concept of the spontaneous and stimulated emission introduced by Einstein. The ideas of (weak or wave) Kolmogorov turbulence have been extended to new objects and this has led to results important for understanding of the structure of weakly turbulent flow spectra. The stationary solutions of systems of kinetic equations lead to the power spectra for both wave and particle (if there is a flow in their spectrum). The existence of equilibrium and turbulent stationary solutions raised the question of what should be a distribution function under the combined action of the thermostat, which forms an equilibrium, and the source, forming a turbulent spectrum. It turns out that the simultaneous presence both of the flow and temperature lead to the formation of uniform distribution, which form essentially depends on the ratio between the flow and temperature. The formation of the intermediate asymptotic behavior significantly distorting the distribution "tails" at very low flows is typical for this situation. As an example of a turbulent system with the spectrum flow, the turbulent plasma reactor is considered. The observation data of recent three decades, in particular the Hubble Space Telescope data and the largest ground-based telescopes, gives strong evidence of the determinative role of mergers in the cosmogony of galaxies. The correlation between the galaxies activity and their interactions and mergers is also well established observational fact now. This has allowed formulation of a model describing the evolution of the galaxy mass distribution function based on the stochastic kinetic Smoluchowski equation. It turned out that the processes in the system of merging galaxies are analogous to the Stockmayer-type kinetic phase transition. The system breaks down into two phases: a giant galaxy which contains the macroscopic part of the initial mass and a lot of small galaxies. The giant galaxy can be identified with real cD-galaxies located in the centers of groups and clusters. Among the small galaxies, the major part never participated in merging. The merging process may be explosive and "epoch of quasar" may correspond to the era of "assembly" of massive galaxies from the building blocks by major mergers with a galaxy of comparable mass.

Keywords: stochastic kinetic equations, nonlinear processes in astrophysics, galaxy mergers.

PACS numbers: 05.10.Gg, 98.62. Ck, 98.65.Fz

Будц В. А. Регулярная и хаотическая динамика заряженных частиц при взаимодействиях волна-частица // Проблемы теоретической физики. Научные труды. Выпуск 2 / В. А. Будц, А. Г. Загородний, А. В. Киричок, В. М. Конторович, В. М. Куклин, А. А. Рухадзе, В. П. Силян, А. В. Тур, В. В. Яновский; под общей редакцией А. Г. Загороднего, Н. Ф. Шульги, ред. вып. В. М. Куклин. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2016. – Вып. 2 – 376 с. (Серия «Проблемы теоретической и математической физики. Научные труды»).

Аннотация

Изложены результаты исследования регулярной и хаотической динамики при взаимодействиях типа волна-частица. Определены условия, при которых заряженные частицы могут приобретать энергию от лазерного поля, а также условия, при которых частицы могут отдавать свою энергию лазерному полю. Обнаружено, что существуют условия, при которых силы трения, в частности силы радиационного трения, не тормозят частицы, а способствуют их ускорению. При наличии постоянного магнитного поля динамика частиц существенно обогащается. Если амплитуда волны не слишком велика или выполнены условия авторезонанса, тогда динамика частиц в этих полях регулярная. Показано, что динамика частиц при авторезонансе аномально чувствительна к флуктуациям. Аддитивные флуктуации ведут к супердиффузии, а мультипликативные – к флуктуационной неустойчивости. Если же поля достаточно большие, так что происходит перекрытие нелинейных циклотронных резонансов, то динамика становится хаотической. Хаотическая же динамика возникает и в случае, если частица движется в поле нескольких электромагнитных волн. Это так называемые схемы ЛСЭ и ОЛСЭ. Показано, что во всех этих схемах развиваются режимы с динамическим хаосом. Изучены особенности регулярной и хаотической динамики частиц во всех этих случаях. Анализ динамики ведущих центров показал, что имеются параметры, при которых нарушается теорема о непрерывной зависимости решений от параметров. При этом возможно эффективное разделение частиц, например, по их массам. Важным результатом является обобщение парадигм динамического хаоса. Показано, что учет особых решений приводит к возникновению режимов с нерегулярной динамикой в системах с одной степенью свободы и даже в полностью интегрируемых системах. Приведены примеры.

Ключевые слова: регулярная динамика, хаотическая динамика, ускорение, нелинейные резонансы, циклотронные резонансы, авторезонанс, особые решения, парадигмы динамического хаоса.

Реферат

Изложены результаты исследований динамики заряженных частиц в электромагнитных полях. Динамика может оказаться как регулярной, так и хаотической. Изложение результатов разбито на две части. В первой изложены наиболее важные результаты регулярной динамики частиц, во второй – хаотической динамики частиц. Перечислим наиболее интересные результаты. Были получены общие выражения для импульса и координаты частицы в лабораторной системе отсчета. Эти выражения позволяют изучать проблему обмена энергией между электромагнитной волной и потоком заряженных частиц. Используя эти результаты, были предложены новые схемы лазеров на свободных электронах, а также новые

схемы ускорения заряженных частиц. Во всех этих исследованиях существенным фактом было отсутствие ограничения на величину напряженности электромагнитных полей. Было показано, что силы трения (в том числе и силы радиационного трения), которые действуют на заряженные частицы, могут не тормозить частицы, а способствовать их ускорению в поле, например, лазерного излучения. Найдены условия, когда силы трения тормозят частицы и когда они способствуют их ускорению. Наличие постоянного магнитного поля существенно обогащает динамику частиц. При этом, если амплитуда волны оказывается достаточно маленькой или выполнены условия, близкие к условиям авторезонанса, то динамика, в основном, определяется одним изолированным резонансом и регулярна. Построена самосогласованная теория приборов, которые можно рассматривать как мазеры на циклотронных резонансах (МЦР). Если же амплитуды возбуждаемых волн становятся достаточно большими, так что происходит перекрытие нелинейных циклотронных резонансов, то динамика частиц и возбуждаемых ими волн становится хаотической. Показано, что развитие динамического хаоса ограничивает уровень возбуждаемого в МЦР поля. Эффективность таких приборов падает. Интересным является результат исследования рассматриваемых систем в условиях, при которых нарушается теорема о непрерывной зависимости решений от параметров. В этих условиях можно провести эффективное разделение частиц, например, по их массам. Показано, что в условиях авторезонанса ширина нелинейного резонанса стремится к бесконечности. Однако расстояние между резонансами растет еще быстрее. В результате нелинейные резонансы не перекрываются, и режимы с динамическим хаосом не возникают. Для многих приложений — это очень полезный результат. Однако оказалось, что в условиях авторезонанса динамика частиц аномально чувствительна к флуктуациям. Наличие аддитивных флуктуаций ведет к супердиффузии, а мультипликативные флуктуации ведут к флуктуационной неустойчивости. При этом высшие моменты растут быстрее низших моментов, и такие процессы не могут быть описаны традиционными кинетическими уравнениями. Надо использовать либо уравнения с дробными производными, либо пользоваться методом моментов. Хаотическая динамика частиц возникает и в том случае, когда частицы находятся в поле нескольких волн. Обнаружено, что во всех схемах ЛСЭ и схемах ОЛСЭ развивается режим с динамическим хаосом. Это нежелательные режимы. Они ограничивают эффективность, и ухудшают качество возбуждаемых полей (в ЛСЭ) и качество ускоряемых пучков (в ОЛСЭ). Однако эти же режимы могут быть основой новых эффективных схем нагрева плазмы до термоядерных температур. В обзоре показано, что учет особых решений требует пересмотра основных парадигм динамического хаоса. Действительно, учет таких решений приводит к возможности реализации режимов с нерегулярной динамикой в системах с одной степенью свободы и даже в динамических системах, которые полностью интегрируются. Особые решения необходимо учитывать при исследовании многих важных физических систем. Многие линейные системы при преобразовании переменных превращаются в нелинейные. Наиболее известными примерами этому служат переходы от уравнений квантовой механики к уравнениям классической механики, а также переход от волновой оптики к геометрической оптике. При этом в новых переменных могут реализоваться режимы с хаотической динамикой. В обзоре показано, что такие замены могут быть полезными во многих других случаях. В частности, используя такой подход, удалось обнаружить новый механизм многофотонного возбуждения квантовых систем. Кроме того, используя такой подход, удалось показать, что практически любую регулярную функцию можно представить в виде комбинации функций с хаотическим поведением.

Ключевые слова: регулярная динамика, хаотическая динамика, ускорение, нелинейные резонансы, циклотронные резонансы, авторезонанс, особые решения, парадигмы динамического хаоса.

PACS numbers: 41.60.Cr, 41.75.Lx, 05.40.-a, 05.45.-a, 52.35.Mw

Буд В. О. Регулярна та хаотична динаміка заряджених частинок при взаємодії хвиля-частинка

Анотація

Викладено результати дослідження регулярної та хаотичної динаміки при взаємодіях типу хвиля-частинка. Визначені умови, при яких заряджені частинки можуть здобувати енергію від лазерного поля, а також умови, при яких частинки можуть віддавати свою енергію лазерному полю. Виявлено, що існують умови, при яких сили тертя, зокрема сили радіаційного тертя, не гальмують частинки, а сприяють їхньому прискоренню. При наявності постійного магнітного поля динаміка частинок суттєво збагачується. Якщо амплітуда хвилі не занадто велика або виконані умови авторезонансу, тоді динаміка частинок у цих полях регулярна. Показано, що динаміка при авторезонансі аномально чутлива до флуктуацій. Адитивні флуктуації ведуть до супердифузії, а мультиплікативні – до флуктуаційної нестійкості. Якщо ж поля достатньо великі, так що відбувається перекриття нелінійних циклотронних резонансів, то динаміка стає хаотичною. Хаотична ж динаміка виникає й у випадку, якщо частинка рухається в полі декількох електромагнітних хвиль. Це так звані схеми ЛСЕ й ОЛСЕ. Показано, що у всіх цих схемах розвиваються режими з динамічним хаосом. Вивчені особливості регулярної й хаотичної динаміки частинок у всіх цих випадках. Аналіз динаміки провідних центрів показав, що є параметри, при яких порушується теорема про безперервну залежність рішень від параметрів. При цьому можливе ефективне розділення частинок, наприклад, за їхніми масами. Важливим результатом є узагальнення парадигм динамічного хаосу. Показано, що облік особливих рішень приводить до виникнення режимів з нерегулярною динамікою в системах з одним ступенем свободи й навіть у повністю інтегрувальних системах. Наведено приклади.

Ключові слова: регулярна динаміка, хаотична динаміка, прискорення, нелінійні резонанси, циклотронні резонанси, авторезонанс, особливі рішення, парадигми динамічного хаосу.

Реферат

Викладено результати досліджень динаміки заряджених частинок в електромагнітних полях. Динаміка може бути як регулярною, так і хаотичною. Практично всі дослідження були виконані в ННЦ "ХФТ" та в Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна. Виклад результатів розбитий на дві частини. У першій викладені найбільш важливі результати регулярної динаміки частинок, у другій – хаотичної динаміки частинок. Перелічимо найцікавіші результати. Були отримані загальні вирази для імпульсу й координати частинки в лабораторній системі відліку. Ці вирази дозволяють вивчати проблему обміну енергією між електромагнітною хвилею й потоком заряджених частинок. Використовуючи ці результати, були запропоновані нові схеми лазерів на вільних електронах, а також нові схеми прискорення заряджених частинок у вакуумі. У всіх цих дослідженнях істотним фактом була відсутність обмеження на величину напруженості електромагнітних полів. Було показано, що сили тертя (у тому числі й сили радіаційного тертя), які діють на заряджені частинки, мо-

жуть не гальмувати частинки, а сприяти їхньому прискоренню в полі, наприклад, лазерного випромінювання. Знайдені умови, коли сили тертя гальмують частинки, й коли вони сприяють їхньому прискоренню. Наявність постійного магнітного поля суттєво збагачує динаміку частинок. При цьому, якщо амплітуда хвилі виявляється досить маленькою або виконані умови, близькі до умов авторезонансу, то динаміка, в основному, визначається одним ізольованим резонансом і регулярна. Побудована самоузгоджена теорія приладів, які можна розглядати як мазери на циклотронних резонансах (МЦР). Якщо ж амплітуди збуджуючих хвиль стають досить великими, так що відбувається перекриття нелінійних циклотронних резонансів, то динаміка частинок і збуджуючих ними хвиль стає хаотичною. Показано, що розвиток динамічного хаосу обмежує рівень збуджуваного в МЦР поля. Ефективність таких приладів падає. Цікавим є результат дослідження розглянутих систем в умовах, при яких порушується теорема про безперервну залежність рішень від параметрів. В цих умовах можливо провести ефективний розподіл частинок, наприклад за масами. Показано, що в умовах авторезонансу ширина нелінійного резонансу прямує до нескінченності. Однак відстань між резонансами зростає ще швидше. У результаті нелінійні резонанси не перекриваються, й режими з динамічним хаосом не виникають. Для багатьох додатків це дуже обнадійливий результат. Однак виявилось, що в умовах авторезонансу динаміка частинок аномально чутлива до флуктуацій. Наявність адитивних флуктуацій веде до супердифузії, а мультиплікативні флуктуації ведуть до флуктуаційної нестійкості. При цьому вищі моменти ростуть швидше нижчих моментів, і такі процеси не можуть бути описані традиційними кінетичними рівняннями. Треба використовувати або рівняння із дробовими похідними, або користуватися методом моментів. Хаотична динаміка частинок виникає й у тому випадку, коли частинки перебувають у полі декількох хвиль. Показано, що у всіх схемах ЛВЕ й схемах ОЛВЕ розвивається режим з динамічним хаосом. Це небажані режими. Вони обмежують ефективність і погіршують якість збуджуючих полів (у ЛВЕ) і якість згустків, що прискорюються (в ОЛВЕ). Однак ці ж режими можуть бути основою нових ефективних схем нагріву плазми до термоядерних температур. В огляді показано, що облік особливих рішень вимагає перегляду основних парадигм динамічного хаосу. Дійсно, облік таких рішень приводить до можливості реалізації режимів з нерегулярною динамікою в системах з одним ступенем свободи й навіть у динамічних системах, які повністю інтегруються. Показано, що особливі рішення необхідно враховувати при дослідженні багатьох важливих фізичних систем. Багато лінійних систем при перетворенні змінних перетворюються на нелінійні. Найбільш відомими прикладами цьому стають переходи від рівнянь квантової механіки до рівнянь класичної механіки, а також перехід від хвильової оптики до геометричної оптики. При цьому в нових змінних можуть реалізуватися режими з хаотичною динамікою. В огляді показано, що такі заміни можуть бути корисними у багатьох інших випадках. Зокрема, використовуючи такий підхід, вдалося виявити новий механізм багатофотонного збудження квантових систем. Крім того, використовуючи такий підхід, вдалося показати, що практично будь-яку регулярну функцію можна представити у вигляді комбінації функцій з хаотичною поведінкою.

Ключові слова: регулярна динаміка, хаотична динаміка, прискорення, нелінійні резонанси, циклотронні резонанси, авторезонанс, особливі рішення, парадигми динамічного хаосу.

PACS numbers: 41.60.Cr, 41.75.Lx, 05.40.-a, 05.45.-a, 52.35.Mw

Butz V.A. Regular and chaotic dynamics of charged particles under the action of wave-particle interaction***Annotation***

The results are presented on the study of regular and chaotic dynamics of the wave-particle type interactions. The conditions when charged particles can gain energy from the laser field, and the conditions when particles can give their energy to the laser field, were found. It was revealed that there are conditions, under which the friction forces, in particular the radiation friction forces, do not decelerate particles, but promote their acceleration. In the presence of a magnetostatic field the particle dynamics becomes significantly enriched: in such fields the particle dynamics is regular if the wave amplitude is not too high, or the self-resonance conditions are satisfied. It was shown that the particle dynamics at autoresonance is abnormally sensitive to fluctuations. The additive fluctuations lead to superdiffusion, and the multiplicative fluctuations – to fluctuation instability. If the fields are high enough and overlapping of nonlinear cyclotron resonances does occur, the dynamics becomes chaotic. The chaotic dynamics appears also if particles are moving in the field of several electromagnetic waves. These are so-called FEL and inverse FEL schemes, correspondingly. It is shown that in all these schemes the modes with dynamic chaos do develop. The features of regular and chaotic dynamics of particles in all these cases were studied. When analyzing the dynamics of particle guiding centers, it was shown that there are parameters under which the theorem about continuous dependence of solutions on the parameters is violated. In such cases the possibility arises for effective separation of particles, like, i.e., weight separation. An important result is a generalization of the paradigms of the dynamic chaos. It is shown that accounting of singular solutions leads to appearance of the regimes with irregular dynamic in the systems with one degree of freedom, and even in the fully integrated systems. Some examples are presented.

Keywords: regular dynamics, chaotic dynamics, acceleration, nonlinear resonances, cyclotron resonances, autoresonance, singular solutions, the paradigm of dynamic chaos.

Abstract

The results of researches on dynamics of charged particles in electromagnetic fields are stated. The dynamics can be both regular and chaotic. Practically, all investigations were provided in the National Science Center “Kharkov Institute Physics and Technology” and in the V.N.Karazin National Kharkov University. The presentation of the results is partitioned to two parts. The first part outlines the most important results on regular dynamics of particles, and the second – on the chaotic dynamics of particles. The most interesting results are shortly enumerated below. General expressions for particle momentum and position in the laboratory frame were obtained. The expressions allow to study the problem of the energy exchange between the electromagnetic wave and the flux of charged particles. Using the obtained results, new schemes of lasers on free electrons and new schemes of acceleration of charged particles were proposed. In all these studies, a significant fact was the absence of limits on the intensity of the electromagnetic fields. It was shown that the force of friction (including the force of radiation friction) that act on charged particles, can not only decelerate particles but promote their acceleration, i.e., in the field of laser emission. The conditions are found when the friction leads to deceleration of particles, and when it promotes their acceleration. In the presence of magnetostatic field the dynamics of the particles gets significantly richer. In this case, if the amplitude of the wave is small enough or the conditions are close to

autoresonant conditions, the dynamics is mainly determined by only one isolated resonance and is regular. This is the base of the self-consistent theory which can be considered as the theory of masers on cyclotron resonance (MCR). If the amplitudes of the excited waves become so large that overlapping of nonlinear cyclotron resonances occurs, the dynamics of particles and the waves excited by them becomes chaotic. It has been shown that development of dynamic chaos results in limitation of the level of MCR field, what leads to decreasing of such devices efficiency. An interesting result is the result obtained for conditions when the theorem about continuous dependence of solutions from parameters is violated. In such conditions, as shown, there is a possibility to have an effective mechanism for separation of particles, for example, using their difference in masses. It was shown that in the conditions of the autoresonance the width of the nonlinear resonance tends to infinity. However, the distance between resonances is growing even faster. As the result, the nonlinear resonances do not overlap and the regimes with dynamic chaos do not appear. For many applications this is an encouraging result. However, it turned out that under autoresonance the particle dynamics is abnormally sensitive to fluctuations. The presence of additive fluctuations results in superdiffusion, and the multiplicative fluctuations lead to the fluctuation instability. In this case the highest moments are growing faster than the lower moments, and such processes cannot be described by conventional kinetic equations. It is necessary to use either the equations with fractional derivatives, or to use the method of moments. Chaotic dynamics of particles arises in the case when particles are in the field of several waves. It is shown that in all FEL schemes and in inverse FEL schemes the regimes with dynamic chaos do appear. These regimes are unwanted regimes. They limit the efficiency and worsen the quality of the excited fields (FEL) and the quality of the accelerated bunches (in IFEL). However, the same regimes can be the basis of new schemes of the efficient plasma heating to thermonuclear temperatures. It was shown in this review that accounting of singular solutions requires a revision of the basic paradigms of the dynamic chaos. Indeed, as follows from obtained results, the accounting of such solutions leads to the possibility of appearance of the regimes with irregular dynamics in systems with one degree of freedom, and even in dynamic systems that are fully integrated, therefore, the singular solutions need to be considered when study many important physical systems. Many linear systems are transformed into the nonlinear systems when transformation of the variables occurs. The best-known examples of this are the transitions from the equations of quantum mechanics to the equations of classical mechanics, as well as the transition from the wave optics to the geometrical optics. In the new variables the regimes with chaotic dynamics can be realized. The review shows that this approach can be useful in many other cases. In particular, it was shown that by using such approach, it is possible to find a new mechanism of multiphoton excitation of quantum systems. Moreover, this approach gives possibility to show that almost any regular function can be represented as a combination of functions with chaotic behavior.

Keywords: regular dynamics, chaotic dynamics, acceleration, nonlinear resonances, cyclotron resonances, autoresonance, singular solutions, the paradigm of dynamic chaos.

PACS numbers: 41.60.Cr, 41.75.Lx, 05.40.-a, 05.45.-a, 52.35.Mw

Яновский В. В., Тур А. В. Частицы с внутренними степенями свободы // Проблемы теоретической физики. Научные труды. Выпуск 2 / В. А. Буц, А. Г. Загородний, А. В. Киричок, В. М. Конторович, В. М. Куклин, А. А. Рухадзе, В. П. Силин, А. В. Тур, В. В. Яновский; под общей редакцией А. Г. Загороднего, Н. Ф. Шульги, ред. вып. В. М. Куклин. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2016. – Вып. 2. – 376 с. (Серия «Проблемы теоретической и математической физики. Научные труды»).

Аннотация

Обзор посвящен новым явлениям, которые возникают при отказе от популярной абстракции точечной бесструктурной частицы. Обсуждается модель структурно-сложной частицы с внутренними степенями свободы и удобный бильярдный формализм для ее описания. Рассмотрены кинематические и динамические свойства таких частиц. Обнаружены новые законы отражения от барьера и рассеяния таких частиц с небольшим числом внутренних степеней свободы. Найдены необычные режимы отражения. Рассмотрено обобщение бильярдного формализма на случай заряженных структурно-сложных частиц. Установлены их законы движения в постоянном электрическом поле. Показана эффективность излучения структурно-сложной частицы в постоянном электрическом поле. Мощность излучения структурно-сложной частицы на несколько порядков превосходит мощность излучения эквивалентной бесструктурной частицы.

Ключевые слова: структурно-сложная частица, внутренние степени свободы, бильярдный формализм, отражение, рассеяние, кинематика, динамика, излучение структурно-сложной частицы.

Реферат

Одна из наиболее распространенных абстракций физики – это представление о бесструктурной точечной частице. В качестве таковых рассматриваются не только такие малые объекты, как электроны и протоны, но и множество макроскопических объектов и даже планеты. В этой части рассмотрим явления и эффекты, возникающие при учете конечных размеров и внутренней структуры частиц. Основное внимание уделено случаю небольшого числа внутренних степеней свободы. Это довольно сложный и интересный случай, для которого термодинамические закономерности не применимы. Предложена простая модель структурно-сложных частиц с внутренними степенями свободы. Рассмотрена кинематика таких частиц с небольшим числом внутренних степеней свободы. Обнаружен специфический эффект классического «квантования» состояний свободного движения таких частиц. «Спектр» состояний зависит от числа внутренних степеней свободы. Введен бильярдный формализм для описания кинематических и динамических свойств структурно-сложных частиц. Установлены все возможные режимы свободного движения структурно-сложных частиц с одной и двумя внутренними степенями свободы. Детально рассмотрено отражение структурно-сложной частицы с внутренней степенью свободы от упругого барьера. Установлены необычные законы отражения структурно-сложной частицы. Показано, что отражение такой частицы происходит после конечного числа столкновений с барьером. Число таких столкновений может быть большим и зависит от параметров структурно-сложной частицы. Обнаружены три качественно различных режима отражения. При одном из них скорость отраженной структурно-

сложной частицы превышает скорость падения ее на барьер. Разумеется, законы сохранения импульса и энергии в этом режиме не нарушаются. Рассмотрены законы рассеяния структурно-сложных частиц в рамках обобщенного бильярдного формализма. Обсуждены новые механизмы хаотизации при отражении и рассеянии частиц с внутренними степенями свободы. Найдены обобщенные законы рассеяния, качественно отличающиеся от законов рассеяния точечных частиц. С использованием численного моделирования показано, что полученные закономерности выполняются не только для модели структурно-сложных частиц, но и для любых наночастиц, состоящих из относительно небольшого числа атомов любых веществ. Рассмотрено обобщение бильярдного формализма на случай заряженных структурно-сложных частиц в постоянном электрическом поле. Предложено обобщение принципа Шварца спрямления траекторий на случай заряженных частиц. Используя его, изучена динамика структурно-сложной частицы с одной и двумя внутренними степенями свободы. Установлены все возможные режимы движения таких частиц. Показано, что мощность излучения структурно-сложной частицы с одной заряженной внутренней степенью свободы в постоянном электрическом поле на несколько порядков превосходит мощность излучения эквивалентной точечной бесструктурной частицы. Простая одномерная модель структурно-сложной частицы обобщена на трехмерный случай. Обобщен бильярдный формализм для описания свойств таких частиц. Рассмотрена кинематика таких частиц. Обнаружено своеобразное броуновское блуждание структурно-сложной частицы под воздействием «случайной» силы, действующей изнутри частицы, а не снаружи, как в обычном броуновском движении. Установлены закономерности такого блуждания. Обсуждается перераспределение энергии по внутренним степеням свободы структурно-сложных частиц.

Ключевые слова: структурно-сложная частица, внутренние степени свободы, бильярдный формализм, отражение, рассеяние, кинематика, динамика, излучение структурно-сложной частицы.

PACS numbers: 05. 45. –а.

Яновський В. В., Тур А. В. Частички з внутрішніми ступенями свободи

Анотація

Огляд присвячений новим явищам, які виникають з відмовою від популярної абстракції точкової безструктурної частинки. Обговорюється модель структурно-складної частинки із внутрішніми ступенями свободи й зручний бильярдний формалізм для її опису. Розглянуто кінематичні й динамічні властивості таких частинок. Виявлено нові закони відбиття від бар'єра та розсіювання таких частинок з невеликою кількістю внутрішніх ступенів свободи. Знайдено незвичайні режими відбиття. Розглянуто узагальнення бильярдного формалізму на випадок заряджених структурно-складних частинок. Встановлено їхні закони руху в постійному електричному полі. Показано ефективність випромінювання структурно-складної частинки в постійному електричному полі. Потужність випромінювання структурно-складної частинки на кілька порядків перевершує потужність випромінювання еквівалентної безструктурної частинки.

Ключові слова: структурно-складна частинка, внутрішні ступені свободи, бильярдний формалізм, відбиття, розсіювання, кінематика, динаміка, випромінювання структурно-складної частинки.

Реферат

Одна з найпоширеніших абстракцій фізики – це уявлення про безструктурну точкову частинку. У якості таких розглядаються не тільки такі малі об'єк-

ти, як електрони чи протони, але й безліч макроскопічних об'єктів і навіть планети. У цій частині розглянемо явища й ефекти, що виникають при обліку кінцевих розмірів і внутрішньої структури частинок. Головна увага приділена випадку невеликої кількості внутрішніх ступенів свободи. Це досить складний і цікавий випадок, для якого термодинамічні закономірності не можуть бути застосовані. Запропоновано просту модель структурно-складних частинок із внутрішніми ступенями свободи. Розглянуто кінематику таких частинок з невеликою кількістю внутрішніх ступенів свободи. Виявлено специфічний ефект класичного «квантування» станів вільного руху таких частинок. «Спектр» станів залежить від кількості внутрішніх ступенів свободи. Введено більярдний формалізм для опису кінематичних та динамічних властивостей структурно-складних частинок. Встановлено всі можливі режими вільного руху структурно-складних частинок з однієї й двома внутрішніми ступенями свободи. Детально розглянуто відбиття структурно-складної частинки із внутрішнім ступенем свободи від пружного бар'єра. Виявлено незвичайні закони відбиття структурно-складної частинки. Показано, що відбиття такої частинки відбувається після кінцевого числа зіткнень із бар'єром. Кількість таких зіткнень може бути великою і залежить від параметрів структурно-складної частинки. Виявлено три якісно різні режими відбиття. В одному з них швидкість відбитої структурно-складної частинки перевищує швидкість падіння її на бар'єр. Зрозуміло, що закони збереження імпульсу й енергії в цьому режимі не порушуються. Розглянуто закони розсіювання структурно-складних частинок у рамках узагальненого більярдного формалізму. Обговорено нові механізми хаотизації при відбитті й розсіюванні частинок із внутрішніми ступенями свободи. Знайдено узагальнені закони розсіювання, що якісно відрізняються від законів розсіювання точкових частинок. З використанням чисельного моделювання показано, що отримані закономірності виконуються не тільки для моделі структурно-складних частинок, але й для будь-яких наночастинок, що складаються з відносно невеликої кількості атомів будь-яких речовин. Розглянуто узагальнення більярдного формалізму на випадок заряджених структурно-складних частинок у постійному електричному полі. Запропоновано узагальнення принципу Шварца випрямлення траєкторій на випадок заряджених частинок. Використовуючи його, вивчена динаміка структурно-складної частинки з однією й двома внутрішніми ступенями свободи. Установлено всі можливі режими руху таких частинок. Показано, що потужність випромінювання структурно-складної частинки з одним зарядженим внутрішнім ступенем свободи в постійному електричному полі на кілька порядків перевершує потужність випромінювання еквівалентної точкової безструктурної частинки. Проста одинимірною моделлю структурно-складної частинки узагальнена на тривимірний випадок. Узагальнений більярдний формалізм для опису властивостей таких частинок. Розглянуто кінематику таких частинок. Виявлено своєрідне броуновське блукання структурно-складної частинки під впливом «випадкової» сили, що діє зсередини частинки, а не зовні, як у звичайному броуновському русі. Виявлено закономірності такого блукання. Обговорюється перерозподіл енергії по внутрішніх ступенях свободи структурно-складних частинок.

Ключові слова: структурно-складна частинка, внутрішні ступені свободи, більярдний формалізм, відбиття, розсіювання, кінематика, динаміка, випромінювання структурно-складної частинки.

PACS numbers: 05. 45. –а.

Yanovsky V.V., Tur A.V. The particles with internal degrees of freedom

Annotation

The review covers new phenomena occurring when one rejects the popular abstraction of dot structureless particle. The model of particle with complicated structure with inner degrees of freedom and convenient billiard formalism for its description are discussed. Kinematic and dynamic properties of such particles are considered. New laws of reflection from a barrier and dispersion of such particles with small number of inner degrees of freedom are established. Unusual modes of reflection are found. Generalization of billiards formalism for the case of charged particles with complicated structure is considered. The laws of its movement in electrostatic field are established. The efficiency of studying the emission of particles with complicated structure in electrostatic field is shown. The power of emission of a particle with complicated structure is by several digits more than the power of emission of the equivalent dot structureless particle.

Keywords: structurally complex particle, internal degrees of freedom, billiard formalism, reflection, scattering, kinematic, dynamics, radiation structurally complex particle.

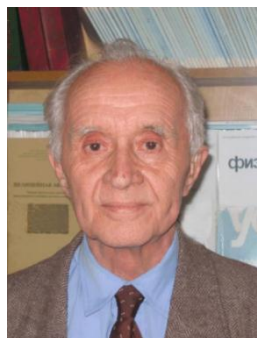
Abstract

One of the most widespread abstractions of physics is the idea of structureless dot particle. Not only small objects as electrons and protons, but also macroscopic objects and even planets are regarded as such ones. In this part, we will concentrate on phenomena and effects occurring in case of taking into consideration the size and inner structure of the particles. The main attention is paid at the case of small number of degrees of freedom. This is rather complicated and interesting case; thermodynamic regularities are not applicable in it. A simple model of particles with complicated structure and inner degrees of freedom is introduced. Kinematics of such particles with small number of inner degrees of freedom is considered. A special effect of classical "quantization" of free movement states for such particles. The «spectrum» of the states depends on number of inner degrees of freedom. Billiard formalism is introduced for description of kinematic and dynamic properties of particles with complicated structure. All the possible free movement modes of particles with complicated structure with one and two degrees of freedom are found. The reflection of a particle with complicated structure with an inner degree of freedom from elastic barrier is thoroughly considered. Unusual laws of reflection are established for particles with complicated structure. It is shown that the reflection of such a particle occurs after a finite number of collision with the barrier. The number of these collisions can be large and depends on the parameters of the particle with complicated structure. There have been found three qualitatively different modes of reflection. At one of them, the velocity of the reflected particle with complicated structure is more than the velocity of its falling on the barrier. Of course, the laws of impulse and energy conservation are not broken in this mode. The laws of dispersion for particles with complicated structure are considered in the framework of generalized billiard formalism. New mechanisms of chaotization during reflection and dispersion of particles with inner degrees of freedom are discussed. Generalized laws of dispersion, qualitatively different from the laws of dot particles are established. It is shown, with the use of numeric modeling, that the regularities obtained are true not only for the model of particles with complicated structure, but for any other nanoparticles consisting of relatively small number of atoms of any substance. The generalization of billiard formalism for the case of charged particles with complicated structure in electrostatic field is considered. Generalization of

Schwartz principle of trajectories rectifying is proposed for the case of charged particles. With its use, the dynamics of particle with complicated structure and one and two degrees of freedom is studied. All the possible modes of movement are established for such particles. It is shown that the power of emission of a particle with complicated structure with one charged inner degree of freedom in electrostatic field is by several digits more than the power of emission of the equivalent dot structureless particle. A simple one-dimensional model of particle with complicated structure is generalized for three-dimensional case. Billiard formalism is generalized for the description of such particles properties. Kinematics of these particles is also considered. A kind of Brownian walk of a particle with complicated structure influenced by an “occasional” force form within the particle and not from outside as in ordinary Brownian motion is observed. Regularities of this kind of walk are established. Redistribution of the energy on inner degrees of freedom of particles with complicated structure is discussed.

Keywords: structurally complex particle, internal degrees of freedom, billiard formalism, reflection, scattering, kinematic, dynamics, radiation structurally complex particle.

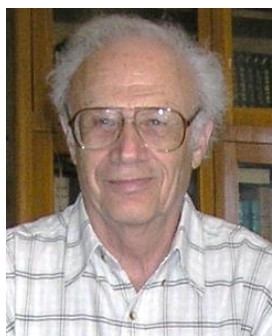
PACS numbers: 05. 45. -a.



Силин Виктор Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, организатор сектора плазменных явлений и директор отделения физики твердого тела ФИАН, профессор кафедры теоретической физики НИЯУ МИФИ, дважды лауреат Государственной премии СССР (1970, 1987), руководитель широко известного в мире семинара его имени по физике плазмы и теории твердого тела.



Рухадзе Анри Амвросиевич – доктор физико-математических наук, профессор, академик РАЕН, иностранный член Национальной академии наук Грузии, дважды лауреат Государственных премий (1981, 1991) и премии им. М. В. Ломоносова МГУ (1989), создатель, совместно с академиком НАН Украины Я. Б. Файнбергом, научного направления «Плазменная электроника». Почетный доктор Софийского университета им. К. Охридского (Болгария), Института теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова (Украина).



Ковторович Виктор Моисеевич – доктор физико-математических наук, профессор, зав. лабораторией теоретической астрофизики, главный научный сотрудник РИАН НАН Украины, профессор Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина. Соросовский профессор. Медаль Академии наук Украины «За подготовку научной смены».



Загородний Анатолий Глебович – доктор физико-математических наук, академик НАН Украины, иностранный член Российской академии наук, иностранный член-корреспондент Австрийской Академии наук, вице-президент Академии наук Украины, директор Института теоретической физики (Киев), почетный профессор Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина.



Буз Вячеслав Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, начальник лаборатории НИЦ ХФТИ (Харьков) НАН Украины, профессор Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина.



Киричок Александр Витальевич – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Института теоретической физики (Киев), докторант Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина.



Куклин Владимир Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой искусственного интеллекта и программного обеспечения факультета компьютерных наук, профессор физико-технического факультета Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина.



Тур Анатолий Валентинович – доктор физико-математических наук, научный сотрудник Национального центра научных исследований Франции (CNRS), профессор Университета Пауль Сабатини, института исследований астрофизики и планетологии, выпускник Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина.



Яновский Владимир Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом Института монокристаллов НАН Украины (Харьков), профессор Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина.

Наукове видання

Буц В'ячеслав Олександрович
Загородній Анатолій Глібович
Киричок Олександр Віталійович
Конторович Віктор Моїсейович
Куклін Володимир Михайлович
Рухадзе Анрі Амвросійович
Силін Віктор Павлович
Тур Анатолій Валентинович
Яновський Володимир Володимирович

ПРОБЛЕМИ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Наукові праці

(Рос. мовою)

Випуск 2

За редакцією професора В. М. Кукліна

Серія «Проблеми теоретичної
і математичної фізики»

За загальною редакцією
академіка А. Г. Загороднього,
академіка М. Ф. Шульги

Коректор *О. В. Анцибора*
Комп'ютерне верстання *О. С. Чистякова*
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 70×100/16. Ум. друк. арк. 16,08. Тираж 300 пр.
Зам. № 187/13.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
Тел. 705-24-32