

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ

ISSN 0453-8048

К-14038



ХАРЬКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

361 '91

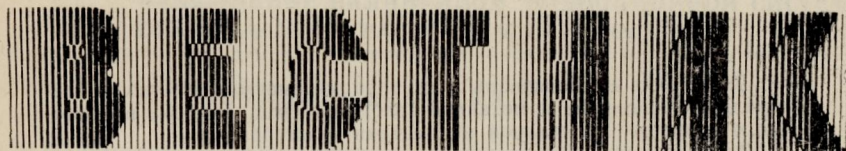
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И МЕХАНИКА

«ОСНОВА»

СОДЕРЖАНИЕ

Сохин А. С. Наблюдение билинейной эволюционной системы, описываемой уравнением переноса	3
Скляр Г. М. О точной управляемости линейного уравнения с неограниченным оператором	20
Бессонов Г. А., Коробова Е. В. Решение задачи синтеза позиционного управления для некоторых классов нелинейных систем	27
Жакин А. И. Квантовомеханический расчет скорости электрохимической реакции $R + e^- \rightarrow R^-$ на поверхности электрода	33
Львов В. А. Об одной вероятностной задаче, возникающей при описании движения твердых частиц в жидкости	42
Босов А. А. О построении оператора сглаживания	63
Зефилов В. Н., Куценко Н. Т., Подольский Е. Н. Аппроксимация измеряемой функции квазиполиномом специального вида в реальном времени	67
Чуприна В. Е. Управляемость линейной стационарной дискретной системы на подпространство с удержанием	71
Гавриляко В. М. Численное решение задачи быстрогодействия для колебательной системы	78
Жмудь Э. М. О нулях неприводимых комплексных характеров конечной группы	80
Шляхов В. В., Шабанов-Кушнаренко С. Ю. Линейные предикаты на произвольном множестве с непустой внутренностью	95
Васоф Ахмед. О линейных преобразованиях кривых в гильбертовых пространствах	100
Барруш Филипп. Об одном классе нестационарных кривых в гильбертовом пространстве	105
Джон Ньюгоре Мариуки. О кривых в гильбертовых пространствах с нестационарными приращениями	110

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ



ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 361

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И МЕХАНИКА

Основан в 1965 г.

Харьков
Издательство «Основа» при Харьковском
государственном университете
1991

В вестнике опубликованы статьи по математической теории оптимальных процессов и механике сплошных сред, а также по некоторым вопросам прикладной математики и алгебры.

Для научных работников и специалистов.

Редакционная коллегия: И. Е. Тарапов (отв. ред.), В. И. Коробов (зам. отв. ред.), А. П. Маринич (отв. секр.), Ю. И. Любич, В. А. Марченко

Адрес редакционной коллегии: 310077 Харьков, пл. Дзержинского, 4, университет, механико-математический факультет, тел. 45-72-40.

Редакция литературы по естественным наукам и филологии.
Зав. редакцией *Е. П. Иващенко*

Издано по заказу Харьковского государственного университета

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 361

Прикладная математика и механика

Редактор *О. И. Григорьян*
Художественный редактор *Т. П. Короленко*
Технический редактор *Л. Т. Ена*
Корректор *Л. П. Сын*

ОИБ № 13753

Сдано в набор 15.08.90. Подписано в печать 28.11.91. Формат 60×90/16. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 7. Усл. кр.-отт. 7,25. Уч.-изд. л. 8. Тираж 500 экз. Изд. № 1920. Зак. 1184. Цена 1 р. 60 к. Заказное.

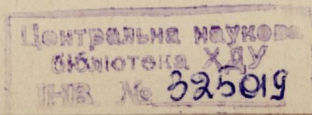
Издательство при Харьковском государственном университете.
310005 Харьков, пл. Восстания, 17.

Харьковская городская типография № 16.
310003 Харьков, ул. Университетская, 16.

В 1604030000—079
М226(04)—91 Заказное

© Харьковский государственный университет, 1991

к-14038



А. С. СОХИ.

НАБЛЮДЕНИЕ БИЛИНЕЙНОЙ ЭВОЛЮЦИОННОЙ СИСТЕМЫ,
ОПИСЫВАЕМОЙ УРАВНЕНИЕМ ПЕРЕНОСА

1. Постановка задачи

Рассмотрим эволюционную систему, описываемую уравнением односкоростного переноса с нестационарным неизотропным потенциалом (управлением)

$$\frac{\partial y}{\partial t} + a \frac{\partial y}{\partial x} = \int_{-1}^1 u(x, t, a, a') y(x, t, a') da, \quad -\infty < x, t < \infty, \\ -1 < a < 1 \quad (1)$$

и начальным состоянием

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(x + at, t, a) = f_-(x, a). \quad (1')$$

Функция $y(x, t, a)$ описывает плотность частиц в точках, летящих под углом $\arccos a$ к оси Ox со скоростью 1. Введем обозначения:

$A = [-1, 1]$, $X = [-\infty, \infty]$, $L_2(X, A)$ ($\hat{L}_2(X, A)$) — гильбертово пространство вещественных измеримых функций $f(x, a)$, вторая степень которых суммируема на множестве $X \times A$, со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_X \int_A f(x, a) g(x, a) dx da \quad ((f, g)_L = \int_X \int_A |a| f(x, a) \times \\ \times g(x, a) dx da$$

и нормой

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} \quad (\|f\|_L = \sqrt{(f, f)_L});$$

$C(-\infty, \infty; H)$ — множество непрерывных отображений вещественной оси в пространство H с нормой $\|\cdot\|_H$ нормированных по формуле

$$\|y\| = \max_{t \in (-\infty, \infty)} \|y(t)\|_H,$$

где $H = L_2(X, A)$.

Пусть u, f, g — функции переменных x, t, a, a' . Обозначим $\hat{v} = v/a'$, $\tilde{v} = v/a$, $\bar{v} = v/(a' - a)$, где $v = u, f, g$;

$$q_{\infty 1}(t) = \int_{-1}^1 \max_{x, a} |q(x, t, a, a')| da';$$

$$\bar{q}_{1\infty}(t) = \int_{-1}^1 \max_{x, a'} |q(x, t, a, a')| da;$$

$$q_{22}(t) = \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \max_x |q(x, t, a, a')|^2 da da' \right)^{1/2};$$

$$q_{\infty\infty}(t) = q(t) = \max_{x, a, a'} |q(x, t, a, a')|.$$

Здесь $q = \widehat{v}, \widetilde{v}, \bar{v}$;

$$p^{\pm}(t) = p_{\infty}^{\pm}(t) = \max_{t' \in [t, \pm\infty]} p(t'), \quad p_1^{\pm}(t) = \left| \int_t^{\pm\infty} p(t') dt' \right|,$$

где $p(t) = q_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \infty$.

Рассмотрим сильно непрерывную в $L_2(X, A)$ унитарную группу операторов $\{G_t, -\infty < t < \infty\}$, определяемую равенством

$$G_t f_{-}(x, a) \equiv f_{-}(x - at, a) \equiv f_0(x, t, a) \equiv f_0(t) \in L_2(X, A), \quad \forall t. \quad (2)$$

Задачу отыскания функции $z(x, t, a)$, удовлетворяющей уравнению (1) при $u \equiv 0$ и начальному условию (1'), назовем невозмущенной задачей, отвечающей задаче (1) — (1'). Если функция $f_{-}(x, a)$ дифференцируема по x , то функция $f_0(x, t, a)$, определяемая равенством (2), является решением невозмущенной задачи. Если функции $f_{-}(x, a)$, $u(x, t, a, a')$ непрерывно дифференцируемы по x , то задача (1) — (1') эквивалентна задаче решения интегрального уравнения

$$y(x, t, a) = f_0(x, t, a) + \int_{-\infty}^t \int_{-1}^1 u(x - a(t - t'), t', a, a') \times \\ \times y(x - a(t - t'), t', a') dt' da'. \quad (3)$$

Если функции $f_{-}(x, a)$, $u(x, t, a, a')$ не имеют указанной гладкости, то решение интегрального уравнения (3) в подходящем функциональном пространстве может существовать, но не будет обладать гладкостью, нужной для подстановки в уравнение (1). В этом случае будем называть решение интегрального уравнения (3) обобщенным решением задачи (1) — (1'). Ниже мы будем рассматривать только обобщенные решения. Управление $u(x, t, a, a')$ подчиним условиям:

1) $u(x, t, a, a')$ — непрерывная функция по всем переменным;

2) $n(a) \equiv \text{supp } u(x, t, a, a') \subset D(a) \equiv \{a': a/a' < 1\}$;

3) $n(a) \cap n^*(a') = \emptyset, \quad \forall a' \notin n(a)$,

где $n^*(a') \equiv \text{supp } u(x, t, a, a')$; (4)

4) функция $p^\pm(t)$ ограничена на интервале $[-\infty, \infty]$ и суммируема на интервале $[\alpha, \pm\infty]$ при $\alpha \neq \mp\infty$, где

$$p = v_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \infty, \quad v = \overset{a}{u}, \tilde{u}, \overset{-}{u}.$$

Множество функций $u(x, t, a, a')$, подчиненных условиям (4), назовем множеством допустимых управлений и обозначим символом U .

Задачей эволюции назовем задачу отыскания решения $y(t) \in L_i(X, A)$, $\forall t \in (-\infty, \infty)$, $i = 1, 2, \infty$ интегрального уравнения (3), т. е. задачу нахождения обобщенного решения $y(t)$ уравнения (1), которое при $t \rightarrow -\infty$ сходится в топологии $L_i(X, A)$ к решению $G_i f_-$ невозмущенной задачи

$$y(t) = G_t f_- + \varepsilon_-(t), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \varepsilon_-(t) = 0.$$

Эволюционную систему (3), подчиненную условиям (4) на управление, обозначим через $S(f_-, U)$. Точку $f_- \in L_i(X, A)$, $i = 1, 2, \infty$ назовем начальным состоянием системы $S(f_-, U)$. Легко видеть, что интегральное уравнение (3) представимо в виде

$$y(t) = G_t f_+ + \varepsilon_+(t), \quad (5)$$

$$\text{где} \quad f_+ = f_- + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-1}^1 G_{-t'} [u(x, t', a, a') y(x, t', a')] dt' da';$$

$$\varepsilon_+(t) = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G_{-t'} [u(x, t', a, a') y(x, t', a')] dt' da',$$

причем $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_+(t) = 0$. Точку $f_+ \in L_i(X, A)$ назовем финальным состоянием системы $S(f_-, U)$. Отображение $S: f_- \rightarrow f_+$

назовем оператором перехода системы $S(f_-, U)$. Знание эволюции системы позволяет найти финальное состояние системы из предельного равенства

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} G_{-t} y(t) = f_+,$$

в котором рассматривается сходимость в топологии $L_i(X, A)$, $i = 1, 2, \infty$. Знание оператора перехода позволяет найти финальное (наблюдаемое) состояние f_+ по формуле $f_+ = S f_-$ без изучения эволюции $y(t)$, $\forall t \in (-\infty, \infty)$ и предельного перехода при $t \rightarrow +\infty$. Задачу отыскания оператора перехода S по заданному управлению $u \in U$ назовем задачей наблюдения. Задачу отыскания управления $u \in U$ по заданному оператору перехода назовем обратной задачей наблюдения или задачей идентификации системы $S(f_-, U)$ по всевозможным начальным (заданным) и отвечающим им финальным (наблюдаемым) состояниям.

Метод исследования данной задачи близок идеям методов исследования стационарной задачи рассеяния для оператора Штурма—Лиувилля [1] и нестационарной задачи для системы двух гиперболических уравнений [2].

2. Эволюция системы

Теорема 1. Для $f_- \in L_i(X, A)$, $i=1, 2, \infty$, при $u \in U$ существует единственное решение $y(t) \in L_i(X, A)$, $i=1, 2, \infty$, $t \in (-\infty, \infty)$ задачи эволюции, и это решение удовлетворяет неравенствам

$$\|y(t)\|_i \leq \|f_-\|_i \exp\left(2 \int_{-\infty}^t u(t') dt'\right), \quad (5')$$

$$\|y(t) - G_t f_-\|_i \leq \|f_-\|_i \left\{ \exp\left(2 \int_{-\infty}^t u(t') dt'\right) - 1 \right\},$$

$$i=1, 2, \infty. \quad (5'')$$

Доказательство. Формально решением интегрального уравнения (3) является сумма ряда

$$f_0(t) + U_0 f_0(t) + \dots + U_0^n f_0(t) + \dots = y(t), \quad (6)$$

где

$$U_0 f_0(t) = \int_{-\infty}^t G_{t-t'} [U(t') f_0(t')] dt',$$

$$U(t') f_0(t') = \int_1^1 u(x, t', a, a') f_0(x, t', a') da'.$$

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что ряд (6) сходится при $t \in (-\infty, \infty)$ в топологии $L_i(X, A)$, $i=1, 2, \infty$. Нетрудно проверить, что оператор $U(t)$ отображает $L_i(X, A)$ в себя при $t \in (-\infty, \infty)$ и $\|U(t)\|_i \leq 2u(t)$, кроме того,

$$\|f_0(t)\|_i = \|f_-\|_i, \|U_0 f_0(t)\|_i \leq 2 \int_{-\infty}^t u(t') dt'.$$

Функция $u(t)$ суммируема, так как имеет суммируемую мажоранту $u^-(t)$ на интервале $(-\infty, a)$, $a < +\infty$. Методом индукции покажем справедливость неравенства

$$\|U_0^n f_0(t)\|_i \leq \frac{1}{n!} (2u_1^-(t))^n \|f_-\|_i, \quad n=0, 1, \dots \quad (7)$$

При $n=0, 1$ справедливость неравенства (7) получена выше.

Пусть $n=m-1$, тогда

$$\begin{aligned} \|U_0^m f_0(t)\|_i &\leq \left\| \int_{-\infty}^t G_{t-t'} U_0 U_0^{m-1} f_0(t') dt' \right\|_i \leq \\ &\leq \|f_-\|_i \int_{-\infty}^0 2 \frac{du_1^-(t')}{dt'} \frac{(2u_1^-(t'))^{m-1}}{(m-1)!} dt' = \|f_-\|_i \frac{(2u_1^-(t))^m}{m!}, \end{aligned}$$

т. е. неравенство (7) справедливо при $n=m$. Из неравенства (7) следует, что ряд (6) сходится, а его сумма $y(t)$ удовлетворяет неравенству (5'). Положим

$$\varepsilon_-(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n f_0(t),$$

тогда решение задачи эволюции имеет представление $y(t) = G_t f_- + \varepsilon_-(t)$, причем

$$\|\varepsilon_-(t)\|_i \leq \|f_-\|_i \{\exp(2u_1^-(t)) - 1\} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow -\infty,$$

т. е., неравенство (5'') также выполнено.

Теорема 2. Решение задачи эволюции имеет представление

$$y(t) = G_t f_+ + \varepsilon_+(t), \quad (8)$$

удовлетворяет неравенствам

$$\|y(t)\|_i \leq \|f_+\|_i \exp(2u_1^+(t)); \quad (8')$$

$$\|y(t) - G_t f_+\|_i \leq \|f_+\|_i \{\exp(2u_1^+(t)) - 1\}, \quad i = 1, 2, \infty, \quad (8'')$$

где

$$f_+ \in L_i(X, A), \quad i = 1, 2, \infty, \quad \|f_+\| \leq \|f_-\| \exp(2u_1^-(+\infty)).$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Из теорем 1, 2 вытекают такие свойства оператора перехода.

Следствие 1. Оператор перехода является линейным непрерывным оператором в $L_i(X, A)$, $i = 1, 2, \infty$, имеет вид $S = I + F$, где I — тождественный оператор, а норма оператора F удовлетворяет неравенству $\|F\| \leq \exp(2u_1^-(+\infty)) - 1$.

3. Преобразование решений интегральных уравнений задачи эволюции

Из теоремы 2 работы [3] как частный случай вытекают теоремы, дающие треугольное (вольтеровское) представление решений уравнения переноса через решение невозмущенного уравнения, отвечающее начальному или финальному состоянию.

Теорема 3. Решение $y(x, t, a)$ интегрального уравнения задачи эволюции с начальным состоянием $f_-(x, a)$ имеет представление

$$y(x, t, a) = f_-(x - at, a) + \int_{-\infty}^t \int_{-1}^1 K^-(x, t, a, t', a') f_-(x - a't', a') dt' da'. \quad (9)$$

Функция $K^-(x, t, a, t', a')$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$K^-(x, t, a, t', a') = \frac{1}{1 - a/a'} u\left(x - a \frac{t - t'}{1 - a/a'}, \frac{t' - at/a'}{1 - a/a'}, a, a'\right) -$$

$$- \int_{\theta(t, t', a/a')}^t \int_{n(a, a')} u(\tilde{x}, \tilde{t}, a, \tilde{a}) K^-(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{a}, \tilde{t}', a') d\tilde{t} d\tilde{a}, \quad (9')$$

где $\tilde{x} = x + a(\tilde{t} - t)$; $\tilde{t}' = t' + a(\tilde{t} - t)/a'$; $n(a, a') = n(a) \cap n^*(a')$;

$$\theta(t, t', a/a') = (t' - at/a')/(1 - a/a')$$

в подынтегральном выражении, справедливы равенство

$$K^-(x, t, a, t, a') = \frac{1}{1 - a/a'} u(x, t, a, a'),$$

неравенства

$$\sup_{\substack{x, a, a', \\ t' \in [-\infty, t]}} \left| \frac{1}{a'} K^-(x, t, a, t', a') \right| \leq \bar{u}_\infty^-(t) \exp(2u_1^-(t)); \quad (9'')$$

$$\max_{x, a} \int_{-\infty}^t \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{a'} K^-(x, t, a, t', a') \right| dt' da' \leq \hat{u}_{1\infty}^-(t) \exp(2u_1^-(t)), \quad (9''')$$

включение

$$\text{supp } K^-(x, t, a, t', a') \subseteq \underline{n(a)}, \quad \forall x, t, t'.$$

Теорема 4. Решение $y(x, t, a)$ интегрального уравнения задачи эволюции с финальным состоянием $f_+(x, a)$ имеет представление

$$y(x, t, a) = f_+(x - at, a) + \int_t^\infty \int_{-1}^1 K^+(x, t, a, t', a') \times \\ \times f_+(x - a't', a') dt' da'. \quad (10)$$

Функция $K^+(x, t, a, t', a')$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$K^+(x, t, a, t', a') = - \frac{1}{1 - a/a'} u \left(x + \frac{t' - t}{1 - a/a'}, \frac{t' - at/a'}{1 - a/a'}, \right. \\ \left. a, a' \right) - \int_t^\theta \int_{n(a, a')} u(\tilde{x}, \tilde{t}, a, \tilde{a}) K^+(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{a}, \tilde{t}', a') d\tilde{t} d\tilde{a},$$

$$\text{где} \quad \tilde{x} = x + a(\tilde{t} - t), \quad \tilde{t}' = t' + a(\tilde{t} - t)/a', \quad (10')$$

$$\theta = (t' - at/a')/(1 - a/a'), \quad n(a, a') = n(a) \cap n^*(a')$$

в подынтегральном выражении, справедливы равенство

$$K^+(x, t, a, t, a') = - \frac{1}{1 - a/a'} u(x, t, a, a'),$$

неравенства

$$\forall \max_{\substack{x, a, a', \\ t' \in [t, \infty]}} \left| \frac{1}{a'} K^+(x, t, a, t', a') \right| \leq \bar{u}_\infty^+(t) \exp(2u_1^+(t)); \quad (10'')$$

$$\max_{x, a} \int_{-1}^{\infty} \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{a'} K^+(x, t, a, t', a') \right| dt' da' \leq \hat{u}_{1\infty}^+(t) \exp(2u_1^+(t)), \quad (10''')$$

включение $\supp_a K^+(x, t, a, t', a') \subseteq n(a), \forall x, t, t'.$

Равенства (9), (10) определяют преобразование решения невозмущенного уравнения в решения возмущенного уравнения, имеющие ту же асимптотику, соответственно, при $t \rightarrow \pm \infty$.

Теорема 5. Функция $f_-(x-at, a)$, определяющая начальное состояние задачи эволюции, имеет через решение $y(x, t, a)$ задачи эволюции с этим начальным состоянием такое представление:

$$f_-(x-at, a) = y(x, t, a) + \int_{-\infty}^t \int_{-1}^1 H^-(x, t, a, t', a') \times \\ \times y(x, t', a') dt' da'. \quad (11)$$

Функция $H^-(x, t, a, t', a')$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$H^-(x, t, a, t', a') = -\frac{1}{1-a/a'} u\left(x-a \frac{t-t'}{1-a/a'}, \frac{t'-at/a'}{1-a/a'}, a, a'\right) + \int_0^t \int_{-1}^1 \frac{a}{\tilde{a}} u(\tilde{x}, \tilde{t}', \tilde{a}, a') \times \\ \times H^-(\tilde{x}, \tilde{t}, a, \tilde{t}', \tilde{a}) d\tilde{t} d\tilde{a} = -\frac{1}{1-a/a'} u\left(x-a \frac{t-t'}{1-a/a'}, \frac{t'-at/a'}{1-a/a'}, a, a'\right) + \int_0^{t'} \int_{-1}^1 \frac{a'}{\tilde{a}} u(\tilde{x}', \tilde{s}, \tilde{a}, a') \times \\ \times H^-(\tilde{x}', \tilde{t}'', a, \tilde{s}, \tilde{a}) d\tilde{s} d\tilde{a}, \quad (11')$$

где

$$\tilde{x} = x + a(\tilde{t}-t), \quad \tilde{t}' = t' + a(\tilde{t}-t)/a'; \\ \tilde{a} = (t' - at/a')/(1-a/a'), \quad \tilde{x}' = x + a'(\tilde{s}-t')/a, \\ \tilde{t}'' = t + a'(\tilde{s}-t')/a$$

в подынтегральном выражении, справедливы равенство

$$H^-(x, t, a, t', a') = - \frac{1}{1-a/a'} u(x, t, a, a'),$$

неравенства

$$\sup_{\substack{x, a, a', \\ t' \in [-\infty, t]}} \left| \frac{1}{a'} H^-(x, t, a, t', a') \right| \leq \bar{u}_\infty^-(t) \exp(2u_1^-(+\infty)); \quad (11'')$$

$$\begin{aligned} & \max_{x, a} \int_{-\infty}^t \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{a'} H^-(x, t, a, t', a') \right| dt' da' \leq \\ & \leq \hat{u}_{1\infty}^-(t) [1 + \tilde{u}_{\infty}^-(t) \exp(2u_1^-(+\infty))], \end{aligned} \quad (11''')$$

включение $\text{supp } H^-(x, t, a, t', a') \subseteq n(a), \forall x, t, t'.$

Теорема 6. Функция $f_+(x-at, a)$, определяющая финальное состояние задачи эволюции, имеет через решение $y(x, t, a)$ задачи эволюции с этим финальным состоянием такое представление:

$$\begin{aligned} f_+(x-at, a) = y(x, t, a) + \int_t^\infty \int_{-1}^1 H^+(x, t, a, t', a') \times \\ \times y(x, t', a') dt' da'. \end{aligned} \quad (12)$$

Функция $H^+(x, t, a, t', a')$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned} H^+(x, t, a, t', a') = \frac{1}{1-a/a'} u \left(x + a \frac{t'-t}{1-a/a'}, \frac{t'-at/a'}{1-a/a'}, \right. \\ \left. a, a' \right) + \int_t^\theta \int_{n(a, a')} \frac{a}{\tilde{a}} u(\tilde{x}, \tilde{t}', \tilde{a}, a') H^+(\tilde{x}, \tilde{t}, a, \tilde{t}', \tilde{a}) d\tilde{t} d\tilde{a} = \\ = \frac{1}{1-a/a'} u \left(x + a \frac{t'-t}{1-a/a'}, \frac{t'-at/a'}{1-a/a'}, a, a' \right) + \\ + \int_t^\theta \int_{n(a, a')} \frac{a'}{\tilde{a}} u(\tilde{x}', \tilde{s}, \tilde{a}, a') H^+(\tilde{x}, \tilde{t}', a, \tilde{s}, \tilde{a}) d\tilde{s} d\tilde{a}, \end{aligned} \quad (12')$$

где $\tilde{x}, \tilde{t}', n(a, a'), \theta = \theta(t, t', a/a'), \tilde{x}', \tilde{t}''$

в подынтегральном выражении те же, что в теореме 5, справедливы равенство

$$H^+(x, t, a, t, a') = \frac{1}{1-a/a'} u(x, t, a, a'),$$

неравенства

$$\forall \max_{\substack{x, a, a', \\ t' \in [t, \infty]}} \left| \frac{1}{a'} H^+(x, t, a, t', a') \right| \leq \bar{u}_{\infty}^+(t) \exp(2u_1^+(-\infty)); \quad (12'')$$

$$\begin{aligned} & \max_{x, a} \int_t^{\infty} \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{a'} H^+(x, t, a, t', a') \right| dt' da' \leq \\ & \leq \hat{u}_{1\infty 1}^+(t) [1 + \tilde{u}_{\infty 1}(t) \exp(u_{1\infty 1}^+(-\infty))], \end{aligned} \quad (12''')$$

включение

$$\supp_{a'} H^+(x, t, a, t', a') \subseteq n(a), \quad \forall x, t, t'.$$

Неравенства (11''), (11'''), (12''), (12''') более точные, чем вытекающие из теоремы 2 работы [3]. Докажем, например, неравенства (11'') и (11'''). Так как существование решения уравнения (11') доказано в работе [3], достаточно лишь уточнить оценки для функции $H^-(x, t, a, t', a')$: В равенстве (11') введем новые переменные $s = t' - at/a'$, $\hat{H}^- = H^-/a'$, $\alpha = a/a'$, тогда

$$\begin{aligned} \hat{H}^-(x, t, a, s + \alpha t, a') &= -\bar{u}(x + a(s - t), \frac{s}{1-\alpha}, a, a') + \\ &+ \int_{s/(1-\alpha)-1}^t \int_{-1}^1 \alpha u(x + a(\tilde{t} - t), s + \alpha \tilde{t}, \tilde{a}, a') \hat{H}^-(x + a(\tilde{t} - t), \tilde{t}, \tilde{a}, \\ & \quad s + \alpha \tilde{t}, \tilde{a}) d\tilde{t} d\tilde{a}, \end{aligned} \quad (13)$$

причем $s \in (-\infty, (1-\alpha)t)$.

Обозначим

$$\max_{x, a, a'} |\hat{H}^-(x, t, a, t', a')| = \hat{H}^-(t, t'),$$

тогда из уравнения (13) вытекает такое неравенство:

$$\hat{H}^-(t, s + \alpha t) \leq \bar{u}\left(\frac{s}{1-\alpha}\right) + \int_{-\infty}^t |\alpha| u_{1\infty}(s + \alpha t) \hat{H}^-(\tilde{t}, s + \alpha \tilde{t}) d\tilde{t}, \quad (14)$$

из которого, учитывая неравенство $u_{1\infty}(\cdot) \leq 2u(t)$, легко получаем

$$\hat{H}^-(t, s + \alpha t) \leq \bar{u}\left(\frac{s}{1-\alpha}\right) \exp\left(2|\alpha| \int_{-\infty}^t u(s + \alpha \tilde{t}) d\tilde{t}\right).$$

Замечая, что

$$\max_{t' \in [-\infty, t]} \hat{H}^-(t, t') = \max_{-\infty < (1-\alpha)t} \hat{H}^-(t, s + \alpha t) \equiv \hat{H}^-(t),$$

из последнего неравенства получаем

$$\hat{H}^{-}(t) \leq \bar{u}_{\infty}^{-}(t) \exp(2u_1^{-}(+\infty)),$$

эквивалентное неравенству (11''). Обозначим для краткости

$$A(t) = \max_{x,a} \int_{-\infty}^t \int_{-1}^1 |\hat{H}^{-}(x, t, a, t', a')| dt' da',$$

тогда после интегрирования по t' , a' деленного на a' равенства (11'), учитывая предыдущее обозначение, получим

$$A(t) \leq \hat{u}_{1\infty 1}^{-}(t) + \max_{x,a} \int_{-1}^1 da' \int_{-\infty}^t dt' \int_{\theta(t,t',a/a')}^{t'} d\tilde{s} \int_{-1}^1 |u(x + a'(\tilde{s} - t'))| \cdot |\hat{H}^{-}(x + a'(\tilde{s} - t'), t + (\tilde{s} - t')a'/a, a, \tilde{s}, \tilde{a})| d\tilde{a}.$$

После перемены последовательности интегрирования и некоторых очевидных оценок находим

$$A(t) \leq \hat{u}_{1\infty 1}^{-}(t) + \int_{-1}^1 da' \int_{-\infty}^t d\tilde{s} \|u(\tilde{s}, a')\| \cdot \int_{\tilde{s}}^{\tilde{s} + a(t-\tilde{s})/a'} dt' \int_{-1}^1 |\hat{H}^{-}(\cdot)| d\tilde{a}.$$

Положив $\xi = t + a'(\tilde{s} - t')/a \in [\tilde{s}, t]$, из предыдущего неравенства получим

$$A(t) \leq u_{1\infty 1}^{-}(t) + \int_{-1}^1 da' \int_{-\infty}^t \|u(\tilde{s}, a')\| \cdot \max_{x,a} \int_{\tilde{s}}^t \int_{-1}^1 |\hat{H}^{-}(x + a(\xi - t), \xi, a, \tilde{s}, \tilde{a})| d\xi d\tilde{a},$$

где $\|u(\tilde{s}, a')\| = \max_{x,a} |u(x, \tilde{s}, a, a')|$.

Обозначив

$$\hat{H}_2^{-}(x, t, a, \tilde{s}, \tilde{a}) = \int_{\tilde{s}}^t |\hat{H}^{-}(x + a(\xi - t), \xi, a, \tilde{s}, \tilde{a})| d\xi;$$

$$\hat{H}_2^{-}(t, \tilde{s}) = \max_{x,a} \int_{-1}^1 \hat{H}_2^{-}(x, t, a, \tilde{s}, \tilde{a}) d\tilde{a},$$

для функции $A(t)$ получим неравенство

$$A(t) \leq \hat{u}_{1\infty 1}^{-}(t) + \int_{-\infty}^t u_{\infty 1}(\tilde{s}) \hat{H}_2^{-}(t, \tilde{s}) d\tilde{s}. \quad (15)$$

Изучим функцию $\hat{H}_2^-(x, t, a, \tilde{s}, \tilde{a})$. Из уравнения (11') для функции $\hat{H}_2^-(x, t, a, s, a')$ запишем неравенство

$$\begin{aligned} \hat{H}_2^-(x, t, a, s, a') \leq & \int_s^t |\bar{u}(x - a \frac{\bar{t} - s}{1 - a/a'}, \frac{s - a\bar{t}/a'}{1 - a/a'}, a, a')| d\bar{t} + \\ & + \int_s^t d\bar{t} \int_{\theta(\bar{t}, s, a/a')}^s d\sigma \int_{-1}^1 |u(x + a'(\sigma - s), \sigma, \tilde{a}, a')| \times \\ & \times \hat{H}^-(x, \bar{t} + a'(\sigma - s)/a, a, \sigma, \tilde{a}) d\tilde{a}, \end{aligned}$$

где $\tilde{x} = x + a'(\sigma - s)$. После изменения последовательности интегрирования находим, что

$$\begin{aligned} \hat{H}_2^-(x, t, a, s, a') \leq & \int_s^{\theta(t, s, a/a')} \|\check{u}(\xi, a, a')\| d\xi + \\ & + \int_{\theta(t, s, a/a')}^s d\sigma \cdot \int_{-1}^1 \|u(\sigma, \tilde{a}, a')\| \hat{H}_2^-(x + a'(\sigma - s), t + a'(\sigma - s)/a, \\ & a, \sigma, \tilde{a}) d\tilde{a}, \end{aligned}$$

где $\|\check{u}(\xi, a, a')\| = \max_{-\infty < x < \infty} \left| \frac{1}{a'} u(x, \xi, a, a') \right|$. Положим

$$A_1(t, a, a') = \int_{-\infty}^t \|\check{u}(\xi, a, a')\| d\xi.$$

Замечая, что $\left(s; \frac{s - at/a'}{1 - a/a'}\right) \subset (-\infty, t)$ при $t \geq s, 1 - a/a' > 0$, получаем неравенство

$$\begin{aligned} \hat{H}_2^-(x, t, a, s, a') \leq & A_1(t, a, a') + \\ & + \int_{\theta(t, s, a/a')}^t d\tilde{t} \int_{-1}^1 \left| \frac{a}{a'} \right| \|u(s + a(\tilde{t} - t)/a', \tilde{a}, a')\| \times \\ & \times \hat{H}_2^-(x + a(\tilde{t} - t), \tilde{t}, a, s + a(\tilde{t} - t)/a', \tilde{a}) d\tilde{a}. \end{aligned}$$

Полагая $s = \xi + at$, имеем

$$\hat{H}_2^-(x, t, a, \xi + at, a') \leq A_1(t, a, a') +$$

$$+ \int_{\xi/(1-\alpha)}^t d\tilde{t} \int_{-1}^1 |\alpha| \|u(\xi + \alpha\tilde{t}, \tilde{a}, a')\| \hat{H}_2^-(x + a(\tilde{t} - t), \tilde{t}, a, \xi + \alpha\tilde{t}, \tilde{a})/d\tilde{a}.$$

Интегрируя последнее неравенство по a' и замечая, что $\int_{-1}^1 \max_{\tilde{a}} \|u(\xi, \tilde{a}, a')\| da' = u_{\infty 1}(\xi) \leq 2u(\xi)$, получаем неравенство

$$\hat{H}_2^-(t, \xi + \alpha t) \leq \check{u}_{\infty 1}(t) + \int_{\xi/(1-\alpha)}^t \|\alpha\| u_{\infty 1}(\xi + \alpha\tilde{t}) \hat{H}_2^-(\tilde{t}, \xi + \alpha\tilde{t}) d\tilde{t},$$

из которого следует

$$\begin{aligned} \hat{H}_2^-(t, \xi + \alpha t) &\leq \check{u}_{\infty 1}(t) \exp \left(\int_{-\infty}^t \|\alpha\| u_{\infty 1}(\xi + \alpha\tilde{t}) d\tilde{t} \right) \leq \\ &\leq \check{u}_{\infty 1}(t) \exp(u_{1\infty 1}^-(+\infty)) \end{aligned}$$

при $-\infty \leq \xi \leq t - \alpha t$. Подставляя в (15) вместо функции $\hat{H}_2^-(t, \tilde{s})$ найденную ее оценку, приходим к такому неравенству

$$\begin{aligned} A(t) &\leq \hat{u}_{1\infty 1}^-(t) + \int_{-\infty}^t u_{\infty 1}(\tilde{s}) \check{u}_{\infty 1}(t) \exp(u_{1\infty 1}^-(+\infty)) d\tilde{s} \leq \\ &\leq \hat{u}_{1\infty 1}^-(t) + u_{1\infty 1}^-(t) \check{u}_{\infty 1}(t) \exp(u_{1\infty 1}^-(+\infty)). \end{aligned}$$

Замечая, что $u_{1\infty 1}^-(t) \leq \hat{u}_{1\infty 1}^-(t)$, $\hat{u}_{\infty 1}(t) \leq 2\hat{u}(t)$, $\check{u}_{\infty 1}(t) \leq 2\check{u}(t)$, окончательно получаем (11)''':

$$\begin{aligned} A(t) &\leq \hat{u}_{1\infty 1}^-(t)(1 + \check{u}_{\infty 1}(t) \exp(u_{1\infty 1}^-(+\infty))) \leq \\ &\leq 2\hat{u}_1^-(t)(1 + 2\check{u}(t) \exp(2u_1^-(+\infty))). \end{aligned}$$

Операторы

$$K_x^\pm f = \pm \int_t^{\pm\infty} \int_{-1}^1 K^\pm(x, t, a, t', a') f(t', a') dt' da';$$

$$H_x^\pm f = \pm \int_t^\infty \int_{-1}^1 H^\pm(x, t, a, t', a') f(t', a') dt' da'$$

назовем операторами, привязанными соответственно к начальному (операторы K^- , H^-) и финальному (операторы K^+ , H^+) состояниям.

Из неравенств (9'''), (10'''), (11''') и (12''') вытекают следующие свойства операторов $K_x^\pm$, $H_x^\pm$.

Следствие 2. Операторы $I + K_x^\pm$, $I + H_x^\pm$ являются ограниченными операторами, действующими из $L_i(-\infty, \infty; -1, 1)$ в $L_\infty(-\infty, \infty; -1, 1)$, $i = 1, \infty$.

Следствие 3. (Причинность). Если $u(x, t, a, a') = 0$ при $t \leq t_0$, то $K^-(x, t, a, t', a') = H^-(x, t, a, t', a') = 0$ при $t \leq t_0$, $\forall t' \in (-\infty, t]$. Если $u(x, t, a, a') = 0$ при $t \geq t_1$, то $K^+(x, t, a, t', a') = H^+(x, t, a, t', a') = 0$ при $t \geq t_1$, $\forall t' \in [t, \infty)$.

Справедливость следствий 2, 3 вытекает непосредственно из оценок функций $K^\pm(x, t, a, t', a')$ и $H^\pm(x, t, a, t', a')$ в теоремах 3—6, так как если $u(x, t, a, a') = 0$ при $t \leq t_0$ ($u(x, t, a, a') = 0$ при $t \geq t_1$), то $u^-(t) = 0$ при $t \leq t_0$ ($u^+(t) = 0$ при $t \geq t_1$).

4. Явное выражение для ядра оператора перехода и обратного к нему

Выполнив в равенстве (9) замену переменных $x \rightarrow a't' - x'$, $x - at \rightarrow x$, получим

$$y(x + at, t, a) = f_-(x, a) + \int_{n(a)} da' \int_{x - a't + at}^{\infty \text{sign}(a')} \frac{1}{a'} K^-\left(x + at, t, \frac{x - x' + at}{a'}, a'\right) f_-(x', a') dx'.$$

После перехода в данном равенстве к пределу при $t \rightarrow +\infty$ получим выражение

$$f_+(x, a) = f_-(x, a) + \int_{n(a)} da' \int_{-\infty}^{\infty} F(x, a, x', a') f_-(x', a') dx',$$

в котором формально обозначает

$$F(x, a, x', a') = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{|a'|} K^-\left(x + at, t, a, \frac{x - x' + at}{a'}, a'\right).$$

Убедимся в существовании этого предела. В интегральном уравнении для функции $K^-(x, t, a, t', a')$ выполним замену переменных x и t' по формулам $x \rightarrow x + at$, $t' \rightarrow \frac{x - x' + at}{a'}$ и перейдем к пределу при $t \rightarrow +\infty$, который, как нетрудно видеть, существует и равен

$$F(x, a, x', a') = \frac{\text{sign}(a')}{a' - a} u\left(\frac{a'x - ax'}{a' - a}, \frac{x - x'}{a' - a}, a, a'\right) -$$

$$- \int_{n(a, a')} d\tilde{a} \int_{\frac{x-x'}{a'-a}}^{\infty} |a'|^{-1} u(x + \tilde{a}t, \tilde{t}, a, \tilde{a}) K^{-}\left(x + \tilde{a}t, \tilde{t}, \tilde{a}, \frac{x - x' + at}{a'}, a'\right) d\tilde{t}. \quad (16)$$

Заметим, что $\supp_a F \subseteq n(a)$. Формула (16) дает явное выражение ядра F оператора перехода $I+F=S$ через управление $u(x, t, a, a')$ и ядро $K^{-}(x, t, a, t', a')$ преобразования, привязанного к начальному состоянию. Получим формулу, аналогичную формуле (16) для ядра $G(x, a, x', a')$ оператора $G=S^{-1}-I$.

Выполнив в равенстве (10) замену переменных $x-a't' \rightarrow x'$, $x-at \rightarrow x$, получим

$$y(x + at, t, a) = f_+(x, a) + \int_{n(a)} da' \int_{x+at-a't}^{-\text{sign}(a')\infty} \left(-\frac{1}{a'}\right) \times \\ \times K^+\left(x + at, t, a, \frac{x + at - x'}{a'} a'\right) f_+(x', a') dx'.$$

После перехода в полученном равенстве к пределу при $t \rightarrow -\infty$ имеем

$$f_-(x, a) = f_+(x, a) + \int_{n(a)} da' \int_{-\infty}^{\infty} G(x, a, x', a') f_+(x', a') dx',$$

в котором формально обозначает

$$G(x, a, x', a') = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{|a'|} K^+\left(x + at, t, a, \frac{x + at - x'}{a'} a'\right).$$

Убедимся в существовании этого предела. В интегральном уравнении (10') для функции $K^+(x, t, a, t', a')$ выполним замену переменных x и t' по формулам $x \rightarrow x + at$, $t' \rightarrow \frac{x + at - x'}{a'}$ и перейдем к пределу при $t \rightarrow -\infty$, который, как легко видеть, существует и равен

$$G(x, a, x', a') = -\frac{\text{sign}(a')}{a' - a} u\left(\frac{a'x - ax'}{a' - a}, \frac{x - x'}{a' - a}, a, a'\right) - \\ - \int_{n(a, a')} d\tilde{a} \int_{-\infty}^{\frac{x-x'}{a'-a}} u(x + \tilde{a}t, \tilde{t}, a, \tilde{a}) K^+\left(x + \tilde{a}t, \tilde{t}, \right. \\ \left. \frac{x - x' + \tilde{a}t}{a'}, a'\right) d\tilde{t}. \quad (16')$$

Заметим, что $\supp_a G \subseteq n(a)$.

Полученная для $G(x, a, x', a')$ формула дает явное выражение ядра G оператора $I + G = S^{-1}$ через управление $u(x, t, a, a')$ и ядро $K^+(x, t, a, t', a')$ преобразования, привязанного к финальному состоянию.

Определим функции

$$G(x, t, a, t', a') \equiv |a'| G(x - at, a, x - a't', a');$$

$$g(x, t, a, a') \equiv G(x - at, a, x - a't, a'),$$

тогда

$$G(x, t, a, t', a') = g\left(x + a \frac{t' - t}{1 - a/a'}, \frac{t' - at/a'}{1 - a/a'}, a, a'\right);$$

$$G(s, a, s', a') = \frac{1}{|a'|} g\left(\frac{a's - as'}{a' - a}, \frac{s - s'}{a' - a}, a, a'\right).$$

Из равенства (16') находим выражение

$$\begin{aligned} g(x, t, a, a') = & - \frac{1}{1 - a/a'} u(x, t, a, a') - \\ & - \int_{n(a)} \tilde{d}\tilde{a} \int_{-\infty}^t u(x + a(\tilde{t} - t), \tilde{t}, a, \tilde{a}) K^+(x + a(\tilde{t} - t), \tilde{t}, \tilde{a}, \\ & t + \frac{a}{a'}(\tilde{t} - t), a') d\tilde{t}. \end{aligned}$$

5. Оценки ядра оператора перехода и обратного оператора

Из (16) для функции $F(x, a, x', a')$ вытекает справедливость выражения

$$F(x, t, a, t', a') \equiv |a'| F(x - at, a, x - a't', a') =$$

$$= \frac{1}{1 - a/a'} u\left(x + a \frac{t' - t}{1 - a/a'}, \frac{t' - at/a'}{1 - a/a'}, a, a'\right) -$$

$$\int_{-1}^1 d\bar{a} \int_{\frac{t' - at/a'}{1 - a/a'}}^{\infty} u(x + a(\bar{t} - t), \bar{t}, a, \bar{a}) K^-(x + a(\bar{t} - t), \bar{t}, \bar{a},$$

$$t + \frac{a}{a'}(\bar{t} - t), a') d\bar{t}.$$

Из последнего равенства следует

$$f(x, t, a, a') \equiv F(x, t, a, t, a') =$$

$$= \frac{u(x, t, a, a')}{1 - a/a'} - \int_{n(a, a')} \int_t^{\infty} d\bar{a} u(x + a(\bar{t} - t), \bar{t}, a, \bar{a}) \times$$

$$\times K^-(x + a(\bar{t} - t), \bar{t}, \bar{a}, \bar{t} + \frac{\bar{a}}{a'}(\bar{t} - t), a') dt. \quad (17)$$

Заметим, что функции $F(x, t, a, t', a')$ и $F(s, a, s', a')$ выражаются через функцию $f(x, t, a, a')$ по формулам

$$F(x, t, a, t', a') = f\left(x + a \frac{t' - t}{1 - a/a'}, \frac{t' - at/a'}{1 - a/a'}, a, a'\right);$$

$$F(s, a, s', a') = \frac{1}{|a'|} f\left(\frac{a's - as'}{a' - a}, \frac{s - s'}{a' - a}, a, a'\right).$$

Обозначим

$$\hat{k}^-(t, a, t', a') = \max_x \left| \frac{1}{a'} K^-(x, t, a, t', a') \right|,$$

$$u(t, a, a') = \max_x |u(x, t, a, a')|,$$

тогда из интегрального уравнения для $K^-(x, t, a, t', a')$ получим

$$\begin{aligned} \hat{k}^-(t, a, t', a') &\leq \bar{u}\left(\frac{t' - at/a'}{1 - a/a'}, a, a'\right) + \\ &+ \int_{-1}^1 \int_{\theta(t, t', a/a')} u(\tilde{t}, a, \tilde{a}) \hat{k}^-(\tilde{t}, \tilde{a}, t' + \frac{a(\tilde{t} - t)}{a'}, a') d\tilde{a} d\tilde{t}. \end{aligned}$$

Рассматривая предыдущее неравенство при $a = \bar{a}$, $t = \bar{t}$, $t' = \bar{t} + \bar{a}(\bar{t} - t)/a'$, имеем

$$\begin{aligned} \hat{k}^-(\bar{t}, \bar{a}, \bar{t} + \frac{\bar{a}}{a'}(\bar{t} - t), a') &\leq \bar{u}(t, a, a') + \\ &+ \int_{-1}^1 \int_{\bar{t}}^{\bar{t}} u(\tilde{t}, \bar{a}, \tilde{a}) \hat{k}^-(\tilde{t}, \bar{a}, \bar{a}(\tilde{t} - t)/a' + \bar{t}, a') d\tilde{a} d\tilde{t}. \end{aligned} \quad (18)$$

Обозначим

$$\hat{k}^-(\bar{t}, t, a') = \max_{\bar{a}, \bar{a}/a' \in [-\infty, 1]} \hat{k}^-(\bar{t}, \bar{a}, \bar{t} + \frac{\bar{a}}{a'}(\bar{t} - t), a').$$

Так как $-\infty < \frac{\bar{a}}{a'} \leq 1$, то $\bar{t} + \frac{\bar{a}}{a'}(\bar{t} - t) \in (-\infty, \bar{t})$ и, значит,

$$\hat{k}^-(\bar{t}, t, a') = \max_{s \in (-\infty, \bar{t})} \hat{k}^-(\bar{t}, \bar{a}, s, a').$$

Интегрируя неравенство (18) по a' и обозначая

$$\int_{-1}^1 \hat{k}^-(\bar{t}, t, a') da' = \hat{k}^-(\bar{t}, t),$$

получим

$$\hat{k}^-(\bar{t}, t) \leq \bar{u}_{\infty 1}(t) + \int_t^{\bar{t}} u_{\infty 1}(\tilde{t}) \hat{k}^-(\tilde{t}, t) d\tilde{t},$$

из которого легко вытекает такое неравенство

$$\hat{k}^-(\bar{t}, t) \leq \bar{u}_{\infty 1}(t) \exp \left(\int_t^{\bar{t}} u_{\infty 1}(\tilde{t}) d\tilde{t} \right). \quad (19)$$

Значит,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{a'} K^-(x + a(\bar{t} - t), \bar{t}, \bar{a}, t + a(\bar{t} - t)/a', a') \right| da' \leq \\ & \leq \int_{-1}^1 \max_{x, \bar{a}, a/a'} \left| \frac{1}{a'} K^-(x + a(\bar{t} - t), \bar{t}, \bar{a}, t + a(\bar{t} - t)/a', a') \right| da' \leq \\ & \leq \hat{k}^-(\bar{t}, t). \end{aligned}$$

Из (17) и предыдущего неравенства при учете (19) нетрудно получить такое неравенство

$$\begin{aligned} \hat{f}_{\infty 1}(t) & \leq \bar{u}_{\infty 1}(t) + \bar{u}_{\infty 1}(t) \int_t^{\infty} u_{\infty 1}(\bar{t}) \exp \left(\int_t^{\bar{t}} u_{\infty 1}(\tilde{t}) d\tilde{t} \right) d\bar{t} = \\ & = \bar{u}_{\infty 1}(t) \exp \left(\int_t^{\infty} u_{\infty 1}(\tilde{t}) d\tilde{t} \right) = \bar{u}_{\infty 1}(t) \exp(u_{1\infty 1}^+(t)). \end{aligned} \quad (20)$$

Соответствующие оценки для функции $g(x, t, a, a')$ получаем аналогично. Из доказанных ранее теорем и неравенства (20) вытекает, что оператор перехода S , обратный оператор S^{-1} , функции $f(x, t, a, a')$ и $g(x, t, a, a')$ удовлетворяют следующим условиям:

1) операторы S и S^{-1} — линейные непрерывные операторы в $L_i(X, A)$, $i=1, \infty$;

$$2) \max_{x, a, a', t' \in [t, +\infty]} |f(x, t', a, a')| = f_{\infty}^+(t) \in L_i(\alpha, \infty), \alpha > -\infty;$$

$$3) \max_{x, a, a', t' \in [-\infty, t]} |g(x, t', a, a')| = g_{\infty}^-(t) \in L_i(-\infty, \beta), \beta < +\infty.$$

Список литературы: 1. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма—Лиувилля. К., 1972. 219 с. 2. Нижник Л. П. Нестационарная задача рассеяния. К., 1973. 182 с. 3. Сохин А. С. Преобразование решений нестационарного уравнения переноса // Вестн. Харьк. ун-та. 1984. № 254: Механика, математика и процессы управления. С. 42—48.

Поступила в редколлегию 21.12.88

УДК 517.977

Г. М. СКЛЯР

О ТОЧНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1)$$

где $x \in X$, $u \in U$; X , U — гильбертовы пространства, оператор A порождает сильно непрерывную группу $\{e^{At}\}$, $-\infty < t < \infty$, $B \in [U, X]$.

В случае, когда оператор A ограничен, вопрос о точной управляемости уравнения (1) полностью изучен в работе В. И. Коробова и Р. Рабаха [1] в более общих предположениях: когда X и U — произвольные банаховы пространства. Критерий точной управляемости [1] состоит в следующем: необходимо и достаточно, чтобы существовало целое число $n_0 \geq 0$ такое, что

$$L(BU, ABU, \dots, A^{n_0}BU) = X. \quad (2)$$

Если ограниченность оператора A не предполагается, то соотношение (2) теряет смысл. В известных же работах о точной управляемости линейного уравнения с неограниченным оператором [2—4] результаты формулируются непосредственно в терминах семейства $\{e^{At}\}$. В данной статье получено необходимое и достаточное условие точной управляемости уравнения (2) в терминах оператора A и его резольвенты, в известном смысле обобщающее критерий (2).

Точная управляемость за свободное время. Управляемые уравнения с неограниченным оператором могут различаться по следующему признаку.

Определение 1. Систему (1) назовем точно управляемой за время $T > 0$, если для любых $x_0, x_1 \in X$ существует функция $u(\cdot) \in L_2([0, T], U)$ такая, что обобщенное решение $x(t)$ [3] уравнения $\dot{x} = Ax + Bu(t)$ с начальным условием $x(0) = x_0$ удовлетворяет условию $x(T) = x_1$.

Определение 2. Будем называть систему (1) точно управляемой за свободное (произвольное) время, если существует $T > 0$, при котором (для любого $T > 0$) эта система точно управляема за время T .

Если оператор A ограничен, то понятия управляемости за свободное и произвольное время эквивалентны, что по сути следует из независимости условия (2) от времени T . Для уравнений с неограниченным оператором эти понятия различаются.

Пример. Пусть $X = L_2[0, 1]$, $U = L_2\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $A = \frac{d}{dx}$ и область определения $D(A)$ оператора представляет множество абсолютно непрерывных функций $\varphi(\cdot)$ таких, что

$$\varphi'(\cdot) \in L_2[0, 1], \quad \varphi(0) = \varphi(1);$$

$$B\psi(\cdot) = \begin{cases} \psi(x), & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]; \\ 0, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \end{cases}$$

Оператор A порождает [5] сильно непрерывную унитарную группу $\{e^{At}\}$, $-\infty < t < \infty$: $e^{At}\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x+t)$, $x \in [0, 1]$, где $\tilde{\varphi}(\cdot) - 1$ — периодическое продолжение функции $\varphi(\cdot)$ на вещественную ось. Установим точную управляемость уравнения (1) за время $T > \frac{1}{2}$. Воспользуемся критерием работы [2].

Пусть $N_T\varphi = \int_0^T e^{-At} B B^* e^{-A^*t} \varphi dt$. Тогда

$$(N_T\varphi, \varphi) = \int_0^T \|B^* e^{-A^*t} \varphi\|^2 dt = \int_0^T dt \int_{t+1/2}^{t+1} |\tilde{\varphi}(s)|^2 ds =$$

$$= \int_{1/2}^1 \left(s - \frac{1}{2}\right) |\tilde{\varphi}(s)|^2 ds + \frac{1}{2} \int_1^{T+1/2} |\tilde{\varphi}(s)|^2 ds +$$

$$+ \int_{T+1/2}^{T+1} (T+1-s) |\tilde{\varphi}(s)|^2 ds \geq \delta \int_{T/2+1/4}^1 \left(s - \frac{1}{2}\right) |\tilde{\varphi}(s)|^2 ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_1^{T+1/2} |\tilde{\varphi}(s)|^2 ds + \delta \int_{T+1/2}^{T/2+5/4} (T+1-s) |\tilde{\varphi}(s)|^2 ds \geq$$

$$\geq \left(\frac{T}{2} - \frac{l}{4}\right) \int_0^1 |\varphi(x)|^2 dx = \left(\frac{T}{2} - \frac{l}{4}\right) \|\varphi\|^2,$$

здесь параметры δ и l определены следующим образом: при $\frac{1}{2} < T \leq \frac{3}{2}$, $l=1$, $\delta=1$; при $T > \frac{3}{2}$, $l=2(T-1)$, $\delta=0$. Сле-

довательно, при $T > \frac{1}{2}$ оператор N_T положительно определен и уравнение (1) точно управляемо. С другой стороны, при $T = \frac{1}{2}$ имеем

$$\begin{aligned}(N_{1/2}\varphi, \varphi) &= \int_{1/2}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) |\varphi(x)|^2 dx + \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} - x\right) |\varphi(x)|^2 dx = \\ &= \int_0^1 \left|\frac{1}{2} - x\right| |\varphi(x)|^2 dx.\end{aligned}$$

Выбирая нормированную последовательность $\{\varphi_n\}_{n=2}^\infty \subset L_2[0, 1]$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} V\bar{n}, & x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right]; \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right], \end{cases}$$

получаем, $(N_{1/2}\varphi_n, \varphi_n) = n \int_{1/2}^{1/2+1/n} \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{2n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Следовательно, уравнение (1) не является точно управляемым за время $T = \frac{1}{2}$, а поэтому и за время $T < \frac{1}{2}$.

Таким образом, в данном случае уравнение (1) точно управляемо за свободное, но не за произвольное время.

Далее в работе под точной управляемостью понимается управляемость за свободное время.

Введем в рассмотрение ограниченный оператор $N(\lambda)$, $\lambda > 2\omega_0 (-A) = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|e^{-At}\|}{t}$, определяемый соотношением

$$N(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-At} B B^* e^{-A^* t} x dt.$$

Утверждение 1. Для того чтобы уравнение (1) было точно управляемым за свободное время, необходимо и достаточно, чтобы оператор $N(\lambda)$ был положительно определенным.

Доказательство опирается на критерий точной управляемости за время T [2]. Пусть $N_T x = \int_0^T e^{-At} B B^* e^{-A^* t} x dt$. Тогда,

если уравнение (1) точно управляемо за свободное время, то существует $T > 0$ такое, что $(N_T x, x) \geq \gamma \|x\|^2$, $\gamma > 0$. Следовательно,

$$(N(\lambda)x, x) \geq \min\{1, e^{-\lambda T}\} (N_T x, x) \geq \gamma \min\{1, e^{-\lambda T}\} \|x\|^2,$$

т. е. оператор $N(\lambda)$ положительно определен. Обратно, пусть $(N(\lambda)x, x) \geq \gamma \|x\|^2$, $\gamma > 0$. Используя при $\varepsilon < \lambda - 2\omega_0(-A)$ оценку

$$\int_T^\infty e^{-\lambda t} \|B^* e^{-A^* t} x\|^2 dt \leq \frac{M_\varepsilon}{\lambda - 2\omega_0(-A) - \varepsilon} e^{-(\lambda - 2\omega_0(-A) - \varepsilon)T} \|x\|^2,$$

$$M_\varepsilon > 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} (N_T x, x) &\geq \min\{1, e^{\lambda T}\} \left((N(\lambda)x, x) - \int_T^\infty e^{-\lambda t} \|B^* e^{-A^* t} x\|^2 dt \right) \geq \\ &\geq \min\{1, e^{\lambda T}\} \left(\gamma - \frac{M_\varepsilon}{\lambda - 2\omega_0(-A) - \varepsilon} e^{-(\lambda - 2\omega_0(-A) - \varepsilon)T} \right) \|x\|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, при достаточно больших $T > 0$ оператор N_T положительно определен и уравнение (1) точно управляемо.

Разложение оператора $N(\lambda)$. Установим некоторые свойства оператора $N(\lambda)$.

Утверждение 2. Оператор $N(\lambda)$ ($\lambda > 2\omega_0(-A)$) переводит область определения $D(A^*)$ оператора A^* в область определения $D(A)$ оператора A . При этом, если $x \in D(A^*)$, справедливо соотношение

$$AN(\lambda)x + N(\lambda)A^*x + \lambda N(\lambda)x = BB^*x. \quad (3)$$

Доказательство. Пусть $x \in D(A^*)$. Так как

$$\begin{aligned} e^{A\Delta} N(\lambda)x &= \int_0^\infty e^{-A(t-\Delta)} BB^* e^{-A^* t} e^{-\lambda t} x dt = \\ &= \int_{-\Delta}^\infty e^{-A t} BB^* e^{-(A^* + \lambda I)t} e^{-(A^* + \lambda I)\Delta} x dt = \\ &= N(\lambda) e^{-(A^* + \lambda I)\Delta} x + \int_{-\Delta}^0 e^{-A t} BB^* e^{-(A^* + \lambda I)t} e^{-(A^* + \lambda I)\Delta} x dt, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} (e^{A\Delta} - I) N(\lambda)x &= N(\lambda) \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{e^{-(A^* + \lambda I)\Delta} - I}{\Delta} x + \\ &+ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta}^0 e^{-A t} BB^* e^{-(A^* + \lambda I)t} dt e^{-(A^* + \lambda I)\Delta} x = \end{aligned}$$

$$= -N(\lambda)(A^* + \lambda I)x + B\delta^*x. \quad (4)$$

Следовательно, предел $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} (e^{A\Delta} - I) N(\lambda)x$ существует, откуда [5], во-первых, $N(\lambda)x \in D(A)$ и, во-вторых,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} (e^{A\Delta} - I) N(\lambda)x = AN(\lambda)x. \quad (5)$$

Из (4), (5) вытекает соотношение (3). Утверждение доказано.

Обозначим $R_\lambda = (\lambda I + A)^{-1}$, $T_\lambda = AR_\lambda = I - \lambda R_\lambda$, $\lambda > \omega_0(-A)$. Перепишем равенство (3) в виде

$$((A + \lambda I)N(\lambda) + N(\lambda)(A^* + \lambda I) - \lambda N(\lambda))x = BB^*x, \quad x \in D(A^*).$$

Поскольку $x \in D(A^*)$ однозначно представим в виде $x = R_\lambda^*y$, имеем при $\lambda > \max\{2\omega_0(-A), \omega_0(-A)\}$

$$(A + \lambda I)N(\lambda)R_\lambda^*y + N(\lambda)y - \lambda N(\lambda)R_\lambda^*y = BB^*R_\lambda^*y, \quad y \in X.$$

Домножая слева на λR_λ , получаем операторное равенство

$$\lambda N(\lambda)R_\lambda^* + \lambda R_\lambda N(\lambda) - \lambda^2 R_\lambda N(\lambda)R_\lambda^* = \lambda R_\lambda BB^*R_\lambda^*,$$

которое можно переписать в виде

$$N(\lambda) = T_\lambda N(\lambda) T_\lambda^* + \lambda R_\lambda BB^*R_\lambda^*. \quad (6)$$

Выражая оператор $N(\lambda)$ из (6) и снова подставляя в эту формулу n раз, имеем

$$N(\lambda) = T_\lambda^{n+1}N(\lambda) T_\lambda^{*n+1} + \lambda R_\lambda \sum_{k=0}^n T_\lambda^k BB^* T_\lambda^{*k} R_\lambda^*; \quad (7)$$

$$\lambda > \max\{2\omega_0(-A), \omega_0(-A)\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Лемма. Для любого $\lambda > \max\{2\omega_0(-A), 0\}$ и любого $x \in X$ справедливо равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_\lambda^{*k}x = 0.$$

Доказательство. Пусть оператор $N_*(\lambda)$ определяется равенством $N_*(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-At} e^{-A^*t} x dt$, $x \in X$. Тогда $N_*(\lambda)$ ограничен и положительно определен, поскольку $\|e^{-A^*t}x\| \geq m e^{-\nu t} \|x\|^2$, $t \geq 0$, $m, \nu > 0$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} (N_*(\lambda)x, x) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|e^{-A^*t}x\|^2 dt \geq m \int_0^\infty e^{-(\lambda+\nu)t} dt \|x\|^2 = \\ &= \frac{m}{\lambda + \nu} \|x\|^2. \end{aligned}$$

Поэтому гильбертова норма $\|\cdot\|_*: \|x\|_* = \| \sqrt{N_*(\lambda)} x \|$ эквивалентна исходной. Воспользуемся формулой (6), заменив оператор $N(\lambda)$ на $N_*(\lambda)$, B на I :

$$\begin{aligned} \|x\|_*^2 &= (N_*(\lambda)x, x) = (N_*(\lambda) T_\lambda^* x, T_\lambda^* x) + \lambda \|R_\lambda^* x\|^2 \geq \\ &\geq \|T_\lambda^* x\|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, оператор T_λ^* является сжимающим в норме $\|\cdot\|_*$. Спектр $\sigma(T_\lambda^*)$ оператора T_λ^* определяется равенством [6]:

$$\sigma(T_\lambda^*) = \sigma(T_\lambda) = \{1\} \cup (\sigma(A) \setminus (\lambda + \sigma(A))).$$

Поскольку для любой конечной точки $\mu \in \sigma(A)$ справедливо $\operatorname{Re} \mu \geq -\omega_0(-A)$, то при $\lambda > \max\{2\omega_0(-A), 0\}$ будет $\operatorname{Im} \mu = \operatorname{Im}(\lambda + \mu)$, $\operatorname{Re} \mu \leq \operatorname{Re}(\lambda + \mu)$, поэтому $|\mu/(\lambda + \mu)| < 1$. Таким образом, единственной точкой спектра $\sigma(T_\lambda^*)$, равной по модулю единице, является точка 1, которая, в то же время, не является собственным значением. Следовательно, по теореме Б. Секефальви—Надя и Ч. Фояша [7, стр. 102] степени сжатия T_λ^* сильно стремятся к нулю по норме $\|\cdot\|_*$. Отсюда и из эквивалентности норм $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ вытекает утверждение леммы.

Из формулы (7) и леммы вытекает следующая теорема о разложении оператора $N(\lambda)$.

Теорема 1. Для любого $\lambda > \max\{2\omega_0(-A), 0\}$ и любого $x \in X$ справедливо разложение

$$N(\lambda)x = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} R_\lambda T_\lambda^k B B^* T_\lambda^{*k} R_\lambda^* x.$$

Доказательство теоремы следует из соотношения

$$\|N(\lambda)x - \lambda \sum_{k=0}^n R_\lambda T_\lambda^k B B^* T_\lambda^{*k} R_\lambda^* x\| \leq \|N(\lambda)\| \|T_\lambda^{*n+1}x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Критерий точной управляемости. Пусть U^∞ гильбертово пространство, элементами которого являются последовательности $\{u_k\}_{k=0}^\infty$, $u_k \in U$, $k = 0, 1, \dots$ с нормой $\|\{u_k\}_{k=0}^\infty\| = (\sum_{k=0}^\infty \|u_k\|^2)^{1/2}$. Обозначим через $G(\lambda)$, $\lambda > \max\{2\omega_0(-A), 0\}$ оператор, действующий из X в U^∞ по правилу $G(\lambda)x = \{B^* T_\lambda^{*k} R_\lambda^* x\}_{k=0}^\infty$.

В силу теоремы 1

$$\begin{aligned} \|G(\lambda)x\|^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} (R_\lambda T_\lambda^k B B^* T_\lambda^{*k} R_\lambda^* x, x) = \frac{1}{\lambda} (N(\lambda)x, x) \leq \\ &\leq \frac{\|N(\lambda)\|}{\lambda} \|x\|^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Следовательно, оператор $G(\lambda)$ — ограничен. Сопряженный оператор $G^*(\lambda)$ действует из U^∞ в X по правилу $G^*(\lambda) \times \{u_k\}_{k=0}^\infty = \sum_{k=0}^\infty R_\lambda T_\lambda^k B u_k$, т. е. условно оператор $G^*(\lambda)$ можно записать в виде $G^*(\lambda) = (R_\lambda B, R_\lambda T_\lambda B, \dots, R_\lambda T_\lambda^k B, \dots)$.

Теорема 2. Для того чтобы уравнение (1) было точно управляемым, необходимо и достаточно, чтобы оператор $G^*(\lambda)$, $\lambda > \max\{2\omega_0(-A), 0\}$ был сюръективным, т. е. должно выполняться равенство

$$(R_\lambda B, R_\lambda T_\lambda B, \dots, R_\lambda T_\lambda^k B, \dots) U^\infty = X. \quad (9)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (1) точно управляемо. Тогда, в силу утверждения 1, оператор $N(\lambda)$ положительно определен, следовательно, он сюръективен. Но из теоремы 1 $N(\lambda) = \lambda G^*(\lambda) G(\lambda)$. Отсюда следует сюръективность оператора $G^*(\lambda)$.

Достаточность. Пусть оператор $G^*(\lambda)$ сюръективен. Тогда согласно [8] для оператора $G(\lambda)$ справедливо $\|G(\lambda)x\| \geq \gamma \|x\|$, $\gamma > 0$. Из (8) имеем $(N(\lambda)x, x) \geq \lambda \gamma^2 \|x\|^2$. Следовательно, оператор $N(\lambda)$ положительно определен, а уравнение (1) точно управляемо в силу утверждения 1. Теорема доказана.

В заключение установим прямую связь между полученным критерием и критерием работы [1] в случае, когда оператор A ограничен. Выберем $\lambda_0 > \max\{2\omega_0(-A), 0\}$ столь большим, что при $\lambda > \lambda_0$ будет $\|R_\lambda\| \leq q \|A\|^{-1}$, $q < 1$.

Пусть оператор $P_n(\lambda) \in [U^\infty, X]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ определяется равенством $P_n(\lambda)\{u_k\}_{k=0}^\infty = \sum_{k=0}^n R_\lambda T_\lambda^k B u_k$. Тогда

$$\begin{aligned} \|(G^*(\lambda) - P_n(\lambda))\{u_k\}_{k=0}^\infty\| &= \|T_\lambda^{n+1} \sum_{k=0}^\infty R_\lambda T_\lambda^k B u_{k+n+1}\| \leq \\ &\leq q^{n+1} \|G^*(\lambda)\| \left(\sum_{k=0}^\infty \|u_k\|^2\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

т. е. $P_n(\lambda) \rightarrow G^*(\lambda)$, $n \rightarrow \infty$ в операторной норме. Тогда, если оператор $G^*(\lambda)$ сюръективен, то из [8] существует n_0 такое, что оператор $P_{n_0}(\lambda)$ также сюръективен, т. е.

$$L(R_\lambda B U, R_\lambda T_\lambda B U, \dots, R_\lambda T_\lambda^{n_0} B U) = X. \quad (10)$$

Действуя на обе части равенства (10) обратным оператором $(A + \lambda I)^{n_0+1}$, получаем

$$L((A + \lambda I)^{n_0} B U, A(A + \lambda I)^{n_0-1} B U, \dots, A^{n_0} B U) = X.$$

Последнее равенство, очевидно, эквивалентно (2), т. е. из (9) следует (2). Обратно, из справедливости равенства (2) следует (10), что эквивалентно сюръективности оператора $P_{n_0}(\lambda)$. По-

сколькx образ оператора $G^*(\lambda)$ включает образ $P_{n_0}(\lambda)$, то оператор $G^*(\lambda)$ сюръективен, т. е. справедливо (9).

Список литературы: 1. Коробов В. И., Рабах Р. Точная управляемость в банаховых пространствах//Дифференц. уравнения. 1979. 115, № 12. С. 2142—2154. 2. Megan M., Hiris V. On the spase of linear controllable systems in Hilbert spases//Glasnik Matematicki. 1975. 10. P. 161—167. 3. Приходько А. П., Рабах Р. Некоторые свойства линейных управляемых уравнений в бесконечномерных пространствах//Вестн. Харьк. ун-та. 1978. № 174: Прикладная математика и механика. Вып. 43. С. 37—43. 4. Склър Г. М. Интегральный критерий точной управляемости в банаховых пространствах. Х., 1982. 8 с. Деп. в ВИНТИ 28.06.82. № 3291—82. 5. Балакришнан А. Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. М., 1974. 259 с. 6. Данфорд Н., Шварц Д. Линейные операторы. Общая теория. М.; Л., 1962. С. 135—162. 7. Секефальви-Надь Б., Фоляш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М., 1970. 431 с. 8. Рудин У. Функциональный анализ. М., 1975. 443 с.

Поступила в редколлегию 06.02.89

УДК 517.977

Г. А. БЕССОНОВ, Е. В. КОРОБОВА

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ПОЗИЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В настоящей работе дается решение задачи синтеза ограниченного управления [1] для нестационарных систем первого приближения и нелинейных систем «треугольного» вида [2]. Решение указанной задачи проводится методом функции управляемости [1] и является дальнейшим развитием результатов работ [1, 3, 4].

1. Рассмотрим управляемый процесс, описываемый системой

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + g(t, x, u), \quad x \in R^n, \quad u \in R^r, \quad \|u\| \leq d. \quad (1)$$

Введем следующие обозначения: $P(t) \in C^k[t_0, t_1]$ означает, что $P(t)$ k -раз непрерывно дифференцируема на $[t_0, t_1]$,

$$N_0(t) = \int_t^\infty e^{-(\tau-t)A(t)} \Phi(t, \tau) B(\tau) B^*(\tau) \Phi^*(t, \tau) d\tau,$$

где $\Phi(t, \tau)$ — матрица Коши системы $\dot{x} = A(t)x$.

Теорема 1. *Предположим, что*

1) $A(t), B(t) \in C^\infty[t_0, +\infty)$;

2) $\|A(t)\| \leq a, \|\Delta^k B(t)\| \leq b^{k+1}, k=0, 1, \dots, t \in [t_0, +\infty)$ ($\Delta = \frac{d}{dt}$, I — единичная матрица);

$$3) \operatorname{rang}(B(t), \Delta B(t), \dots, \Delta^{n-1}B(t)) = n, \quad t \in [t_0, t_1];$$

$$4) \|g(t, x, u)\| \leq p(\|x\|^{s_1} + \|x\|^{s_2} \|u\|^{s_3}) \text{ при } t \in [t_0, t_1], \quad s_i > 1, \\ i = 1, 2, s_3 > 0;$$

5) $g(t, x, u)$ непрерывна и в каждой области $\{(t, x, u): t_0 \leq t \leq t_1, 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2, \|u\| \leq d\}$ удовлетворяет условию Липшица $\|g(t, x'', u) - g(t, x', u')\| \leq L_1(\rho_1, \rho_2) \times (\|x'' - x'\| + \|u'' - u'\|)$;

6) $\Theta(t, x)$ — функция, определяемая при достаточно большом m уравнением

$$2a_0 \Theta^{1+m} = (N_{\Theta(t,x)}^{-1}(t)x, x), \quad x \neq 0, \quad a_0 > 0, \quad (2)$$

в замкнутой области $G = [t_0, t_1] \times \{x: \|x\| \leq R\}$, $\Theta(t, 0) = 0$.

Тогда существует $c > 0$ такое, что множество $Q_c(t) = \{x: \Theta(t, x) \leq c\}$ — ограничено, и $Q_c(t) \subset \{x: \|x\| < R\}$ для любого $t \in [t_0, t_1]$, кроме того, для любого $x_0 \in Q_c(t_0) \setminus \{0\}$ единственное решение $x(t)$ системы с управлением

$$u(t, x) = -B^*(t) N_{\Theta(t,x)}^{-1}(t)x, \quad x \in Q_c(t) \setminus \{0\} \quad (3)$$

и начальным условием $x(t_0) = x_0$ определено на некотором полуинтервале $[t_0, t_0 + T(t_0, x_0)) \subset [t_0, t_1]$ и удовлетворяет условию

$\lim_{t \rightarrow t_0 + T(t_0, x_0)} x(t) = 0$, где $T(t_0, x_0) \leq \frac{1}{\beta} \Theta(t_0, x_0)$, $\beta > 0$. При этом $c < \beta(t_1 - t_0)$ и для любого $d > 0$ коэффициент $a_0 > 0$ можно выбрать так, чтобы управление $u(t, x)$ удовлетворяло ограничению $\|u(t, x)\| \leq d$ при $x \in Q_c(t) \setminus \{0\}$, $t \in [t_0, t_1]$.

Доказательство. Как показано в [4], управление (3) решает задачу синтеза для системы $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$, где $\Theta(t, x)$ определяется из (2) при $m=0$. Нетрудно показать, что этот факт справедлив для любого $m \geq 0$. Поэтому, на основании теоремы 2 работы [4] нам необходимо проверить только выполнение неравенства (2.2) [4]. Тогда из теорем 1, 2 [4] будет следовать утверждение теоремы 1 настоящей работы.

Вычислим производную функции $\Theta(t, x)$ по t в силу системы $\dot{x} = A(t)x + B(t)u + g(t, x, u(t, x))$, где $u(t, x)$ имеет вид (3). Проводя рассуждения, как и в [4], получим

$$\dot{\Theta}(t, x) \leq -\frac{1}{\Theta(t, x)} (N_{\Theta(t,x)}(t)y(t, x), y(t, x)) - 2(y(t, x), g(t, x, u(t, x))) - \\ - \frac{1+m}{\Theta(t, x)} (N_{\Theta(t,x)}(t)y(t, x), y(t, x)) + \\ + \frac{1}{\Theta^2(t, x)} (N_{1\Theta(t,x)}(t)y(t, x), y(t, x)) \quad (4)$$

где $y(t, x) = N_{\Theta(t,x)}^{-1}(t)x$.

Покажем, что для достаточно больших m

$$(y(t, x), g(t, x, u(t, x))) \leq \frac{1}{4\theta(t, x)} (N_{\theta(t, x)}(t) y(t, x), y(t, x)) \quad (5)$$

в некоторой окрестности начала координат при $t \in [t_0, t_1]$. Из леммы 2 [4] заключаем, что существует число $\Theta_1 (0 < \Theta_1 < 1)$ такое, что при $0 < \Theta < \Theta_1$

$$\frac{1}{4\theta} (N_{\theta}(t) y, y) \geq \frac{\gamma_1}{4\theta} \theta^{2n-1} \|y\|^2 = \frac{\gamma_1}{4} \theta^{2n-2} \|y\|^2.$$

С другой стороны, учитывая условие 4) теоремы и ограничение на управление, можем записать $\|g(t, x, u)\| \leq \mu_1 \|x\|^s$, $s > 1$ при $t \in [t_0, t_1]$. Поэтому $(y, g(t, x, u)) \leq \|y\| \cdot \|g(t, x, u)\| \leq \mu_1 \|y\| \cdot \|x\|^s$, следовательно, если

$$\mu_1 \|x\|^s \leq \frac{\gamma_1}{4} \theta^{2n-2} \|y\|, \quad (6)$$

то неравенство (5) выполнено. Учитывая уравнение (2) и неравенство $(N_{\theta}^{-1}(t)x, x) \geq (1 - 2a_0\theta) \|x\|^2 \setminus (b^2\theta)$, получаем

$$2a_0\theta^{1+m} = (N_{\theta}^{-1}(t)x, x) \geq \frac{1 - 2a_0\theta}{b^2\theta} \|x\|^2 \geq \frac{\|x\|^2}{b^2} \quad (7)$$

при $0 < \theta < \frac{1}{2a_0 + 1}$. Кроме того,

$$\|N_{\theta}^{-1}(t)x\| \|x\| \geq (N_{\theta}^{-1}(t)x, x) \geq \frac{\|x\|^2}{b^2},$$

следовательно,

$$\|y\| = \|N_{\theta}^{-1}(t)x\| \geq \frac{\|x\|}{b^2}. \quad (8)$$

Из (6), (7) и (8) следует, что если

$$\|x\|^s \leq \frac{\gamma_1}{4\mu_1} (2a_0)^{-\frac{2(n-1)}{1+m}} b^{-\frac{2(2n+m-1)}{1+m}} \|x\|^{\frac{4n+m-3}{1+m}}, \quad (9)$$

то неравенство (5) выполнено. Из (9) заключаем, что если $m \geq (4n - s - 3)/(s - 1)$, то имеет место неравенство

$$\|x\| \leq R_1 = \left[\frac{\gamma_1}{4\mu_1} (2a_0)^{-2(n-1)} b^{-2(2n+m-1)} \right]^{1/(1+m)s - 4n - m + 3}^{-1}.$$

Таким образом, учитывая теорему 2 [4], получаем, что в замкнутой области $G = [t_0, t_1] \times \{x : \|x\| \leq R\}$, где

$$R = \min \left\{ \left(\frac{2a_0\theta_4^{1+m}}{\max_{t \in [t_0, t_1]} \|N_{\theta_4}^{-1}(t)\|} \right)^{1/2}, R_1 \right\},$$

$0 < \theta < \theta_4 < \min \{ \theta_3, (2a+1)^{-1} \}$, $m \geq (4n-s-3)/(s-1)$, имеет место неравенство

$$\dot{\theta}(t, x) \leq -\frac{1}{2} \left[1 + m + 4 \left(n + \frac{r_1}{\gamma_1} \right) \right]^{-1}, \quad x \neq 0.$$

Теорема доказана.

Возможен и другой подход к решению данной задачи, который заключается в предварительном приведении линейной части системы (1) к системе с постоянными коэффициентами, как это сделано в [5] или [6]. В этом случае не требуется построения фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ системы $\dot{x} = A(t)x$. Если в системе (1) сделать замену переменных $z = H(t)x$, где $H(t)$ имеет вид (28) [5], и ввести новое управление

$$v = SA_1(t)z + M(t)u,$$

как и в [5], то система (1) примет вид

$$\dot{z} = A_2 z + B_1 v + g_0(t, z, v), \quad \|v\| \leq d_1, \quad (10)$$

где $g_0(t, z, v) = H(t)g(t, H^{-1}(t)z, M^{-1}(t)(v - SA_1(t)z))$,

а A_2 и B_1 — постоянные матрицы. Применяя к системе (10) результаты работы [6] и теорему 1, после чего возвращаясь к старым переменным и управлению, заключаем, что имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим, что*

1) $A(t) \in C^{2n-2}[t_0, t_1]$, $B(t) \in C^{2n-1}[t_0, t_1]$, $g(t, x, u)$ — непрерывна;

2) $\text{rang } B(t) = r$ для любого $t \in [t_0, t_1]$;

3) $\text{rang}(B(t), \Delta B(t), \dots, \Delta^{n-1}B(t)) = n$ для любого $t \in [t_0, t_1]$ и реализуется на вектор-столбцах матрицы $L(t)$ [5];

4) имеют место разложения

$$\Delta^n i b_i(t) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{n_j-1} \alpha_{jk}^i(t) \Delta^k b_j(t), \quad \alpha_{jk}^i(t) \in C^n[t_0, t_1], \quad i = 1, \dots, r$$

$(\alpha_{jk}^i(t) \equiv 0, \text{ если } j < i, k > \min\{n_i, n_j - 1\}, \text{ или если } j \geq i, k > \min\{n_i - 1, n_j - 1\}, k = 0, 1, \dots, n_j - 1, j = 1, \dots, r)$;

5) выполнены условия 4) и 5) теоремы 1;

6) $\Theta(t, x)$ — функция, определяемая уравнением

$$2a_0 \theta^{m+2n^0} = \sum_{k=1}^r \sum_{i,j=1}^{n_k} f_{ij}^k \theta^{i+j+2n^0-2n_k-2} [(\Delta_1^{i-1} c_k(t))^* x] [(\Delta_1^{j-1} c_k(t))^* x],$$

$$x \neq 0,$$

при достаточно большом m в замкнутой области $G = [t_0, t_1] \times \{x: \|x\| \leq R\}$, $\theta(t, 0) = 0$ $\left(n^0 = \max_{1 \leq k \leq r} n_k, \Delta_1 = A^*(t) + I \frac{d}{dt} \right)$.

Тогда существует $c > 0$ такое, что $Q_c(t)$ ограничено, $Q_c(t) \subset \{x: \|x\| < R\}$ и для любого $x_0 \in Q_c(t_0) \setminus \{0\}$ единственное решение $x(t)$ системы (1) с управлением $u(t, x)$ [6, стр. 35] и начальным условием $x(t_0) = x_0$ определено на некотором интервале $[t_0, t_0 + T(t_0, x_0)] \subset [t_0, t_1]$ и удовлетворяет усло-

вию $\lim_{t \rightarrow t_0 + T(t_0, x_0)} x(t) = 0$, где $T(t_0, x_0) \leq \frac{1}{\beta} \theta(t_0, x_0)$, при этом $c < \beta(t_1 - t_0)$ и для любого $d > 0$ коэффициент $a_0 > 0$ можно выбрать так, чтобы управление $u(t, x)$ удовлетворяло ограничению $\|u(t, x)\| \leq d$ при $x \in Q_c(t) \setminus \{0\}$, $t \in [t_0, t_1]$.

2. Рассмотрим управляемый процесс, описываемый системой

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad (11)$$

$$\dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n, u), \quad u \in R^1, \quad |u| \leq d, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Впервые система (11) была рассмотрена В. И. Коробовым [2]. Развитие некоторых результатов работы [2] проведено в [7].

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Пусть функции $f_i(t, x_1, \dots, x_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, n$ ($x_{n+1} = u$) имеют непрерывные частные производные по x_i до $(n-i+1)$ -го порядка включительно и для каждого $t \in [t_0, t_1]$ отображение $(x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow (z_1, \dots, z_{n+1})$, определяемое формулами

$$z_1 = x_1 \equiv F_1(t, x_1);$$

$$z_i = \frac{\partial F_{i-1}(t, x_1, \dots, x_{i-1})}{\partial t} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial F_{i-1}(t, x_1, \dots, x_{i-1})}{\partial x_j} f_j(t, x_1, \dots, x_{j+1}) \equiv F_i(t, x_1, \dots, x_i), \quad (12)$$

является взаимно однозначным и непрерывно дифференцируемым для всех $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in R^n \times \{u: |u| \leq d\}$. Кроме того пусть $f_i(t, 0, \dots, 0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ для любого $t \in [t_0, t_1]$. Тогда управление $u = u(t, x)$ можно выбрать так, что единственное решение системы (11) с управлением $u = u(t, x)$ и начальным условием $x(t_0) = x_0 \in Q$ (Q — некоторая окрестность начала координат) удовлетворяет соотношению $\lim_{t \rightarrow t_0 + T(t_0, x_0)} x(t) = 0$, при этом

$t_0 + T(t_0, x_0) \leq t_1$ и управление удовлетворяет наперед заданному ограничению, т. е. $|u(t, x)| \leq d$ для любых $x \in Q$, $t \in [t_0, t_1]$.

Доказательство. Перейдем в системе (11) к новым переменным и управлению $v = z_{n+1}$ по формулам (12), тогда система (11) примет вид

$$\dot{z}_i = z_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n, |z_{n+1}| \leq d_1 < d. \quad (13)$$

В системе (13) новое управление z_{n+1} выберем так, чтобы за время $T(t_0 + T \leq t_1)$ попасть из точки

$$z(t_0) = (F_1(t_0, x_{10}), \dots, F_n(t_0, x_{10}, \dots, x_{n0})) \quad (14)$$

в точку

$$0 = z(t_0 + T) = (F_1(t_0 + T, x_{11}), \dots, F_n(t_0 + T, x_{11}, \dots, x_{n1})) \quad (15)$$

т. е. выберем управление z_{n+1} , как и в [5]:

$$z_{n+1}(z) = \sum_{i=1}^n a_i \theta^{\frac{n-i+1}{\alpha}}(z) z_i, \quad (16)$$

где $\Theta(z)$ является единственным положительным решением уравнения

$$2a_0 \theta^{1+\frac{2\alpha-1}{\alpha}} = \sum_{i,j=1}^n f_{ij} \theta^{\frac{i+j-2}{\alpha}} z_i z_j, a_0 > 0. \quad (17)$$

В силу однозначной разрешимости соотношений (12), имеем

$$x_i(t) = H_i(t, z_1(t), \dots, z_i(t)), i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (18)$$

кроме того, так как $f_i(t, 0, \dots, 0) = 0, t \in [t_0, t_1]$, из (12) следует, что $F_i(t, 0, \dots, 0) = 0, t \in [t_0, t_1]$, но тогда $H_i(t, 0, \dots, 0) = 0, t \in [t_0, t_1], i = 1, 2, \dots, n$. Функции $H_i(t, z_1, \dots, z_i)$ и функции $z_i(t)$ непрерывны, $z_i(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_0 + T, i = 1, 2, \dots, n$, поэтому $x_i(t) = H_i(t, z_1(t), \dots, z_i(t)) \rightarrow H_i(t_0 + T, 0, \dots, 0) = 0$ при $t \rightarrow t_0 + T$. Ограниченность управления обеспечивается за счет выбора множества Q и коэффициента a_0 . Теорема доказана.

В частности, если потребовать, чтобы для любого $t \in [t_0, t_1]$

$$\left| \frac{\partial f_i(t, x_1, \dots, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \right| \geq a > 0, i = 1, 2, \dots, n$$

при всех $x \in R^n, u \in \{u : |u| \leq d\}$, тогда отображение (12) является взаимно однозначным. Следовательно, имеет место теорема.

Теорема 4. Пусть функции $f_i(t, x_1, \dots, x_{i+1}), i = 1, 2, \dots, n$ ($x_{i+1} = u$) имеют непрерывные частные производные по x, t до $(n-i+1)$ -го порядка включительно и для любого $t \in [t_0, t_1]$

$$\left| \frac{\partial f_i(t, x_1, \dots, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \right| \geq a > 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

при всех $x \in R^n, u \in \{u : |u| \leq d\}$, где a — постоянная, не зависящая от (t, x, u) . Кроме того, пусть $\dot{f}_i(t, 0, \dots, 0) = 0, i = 1, 2, \dots, n$ для лю-

бого $t \in [t_0, t_1]$. Тогда управление $u = u(t, x)$ можно выбрать так, что единственное решение системы (11) с управлением $u = u(t, x)$ и начальным условием $x(t_0) = x_0 \in Q$ (Q — некоторая окрестность начала координат) удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t \rightarrow t_0 + T(t_0, x_0)} x(t) = 0,$$

при этом $[t_0, t_0 + T(t_0, x_0)) \subset [t_0, t_1[$ и управление удовлетворяет наперед заданному ограничению $|u(t, x)| \leq d$ для любых $x \in Q, t \in [t_0, t_1]$.

Список литературы: 1. Коробов В. И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости//Мат. сборник. 1979. 109, № 4. С. 582—606. 2. Коробов В. И. Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем//Дифференц. уравнения. 1973. 9, № 4. С. 614—619. 3. Коробов В. И. Решение задачи синтеза для управляемых процессов с возмущением с помощью функции управляемости//Дифференц. уравнения. 1987. 23, № 2. С. 236—244. 4. Бессонов Г. А., Коробов В. И., Скляр Г. М. Задача устойчивого синтеза ограниченных управлений для некоторого класса нестационарных систем//Прикладная математика и механика. 1988. 52. Вып. 1. С. 9—15. 5. Бессонов Г. А., Коробов В. И. Решение задачи синтеза ограниченного управления для линейных нестационарных систем, основанное на их сведении к стационарным. Х., 1987. 21 с. Деп. в УкрНИИИТИ 15.09.87, № 2516-Ук 87. 6. Бессонов Г. А., Коробов В. И. Каноническая форма линейных нестационарных управляемых систем и задача синтеза//Динамические процессы и их устойчивость. 1987. С. 26—38. 7. Ковалев А. М. Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. К., 1980. 174 с.

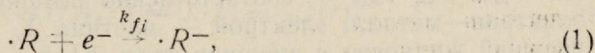
Поступила в редколлегию 22.02.89

УДК 541.13

А. И. ЖАКИН

КВАНТОМЕХАНИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ СКОРОСТИ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ $R + e^- \rightarrow R^-$ НА ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЕКТРОДА

Доказано, что в высокоомных жидкостях под воздействием высоковольтного электрического поля на поверхности катода возможны восстановительные электрохимические реакции вида



где R — электроотрицательная группа, либо молекула (атом) электроноакцептора. Подобные реакции обнаружены в растворе трансформаторного масла с йодом [1], в производных ароматических углеводородах (нитробензоле [2—4], бромбензоле, йодбензоле, хлорбензоле [2]), в некоторых типах жидких кристаллов [5]. В работах [6, 7] было показано, что наблюдаемые электрические и электрогидродинамические эффекты хорошо согласуются с теоретическими расчетами, если считать, что скорость реакции квадратично зависит от локальной напряженности поля на электроде $k_{fi} = k_{fi}^0 E^2$. Произведем модельный квантовохимический расчет, подтверждающий эту зависимость.

Физическая модель элементарного акта. Пусть X — частица (молекула, атом), на которую происходит электронный переход, x — нормальная координата, направленная перпендикулярно поверхности вглубь жидкости, $n(x)$ — одночастичная функция распределения частиц X , $P(x)$ — вероятность электронного перехода в единицу времени из металла на X , находящуюся на расстоянии x от электрода. Тогда плотность прямого тока $j_{\rightarrow}$ ионов X^{-} выражается как

$$j_{\rightarrow} = \int_0^{\infty} P(x) n(x) dx.$$

Значение $x=0$ соответствует поверхности электрода.

Обычно предполагается, что реакция (1) происходит при непосредственном контакте X с электродом, тогда

$$j_{\rightarrow} = k_f n(x_*), \quad k_{fi} = P(x_*) \delta x, \quad (2)$$

где x_* — расстояние, по порядку равное радиусу X . Для жидкостей $n(x_*)\delta x = n_s$ — поверхностная концентрация частиц X ; в газах δx — ширина области электронного перехода (согласно [8] $x_* \sim 4 \text{ \AA}$, $\delta x \sim 0,2 \text{ \AA}$).

Для вычисления $P(x_*)$ исходим из основных положений кинетической теории жидкостей [9], согласно которой в течение некоторого времени τ ($\tau \sim 10^{-11}$ с) молекулы жидкости находятся в «оседлом» положении, совершая колебания с частотой $\omega_0 \sim 1/\tau_0$ ($\tau = \tau_0 \exp(E_a/k_B T)$, E_a — энергия активации) около некоторого положения равновесия. В жидкостях расположение молекул имеет ближний порядок, поэтому на временах $0 \leq t \leq \tau$ можно считать, что центры молекул находятся в некотором потенциальном поле V_a .

Рассмотрим случай, когда в электронных переходах участвуют только электроны из зоны проводимости в металле. Потенциальную энергию электрона представим в виде

$$V_e = V_{em} + V_{ea} + V_{ext},$$

где V_{em} , V_{ea} , V_{ext} — соответственно потенциалы взаимодействия электрон—металл, электрон — частица X , электрон — молекулы несущей жидкости и внешние поля. Если r — радиус-вектор электрона, q_0 — совокупность координат частицы X , q_a — молекулы несущей жидкости, то $V_{em} = V_{em}(r)$, $V_{ea} = V_{ea}(r, q_0)$, $V_{ext} = V_{ext}(r, q_0, q_a)$, $V_a = V_a(q_0, q_a)$.

Адиабатическое приближение. Пусть $\Psi = \Psi(t, r, q_0, q_a)$ — волновая функция системы электрон + молекулы, гамильтониан которой имеет вид

$$H = H_a + H_e;$$

$$H_a = - \sum_{\alpha} \frac{\hbar^2}{2M_{\alpha}} \Delta_{q_{\alpha}} + V_a; \quad H_e = - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_r + V_e;$$

где H_a — гамильтониан тяжелой системы, H_e — электрона.

Расчет вероятности электронного перехода проводим в адиабатическом приближении [10]. Схема расчета такова. Благодаря броуновской диффузии, частица X «внезапно» появляется на поверхности электрода. Внезапность означает: $V_{ea}=0$ при $t=0$, $V_{ea}=V_{ea}(r, q_0)$ при $t>0$. Затем под действием потенциала V_{ea} происходит электронный переход $\psi_{ef}(r) \rightarrow \psi_{em}(r, q_0)$, где $\psi_{ef}(r)$ — волновая функция электрона в металле при $t \leq 0$, $\psi_{em}(r, q_0)$ — в ионе X^- на m -м энергетическом уровне ($m=1, 2, \dots$). Волновые функции начального и конечного состояний удовлетворяют уравнениям

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_r + V_{em} + V_{ext}\right) \psi_{ef}(r) = \varepsilon_f \psi_{ef}(r); \quad (3)$$

$$H_e \psi_{em}(r, q_0) = \varepsilon_m(q_0) \psi_{em}(r, q_0). \quad (4)$$

В уравнении (3) отсутствует потенциал V_{ea} , что является следствием концепции внезапности появления X на электроде.

Согласно адиабатическому приближению электронный переход совершается при неподвижных центрах атомов (молекул), поэтому эту систему называют тяжелой. Расчет вероятности перехода совершаем в два этапа. На первом вычисляется вероятность перехода $P_{f,mn}^{(e)}$ электрона на некоторое фиксированное атомное состояние, определяемое волновой функцией $\psi_{an}^{(f)} = \psi_{an}^{(f)}(q_0, q_a)$, на втором — вероятность перехода $P_{nk}^{(a)}$ тяжелой системы в новое состояние $\psi_{a,mk}^{(e)} = \psi_{a,mk}^{(e)}(q_0, q_a)$. Результирующая вероятность определяется произведением $P_{f,mn}^{(e)} \cdot P_{nk}^{(a)}$, начальное состояние тяжелой системы — уравнением

$$H_a \psi_{an}^{(f)} = E_n^{(f)} \psi_{an}^{(f)}. \quad (5)$$

Уравнение, описывающее конечное состояние тяжелой системы, получим ниже. Для нахождения $P_{f,mn}^{(e)}$ необходимо решить задачу

$$i\hbar \frac{\partial \psi_e}{\partial t} = H_e \psi_e; \quad t=0: \psi_e = \psi_{ef}(r). \quad (6)$$

Согласно теории квантовых переходов [11], решение задачи ищем в виде

$$\psi_e = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(t) \psi_{em}(t, r) + c_f(t) \psi_{ef}(t, r); \quad (7)$$

$$\psi_{em}(t, r) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_m(q_0) t\right) \psi_{em}(r, q_0);$$

$$\psi_{ef}(t, r) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_f t\right) \psi_{ef}(r).$$

Коэффициенты $c_m(t)$, $c_f(t)$ должны удовлетворять условиям $t=0: c_m(0)=0, c_f(0)=1$.

Волновая функция электрона в металле имеет асимптотику $\psi_{ef}(r) \rightarrow Ce^{ik \cdot r}$ при $x \rightarrow -\infty$ [12], а в ионе X^- состояние локализовано, поэтому можно считать

$$\int \psi_{em}^*(r, q_0) \psi_{em}(r, q_0) dr = \delta_{ml}; \quad (8)$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \psi_{ef}^*(r) \psi_{ef}(r) dr \rightarrow \infty.$$

Вероятность электронного перехода $\psi_{ef}(r) \rightarrow \psi_{em}(r, q_0)$, когда состояние тяжелой системы определяется $\psi_{an}^{(f)}$, выражается как $P_{f, mn}^{(e)} = |c_m(t)|^2$.

После подстановки (7) в (16) умножаем полученные соотношения соответственно на $\psi_{em}^*(r, q_0)$, $\psi_{ef}^*(r)$ и интегрируем по r . С учетом (3), (4), (8) получаем

$$c_m(t) = W_{fm}^{(ea)} \frac{1 - \exp\left(\frac{i}{\hbar} (\varepsilon_m(q_0) - \varepsilon_f) t\right)}{\varepsilon_m(q_0) - \varepsilon_f}, \quad c_f = 1; \quad (9)$$

$$W_{fm}^{(ea)} = \int \psi_{em}^*(r, q_0) V_{ea} \psi_{ef}(r) dr.$$

Из (9) видно, что в рамках рассматриваемой модели электронные переходы осуществляются под действием потенциала V_{ea} при наличии перекрытия электронных орбиталей начального и конечного состояний.

Волновую функцию всей системы разыскиваем в виде

$$\begin{aligned} \Psi = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{am}(t, q_0, q_z) c_m(t) \psi_{em}(r, q_0) + \\ + \exp\left[-\frac{i}{\hbar} (E_n^{(f)} + \varepsilon_f) t\right] \psi_{an}^{(f)} \psi_{ef}(r). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь учтено, что при $t=0$ тяжелая система находилась в состоянии $\psi_{an}^{(f)}$, определяемом уравнением (5). Искомыми являются $\psi_{am}(t, q_0, q_z)$, описывающие эволюцию тяжелой системы, в которой вместо X фигурирует ион X^- . Функция Ψ должна удовлетворять уравнению

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = (H_a + H_e) \Psi. \quad (11)$$

Подставляя (10) в (11) после последующего умножения на ψ_{em}^* и интегрирования по r с учетом (3)—(5), (8) получаем

$$\begin{aligned} i\hbar c_m \frac{\partial \psi_{am}}{\partial t} = c_m (H_a + \varepsilon_m(q_0)) \psi_{am} - i\hbar c_m \psi_{am} + \\ + L_m + W_{fm}^{(ea)} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} (E_n^{(f)} + \varepsilon_f) t\right]; \end{aligned} \quad (12)$$

$$L_m = \int \psi_{em}^* L(\psi_a, \psi_e) dr;$$

$$L(\psi_a, \psi_e) = - \sum_a \frac{\hbar^2}{2M_a} \sum_{m=1}^{\infty} (\nabla_{q_a} c_m \psi_{em} \cdot \nabla_{q_a} \psi_{am} + \psi_{am} \Delta_{q_a} c_m \psi_{em}).$$

Исходя из физического смысла представления (10), необходимо считать

$$t \rightarrow 0: \psi_{am} = \begin{cases} \exp\left(-\frac{it}{\hbar} (E_n^{(f)} + \varepsilon_f)\right) \psi_{a1}^{(f)}, & m=n; \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (13)$$

Задача (12), (13) описывает переход тяжелой системы из начального состояния $\psi_{an}^{(f)}$ в конечное $\psi_{a,mk}^{(e)}$, которое определяется уравнением (12) при $t \rightarrow \infty$.

Из (9) имеем

$$P_{f,mn}^{(e)} = |W_{fm}^{(ea)}|^2 \frac{4 \sin^2 \varepsilon_m(q_0) - \varepsilon_f t}{(\varepsilon_m(q_0) - \varepsilon_f)^2}. \quad (14)$$

Для достаточно больших $t: (\varepsilon_m(q_0) - \varepsilon_f) t / 2\hbar \gg 1$ эта формула эквивалентна [13]

$$P_{f,mn}^{(e)} = \frac{2\pi}{\hbar} |W_{fm}^{(ea)}|^2 \delta(\varepsilon_m(q_0) - \varepsilon_f) t, \quad (15)$$

где символ δ обозначает дельта функцию. Из (15) следует, что электронные переходы возможны лишь при

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m(q_0), \quad (16)$$

что выражает закон сохранения энергии.

Оценим промежуток времени, на котором справедливо (15). Введем флуктуацию энергии $\Delta\varepsilon = |\varepsilon_m(q_0) - \varepsilon_f|$. Тогда (15), (16) выполняются, если $2\hbar/t\varepsilon_f \ll \Delta\varepsilon/\varepsilon_f \ll 1$. Полагая $t \sim \tau \sim 10^{-11}$ с, $\varepsilon_f \geq 1$ эВ, получаем $2\hbar/t\varepsilon_f \leq 10^{-14}$, поэтому для времени пребывания X в ячееке Френкеля (15), (16) выполняются.

Для получения предельного уравнения, которому удовлетворяет тяжелая система в конечном состоянии, необходимо в (12) устремить $t \rightarrow \infty$ и учесть (15), (16), что дает

$$i\hbar \frac{\partial \psi_{am}}{\partial t} = (H_a + \varepsilon_m(q_0)) \psi_{am} + Z_m(\psi_{am}); \quad (17)$$

$$Z_m(\psi_{am}) \equiv - \sum_a \frac{\hbar^2}{2M_a} \sum_{m=1}^{\infty} (\nabla_{q_a} \psi_{em} \cdot \nabla_{q_a} \psi_{am} + \psi_{am} \Delta_{q_a} \psi_{em}).$$

Отметим, что в силу $\tau_0 \ll \tau$ достаточно устремить $t \rightarrow \tau$. Для стационарных состояний $\psi_{am} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_k^{(e)} t\right) \psi_{a,mk}^{(e)}$ получаем

$$(H_a) + \varepsilon_m(q_0)) \psi_{a,mk}^{(e)} + Z_m(\psi_{a,mk}^{(e)}) = E_k^{(e)} \psi_{a,mk}^{(e)}. \quad (18)$$

Это уравнение определяет конечное состояние тяжелой системы, т. е. при $t \rightarrow \tau$ должно иметь место

$$\psi_{am} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_{ak}(t) \psi_{a,mk}^{(e)} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_k^{(e)} t\right), \quad (19)$$

где $c_{ak}(t)$ определяют вероятность перехода тяжелой системы $P_{nk}^{(a)}(t) = |c_{ak}(t)|^2$. Для вычисления $c_{ak}(t)$ можно воспользоваться тем, что оператор гамильтона уравнения (18) можно рассматривать как «внезапно» измененный гамильтониан уравнения (5). Это связано с тем, что электронный переход совершается значительно быстрее, чем время перехода тяжелой системы. В этом случае [13]

$$c_{ak}(\tau) = \sum_a \int \psi_{an}^{(f)} \psi_{a,mk}^{(e)*} dq_a. \quad (20)$$

После подстановки (19) в (10) убеждаемся, что результирующая вероятность определяется как

$$P_{fn \rightarrow mk} = P_{f,mn}^{(e)}(t) \cdot P_{nk}^{(a)}(t). \quad (21)$$

Формула Аррениуса. Обычно интересуются вероятностью перехода в единицу времени. Для времен $t \sim \tau$ имеем

$$\dot{p} \equiv \frac{d}{dt} P_{fn \rightarrow mk} = \frac{2\pi}{\hbar} |W_{fm}^{(ea)}|^2 \delta(\varepsilon_m(q_0) - \varepsilon_f) P_{nk}^{(a)}(\tau). \quad (22)$$

Отсюда следует, что p постоянна и не зависит от τ .

Заметим, что $\varepsilon_m(q_0)$ зависит также от n , так как $V_a(q_0, q_a)$ определяется состоянием $\psi_{an}^{(f)}$. Пусть наименьшее состояние $n = n_0$ является единственным, при котором (16) имеет решение $q_0 = q_*$, $m = m_*$. В силу тепловых флуктуаций состояние $m = m_*$ принимается с некоторой вероятностью $P_*^{(e)}$. Принимая, что $m = m_0$ — наименьшее состояние, имеем

$$P_*^{(e)} = \frac{\exp(-\varepsilon_{m_0}/k_B T)}{\exp(-\varepsilon_{m_0}/k_B T) + \sum_{m, m \neq m_0} \exp(-\varepsilon_m/k_B T)}. \quad (23)$$

Здесь ε_m берутся при $q_0 = q_*$. Тяжелая система занимает положение с $q_0 = q_*$ также с некоторой вероятностью $P_*^{(a)}$. Аналогично имеем

$$P_*^{(a)} = \frac{\exp(-E^*/k_B T)}{\exp(-E_{n_0}^{(f)}/k_B T) + \sum_{n, n \neq n_0} \exp(-E_n^{(f)}/k_B T)}, \quad (24)$$

где E_* — энергия, соответствующая положению тяжелой системы при $q_0 = q_*$, $E_{n_0}^{(f)}$ — энергия основного состояния. Результирующая вероятность равна $P_* = P_*^{(e)}$, $P_*^{(a)}$, а вероятность электронного перехода в единицу времени с фиксированного уровня ε_f в металле равна pP_* . Для подсчета полной вероятности $P(x_*)$, фигурирующей в (2), необходимо учесть распределение электронов по энергиям в металле, что дает

$$P(x_*) = \int_{\Sigma} \int_0^{\infty} p P_* n_f \rho d\varepsilon_f d\Omega / 4\pi, \quad (25)$$

где $d\Omega$ — элемент сферического угла в импульсном пространстве, $n_f = n_f(\varepsilon_f)$ — функция распределения по энергиям в металле; функция ρ учитывает структуру энергетических зон [14]. Предполагая $\varepsilon_{m_0} \ll \varepsilon_m$, $E_{n_0}^{(f)} \ll E_n^{(f)}$ в (23), (24) и вводя энергию активации $E_a = \varepsilon_{m_*} - \varepsilon_{m_0} + E^* - E_{n_0}^{(f)}$ с учетом (22) — (24), получаем выражение для $P(x_*)$ в виде формулы Аррениуса

$$P(x_*) = A \exp(-E_a/k_B T); \quad (26)$$

$$A = \frac{1}{2\hbar} \int_{\Sigma} \int_0^{\infty} |W_{fm}^{(ea)}|^2 \delta(\varepsilon_{m_*} - \varepsilon_f) n_f \rho d\varepsilon_f d\Omega \cdot P_{n_*, k_0}^{(a)},$$

где k_0 — индекс основного состояния, в которое переходит тяжелая система.

К соотношениям (21), (22), (25), (26) необходимо добавить условие $E_k^{(e)} = \varepsilon_f + E_n^{(f)}$, вытекающее из закона сохранения энергии.

Случай высоковольтных полей. Вычислим ψ_{ef} , исходя из наиболее простой модели металла $V_{em} = (-V_0, x < 0; 0, x > 0)$, где x — нормальная к поверхности металла координата, направленная вглубь жидкости, а значение $x=0$ фиксирует поверхность раздела. В этом случае внутри металла [14]

$$\psi_{ef} = C e^{-i\varepsilon_f t/\hbar} e^{i/\hbar \times \vec{p} \cdot \vec{r}}, \quad x < 0, \quad (27)$$

где $C = \text{const}$; $\varepsilon_f = \frac{p^2}{2m} - V_0$ — энергия электрона; $\vec{p}$ — его импульс, $p^2 = |\vec{p}|^2$; m — масса электрона.

Представляя импульс $\vec{p} = \vec{p}_\parallel + p_x \vec{e}_x$, где $\vec{p}_\parallel$ — импульс, параллельный поверхности металла, решение в области $x > 0$ ищем в виде

$$\psi_{ef} = C e^{\frac{-i\varepsilon_f t}{\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}_\parallel \cdot \vec{r}} \psi(x), \quad x > 0. \quad (28)$$

Тогда для $\psi(x)$ получаем задачу

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + \frac{p_{||}^2}{2m} \psi - eE_{\text{loc}} x \psi + V_{eg} \psi = \varepsilon_f \psi; \quad (29)$$

$$x=0: \psi=1; \quad x \rightarrow \infty: \psi < \infty.$$

Здесь V_{eg} — потенциал взаимодействия электрон — жидкость, E_{loc} — локальное внешнее поле, связанное со средним E через коэффициент усиления β как $E_{\text{loc}} = \beta E$.

В приближении непрерывно поляризующейся среды

$$V_{eg} = \frac{\varepsilon - 1}{4(\varepsilon + 1)} \frac{e^2}{\delta - x},$$

где δ — размер по порядку равный нескольким диаметрам молекулы несущей жидкости. Обычно расстояние вылета электрона равно нескольким ангстремам, поэтому силы изображения учитывать не нужно [14] и $\delta \gg x$. Поэтому можно считать $V_{eg} \simeq \frac{\varepsilon - 1}{4(\varepsilon + 1)} \times$

$\times \frac{e^2}{\delta} = \text{const}$. Уравнение (29) можно записать в виде

$$\psi''(\xi) - (1 - \mu\xi) \psi(\xi) = 0; \quad \xi = \frac{x}{x_0}, \quad \mu = \frac{\beta E}{E_*}; \quad (30)$$

$$x_0 = \hbar \left/ \left(2m \left(V_0 - \frac{p_x^2}{2m} \frac{(\varepsilon - 1) e^2}{4(\varepsilon + 1) \delta} \right) \right)^{1/2} \right., \quad E_* = \frac{\hbar^2}{2mex_0^3}.$$

С учетом граничных условий (29) решение уравнения (30) записывается как

$$\psi(\xi) = \sqrt{\frac{t}{t_*}} \frac{I_{1/3}\left(\frac{2}{3} t_{3/2}\right)}{I_{1/3}\left(\frac{2}{3} t_*^{3/2}\right)}, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_*; \quad (31)$$

$$\psi(\xi) = \sqrt{\frac{t}{t_*}} \frac{J_{1/3}\left(\frac{2}{3} |t|^{3/2}\right)}{I_{1/3}\left(\frac{2}{3} t_*^{3/2}\right)}, \quad \xi \geq \xi_*, \quad (32)$$

где $t = (1 - \mu\xi)/\mu^{2/3}$, $t_* = 1/\mu^{2/3}$, $\xi_* = 1/\mu$; $I_{1/3}$, $J_{1/3}$ — функции Бесселя мнимого аргумента и первого рода соответственно.

В слабых полях $\mu \ll 1$ при $\xi \ll \xi_* = 1/\mu \gg 1$ с учетом разложения $I_{1/3}(z) = e^z / \sqrt{2\pi z}$, $z \gg 1$ имеем

$$I_{1/3}\left(\frac{2}{3} t_{3/2}\right) \simeq \frac{\exp(2/3\mu)}{\sqrt{4\pi/3\mu}} e^{-\xi} = e^{-\xi} I_{1/3}\left(\frac{2}{3} t_*^{3/2}\right).$$

В этом случае из (31) получаем, что решение в отсутствие поля имеет вид $\psi(\xi) = e^{-\xi}$.

Таким образом, зависимость ψ_{ef} от поля имеет место лишь в достаточно сильных полях, когда $\mu \gtrsim 1$. Например, для глубины вылета электрона $x_0 \approx 6 \text{ \AA}$, $\varepsilon = 2$, коэффициентов усиления $\beta = 10^3$ и полей $E = 30 \text{ кВ/см}$ имеем $E_* = 1,5 \text{ МВ/см}$, $\mu = 2$. В этих случаях матричный коэффициент $W_{fm}^{(ea)}$ существенно зависит от поля. Если считать, что максимальное перекрытие электронных орбиталей происходит на расстоянии $\xi \sim \xi_*$ ($x \sim x_0 \xi_* = x_0/\mu$) и $\mu \gg 1$, то из (31), (32) нетрудно получить, что в матричный элемент (26) основной вклад дает функция

$$\psi(\xi) = \mu (\xi_* - \xi). \quad (33)$$

Так как $k_{fi} \sim |W_{fm}^{(ea)}|^2$, то из (26), (33) вытекает квадратичная зависимость $k_{fi} \sim E^2$. В общем случае зависимость k_{fi} от E весьма сложная и определяется не только функциями (31), (32), но и характером перекрытия электронных орбиталей, т. е. структурой поверхности металла, химическими свойствами примесей и несущей жидкости.

Двухстадийная реакция. Реакция (1) может идти в две стадии. Так, молекулярный комплекс $M \cdot X$, обладая дипольным моментом p , во внешнем поле ориентируется так, что между электродом и частицей X находится молекула несущей жидкости M . Тогда реакция может идти в два этапа. На первом происходит электронный переход $M \cdot X \rightarrow M^+ \cdot X^- (k_x)$, на втором разряжается ион M^+ : $M^+ \cdot X^- + e^- \rightleftharpoons M + X^- (k_1, k_2)$.

Предположим, что 1) первая реакция обусловливается только короткодействующими силами и вероятность ее происхождения максимальна на поверхности электрода; 2) разрядка ионов M^+ имеет активационный характер, а сама реакция близка к равновесности, так что поток i' ионов M^+ в ней определяется формулой [16]

$$i' = i'_0 \left[\exp\left(\frac{\alpha e \eta}{k_B T}\right) - \exp\left(-\frac{(1-\alpha) e \eta}{k_B T}\right) \right], \quad \eta = \delta x \cdot E_{loc};$$

3) медленной стадией являются электронные переходы. Тогда результирующий ток пропорционален вероятности ориентации диполя вдоль поля $P_1 = L(\xi)$, вероятности электронного перехода в первой реакции $P_2 \sim k_x$, вероятности разрядки иона $M^+ P_3 \sim i$ и выражается как

$$i = i_0 \left[\exp\left(\frac{\alpha e \eta}{k_B T}\right) - \exp\left(-\frac{(1-\alpha) e \eta}{k_B T}\right) \right] L(\xi), \quad i_0 = i'_0 \cdot k_x. \quad (34)$$

Здесь $\xi = p E_{loc} / k_B T$, $L(\xi)$ — функция Ланжевена. При малых перенапряжениях $e \eta / k_B T \ll 1$ с учетом $\xi \ll 1$ получаем квадратичную зависимость от поля

$$i = k_0 E^2; \quad k_0 = i_0 \frac{e \beta \delta x}{k_B T} - \frac{p}{3 k_B T}. \quad (35)$$

При выводе этой формулы предполагалось, что энергия взаимодействия диполя с металлическим электродом значительно меньше энергии диполя в электрическом поле: $(p^2/4\epsilon x^3)/pE_{loc} \ll 1$. Например, для комплекса молекула бензола — I_2 доля притягиваемого иодом заряда составляет всего 3 %. Полагая $x \sim 5 \text{ \AA}$, $\epsilon \sim 2$, $p \leq e \cdot 0,2 \text{ \AA}$, $E_{loc} \approx 10^5 \text{ В/см}$, получаем $p/(4\epsilon x^3 E_{loc}) \leq 0,2$.

Список литературы: 1. Жакин А. И. Редокс-системы в электрогидродинамике и расчет электроконвективных течений//Магнитная гидродинамика. 1982. № 2. С. 70—78. 2. Жакин А. И., Тарапов И. Е., Федоненко А. И. Экспериментальное изучение механизма проводимости полярных жидких диэлектриков//Электронная обработка материалов. 1983. № 5. С. 37—41. 3. Коробейников С. М., Янишин К. В., Янишин Э. В. Предпробойные процессы в жидкой изоляции при импульсном напряжении//Импульсный разряд в диэлектриках/Новосибирск, 1985. С. 99—114. 4. Zahn M., Mc Guire T. J. The Kerr Electro-Optic Effect With Coaxial Cylindrical Electrodes//IEEE. Trans. on Electrical Insulations. 1980, v. E. 1. P. 1—15. 5. Жданов С. И., Грачева И. П. Электрохимия жидких кристаллов//Жидкие кристаллы/Под ред. Жданова С. И. М., 1979. С. 35—64. 6. Жакин А. И. Электрогидродинамика жидких диэлектриков на основе диссоциационно-инжекционной модели проводимости//Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости. 1986. № 4. С. 3—13. 7. Жакин А. И. Исследование электроконвекции и электроконвективного теплопереноса в жидких диэлектриках при униполярной инжекционной проводимости//Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа. 1988. № 2. С. 14—20. 8. Boudreaux D. S., Cutler P. H. Theory of atom-metal interaction II. Perturbation theory in field ionization. Calculation. — Surface Sci. 1966, v. 5. № 1. P. 230—238. 9. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. Л., 1975. 592 с. 10. Мигдал А. Б., Крайнов В. П. Приближенные методы квантовой механики. М., 1966. 152 с. 11. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. М., 1976. 664 с. 12. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М., 1978. 792 с. 13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М., 1974. 752 с. 14. Бродский А. М., Гуревич Ю. Я. Теория электронной эмиссии из металлов. М., 1973. 256 с. 15. Литвинов Е. А., Месяц Г. А., Проскуровский Д. Н. Автоэмиссионные и взрывоэмиссионные процессы при вакуумных разрядах//Успехи физ. наук, 1983. 132. Вып. 2. С. 265—302. 16. Догонадзе Р. Р., Кузнецов А. М., Черненко А. А. Теория гомогенных и гетерогенных электронных процессов в жидкостях//Успехи химии. 1965. 34. Вып. 10. С. 1179—1812.

Поступила в редколлегию 08.06.89

УДК 517.9

В. А. ЛЬВОВ

ОБ ОДНОЙ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ЗАДАЧЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ ОПИСАНИИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ В ЖИДКОСТИ

При описании движения суспензий большое значение имеет учет воздействия на несущую жидкость ансамбля движущихся в ней частиц.

В данной работе рассмотрена одна математическая задача, относящаяся к описанию движения слабо концентрированных смесей, состоящих из большого числа мелких твердых частиц и вяз-

кой несжимаемой жидкости. Для простоты рассматривается случай, когда все частицы имеют одинаковую форму, а именно — тела вращения. При большом числе движущихся частиц естественно предположить, что все они движутся по некоторым случайным траекториям и произвольно вращаются так, что их ориентация в пространстве определяется вектором, направленным вдоль оси симметрии частицы.

Если число частиц велико, а их диаметры малы, то желательно получить усредненное описание движения такой смеси. Для этого в первую очередь необходимо изучить влияние, которое оказывают случайно движущиеся твердые частицы на движение несущей жидкости. Этот вопрос исследуется ниже (теорема 1) для некоторого фиксированного ($t=t_0$) момента времени.

1. Предположим, что частицы Q_i^N ($i=1, \dots, N$) все одинаковы и представляют собой тела вращения, причем их центры масс $\vec{X}^i$ распределены случайно в ограниченной области $\Omega \subset R_3$, а орты осей вращения $\vec{\lambda}_i$ — случайно на единичной сфере $S_2 \subset R_3$.

Рассмотрим в случайной области $\Omega^N = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^N Q_i^N$ краевую задачу

$$\nu \Delta \vec{u}^N = \tau p^N + \vec{\Phi}^N(x), \quad \operatorname{div} \vec{u}^N = 0, \quad x \in \Omega^N; \quad (1)$$

$$\vec{u}^N(x) = \vec{v}^i + \vec{\theta}^i \times (x - \vec{x}^i), \quad x \in \partial Q^N \quad (i=1, \dots, N); \quad (2)$$

$$\vec{u}^N(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega; \quad (3)$$

где ν — вязкость жидкости, $\vec{\Phi}^N(x)$ — вектор-функция из пространства $L_q(\Omega)$ ($q > 6/5$), $\vec{v}_i$ и $\vec{\theta}_i$ — некоторые постоянные векторы. Граничное условие (2) соответствует условию прилипания на движущихся в жидкости твердых частицах Q_i^N . Действительно, если положить

$$\vec{\Phi}^N(x) = \frac{\partial \vec{u}^N}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i^N \frac{\partial \vec{u}^N}{\partial x_i} + \vec{g}(x, t_0)$$

в некоторый фиксированный момент времени $t=t_0$, то скорость $\vec{u}^N = \vec{u}^N(x, t_0)$ несущей жидкости будет удовлетворять равенствам (1) — (3), где $\vec{\theta}^i$ — мгновенные угловые скорости находящихся в ней частиц Q_i^N , а $\vec{v}^i$ — скорости их центров масс (в момент времени $t=t_0$).

Если множества Q_i^N не пересекаются друг с другом и с границей $\partial\Omega$ области Ω , то, как следует из результатов рабо-

ты [1], для любого фиксированного номера существует единственное решение $\{\vec{u}^N, p^N\}$ задачи (1) — (3), принадлежащее пространствам $\vec{u}^N \in W_2^2(\bar{\Omega}^N) \cap H(\Omega^N)$, $\nabla p^N \in L_2(\Omega^N)$, где $\bar{\Omega}^N \subset \Omega^N$. В дальнейшем решении задачи (1) — (3) будем называть лишь вектор скорости $\vec{u}^N(x)$, продолженный на множество $\bigcup_{i=1}^N Q_i^N$ равенством (2).

Предположим, что векторы $\vec{v}^i$ и $\vec{\theta}^i$ так же, как векторы $\vec{x}^i$ и $\vec{\lambda}^i$, случайны и определяются набором s -частичных функций распределения

$$f_s^N = f_s^N(\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^s; \vec{v}^1, \dots, \vec{v}^s; \vec{\theta}^1, \dots, \vec{\theta}^s; \vec{\lambda}^1, \dots, \vec{\lambda}^s), (s = 1, \dots, N),$$

т. е. вероятность того, что центры масс $\vec{x}$, их скорости $\vec{v}$, угловые скорости $\vec{\theta}$ и ориентации $\vec{\lambda}$ данной группы из s частиц находятся соответственно в окрестностях точек $\vec{x}^i, \vec{v}^i, \vec{\theta}^i, \vec{\lambda}^i (i=1, \dots, s)$ в бесконечно малых объемах $dx^i, dv^i, d\theta^i, d\lambda^i$ равна

$$f_s^N(\vec{x}; \vec{v}; \vec{\theta}; \vec{\lambda}) d^s x d^s v d^s \theta d^s \lambda.$$

Здесь и всюду в дальнейшем для сокращения письма, используются обозначения: $\vec{x} = \{\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^s\}$, $\vec{v} = \{\vec{v}^1, \dots, \vec{v}^s\}$, $\vec{\theta} = \{\vec{\theta}^1, \dots, \vec{\theta}^s\}$, $\vec{\lambda} = \{\vec{\lambda}^1, \dots, \vec{\lambda}^s\}$; $d^s x = dx^1 \dots dx^s$, $d^s v = dv^1 \dots dv^s$, $d^s \theta = d\theta^1 \dots d\theta^s$, $d^s \lambda = d\lambda^1 \dots d\lambda^s$; $dx, dv, d\theta$ — элементы объема в R_3 , а $d\lambda$ — элемент площади на единичной сфере $S_2 \subset R_3$.

Функции f_s^N , очевидно, должны удовлетворять соответствующим условиям, вытекающим из их вероятного смысла (см. например [2]). Таким образом, на множестве решений задачи (1) — (3) вводится вероятностная мера $d\omega^N$, т. е. вектор-функции $\vec{u}^N = \vec{u}^N(x; \omega)$ зависит от элементарного события ω из вероятностного пространства B^N , в котором мера $d\omega^N$ порождается функциями распределения $f_s^N(\vec{x}; \vec{v}; \vec{\theta}; \vec{\lambda}) (s=1, \dots, N)$. Вероятность (меру) события $A \in B^N$ будем обозначать $Pr_N(A)$.

Предположим, что вектор-функция $\Phi^N(x)$ также зависит от $\omega \in B^N$ ($\Phi^N = \Phi^N(x; \omega)$) и при $N \rightarrow \infty$ сходится слабо в $L_q(\Omega)$ ($q > 6/5$) по мере (вероятности) в пространстве B^N к неслучайной вектор-функции $\Phi(x)$. А именно, для любого $\varepsilon > 0$ и любой вектор-

функции $\Phi(x)$ из некоторого плотного в $L_p(\Omega)$ ($1/p + 1/q = 1$) множества K ($\Phi \in K \subset L_p(\Omega)$)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr_N \left\{ \omega: \int_{\Omega} (\vec{\Phi}^N(x; \omega) - \vec{\Phi}(x), \vec{\varphi}(x)) dx < \varepsilon \right\} = 1, \quad (4)$$

и, кроме того, найдется такое $C < \infty$, что для любого $R < \infty$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr_N \left\{ \omega: \int_{\Omega} |\vec{\Phi}^N(x; \omega)|^q dx < R \right\} \geq 1 - \frac{C}{R}. \quad (5)$$

Определим [3] емкостный тензор $\{C_{kl}(Q_i^N)\}_{k,l=1}^3$ ограниченного замкнутого множества (частицы) $Q_i^N \in R_3$ равенством

$$C_{kl}(Q_i^N) = \int_{R_3 \setminus Q_i^N} (\nabla \vec{v}^{k,i}, \nabla \vec{v}^{k,i}) dx,$$

где $\vec{v}^{k,i} = \vec{v}^{k,i}(x)$ решение следующей задачи:

$$\Delta \vec{v}^{k,i} = \nabla p^{k,i} \operatorname{div} \vec{v}^{k,i} = 0, \quad x \in R_3 \setminus Q_i^N;$$

$$\vec{v}^{k,i}(x) = \vec{e}^k, \quad x \in \partial Q_i^N; \quad (6)$$

$$\vec{v}^{k,i}(x) = O(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty;$$

$\vec{e}^k$ — орт единичной оси x_k .

Очевидно, $\{C_{kl}(Q_i^N)\}$ характеризует, с одной стороны, подобно ньютоновской емкости массивность множества Q_i^N , а с другой — его ориентацию в пространстве.

Пусть при $N \rightarrow \infty$ диаметры $d_i^N = d^N$ частиц Q_i^N стремятся к нулю так, что их емкостные тензоры $\{C_{kl}(Q_i^N)\}_{k,l=1}^3$ асимптотически имеют порядок $O(N^{-1})$. Тогда при определенных условиях, налагаемых на функции распределения $f_s^N(x; \vec{v}; \vec{\theta}; \vec{\lambda})$, ($s = 1, \dots, N$), случайное решение $\vec{u}^N(x; \omega)$ задачи (1) — (3) по вероятности в метрике $L_r(\Omega)$ ($r < 6$) сходится к неслучайной вектор-функции $u(x)$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr_N \left\{ \omega: \int_{\Omega} |\vec{u}^N(x; \omega) - \vec{u}(x)|^r dx < \varepsilon \right\} = 1. \quad (7)$$

При этом вектор-функция $u(x)$ является решением некоторой усредненной системы уравнений в области Ω , коэффициенты ко-

торой выражаются через одночастичные функции распределения $f_1^N(x, v, \theta, \lambda)$ и емкостные тензоры $\{C_{kl}(Q_i^N)\}$ частицы Q_i^N . Точный результат формулируется следующим образом.

Теорема 1. Пусть при $N \rightarrow \infty$ выполняются такие условия:

1) носители функций $f_s^N(x; v; \theta; \lambda)$ принадлежат множествам $(\Omega)^s \times (R_3)^s \times (R_3)^s \times (S_2)^s$ причем для некоторого r ($2 \leq r < 6$)

$$\int -8s - \int f_s^N(x; v; \theta; \lambda) (1 + |v|^r + |\theta|^r) d^s v d^s \theta d^s \lambda \leq \\ \leq C \cdot (m+1) \cdot \min_{1 \leq i \leq s} \rho(x^i, \partial\Omega),$$

где $\rho(x, \partial\Omega)$ — расстояние от точки $x \in \Omega$ до $\partial\Omega$, $\gamma \geq 0$,

$$|v|^r = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^3 |v_k^i|^r, \quad |\theta|^r = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^3 |\theta_k^i|^r,$$

C не зависит от s и N ;

2) существует неотрицательная нормированная функция $f(x, v, \theta, \lambda)$, такая, что при $N \rightarrow \infty$

$$a) \int -11 - \int |f_1^N(x, v, \theta, \lambda) - f(x, v, \theta, \lambda)| (1 + |v|^2) dx dv d\theta d\lambda = o(1),$$

$$б) \int -22 - \int |f_2^N(x^1, x^2; v^1, v^2; \theta^1, \theta^2; \lambda^1, \lambda^2) - \\ - f(x^1, v^1, \theta^1, \lambda^1) f(x^2, v^2, \theta^2, \lambda^2)| \cdot (1 + |v^1|^2 + \\ + |v^2|^2) d^2 x d^2 v d^2 \theta d^2 \lambda = o(1);$$

3) диаметры частиц Q_i^N стремятся к нулю так, что

$$C_{kl}(Q_i^N) = \frac{1}{N} C_{kl}(\vec{\lambda}^i) + o\left(\frac{1}{N}\right), \quad (k, l = 1, 2, 3),$$

где $\{C_{kl}(\lambda)\}_{k,l=1}^3$ — заданный симметричный неотрицательный тензор на S_2 ;

4) последовательность $\{\vec{\Phi}^N(x; \omega), N \rightarrow \infty\}$ сходится по вероятности в B^N слабо в $L_q(\Omega)$ ($q > 6/5$) к вектор-функции $\vec{\Phi}(x)$ в смысле (4), (5).

Тогда последовательность $\{\vec{u}^N(x; \omega), N \rightarrow \infty\}$ решений задачи (1) — (3) по вероятности в метрике $L_r(\Omega)$ сходится к вектор-функции $\vec{u}(x)$, являющейся решением следующей краевой задачи (детерминированной)

$$\nu \Delta \vec{u} - \nu Q(x) \vec{u} = \nabla p + \vec{\Phi}(x) - \nu \vec{V}(x), \quad \text{div } \vec{u} = 0, \quad x \in \Omega; \quad (8)$$

$$\vec{u}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (9)$$

где вектор $\vec{V}(x) = \{V_k(x)\}_{k=1}^3$ и тензор $\vec{Q}(x) = \{Q_{kl}(x)\}_{k,l=1}^3$ определяются формулами

$$V_k(x) = \int -8 - \int f(x, v, \theta, \lambda) \sum_{l=1}^3 C_{kl}(\lambda) v_l dv d\theta d\lambda;$$

$$Q_{kl}(x) = \int -8 - \int f(x, v, \theta, \lambda) C_{kl}(\lambda) dv d\theta d\lambda. \quad (10)$$

Замечание 1. В теореме 1 условие 3 будет выполняться, например, если частицы Q_i^N являются гомотетическим сжатием в N раз фиксированного тела вращения Q с емкостным тензором $\{C_{kl}(\lambda)\}$, который в этом случае, очевидно, определяется только направлением λ оси вращения Q (при этом $C_{kl}(Q_i^N) = N^{-1} \cdot C_{kl}(\lambda^i)$).

Замечание 2. Условие 2, б является аналогом известного принципа ослабления корреляций [2], поскольку оно требует, чтобы при больших N (и, значит, при малых частицах) двухчастичная функция распределения факторизовалась на произведение одночастичных функций. По физическим соображениям такая факторизация может происходить, когда расстояние между частицами больше эффективного радиуса взаимодействия. В типичном случае, когда диаметр d^N частиц Q_i^N имеет порядок $O(N^{-1})$, радиус их взаимодействия может быть порядка $Q(N^{-\delta})(2/3 < \delta < 1)$. При этом утверждение теоремы 1 остается в силе, если в условии 2, б интегрирование по переменной $\vec{x} = \{\vec{x}^1, \vec{x}^2\}$ проводить лишь по обла- сти

$$(\Omega)^2 \cap \{x: |x^1 - x^2| > N^{-\delta}, (2/3 < \delta < 1)\}.$$

Приведем один важный для доказательства теоремы 1 результат, относящийся к асимптотическому поведению решения первой краевой задачи для системы уравнений (1) в неслучайной (детерминированной) области $\Omega^N = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^N Q_i^N$. Рассмотрим в Ω^N первую краевую задачу:

$$\Delta \vec{v}^N = \nabla p^N + \vec{\Psi}^N(x), \operatorname{div} \vec{v}^N = 0, x \in \Omega^N; \quad (11)$$

$$\vec{v}^N(x) = 0, x \in \partial\Omega^N;$$

где $\vec{\Psi}^N(x) \in L_q(\Omega) (q > 6/5).$

Известно [1], что при каждом N существует единственное решение $\{\vec{v}^N(x), p^N(x)\}$ этой задачи, причем $\vec{v}^N \in \vec{W}_2^1(\Omega^N)$.

Используя введенные выше обозначения, сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть при $N \rightarrow \infty$ выполняются условия:

$$1) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \in N} d_i^N = 0;$$

2) для некоторого κ ($3/2 < \kappa \leq 2$)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{(d_i^N)^\kappa}{(r_i^N)^{3(\kappa-1)}} < \infty;$$

3) для любой подобласти $G \subset \Omega$ существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{(G)} C_{kl}(Q_i^N) = \int_G C_{kl}(x) dx \quad (k, l = 1, 2, 3),$$

где суммирование проводится по тем индексам i , для которых Q_i^N лежат строго внутри G , а $C(x) = \{C_{ke}(x)\}_{k,e=1}^3$ — непрерывное тензорное поле;

4) последовательность $\{\vec{\Psi}^N(x), N \rightarrow \infty\}$ сходится слабо в пространстве $L_q(\Omega)$ ($q > 6/5$) к вектор-функции $\vec{\Psi}(x)$.

Тогда последовательность $\{\vec{v}^N(x), N \rightarrow \infty\}$ решений задачи (11), продолженная на множество $\bigcup_{i=1}^N Q_i^N$ нулем, сходится слабо в $W_2^1(\Omega)$ (и сильно в $L_r(\Omega)$, $r < 6$) к вектор-функции $\vec{v}(x)$, являющейся решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \nu \Delta \vec{v} - \nu C(x) \vec{v} &= \nabla p + \vec{\Psi}(x), \operatorname{div} \vec{v} = 0, x \in \Omega; \\ \vec{v}(x) &= 0, x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (12)$$

Доказательство этой теоремы, когда $\kappa = 2$, содержится в работе [4]. Доказательство для $3/2 < \kappa \leq 2$ может быть получено аналогично.

2. Доказательство теоремы 1 (см. п. 3) проведем для простоты в предположении, что диаметр d^N частиц Q_i^N при $N \rightarrow \infty$ имеет порядок $O(N^{-1})$. Но сначала установим ряд вспомогательных утверждений (леммы 1—5).

Лемма 1. Если выполняется условие 1 теоремы 1 и $d^N = O(N^{-1})$, то для любых $R \in (0, \infty)$ и $\kappa \in \left(1, \min\left\{2, \frac{5+2}{3}\right\}\right)$, $\gamma \geq 0$ справедливо неравенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr_N \left(\omega: \sum_{i=1}^N \frac{(d_i^N)^\kappa}{(r_i^N)^{3(\kappa-1)}} < R \right) > 1 - \frac{C(\kappa)}{R},$$

где $r_i^N = r_i^N(\omega)$ — расстояние от минимального шара $T(Q_i^N)$, содержащего частицу Q_i^N , до множества $\bigcup_{j \neq i}^N T(Q_j^N) \cap \partial\Omega$, а $C(x)$ —

постоянная, не зависящая от R

Доказательство. Введем функции

$$\hat{F}_s^N(x^1, \dots, x^s) \equiv \hat{F}_s^N(x) = \int -8s - \int F_s^N(x; v; \theta; \lambda) d^s v d^s \theta d^3 \lambda, \quad (13)$$

которые являются s -частичными функциями распределения центров масс x^i частиц Q_i^N в координатном пространстве. Они удовлетворяют условиям симметрии, согласования и нормировки, сосредоточены в области $(\Omega)^s$ и в силу условия 1 теоремы 1

$$\hat{F}_s^N(x) \leq C \min_{1 \leq i \leq s} \rho^\gamma(x^i, \partial\Omega), \quad \gamma \geq 0. \quad (14)$$

Пусть $T_{\sigma^N}^i (i = 1, \dots, N)$ — шары радиуса $\sigma^N = \left(\frac{1}{N}\right)^{2/3+\varepsilon} (0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{5+2\gamma-3\kappa}{9(\kappa-1)}\right\})$ с центрами в точках x^i .

Обозначим через A_1^N событие, состоящее в том, что эти шары не пересекаются друг с другом и с границей $\partial\Omega$ области Ω . Учитывая (14) и предполагая, что $\partial\Omega$ — гладкая поверхность, нетрудно оценить его вероятность

$$\begin{aligned} \Pr_N(A_1^N) &\geq 1 - \frac{N(N-1)}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \hat{F}_2(x^1, x^2) dx^1 dx^2 - \\ &- N \int_{\Omega} \hat{F}_1^N(x) dx \geq 1 - \frac{C_1}{N^{3\varepsilon}} - \frac{C_2}{N^{(1+\gamma)\varepsilon}}, \end{aligned}$$

где

$$\Pr_{\sigma^N} = \{x \in \Omega; \rho(x, \partial\Omega) \leq \sigma^N\}.$$

Следовательно,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr_N(A_1^N) = 1. \quad (15)$$

Рассмотрим случайную величину

$$\zeta^N = \zeta^N(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{(d^N)^{\kappa}}{[r_i^N(\omega)]^{3(\kappa-1)}}.$$

Учитывая неравенства

$$a^N < 2d^N < \frac{C}{N} \ll \sigma^N = \frac{1}{N^{2/3+\varepsilon}}, \quad \left(0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{5+2\gamma-3\kappa}{9(\kappa-1)}\right\}\right),$$

где a^N — радиус минимального шара $T(Q_i^N)$, заключаем, что при достаточно больших N в тех случаях, когда происходит событие $A_1^N(\omega \in A_1^N)$:

$$r_i^N(\omega) > \frac{1}{3} \min \left\{ \min_{j \neq i} |x^j - x^i|, \rho(x^i, \partial\Omega) + N^{-2/3-\varepsilon} \right\},$$

и, следовательно, при $\omega \in A_1^N$

$$\zeta^N(\omega) \leq C_1 X_1^N(\omega) + C_2 X_2^N(\omega) = X^N(\omega),$$

где

$$X_1^N(\omega) = \frac{1}{N^x} \sum_{i=1}^N \max_{j \neq i} \frac{1}{|x^j - x^i|^{3(x-1)}}; \quad (16)$$

$$X_2^N(\omega) = \frac{1}{N^x} \sum_{i=1}^N \frac{1}{(\rho(x^i, \partial\Omega) + N^{-2/3-\varepsilon})^{3(x-1)}}; \quad (17)$$

а C_1, C_2 — положительные постоянные.

Поэтому при любом $R > 0$

$$\begin{aligned} \Pr_N \{ \zeta^N(\omega) \leq R \} &\geq \Pr_N \{ A_1^N \cap (\zeta^N(\omega) \leq R) \} \geq \\ &\geq \Pr_N \{ A_1^N \cap (X^N(\omega) \leq R) \} \geq \Pr_N \{ X^N(\omega) \leq R \} - \\ &- \Pr_N \{ \bar{A}_1^N \} \geq \Pr_N \{ X^N(\omega) \leq R \} - 1 + \Pr_N \{ A_1^N \}, \end{aligned} \quad (18)$$

а в силу положительности $X^N = X^N(\omega)$

$$\begin{aligned} \Pr_N \{ X^N(\omega) \leq R \} &\geq 1 - \frac{M(X^N)}{R} = \\ &= 1 - \frac{C_1 M(X_1^N)}{R} - \frac{C_2 M(X_2^N)}{R}, \end{aligned} \quad (19)$$

где через $M(X)$ обозначено математическое ожидание случайной величины X .

Согласно (17), (14)

$$\begin{aligned} M(X_2^N) &= \frac{1}{N^x} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} -N - \int_{\Omega} \frac{F_N^N(x^1, \dots, x^N)}{(\rho(x^i, \partial\Omega) + N^{-2/3-\varepsilon})^{3(x-1)}} dx^1 \dots dx^N = \\ &= \frac{1}{N^x} \int_{\Omega} \frac{F_1^N(x) dx}{(\rho(x^i, \partial\Omega) + N^{-2/3-\varepsilon})^{3(x-1)}} \leq \frac{1}{N^{x-1}} + \\ &+ \frac{C}{N^{x-1}} \int_0^1 \frac{\rho^\gamma d\rho}{(\rho + N^{-2/3-\varepsilon})^{3(x-1)}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^{z-1}} \int_0^1 \frac{\rho^\gamma d\rho}{(\rho + N^{-2/3-\varepsilon})^{3(z-1)}} &\leq N^{(3\varepsilon+1)(z-1)} \int_0^{N^{-2/3}} \rho^\gamma d\rho + \\ &+ \frac{1}{N^{z-1}} \int_{N^{-2/3}}^1 \rho^{\gamma-3(z-1)} d\rho = \frac{1}{\gamma+1} N^{3\varepsilon(z-1)-\frac{5+2\gamma-3z}{3}} + \\ &+ \begin{cases} \frac{N^{1-z} - N^{-\frac{5+2\gamma-3z}{3}}}{3z-4-\gamma} & \text{при } 3z-4-\gamma \neq 0; \\ \frac{1}{N^{1-z} \ln N^{2/3}} & \text{при } 3z-4-\gamma = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

из (20) при $\gamma \geq 0$, $1 < z < \min \left\{ \frac{5+2\gamma}{3}, 2 \right\}$, $\varepsilon \leq \frac{5+2\gamma-3z}{9(z-1)}$ следует, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{M}(X_2^N) \leq C. \quad (21)$$

Оценим математическое ожидание $M(X_1^N)$. Очевидно, при любом $L > 0$ справедливо неравенство

$$\max_{j \neq i} \frac{1}{|x^j - x^i|^{3(z-1)}} \leq L^{3(z-1)} + \sum_{j \neq i} \frac{\chi_L(|x^j - x^i|)}{|x^j - x^i|^{3(z-1)}},$$

где $\chi_L(t)$ — характеристическая функция отрезка $\left[0, \frac{1}{L}\right]$. Поэтому согласно (16)

$$\begin{aligned} M(X_1^N) &= \frac{1}{N^z} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} -N - \int_{\Omega} \max_{j \neq i} \frac{1}{|x^j - x^i|^{3(z-1)}} F_N^N(x^1, \dots, x^N) dx^1 \dots \\ &\dots dx^N \leq \frac{L^{3(z-1)}}{N^{z-1}} + \frac{1}{N^z} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \int_{\Omega} -N - \int_{\Omega} \frac{\chi_L(|x^j - x^i|)}{|x^j - x^i|^{3(z-1)}} F_N^N(x^1, \dots, x^N) \times \\ &\times dx^1 \dots dx^N \leq \frac{L^{3(z-1)}}{N^{z-1}} + \frac{N(N-1)}{N^z} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{\chi_L(|x^1 - x^2|)}{|x^1 - x^2|^{3(z-1)}} F_2^N(x^1, x^2) \times \\ &\times dx^1 dx^2 \leq \frac{L^{3(z-1)}}{N^{z-1}} + C \frac{N(N-1)}{N^z} \frac{1}{L^{6-3z}}. \end{aligned}$$

Отсюда, выбирая $L = N^{1/3}$, получаем

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} M(X_1^N) < C. \quad (22)$$

Из (18), (19), (21), (22) и (15) вытекает утверждение леммы 1.

Лемма 2. Если выполняются условия 1–3 теоремы 1, то для любого $\varepsilon > 0$ и любой подобласти $G \subset \Omega$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Pr}_N \left\{ \omega: \left| \sum_{(G)} C_{kl}(Q_i^N) - \int_G Q_{kl}(x) dx \right| < \varepsilon \right\} = 1,$$

где сумма $\sum_{(G)}$ распространяется на частицы $Q_i^N = Q_i^N(\omega)$, попавшие в область G , а тензор $\{Q_{kl}(x)\}$ определен формулой (10).

Доказательство. Рассмотрим случайную величину

$$\zeta_G^N = \zeta_G^N(\omega) = \sum_{i=1}^N C_{kl}(Q_i^N(\omega)) \chi_G(x^i),$$

где $\chi_G(x)$ — характеристическая функция множества G ; $x^i = x^i(\omega)$ — центр масс частицы Q_i^N .

Согласно неравенству Чебышева при любом $\varepsilon > 0$

$$\text{Pr}_N \left\{ \omega: |\zeta_G^N - M(\zeta_G^N)| < \varepsilon \right\} \geq 1 - \frac{D(\zeta_G^N)}{\varepsilon^2}, \quad (23)$$

где $M(\zeta_G^N)$ и $D(\zeta_G^N)$ — соответственно математическое ожидание и дисперсия ζ_G^N .

В силу условий 2, а и 3 теоремы 1

$$\begin{aligned} M(\zeta_G^N) &= \int -11N - \int \sum_{i=1}^N C_{kl}(Q_i^N) \chi_G(x^i) F_N^N(x; v; \theta; \lambda) \times \\ &\times dx dv d\theta d\lambda = [1 + o(1)] \int \left\{ \int -8 - \int C_{kl}(\lambda) F(x, v, \theta, \lambda) dv d\theta d\lambda \right\} dx = \\ &= [1 + o(1)] \int_G Q_{kl}(x) dx \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Далее, учитывая это равенство, а также условия, 2 а и 3, получаем при $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} D(\zeta_G^N) &= M[(\zeta_G^N - M(\zeta_G^N))^2] = \\ &= \frac{N(N-1)}{N^2} \int -22 - \int \left\{ C_{kl}(\lambda^1) \chi_G(x^1) - \int_G Q_{kl}(x) dx \right\} \left\{ C_{kl}(\lambda^2) \chi_G(x^2) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_G Q_{kl}(x) dx \} \cdot [F_2^N(x^1, x^2; v^1, v^2; \theta^1, \theta^2; \lambda^1, \lambda^2) - \\
& - F(x^1 v^1, \theta^1, \lambda^1) F(x^2, v^2, \theta^2, \lambda^2)] d^2 x d^2 v d^2 \theta d^2 \lambda + \\
& + \frac{1}{N} \int -11 - \int \left\{ C_{kl}(\lambda) \chi_G(x) - \int_G Q_{kl}(x) dx \right\}^2 \times \\
& \times F(x, v, \theta, \lambda) dx dv d\theta d\lambda + o(1),
\end{aligned}$$

откуда в силу условия 2, б следует, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D(\zeta_G^N) = 0. \quad (24)$$

Так как $\lim_{N \rightarrow \infty} d^N = 0$, то для любой компактно вложенной в G подобласти $G'(G' \in G)$ при достаточно больших N справедливы неравенства

$$\zeta_{G'}^N \leq \sum_{(G)} C_{kl}(Q_i^N) \leq \zeta_G^N,$$

учитывая которые, из (23), (24) получаем утверждения леммы 2.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые оценки решения краевой задачи (6).

Лемма 3. Пусть точка $x \in R_3$ находится на расстоянии $\rho = \rho(x)$ от минимального шара $T(Q_i^N)$, содержащего множество Q_i^N , причем $\rho \geq cd$.

Тогда для любой компоненты $v_j^{k,i}(x)$ решения задачи (6) в этой точке справедливы неравенства

$$|D^\alpha v_j^{k,i}(x)| \leq C \frac{d}{\rho^{|\alpha|+1}}, \quad |\alpha| = 0, 1.$$

где постоянная C не зависит от d и ρ .

Доказательство этой леммы приведено в [4].

Пусть T_b — шар радиуса $b > 2d$ концентрический с минимальным шаром $T(Q^N)$. Тогда для решения задачи (6), продолженного на множество Q_i^N равенством $\vec{v}^{k,i}(x) = \vec{e}^k$, с помощью леммы 3 несложно получить оценки

$$\int_{T_e} |D v_j^{k,i}(x)|^2 dx \leq C (d^2 b^{1-2|\alpha|} + d^{3-2|\alpha|}), \quad |\alpha| = 0, 1. \quad (25)$$

Кроме того, для давления $p^{k,i}(x)$ в (6) имеем

$$|p^{k,i}(x)| \leq C \frac{d}{(r_i^N)^2}, \quad (26)$$

где r_i^N — расстояние от минимального шара $T(Q_i^N)$ до множества $\bigcup_{j=1}^N T(Q_j^N) \cup \partial\Omega$, а C — постоянная, не зависящая от d .

Согласно теореме о представлении соленоидальных вектор-функций [5] для $\vec{v}^{k,i}$ имеет место равенство

$$\vec{v}^{k,i}(x) = \operatorname{rot} \tilde{v}^{k,i}(x), \quad x \in T_{b_i^N}^i, \quad (27)$$

где $\tilde{v}^{k,i}$ — однозначно определяемая соленоидальная вектор-функция, а $T_{b_i^N}^i$ — шар радиуса $b_i^N = r_i^N + a_i^N$ концентрический с минимальным шаром $T(Q_i^N)$.

Из (27) несложно получить оценки ($|\alpha| = 1, 2$)

$$\|\vec{v}^{k,i}\|_{L_2(T_{b_i^N}^i)} \leq c b_i^N \|\tilde{v}^{k,i}\|_{L_2(T_{b_i^N}^i)}; \quad (28)$$

$$\|D^\alpha \tilde{v}^{k,i}\|_{L_2(T_{b_i^N}^i)} \leq C \left\{ (b_i^N)^{1-|\alpha|} \|\tilde{v}^{k,i}\|_{L_2(T_{b_i^N}^i)} + \sum_{|\beta|=|\alpha|-1} \|D^\beta \tilde{v}^{k,i}\|_{L_2(T_{b_i^N}^i)} \right\}, \quad (29)$$

где постоянные C не зависят от b_i^N .

$$\text{Пусть} \quad \varphi_i^N(x) = \varphi\left(\frac{r - a_i^N}{r_i^N}\right), \quad \hat{\varphi}_i^N(x) = \varphi\left(\frac{r - a_i^N}{d_i^N}\right),$$

где $r = r(x)$ — расстояние от точки x до центра x^i минимального шара $T(Q_i^N)$ радиуса a_i^N , а $\varphi(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная 1 при $t \leq \frac{1}{4}$ и 0 при $t \geq \frac{1}{2}$.

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \vec{w}_{i,N}(x; \omega) = & \operatorname{rot} \sum_{k=1}^3 \left\{ \tilde{v}^{k,i}(x; \omega) v_k^i(\omega) \varphi_i^N(x) + \right. \\ & \left. + \sum_{j \neq k} \frac{(x_j - x_j^i)^2}{2} e^{k\theta_k^i}(\omega) \hat{\varphi}_i^N(x) \right\}, \end{aligned} \quad (30)$$

где $v_k^i(\omega)$ и $\theta_k^i(\omega)$ — компоненты векторов $\vec{v}^i$ и $\vec{\theta}^i$ из граничного

условия (2), $\vec{e}^k$ — орт оси x_k , а вектор-функция $\vec{v}^{k,i} = \vec{v}^{k,i}(x; \omega)$ определена равенством (27).

Положим

$$\vec{w}^N(x; \omega) = \sum_{i=1}^N \vec{w}^{i,N}(x; \omega). \quad (31)$$

Лемма 4. Последовательность $\{\vec{w}^N(x; \omega), N \rightarrow \infty\}$ сходится по вероятности в метрике $L_r(\Omega)$ ($r < 6$) к нулю, т. е. для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr_N \left\{ \omega: \int_{\Omega} |\vec{w}^N(x; \omega)|^r dx < \varepsilon \right\} = 1.$$

Доказательство. В силу свойств функций $\varphi_i^N(x)$ и $\hat{\varphi}_i^N(x)$ при любом $\omega \in B^N$ носитель вектор-функции $\vec{w}^{i,N}(x; \omega)$ сосредоточен в шаре $T_{b_i}^{i,N} = \{x: |x - x^i| < r_i^N + a_i^N\}$ и $\vec{w}^{i,N}(x; \omega) \in \overset{\circ}{W}_2^1(T_{b_i}^{i,N})$. Поэтому согласно известному мультипликативному неравенству [1]

$$\int_{T_{b_i}^{i,N}} |\vec{w}^{i,N}|^r dx \leq C_\alpha \left\{ \int_{T_{b_i}^{i,N}} |\nabla \vec{w}^{i,N}|^2 dx \right\}^{\frac{\alpha r}{2}} \left\{ \int_{T_{b_i}^{i,N}} |\vec{w}^{i,N}|^2 dx \right\}^{\frac{(1-\alpha)r}{2}}, \quad (32)$$

$\alpha = 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right)$, постоянная C_α зависит только от α . Здесь можно считать, что $r \in [2, 6)$ и значит $\alpha \in [0, 1)$.

Учитывая равенство (27), оценки (25), (28), (29) и свойства функций $\varphi_i^N, \hat{\varphi}_i^N$ из (30), (32), получаем, что при любом $\omega \in B^N$

$$\int_{T_{b_i}^{i,N}} |\vec{w}^{i,N}(x; \omega)|^r dx \leq C \left\{ (d^N)^{(1-\frac{\alpha}{2})r} + \frac{(d^N)^r}{[r_i^N(\omega)]^{\alpha r/2}} \right\} (|\vec{v}_\omega^i|^r + |\vec{\theta}^i(\omega)|^r) \quad (33)$$

где $d^N = O(N^{-1})$ — диаметр Q_i^N , а постоянная C не зависит от ω , и N .

Пусть произошло событие $A_i^N \in B^N$, состоящее в том, что шары $T_{\sigma_i}^N$ радиуса $\sigma^N = N^{-2/3-\varepsilon}$

$$\left(0 < \varepsilon < \min \left\{ \frac{1}{3}, \frac{5 + 2\gamma - 3\alpha}{9(\alpha - 1)} \right\} \right)$$

с центрами в точках x^i не пересекаются между собой и с $\partial\Omega$. Тогда носители $\vec{w}^{i,N}(x; \omega)$ не пересекаются (так как $b_i^N = o(\sigma^N)$, $(N \rightarrow \infty)$) и, следовательно, при $\omega \in A^N$

$$\xi^N(\omega) \equiv \int_{\Omega} |\vec{w}^N(x; \omega)|^r dx = \sum_{i=1}^N \int_{T_{b_i}^{i,N}} |\vec{w}^{i,N}(x; \omega)|^r dx.$$

Поэтому, учитывая (33) и неравенства $d^N \leq \frac{C}{N}$, $r_i^N \geq \sigma^N - d^N \gg d^N$, при $\omega \in A_1^N$ получаем

$$\xi^N(x) \leq \frac{C}{N^\beta} \sum_{i=1}^N (|\vec{v}^i(\omega)|^r + |\vec{\theta}^i(\omega)|^r) = X^N(\omega),$$

где $\beta = \frac{3}{2} - \frac{r}{4} \in [2, 3)$.

В силу условия 1 теоремы 1 при $r \leq 6$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M(X^N(\omega)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C}{N^{\beta-1}} \int -11 - \int (|\vec{v}|^r + |\vec{\theta}|^r) F(x, v, \theta, \lambda) dx dv d\theta d\lambda = 0. \quad (34)$$

Теперь аналогично (18), (19) при любом $\varepsilon > 0$ запишем

$$\Pr_N \{ \omega : \xi^N(\omega) \leq \varepsilon \} \geq \Pr_N(A_1^N) - \frac{1}{\varepsilon} M(X^N(\omega)),$$

откуда согласно (34), (15) следует, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr_N \left\{ \omega : \xi^N(\omega) = \int_{\Omega} |\vec{w}^N(x; \omega)|^r dx < \varepsilon \right\} = 1.$$

Лемма 4 доказана.

Положим

$$\vec{V}^N(x; \omega) = \begin{cases} \Delta \vec{w}^N(x; \omega) - \nabla \left[\sum_{i=1}^N \sum_1^3 p^{k,i}(x; \omega) \varphi_i^N(x) v_k^i(\omega) \right], & x \in \Omega^N; \\ 0, & x \in \bigcup_{i=1}^N Q_i^N \end{cases} \quad (35)$$

где $p^{k,i}(x; \omega)$ — давление в задаче (6) при $Q_i^N = Q_i^N(\omega)$.

Лемма 5. Последовательность $\{\vec{V}^N(x; \omega), N \rightarrow \infty\}$ сходится по вероятности слабо в $L_q(\Omega)$ ($6/5 < q < 2$) к неслучайной вектор-функции $\vec{V}(x) = \{V_k(x)\}_{k=1}^3$

$$V_k(x) = \int -8 - \int F(x, v, \theta, \lambda) \sum_{l=1}^3 C_{kl}(\lambda) v_l dv d\theta d\lambda,$$

а именно, для любых $R < \infty$, $\varepsilon > 0$ и любой вектор-функции $\zeta(x) \in C^2(\Omega)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr_N \left\{ \omega : \int_{\Omega} |\vec{V}^N(x; \omega)|^q dx < R \right\} > 1 - \frac{C}{R}; \quad (36)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr_N \left\{ \omega : \left| \int_{\Omega} \vec{V}^N(x; \omega) - \vec{V}(x), \vec{\zeta}(x) dx \right| < \varepsilon \right\} = 1. \quad (37)$$

Доказательство. Пользуясь равенствами (27), (6) и учитывая, что в силу соленидальности $\vec{v}^{k,i}(x; \omega)$ справедливо равенство $\Delta \vec{v}^{k,i} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v}^{k,i} = -\operatorname{rot} v^{k,i}(x; \omega)$, из (30), (31), (35) получаем неравенство

$$|\vec{V}^N(x; \omega)| \leq \sum_{i=1}^N \left\{ |\vec{v}^i(\omega)| \left(\sum_{k=1}^3 p^{k,i}(x; \omega) \|\nabla \varphi_i^N(x)\| + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=1}^3 \sum_{l=0}^1 |D^l \vec{v}^{k,i}(x; \omega)| \|D^{3-l} \varphi_i^N(x)\| + 2 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=0}^1 |D^l \vec{v}^{k,i}(x; \omega)| \|D^{2-l} \varphi_i^N(x)\| \right) \right. \\ \left. + 6 |\vec{\theta}^i(\omega)| \sum_{l=0}^2 |x - x^i|^l |D^{l+1} \varphi_i^N(x)| \right\}, \quad (38)$$

где

$$|D^l \vec{u}| = \sum_{|\alpha|=l} \left(\sum_{i=1}^3 |D^\alpha u_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Пусть произошло событие $A_1^N \in B^N$. Тогда носители функций, стоящих в фигурных скобках в (38) не пересекаются и, пользуясь оценками (25), (28), (29), (26), свойствами функций φ_i^N , $\hat{\varphi}_i^N$ и леммой 3, с помощью неравенства Гельдера получаем при $\omega \in A^N$

$$\zeta^N(\omega) = \int_{\Omega} |\vec{V}^N(x; \omega)|^q dx \leq C_1 \sum_{i=1}^N \frac{(d^N)^q}{[r_i^N(\omega)]^{3(q-1)}} |\vec{v}^i(\omega)|^q + \\ + C_2 (d^N)^{3-q} \sum_{i=1}^N |\vec{\theta}^i(\omega)|^q = C_1 \zeta_1^N(\omega) + C_2 X_2^N(\omega).$$

Так как $d^N \leq \frac{C}{N}$, в силу условия 1 теоремы 1 при $q < 2$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M(X_2^N(\omega)) = 0,$$

а случайная величина $\zeta_1^N(\omega)$ при $\omega \in A_1^N$ может быть оценена так же, как в лемме 1

$$\zeta_1^N(\omega) \leq \frac{C}{N^q} \sum_{i=1}^N \left\{ \max_{j \neq i} \frac{|\vec{v}^i(\omega)|^q}{|x^j - x^i|^{3(q-1)}} + \frac{|\vec{v}^i(\omega)|^q}{(\rho(x^i, \partial \Omega))^{3(q-1)}} \right\} = X_1^N(\omega)$$

и

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} M(X_1^N(\omega)) < C.$$

Поскольку при $\omega \in A_1^N$, $\zeta^N(\omega) \leq X^N(\omega) = C_1 X_1^N(\omega) + C_2 X_2^N(\omega)$, то, применяя неравенства (18), (19), получим (36).

Пусть $\vec{\zeta}(x)$ — произвольная вектор-функция из $C^2(\bar{\Omega})$. Рассмотрим случайную величину

$$\zeta^N(\omega) = \int_{\Omega} (\vec{V}^N(x; \omega), \vec{\zeta}(x)) dx.$$

Учитывая равенства (30), (31), (35), (27) и (6), представим ее в виде

$$\zeta^N(\omega) = \sum_{j=1}^4 \zeta_j^N(\omega), \quad (39)$$

где

$$\zeta_1^N(\omega) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^3 (\Delta[\vec{v}^{k,i} \varphi_i^N] - \nabla[p^{k,i} \varphi_i^N], \vec{\zeta}(x^i)) \nu_k^i(\omega) dx,$$

а случайные величины $\zeta_j^N(\omega)$ ($j=2, 3, 4$) допускают оценки

$$|\zeta_2^N(\omega)| \leq \sum_{i=1}^N \left\{ |\vec{v}^i(\omega)| \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 (|p^{k,i}(x; \omega)| |\nabla \varphi_i^N(x)| + \right. \\ \left. + \sum_{l=0}^1 |D^l \vec{v}^{k,i}(x; \omega)| |D^{2-l} \varphi_i^N(x)| |\vec{\zeta}(x) - \vec{\zeta}(x^i)|) dx \right\}; \quad (40)$$

$$|\zeta_3^N(\omega)| \leq \sum_{i=1}^N |\vec{v}^i(\omega)| \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 (|\nabla \varphi_i^N(x)| |\vec{v}^{k,i}(x; \omega)| |\Delta \vec{\zeta}(x)|) dx;$$

$$|\zeta_4^N(\omega)| \leq \sum_{i=1}^N |\vec{\theta}^i(\omega)| \int_{\Omega} \sum_{l=0}^2 |x - x^i|^{2-l} |D^{3-l} \hat{\varphi}_i^N(x)| |\vec{\zeta}(x)| dx.$$

Так как $\{\vec{v}^{k,i}(x; \omega), p^{k,i}(x; \omega)\}$ является решением задачи (6) при $Q_i^N = Q_i^N(\omega)$, в силу условия 3 теоремы 1

$$\zeta_1^N(\omega) = \sum_{i=1}^N \sum_{k,l=1}^3 \int_{\partial Q_i^N} \left(\frac{\partial v^{k,l}}{\partial n} - p^{k,l} \cdot n_l \right) dS \cdot \nu_k^i(\omega) \cdot \zeta_l(x^i) = \\ = \sum_{i=1}^N \sum_{k,l=1}^3 \int_{R_3} (\nabla \vec{v}^{k,i}, \nabla \vec{v}^{l,i}) dx \cdot \nu_k^i(\omega) \cdot \zeta_l(x^i) =$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{k,l=1}^3 \frac{1}{N} C_{kl}(\vec{\lambda}^i) v_k^i(\omega) \zeta_l(x^i) + X_5^N(\omega), \quad (41)$$

где

$$X_5^N(\omega) = o\left(\frac{1}{N}\right) \cdot \sum_{i=1}^N |v^i(\omega)|.$$

Очевидно, в силу условия 1 теоремы 1,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M[(X_5^N(\omega))^2] = 0. \quad (42)$$

Положим

$$\zeta_0 = \int -11 - \int \sum_{k,l=1}^3 C_{kl}(\lambda) v_k \zeta_l(x) F(x, v, \theta, \lambda) dx dv d\theta d\lambda$$

и

$$X_1^N(\omega) = \sum_{i=1}^N \sum_{k,l=1}^3 \frac{1}{N} C_{kl}(\vec{\lambda}^i) v_k^i \zeta_l(x^i) - \zeta_0.$$

Так же, как в лемме 2, с учетом условий 1 и 2, а теоремы 1 получаем при $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} M[(X^N(\omega))^2] &= \frac{N(N+1)}{N^2} \int -22 - \int \left\{ \sum_{k,l=1}^3 C_{kl}(\lambda^1) \cdot v_k^1 \cdot \zeta_l(x^1) - \zeta_0 \right\} \times \\ &\times \left\{ \sum_{k,l=1}^3 C_{kl}(\lambda^2) \cdot v_k^2 \cdot \zeta_l(x^2) - \zeta_0 \right\} [F_2^N(x^1, x^2; v^1, v^2; \theta^1, \theta^2; \lambda^1; \lambda^2) - \\ &- F(x^1, v^1, \theta^1, \lambda^1) F(x^2, v^2, \theta^2, \lambda^2)] d^2 x d^2 v d^2 \theta d^2 \lambda + \\ &+ \frac{1}{N} \int -11 - \int \left\{ \sum_{k,l=1}^3 C_{kl}(\lambda) \cdot v_k \cdot \zeta_l(x) - \zeta_0 \right\}^2 \times \\ &\times F(x, v, \theta, \lambda) dx dv d\theta d\lambda + o(1), \end{aligned}$$

откуда в силу ограниченности $\vec{\zeta}(x)$ и условий 1 и 2, б теоремы 1 следует, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M[(X_1^N(\omega))^2] = 0. \quad (43)$$

Пусть произошло событие $A_1^N \in B^N$. Тогда, учитывая свойства функций $\varphi_i^N(x)$, $\hat{\varphi}_i^N(x)$ и неравенства $a^N < d^N \leq \frac{C}{N} \ll r_i^N$

($i = 1, \dots, N$), $|D^\alpha \vec{\zeta}(x)| < C$ ($|\alpha| = 0, 1, 2$), с помощью леммы 3 и оценок (25), (28), (26) из (40) получаем при $\omega \in A_1^N$

$$|\zeta_j^N(\omega)| \leq \frac{C}{N} \sum_{i=1}^N [r_i^N(\omega)]^{j-1} |\vec{v}^j(\omega)| = X_j^N(\omega), \quad (j = 2, 3);$$

$$|\zeta_4^N(\omega)| \leq \frac{C}{N^2} \sum_{i=1}^N |\vec{v}^i(\omega)| = X_4^N(\omega). \quad (44)$$

Очевидно, что в силу условия 1 теоремы 1

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M[(X_4^N(\omega))^2] = 0. \quad (45)$$

Так как $r_i^N(\omega) < C$ и $\sum_{i=1}^N (r_i^N)^3 < C$, согласно неравенству Гельдера при $j = 2, 3$

$$X_j^N(\omega) \leq \frac{C}{N} \left\{ \sum_{i=1}^N (r_i^N)^3 \right\}^{1/3} \left\{ \sum_{i=1}^N |\vec{v}^i|^2 \right\}^{1/2} \cdot N^{1/6} \leq \frac{C}{N^{5/6}} \left\{ \sum_{i=1}^N |\vec{v}^i|^2 \right\}^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M[(X_j^N(\omega))^2] = 0 \quad (j = 2, 3). \quad (46)$$

В силу (39), (41), (44) при $\omega \in A_1^N$

$$|\zeta^N(\omega) - \zeta_0| \leq \sum_{j=1}^5 X_j^N(\omega),$$

поэтому при любом $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \Pr_N(\omega: |\zeta^N(\omega) - \zeta_0| < \varepsilon) &\geq \Pr_N(A_1^N \cap \{\omega: |\zeta^N(\omega) - \zeta_0| < \varepsilon\}) \geq \\ &\geq \left\{ \omega: \sum_{j=1}^5 X_j^N(\omega) < \varepsilon \right\} - \Pr_N \bar{A}_1^N \geq \Pr_N A_1^N - \frac{5}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^5 M[(X_j^N)^2], \end{aligned}$$

откуда согласно (42), (43), (45) и (15) вытекает (37). Лемма 5 доказана.

3. Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1. Пусть $\vec{u}^N(x; \omega)$ — решение задачи (1) — (3), а $\vec{w}^N(x; \omega)$ — определена формулами (30), (31). Положим

$$\vec{v}^N(x; \omega) = \vec{u}^N(x; \omega) - \vec{w}^N(x; \omega).$$

Если произошло событие $A_1^N \in B^N$, то в силу свойств функций $\varphi_i^N(x)$, $\varphi_i^N(x) \wedge \varphi_i^N(x)$ носители вектор-функций $\vec{w}^{i,N}$ не пересекаются между собой и с $\partial\Omega$ и, учитывая равенства (27), нетрудно

но заключить, что $\vec{v}^N(x; \omega)$ является решением краевой задачи

$$\left. \begin{aligned} \nu \Delta \vec{v}^N(x; \omega) &= \nabla q^N(x; \omega) + \vec{\Phi}^N(x) - \nu \vec{V}^N(x, \omega), \\ \operatorname{div} \vec{v}^N(x; \omega) &= 0, \end{aligned} \right\} x \in \Omega^N; \quad (47)$$

$$\vec{v}^N(x; \omega) = 0, \quad x \in \partial \Omega^N. \quad (48)$$

Будем считать, что $\vec{v}^N(x; \omega)$ определяется этими свойствами при всех $\omega \in B^N$ и $x \in \Omega^N$, а при $x \notin \bigcup_{i=1}^N Q_i^N \vec{v}^N(x; \omega) = 0$.

Покажем, что при $N \rightarrow \infty$ $\vec{v}^N(x; \omega)$ сходится по вероятности в метрике $L_r(\Omega)$ к решению $\vec{u}(x)$ краевой задачи (8), (9). Тогда в силу леммы 4 и (15) то же будет иметь место и для решения $\vec{u}^N(x; \omega)$ задачи (1) — (3).

Выделим в Ω последовательность подобластей $\{G_j, j=1, 2, \dots\}$, удовлетворяющую условию: для любой области с границей нулевой Лебеговой меры и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие G_{j_1} и G_{j_2} , что

$$G_{j_1} \subset G \subset G_{j_2}, \quad \operatorname{mes}(G_{j_2} \setminus G_{j_1}) < \varepsilon.$$

Пусть $\{\vec{\zeta}^n(x), n=1, 2, \dots\}$ — последовательность вектор-функций из $C^2(\bar{\Omega})$, всюду плотная в $L_p(\Omega)$, где $p = \frac{q}{q-1} \in [2, 6)$,

q — то же число, что в условии 4 теоремы 1 ($2 > q > 6/5$).

В вероятностном пространстве B^N введем в рассмотрение следующие события:

$$E^N(\varepsilon) = \{\omega: \|\vec{v}^N(\omega) - \vec{u}\|_{L_r(\Omega)} > \varepsilon\};$$

$$E_1^N(j, s) = \left\{ \omega: \left| \sum_{(G_j)} C_{kl}(Q_i^N) - \int_{G_j} Q_{kl}(x) dx \right| < \frac{1}{s} \right\};$$

$$E_2^N(R) = \left\{ \omega: \sum_{i=1}^N \frac{(d^N)^x}{[r_i^N(\omega)]^{3(x-1)}} < R \right\}, \quad (3/2 < x < 2);$$

$$E_3^N(n, s) = \left\{ \omega: \left| \int (\vec{\Psi}^N(x; \omega) - \vec{\Psi}(x), \vec{\zeta}^n(x)) dx \right| < \frac{1}{s} \right\};$$

$$E_4^N(R) = \left\{ \omega: \|\vec{\Psi}^N(\omega)\|_{L_q(\Omega)} < R \right\}, \quad \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \right),$$

где $\vec{v}^N(\omega) = \vec{v}^N(x; \omega)$ — решение задачи (47), (48), $\vec{\Psi}^N(\omega) = \vec{\Psi}^N(x; \omega) = \vec{\Phi}^N(x) - \vec{v}^N(x; \omega)$, $\vec{u}$ — решение задачи (8), (9).

Предположим, что $\vec{v}^N(x; \omega)$ не сходится по вероятности в метрике $L_r(\Omega)$ к $\vec{u}(x)$. Тогда найдутся такие $\varepsilon_0 > 0$, $\delta > 0$ и такая подпоследовательность $\{N_k \rightarrow \infty\}$, что

$$\Pr_N [E^{N_k}(\varepsilon_0)] > \delta. \quad (49)$$

С другой стороны, согласно леммам 1, 2, 5 и условию 4 теоремы 1 для любых s, j, n и R найдется такое $\hat{N} = N(\delta, s, j, n, \delta)$ и $C = \text{const}$, что при $N \geq \hat{N}$ будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned} \Pr_N [E_1^N(j, s)] &\geq 1 - \delta \cdot 2^{-s-1-3}; \quad \Pr_N [E_2^N(R)] \geq 1 - C \cdot R^{-1}; \\ \Pr_N [E_3^N(n, s)] &\geq 1 - \delta \cdot 2^{-n-s-3}; \quad \Pr_N [E_4^N(R)] \geq 1 - C \cdot R^{-1}. \end{aligned} \quad (50)$$

Положим $R = 8 \cdot C \cdot \delta^{-1}$ и рассмотрим событие $A^{N_k} \in B^{N_k}$:

$$\begin{aligned} A^{N_k} = E^{N_k}(\varepsilon_0) \cap \left(\bigcap_{s=1}^{s_k} \bigcap_{j=1}^{j_k} E_1^{N_k}(j, s) \right) \cap \\ \cap \left(\bigcap_{s=1}^{s_k} \bigcap_{n=1}^{n_k} E_3^{N_k}(n, s) \right) \cap E_2^{N_k}(R) \cap E_4^{N_k}(R), \end{aligned} \quad (51)$$

где числа s_k, j_k и n_k выбираются так, чтобы все неравенства (50) выполнялись при $N = N_k$ и $s \leq s_k, j \leq j_k, n \leq n_k, R = 8C \cdot \delta^{-1}$. Поскольку $N_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, то числа s_k, j_k и n_k также неограниченно возрастают при $k \rightarrow \infty$. Покажем, что событие $A^{N_k} \in B^{N_k}$ не пусто ни при каком k . В силу (50)

$$\begin{aligned} \Pr_N \left\{ \bigcup_{j=1}^{j_k} \bigcup_{s=1}^{s_k} \overline{E_1^{N_k}(j, s)} \cup \left(\bigcup_{s=1}^{s_k} \bigcup_{n=1}^{n_k} E_3^{N_k}(ns, s) \right) \cup \overline{E_2^{N_k}(R)} \cup E_4^{N_k}(R) \right\} \leq \\ \leq \frac{1}{8} \sum_{s,n=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^{s+j}} + \frac{1}{8} \sum_{s,n=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^{s+n}} + \frac{\delta}{8} + \frac{\delta}{8} = \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \Pr_N \left\{ \bigcap_{s=1}^{s_k} \bigcap_{j=1}^{j_k} E_1^{N_k}(j, s) \cap \left(\bigcap_{s=1}^{s_k} \bigcap_{n=1}^{n_k} E_3^{N_k}(n, s) \right) \cap \right. \\ \left. \cap E_2^{N_k}(R) \cap E_4^{N_k}(R) \right\} \geq 1 - \frac{\delta}{2}. \end{aligned} \quad (52)$$

Учитывая (49), с помощью неравенств (50) и (52) заключаем, что A^{N_k} не пусто. Выберем точку $\omega_k \in A^{N_k}$ и рассмотрим соответствующие распределения частиц $Q_i^k = Q_i^{N_k}(i, 1, \dots, N)$, вектор-функцию $\vec{\Psi}^k(x) = \vec{\Psi}^{N_k}(x; \omega) = \vec{\Phi}^{N_k}(x; \omega) - v\vec{V}^{N_k}(x; \omega)$ и решение задачи (11) $\vec{v}^k(x) = \vec{v}^{N_k}(x; \omega)$. Согласно определению события A^{N_k} выполняются все условия теоремы 2 при $k \rightarrow \infty$,

а $\vec{v}^k(x)$ не сходится к решению $\vec{u}(x)$ задачи (8), (9) или, что то же, задачи (12), где $C(x) = Q(x)$, $\vec{\Psi}(x) = \vec{\Phi}(x) - v\vec{V}(x)$.

Таким образом, получено противоречие с теоремой 2, что и доказывает теорему 1.

Список литературы: 1. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970. 288 с. 2. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.; Л., 1946. 119 с. 3. Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. К., 1974. 278 с. 4. Львов В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей для линеаризованной системы уравнений Навье—Стокса//Вестн. Харьк. ун-та. 1975. Вып. 40. Прикладная математика и механика. С. 3—22. 5. Быховский Э. Б., Смирнов Н. В. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа//Тр. Мат. ин-та АН СССР Т. 59. М., 1960. С. 5—36.

Поступила в редколлегию 03.03.89

УДК 517.946

А. А. БОСОВ

О ПОСТРОЕНИИ ОПЕРАТОРА СГЛАЖИВАНИЯ

При анализе временных рядов [1], выделении полезного сигнала [2], распознавании образов [3] возникает задача построения такого оператора A , чтобы он по знанию $z_t = y_t + \varepsilon_t$, как можно «лучше» выделял полезный сигнал y_t . Пусть y_t является элементом множества Y , а $\varepsilon_t \in \theta$, тогда основная задача заключается в определении такого оператора A , чтобы имело место соотношение

$$A(y_t + \varepsilon_t) = y_t. \quad (1)$$

Эта задача имеет смысл если множества Y и θ не имеют общих элементов. В достаточно общем виде ответ на вопрос существования оператора A дает теорема Хана—Банаха [4] об отделимости. В силу этой теоремы оператор A будем считать линейным. Тогда приходим к определению такого линейного оператора A , чтобы $Ay_t = y_t$, $A\varepsilon_t = 0$.

Рассмотрим более узкую задачу о построении линейного оператора, у которого каждый элемент $y_t \in Y$ был бы неподвижной