

K-14038
П274584

ISSN 0453-7998



**ХАРЬКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

298'87

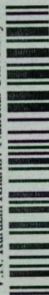
**МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА
И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ**

«ВИЩА ШКОЛА»

1 р. 10 к.

ISSN 0453-7998. Вестн. Харьк. ун-та. 1987. № 298. Математика, механика
и вопр. упр. 1—112.

V.N. Karazin Kharkiv National University



00290598

9



МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР



ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 298

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА
И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ

Основан в 1965 г.

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1987

УДК 517.919.583

В вестнике освещены вопросы математической теории оптимальных процессов и механики сплошных сред, а также прикладной математики и алгебры.

Нормативные материалы приведены по состоянию на 1 января 1987 г.

Для научных работников и специалистов.

Редакционная коллегия: И. Е. Тарапов (отв. ред.), В. И. Коробов (зам. отв. ред.), А. П. Маринич (отв. секр.), В. В. Баранов, Ю. И. Любич, В. А. Марченко

Печатается по решению Ученого совета механико-математического факультета Харьковского университета (протокол № 3 от 21 мая 1986 г.)

Адрес редакционной коллегии: 310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, университет, механико-математический факультет, тел. 45-72-40

Редакция литературы по естественным наукам и филологии
Зав. редакцией *Е. П. Иващенко*

Издано по заказу Харьковского университета

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА № 298

Математика, механика
и вопросы управления

Редактор *З. Н. Щегельская*
Художественный редактор *В. Е. Петренко*
Технический редактор *Л. Т. Ена*
Корректор *Л. А. Марченко*

Н/К

Сдано в набор 13.10.86. Подп. в печать 08.01.87. БЦ 08505.
Формат 60×90₁₆. Бумага типогр. № 3. Лит. гарн. Выс. печать.
Печ. л. 7. Кр.-отт. 7,25. Уч.-изд. л. 8. Тираж 500 экз. Изд.
№ 409. Зак. 1581. Цена 1 р. 10 к. Заказное

Издательство при Харьковском государственном университете
издательского объединения «Вища школа»
310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16

Харьковская городская типография № 16.
310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16.

В 1704020000-019
М 226(04)-87

© Харьковский
государственный
университет,
1987

8/35
Центральна наукова
бібліотека ХДУ
ІНВ. № 279587

к-14038

Г. А. ДОМБРОВСКИЙ, ЛЕ ТХАИ ТХАНЬ

К ЗАДАЧЕ С. А. ЧАПЛЫГИНА О ДОЗВУКОВОМ ИСТЕЧЕНИИ ГАЗА ИЗ БЕСКОНЕЧНО ШИРОКОГО СОСУДА

Рассматривается известная задача С. А. Чаплыгина о дозвуковом истечении газа из бесконечно широкого сосуда [1]. Получено разложение по степеням M_0^2 с остаточным членом $R = o(M_0^{10})$ функции, выражающей связь между величиной, обратной коэффициенту сжатия струи, и значением M_0 числа Маха на свободных границах и в бесконечно удаленной части струи.

Формулу С. А. Чаплыгина для коэффициента сжатия струи ε запишем в виде

$$\frac{1}{\varepsilon} = 1 + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 - 1} x_n(s_0).$$

Функция $x_n(s_0)$ удовлетворяет уравнению $x'_n s_0 (1 + s_0) + x_n \beta s_0 + n x_n^2 - n(1 - 2\beta s_0) = 0$, в котором принято обозначение $\beta = 1/(\gamma - 1)$, где γ — показатель адиабаты (политропы). Независимое переменное s_0 равенством $2\beta s_0 = M_0^2$ связано с M_0 .

Допускаем возможным многократное почленное дифференцирование определяющего функцию $1/\varepsilon(s_0)$ ряда. Приняв во внимание это допущение, приходим к представлению

$$\frac{1}{\varepsilon} = \sum_{k=0}^m A_k M_0^{2k} + o(M_0^{2m}), \quad A_0 = 1 + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 - 1} x_n(0),$$

$$A_k = \frac{8}{k! \pi (2\beta)^k} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 - 1} x_n^{(k)}(0) \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Имеем [1] $x_n(0) = 1$, $x'_n(0) = -\beta$. Значения $x_n^{(k)}(0)$ производных функции $x_n(s_0)$ при $k \geq 2$ определяются по рекуррентной формуле

$$x_n^{(k)}(0) = \frac{k(1 - k - \beta)}{2n + k} x_n^{(k-1)}(0) - \frac{n}{2n + k} \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i x_n^{(i)}(0) x_n^{(k-i)}(0),$$

которая вытекает из приведенного дифференциального уравнения для $x_n(s_0)$ (C_k^i — биномиальные коэффициенты). По этой формуле получены следующие значения $x_n^{(k)}(0)$ до $k = 5$ включительно: $x_n^{(2)}(0) = \frac{a_1 n + a_0}{n+1}$, $x_n^{(3)}(0) = \frac{b_2 n^2 + b_1 n + b_0}{(2n+3)(n+1)}$,

$$x_n^{(4)}(0) = \frac{c_3 n^3 + c_2 n^2 + c_1 n + c_0}{(n+2)(2n+3)(n+1)} - \frac{3a_1^2 n^3 + 6a_1 a_0 n^2 + 3a_0^2 n}{(n+2)(n+1)^2},$$

$$x_n^{(5)}(0) = \frac{d_4 n^4 + d_3 n^3 + d_2 n^2 + d_1 n + d_0}{(2n+5)(n+2)(2n+3)(n+1)} -$$

$$- \frac{e_4 n^4 + e_3 n^3 + e_2 n^2 + e_1 n}{(2n+5)(n+2)(n+1)^2} - \frac{f_4 n^4 + f_3 n^3 + f_2 n^2 + f_1 n}{(2n+5)(2n+3)(n+1)^2},$$

$$\begin{aligned} a_1 &= -\beta^2, a_0 = \beta^2 + \beta, b_2 = -6\beta^3, b_1 = 9\beta^3 + 12\beta^2, b_0 = -3\beta^3 - \\ &- 9\beta^2 - 6\beta, c_3 = -24\beta^4, c_2 = 48\beta^4 + 84\beta^3, c_1 = -30\beta^4 - 114\beta^3 - 96\beta^2, \\ c_0 &= 6\beta^4 + 36\beta^3 + 66\beta^2 + 36\beta, d_4 = -240\beta^5, d_3 = 600\beta^5 + 1320\beta^4, \\ d_2 &= -540\beta^5 - 2520\beta^4 - 2640\beta^3, d_1 = 210\beta^5 + 1530\beta^4 + 3420\beta^3 + \\ &+ 2280\beta^2, d_0 = -30\beta^5 - 300\beta^4 - 1050\beta^3 - 1500\beta^2 - 720\beta, \\ e_4 &= 30\beta^5, e_3 = -75\beta^5 - 120\beta^4, e_2 = 60\beta^5 + 210\beta^4 + 150\beta^3, \\ e_1 &= -15\beta^5 - 90\beta^4 - 135\beta^3 - 60\beta^2, f_4 = 120\beta^5, f_3 = -300\beta^5 - \\ &- 360\beta^4, f_2 = 240\beta^5 + 600\beta^4 + 360\beta^3, f_1 = -60\beta^5 - 240\beta^4 - \\ &- 300\beta^3 - 120\beta^2. \end{aligned}$$

Затем проведены вычисления коэффициентов $A_0, \dots, A_5$. Если воспользоваться в процессе вычислений известными равенствами

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 - 1} = \frac{1}{4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

то можно прийти к следующему результату:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\pi + 2}{\pi}, \quad A_1 = -\frac{1}{\pi}, \quad A_2 = \frac{1}{12\pi} [(1 - 2\pi + 8 \ln 2) + \\ &+ (2 - \pi + 4 \ln 2)(\gamma - 1)], \quad A_3 = \frac{1}{96\pi} [(180 - 36\pi - 96 \ln 2) + \end{aligned}$$

$$+ (160 - 26\pi - 112 \ln 2) (\gamma - 1) + (32 - 4\pi - 32 \ln 2) (\gamma - 1)^2],$$

$$A_4 = -\frac{1}{2880\pi} [(6769 - 2576\pi - 20\pi^2 + 2192 \ln 2) + \\ + (12736 - 4124\pi - 20\pi^2 + 608 \ln 2) (\gamma - 1) + \\ + (7324 - 2066\pi - 5\pi^2 - 1108 \ln 2) (\gamma - 1)^2 + \\ + (1296 - 324\pi - 432 \ln 2) (\gamma - 1)^3], A_5 = -\frac{1}{259200\pi} \times \\ \times [1141575 - 157500\pi + 4500\pi^2 - 997200 \ln 2) + (1096380 + \\ + 24030\pi + 8100\pi^2 - 1805760 \ln 2) (\gamma - 1) - \\ - (88380 - 254070\pi - 4725\pi^2 + 1091340 \ln 2) (\gamma - 1)^2 - \\ - (327120 - 153180\pi - 900\pi^2 + 236160 \ln 2) (\gamma - 1)^3 - \\ - (74880 - 25920\pi + 8640 \ln 2) (\gamma - 1)^4].$$

Таким образом, ряды, определяющие $A_0, \dots, A_5$, оказались возможным просуммировать.

При $m=2$ будем иметь формулу, ранее полученную другим путем в работе [2]. По существу случай $m=2$ рассматривался самим С. А. Чаплыгиным, но окончательная формула для коэффициента сжатия струи была записана лишь для $\gamma=1,4$ и в качестве характерного параметра принималось не число M_0 , а непосредственно число s_0 , которое связывалось с отношением давлений в сосуде и вне его.

Обратим внимание на частный случай $\gamma=-1$. При $\gamma=-1$ имеем дело с газом Чаплыгина [1]. Известная из работы [3] весьма простая в этом случае формула для коэффициента сжатия струи может быть приведена к виду

$$\frac{1}{\varepsilon} = 1 + \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - M_0^2}. \text{ Отсюда получаем } \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\pi + 2}{\pi} - \frac{1}{\pi} \times \\ \times \left[M_0^2 + \frac{1}{4} M_0^4 + \frac{1}{8} M_0^6 + \frac{5}{64} M_0^8 + \frac{7}{128} M_0^{10} + o(M_0^{10}) \right].$$

Этот же результат должен следовать и из полученного выше общего представления, если в нем положить $\gamma=-1$, что явилось полезной проверкой правильности проведенных выкладок.

В табл. 1 содержатся значения коэффициентов A_2, A_3, A_4 и A_5 для ряда значений γ . Коэффициенты A_0 и A_1 от γ не зависят и равны с точностью до шестого десятичного знака соответственно 1,636620 и $-0,318310$. Из приведенных данных следует, что основной вклад при вычислении коэффициента сжатия

вносят три первых члена разложения, причем первый член разложения представляет собой известное решение для несжимаемой жидкости.

Таблица 1

γ	A_2	A_3	A_4	A_5
1,0	0,006950	0,001195	0,000194	0,000023
1,1	0,011276	0,001332	0,000133	0,000005
1,2	0,015602	0,001286	0,000051	-0,000009
1,3	0,019929	0,001058	-0,000039	-0,000015
1,4	0,024255	0,000648	-0,000122	-0,000013
1,5	0,028581	0,000056	-0,000184	-0,000003
1,6	0,032908	-0,000719	-0,000211	0,000012
1,7	0,037234	-0,001675	-0,000189	0,000030
1,8	0,041560	-0,002814	-0,000103	0,000043
1,9	0,045887	-0,004135	0,000060	0,000045
2,0	0,050213	-0,005638	0,000314	0,000026

Таблица 2

γ	M_0				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1,0	0,61580	0,63057	0,65660	0,69633	0,75377
1,1	0,61580	0,63052	0,65636	0,69546	0,75128
1,2	0,61580	0,63048	0,65612	0,69462	0,74893
1,3	0,61579	0,63044	0,65588	0,69380	0,74669
1,4	0,61579	0,63039	0,65565	0,69301	0,74456
1,5	0,61579	0,63035	0,65542	0,69224	0,74252
1,6	0,61579	0,63031	0,65520	0,69149	0,74058
1,7	0,61578	0,63026	0,65498	0,69076	0,73871
1,8	0,61578	0,63022	0,65476	0,69005	0,73692
1,9	0,61578	0,63018	0,65454	0,68936	0,73520
2,0	0,61578	0,63014	0,65433	0,68868	0,73355

В табл. 2 представлены полученные по формуле, состоящей из шести первых членов разложения, значения коэффициента сжатия при разных γ и M_0 . Как видно, зависимость от γ слабая.

Отметим, что полученные недавно другим способом при $\gamma = 1,4$ и $M_0 = 0,4; 0,8; 1,0$ числовые результаты работы [4] и соответствующие данные табл. 2 полностью совпадают.

В работе [5] для $M_0 = 1$ при $\gamma = 1,4$ дано значение $\varepsilon = 0,7447$. Близкое значение, а именно $\varepsilon = 0,7448$, будем иметь, если удержим только три первых члена разложения.

Список литературы: 1. Чаплыгин С. А. О газовых струях. — Полн. собр. соч. — М.; Л.: Гостехиздат, 1948. — Т. 2. — С. 19—137. 2. Домбровский Г. А. Об одном методе в теории плоских дозвуковых движений газа//Rev. Roum. Math. Pures et Appl. — 1982. — V. 27, N 3. — P. 305—311. 3. Busemann A. Hodographmethode der Gasdynamik//Zeitschrift für angew. Math. und

Mech. — 1937. — В. 17, Н. 2. — S. 73—79. 4. *Сунгурцев Ю. В.* Интегральная аналогия метода Чаплыгина — Фальковича в задачах о газовых струях//Rev. Roum. Math. Pures et Appl. — 1982. — Т. 27, № 4. — Р. 499—509. 5. *Ferguson D. F., Lighthill M. J.* The hodograph transformation in transonic flow. Part IV. Tables//Proc. Roy. Soc. Ser. A. — 1947. — 192. — Р. 135—142.

Поступила в редколлегию 10.04.86

УДК 583:532:538.4

А. И. ЖАКИН

О ВЛИЯНИИ МЕХАНИЗМОВ ПРОВОДИМОСТИ ЖИДКИХ ДИЭЛЕКТРИКОВ НА СТРУКТУРУ ЭЛЕКТРОКОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ

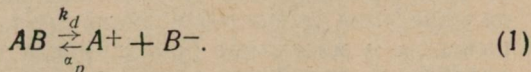
Электроконвективные (ЭК) течения в жидких диэлектриках обуславливаются действием кулоновской силы на объемный заряд [1—6]. Закономерность формирования объемного заряда определяется преобладающей ролью того или иного физико-химического процесса, происходящего либо в объеме жидкости, либо на границе электрод — жидкость. Если генерация зарядов связана с диссоциацией нейтральной компоненты, проводимость называют диссоционной; если преобладающую роль в проводимости играют заряды, генерирующиеся на поверхностях электродов, проводимость называют инжекционной [3, 7]. Следует ожидать, что различные режимы проводимости формируют присущие им и структуры ЭК течений. Поэтому смена одного типа проводимости на другой должна приводить и к перестройке структуры течения. Знать зависимость характера ЭК течений от типа проводимости полезно еще потому, что, изучая распределение поля скоростей и линий тока, можно сделать обратный вывод — о механизме проводимости жидкого диэлектрика. Исследования подобного рода особенно важны, так как не существует надежных прямых методов измерения механизмов проводимости жидких диэлектриков. Величины объемного заряда обычно столь малы, что его распределение в рабочей ячейке трудно измерить. Это обстоятельство особенно существенно для неполярных жидких диэлектриков, широко используемых в экспериментальных исследованиях (трансформаторное масло [1, 2, 4, 6], бензол [8, 9], фреон [10] и т. д.). В жидкостях этого класса диссоционная проводимость обуславливается диссоциацией молекул примеси, тип которых неизвестен (неконтролируемые примеси). Кроме того, малое значение константы Керра затрудняет применение малопогрешных оптических методов. В полярных жидких диэлектриках (нитробензол, бромбензол, йодбензол и т. д.) большое значение константы Керра позволило детально исследовать распределение поля и объемного заряда в широком диапазоне напряженности электрическо-

го поля [1, 9, 11, 12]. Параллельное изучение вольт-амперных характеристик (ВАХ) показало, что диссоционный режим проводимости этого класса определяется не только диссоциацией примесных молекул, но и распадом молекул самой жидкости (автодиссоциацией [3, 9]). В сильных полях преобладает инжекционная проводимость [3, 12], причем инжекция отрицательных ионов с катода, как правило, идет интенсивнее, чем положительных с анода [12].

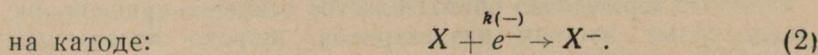
Нами исследуются теоретически режимы ЭК течений в несимметричной системе электродов в зависимости от механизмов проводимости жидких диэлектриков. ЭК течения развиваются как в диссоционном, так и в инжекционном режимах проводимости. В диссоционном режиме структура течения определяется зависимостью скорости диссоциации k_d нейтралов от напряженности E поля, от отношения подвижностей ионов и от степени неоднородности электрического поля. Характерной особенностью является реверс течения с ростом напряженности при малом параметре ЭГД безындукционности $C \ll 1$. В этом режиме проводимости структура течения существенно меняется при перемене полярностей электродов.

При $C \gg 1$, когда выполняется локальное равновесие реакции диссоциация $\rightleftharpoons$ рекомбинация, также возможно развитие ЭК течения, однако его структура не зависит от изменения полярности электродов. В инжекционном режиме проводимости структура течения существенно зависит от того, какой из электродов является инжектором.

1. Постановка задачи. Примем, что диссоционная проводимость определяется распадом нейтральной компоненты AB на примесные ионы A^+ , B^- , которые в свою очередь могут рекомбинировать



Полагаем, что инжекционный тип проводимости является униполярным и обусловлен инжекцией ионов X^- на катоде за счет восстановления некоторой компоненты X



Предполагаем постоянными концентрации компонент AB , X : $N = [AB] = \text{const}$, $c_X = [X] = \text{const}$. Можно показать, что эти предположения корректны при достаточно малых константах скоростей реакций (1), (2) $k_d t_0 \ll 1$, $k^{(-)}/b_i E \ll 1$, где t_0 — время прохождения тока через ячейку; b_i — подвижность ионов X^- .

Согласно теории абсолютных скоростей химических реакций [13], константа скорости реакции (2) определяется формулой Аррениуса $k^{(-)} = A \exp(-U_a/k_B T)$, где U_a — энергия активации; k_B — постоянная Больцмана. Предэкспоненциальный множи-

тель A пропорционален квадрату резонансного интеграла [14, 15] $A \sim |V_{if}|^2$, $V_{if} = \int \psi_i V \psi_f dv$, где $\psi_f(\psi_i)$ — волновая функция квантовой системы, до (после) электронного перехода; V — потенциальная энергия электрона. Внешнее электрическое поле снижает величину потенциального барьера [15, 16]: $U_a = U_0 - e\delta E_{loc}$, где δ — характерное расстояние от поверхности электрода до иона X^- ; E_{loc} — локальная напряженность на поверхности электрода, связанная со средней напряженностью на поверхности соотношением $E_{loc} = \beta E$, где β — коэффициент усиления [17]. Учитывая линейную связь V от E_{loc} , из формулы Аррениуса получаем зависимость $k^{(-)}$ от E в наиболее общем случае

$$k^{(-)} = (k_{(0)} + k_{(1)} E + k_{(2)} E^2) e^{\alpha E} (\alpha = e\delta\beta/k_B T). \quad (3)$$

Здесь постоянные $k_{(0)}$, $k_{(2)}$ положительны и не зависят от поля. В слабых полях $k^{(-)}$ не зависит от напряженности поля ($k^{(-)} = k_{(0)}$); в сильных полях ($k_{(0)} \ll k_{(2)} E^2$) имеем

$$k^{(-)} = k_0 E^2 e^{\alpha E} (k_0 \equiv k_{(2)}). \quad (4)$$

Эксперименты показывают, что реакция (2) инициируется электрическим полем [6]. Это означает, что при $E=0$ на катоде $n_i=0$. Используя это замечание и граничное условие на катоде: $b_i n_i E = k^{(-)} c_X$ [6], приходим к выводу, что в рамках теории абсолютных скоростей химических реакций $k^{(-)}$ должна определяться формулой (4).

Описанный тип проводимости организовывался экспериментально в работах [4, 6]. В качестве примеси X , обеспечивающей инжекционную проводимость, брали йод J_2 .

При сделанных предположениях краевую задачу электрогидродинамики можно записать в виде [6]

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p' + \mu \Delta \mathbf{v} + q \mathbf{E}; \quad \text{div } \mathbf{v} = 0; \quad (5)$$

$$\text{div } \epsilon \mathbf{E} = 4\pi q; \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi; \quad q = e(n_1 - n_2 - n_i);$$

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \text{div } n_j ((-1)^{j-1} b_j \mathbf{E} + \mathbf{v}) = \sum_j (j=1, 2, i);$$

$$\sum_1 = \sum_2 = k_a N - \alpha_p n_1 n_2; \quad \sum_i = 0;$$

$$\text{на аноде:} \quad n_1 = 0, \quad \mathbf{v} = 0, \quad \Phi = U; \quad (6)$$

$$\text{на катоде:} \quad n_2 = 0, \quad \mathbf{v} = 0, \quad \Phi = 0, \quad n_i = \frac{k^{(-)} c_X}{b_i E} \equiv n_c(E).$$

Здесь n_1 , n_2 , n_i — концентрации ионов A^+ , B^- , X^- ; p' — полное давление; остальные обозначения общепринятые. Функция $n_c(E)$ с учетом (4) определяется как

$$n_c(E) = \eta_c E e^{\alpha E} (\eta_c = k_0 c_X / b_i). \quad (7)$$

Константу η_c будем называть коэффициентом инжекции на катоде.

В общем случае константа скорости диссоциации k_d зависит от напряженности электрического поля: $k_d = k_{d_0} F(E)$, где $F(E)$ — монотонно возрастающая функция, такая что $F(0) = 1$. Явный вид $F(E)$ при некоторых упрощающих предположениях относительно характера взаимодействия ионов вычислялся в работах [18, 19]. В предположении того, что AB есть «рыхлые» ионные пары [20], Онзагер для $F(E)$ получил следующее выражение [18]:

$$F(E) = \frac{I_1(2z)}{z}; \quad z = \frac{e(eE/\epsilon)^{1/2}}{k_B T}, \quad (8)$$

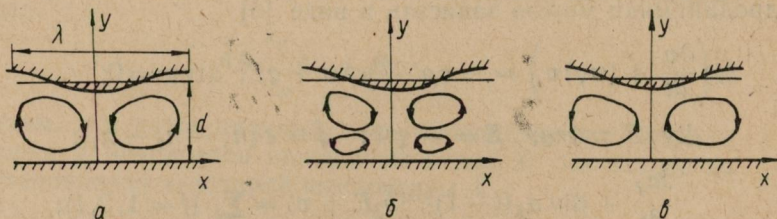
где I_1 — функция Бесселя мнимого аргумента, ограниченная в нуле. Константа скорости диссоциации k_{d_0} в отсутствие внешнего поля связана с начальной концентрацией ионов A^+ , B^- соотношением

$$k_{d_0} N = \alpha_p n_0^2, \quad (9)$$

что выражает равновесие реакции (1) при $E=0$. Коэффициент рекомбинации ионов A^+ , B^- будем определять формулой Ланжевена [7, 18]:

$$\alpha_p = 4\pi e(b_1 + b_2)/\epsilon. \quad (10)$$

Исследования проводили для плоского случая на примере горизонтально расположенного конденсатора, нижний электрод которого плоский, $\psi=0$, а верхний — периодически изогнутый:



$y = d + a \cos(2\pi x/\lambda)$. ЭК течения при такой геометрии электродов исследовались экспериментально и теоретически в предположении униполярной инжекции постоянного уровня (на катоде: $n_i = n_c = \text{const}$) в работе [6] (см. рисунок). Выберем единицы измерений следующим образом: $[r] = d$, $[v] = v/d \equiv v_0$, $[p] = \rho v_0^2$, $[\Phi] = U$, $[n_j] = n_0$ ($j=1, 2, i$). В безразмерных переменных и стационарном случае краевая задача (5), (6) с учетом (10) примет вид

$$(v\nabla)v = -\nabla p + \Delta v + GnE, \quad \text{div } v = 0, \quad (11)$$

$$\text{div } E = Cn, \quad E = -\nabla\Phi, \quad n = n_1 - n_2 - n_i,$$

$$\operatorname{div}(n_j((-1)^{j-1}E + P_j\mathbf{v})) = \gamma C \sum_j (j=1, 2, i),$$

$$\sum_1 = \sum_2 = F(E) - n_1 n_2, \quad \sum_i = 0;$$

$$y=0: \quad n_1=0, \quad \mathbf{v}=0, \quad \Phi=1; \quad (12)$$

$$y=1 + \xi \cos \omega x: \quad n_2=0, \quad n_i = n_c/n_0, \quad \mathbf{v}=0, \quad \Phi=0;$$

$$G = \frac{en_0 d^2 E_0}{\mu v_0}, \quad C = \frac{4\pi en_0 d}{\varepsilon E_0}, \quad E_0 = \frac{U}{d}, \quad \xi = \frac{a}{d},$$

$$P_j = \frac{v_0}{b_j E_0}, \quad \gamma_j = \frac{b_1 + b_2}{b_j} \quad (j=1, 2, i), \quad \omega = \frac{2\pi d}{\lambda}.$$

2. Безындукционное приближение: $C \ll 1$. Закономерности ЭГД явлений существенно зависят от параметра C , значения которого для типичных подвижностей ионов $b_1=b_2=b$, проводимости $\sigma=2en_0b$, концентрации ионов n_0 , характерных длин L приведены в табл. 1. Как видим, можно выделить два предельных случая. В первом случае $C \gg 1$ имеется локальное равновесие реакции (1), когда $n_1=n_2 = \sqrt{k_d N/\alpha_p}$, во втором $C \ll 1$. Согласно табл. 1, этот случай типичен для проводимостей $\sigma \leq$

Таблица 1

$\sigma, \frac{\text{См}}{\text{см}}$	$b, \frac{\text{См}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$	$n_0, \frac{1}{\text{См}^3}$	ε	$L, \text{ см}$	$E_0, \frac{\text{кВ}}{\text{см}}$	$C = \frac{4\pi en_0 L}{\varepsilon E_0}$
10^{-10}	10^{-4}	$3 \cdot 10^{12}$	2	1	10	280
10^{-11}	10^{-4}	$3 \cdot 10^{11}$	2	1	10	28
10^{-12}	10^{-4}	$3 \cdot 10^{10}$	2	1	10	2,8
10^{-13}	10^{-4}	$3 \cdot 10^9$	2	1	10	0,28
10^{-10}	10^{-3}	$3 \cdot 10^{11}$	2	1	10	28
10^{-11}	10^{-3}	$3 \cdot 10^{10}$	2	1	10	2,8
10^{-12}	10^{-3}	$3 \cdot 10^9$	2	1	10	0,28

$\leq 10^{-12} \text{См/см}$. В этой области электрическим полем, индуцированным объемным зарядом, и рекомбинацией ионов можно пренебречь.

Рассмотрим случай $C \ll 1$. Предполагаем, что в области слабых полей, где $C \ll 1$, инжекция слабая $n_c/n_0 \sim C$. Согласно (7) предположение справедливо при достаточно малом коэффициенте инжекции η_c и в низковольтной области. В этом случае граничное условие для n_i можно представить в виде на катоде:

$$n_i = Cf(E), \quad (13)$$

где $f(E) = n_c/n_0 C$. Такая запись граничного условия удобна для применения теории возмущений. Разыскивая решение в ви-

де асимптотических рядов по малому параметру $C: \mathbf{v} = \mathbf{v}_{(0)} + C\mathbf{v}_{(1)} + \dots$, $p = p_{(0)} + Cp_{(1)} + \dots$, $n_j = n_{j(0)} + Cn_{j(1)} + \dots$ ($j = 1, 2, i$), $\Phi = \Phi_{(0)} + C\Phi_{(1)} + \dots$, для нулевого приближения получаем $\mathbf{v}_{(0)} = 0$, $p_{(0)} = 0$, $n_{j(0)} = 0$ ($j = 1, 2, i$), а $\Phi_{(0)}$ определяется задачей

$$\Delta\Phi_{(0)} = 0; \quad y = 0; \quad \Phi_{(0)} = 0; \quad y = 1 + \xi \cos \omega x: \Phi_{(0)} = 1. \quad (14)$$

Для первого приближения

$$\Delta\mathbf{v}_{(1)} - \nabla p_{(1)} + G(n_{1(1)} - n_{2(1)} - n_{i(1)})\mathbf{E}_{(0)} = 0; \quad (15)$$

$$(-1)^{i-1} \operatorname{div} n_{j(1)} \mathbf{E}_{(0)} = \gamma_j F(\mathbf{E}_{(0)}) \quad (j = 1, 2);$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_{(1)} = 0, \quad \operatorname{div} n_{i(1)} \mathbf{E}_{(0)} = 0, \quad \mathbf{E}_{(0)} = -\nabla\Phi_{(0)};$$

$$y = 0: \quad n_{1(1)} = 0, \quad \mathbf{v}_{1(1)} = 0;$$

$$y = 1 + \xi \cos \omega x: \quad n_{2(1)} = 0, \quad n_{i(1)} = f(\mathbf{E}_{(0)}), \quad \mathbf{v}_{(1)} = 0.$$

Решение задачи (14), (15) все еще представляет сложную проблему. Дальнейшее упрощение связано с предположением о малости амплитуды изогнутости верхнего электрода $\xi = a/d \ll 1$. Разыскивая решение в виде $\Phi_{(0)} = \Phi_0 + \xi\Phi_1 + \dots$, $n_{j1} = q_{j0} + \xi q_j + \dots$ ($j = 1, 2, i$), $\mathbf{v}_1 = \xi \mathbf{u} + \xi^2 \mathbf{u}_2 + \dots$, $p_{(1)} = p_0 + \xi p_1 + \dots$, для нулевого приближения получаем

$$\Phi_0 = 1 - y, \quad q_{10} = y\gamma_1 F, \quad q_{20} = (1 - y)\gamma_2 F. \quad (16)$$

Для первого приближения имеем

$$\Delta\Phi_1 = 0; \quad y = 0: \Phi_1 = 0; \quad y = 1: \Phi_1 = \cos \omega x; \quad (17)$$

$$\Delta \mathbf{u} - \nabla p_1 + G(q\mathbf{E}_0 + q_0\mathbf{E}_1) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (18)$$

$$q_0 = q_{10} - q_{20} - q_{i0}, \quad q = q_1 - q_2 - q_i,$$

$$\mathbf{E}_0 = -\nabla\Phi_0, \quad \mathbf{E}_1 = -\nabla\Phi_1, \quad \operatorname{div}(q_{i0}\mathbf{E}_1 + q_i\mathbf{E}_0) = 0,$$

$$(-1)^{i-1} \operatorname{div}(q_{j0}\mathbf{E} + q_j\mathbf{E}_0) = \gamma_j F'_E \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_0;$$

$$y = 0: \quad q_1 = 0, \quad \mathbf{u} = 0;$$

$$y = 1: \quad q_2 = \gamma_2 F \cos \omega x, \quad q_i = f'_E \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{u} = 0.$$

В соотношениях (17), (18) $F = F(\mathbf{E}_0)$, $f = f(\mathbf{E}_0)$, $F'_E = F'_E(\mathbf{E}_0)$, $f'_E = f'_E(\mathbf{E}_0)$. Для Φ_1 , q_j ($j = 1, 2, i$) решение запишется в виде

$$\Phi_1 = A \operatorname{sh} \omega y \cos \omega x, \quad A = 1/\operatorname{sh} \omega; \quad (19)$$

$$q_1 = \gamma_1 A (F - F'_E) \operatorname{sh} \omega y \cos \omega x;$$

$$q_2 = -\gamma_2 (F - F'_E) (A \operatorname{sh} \omega y - 1) \cos \omega x + \gamma_2 F \cos \omega x;$$

$$q_1 = -f'_E \omega \operatorname{cth} \omega \cos \omega x.$$

Вводя функцию тока $v_x = d\psi/dy$, $v_y = -d\psi/dx$ и исключая давление, для ψ из (18) получаем задачу

$$\Delta^2 \psi = \omega G (H \operatorname{sh} \omega y + Q); \quad y = 0, y = 1: \psi = \partial \psi / \partial y = 0; \quad (20)$$

$$H = -A (\gamma_1 + \gamma_2) (2F - F'_E); \quad Q = \gamma_2 (2F - F'_E) - \omega \operatorname{cth} \omega f'_E.$$

Решение задачи (20) имеет вид

$$\begin{aligned} \psi = & \omega G \left[(A_1 - (A_1 g + 1) y + y^2) B + \right. \\ & + D \left(A_2 + \left(\frac{2}{\operatorname{sh} 2\omega} (\omega \operatorname{th} \omega - \operatorname{ch} \omega + 1) - A_2 g \right) y \right) \operatorname{sh} \omega y - \\ & - \left(B A_1 \frac{\omega}{\operatorname{ch} \omega} y + D \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \omega} + y (\operatorname{th} \omega + A_2) \frac{\omega}{\operatorname{ch} \omega} \right) \right) \operatorname{ch} \omega (y-1) + D \left. \right] \sin \omega x; \\ A_1 = & \left(1 - \frac{\omega^2}{\operatorname{sh}^2 \omega} \right)^{-1}; \quad A_2 = -\frac{A_1}{\operatorname{sh} \omega} \left(1 - \frac{1 + \omega^2}{\operatorname{ch} \omega} + \frac{\omega (\operatorname{ch} \omega - 1)}{\operatorname{sh} \omega} \right); \end{aligned} \quad (21)$$

$$g = 1 - \frac{2\omega}{\operatorname{sh} 2\omega}; \quad B = \frac{H}{8\omega^2}; \quad D = \frac{Q}{\omega^4}.$$

3. Исследование решения. Рассмотрим случай, когда период изогнутости верхнего электрода λ по сравнению с расстоянием d мал:

$$\omega = 2\pi d / \lambda \gg 1, \quad \xi \omega = a / \lambda \ll 1. \quad (22)$$

Наибольший интерес вызывает течение вблизи изогнутого электрода, его геометрия определяет характер течения жидкости. Для удобства введем координату $t = 1 - y$. Из (21) для окрестности изогнутого электрода ($y \gtrsim 1$) получаем

$$\psi = \omega G [B t^2 e^{-\omega t} + D (1 - (1 + t) e^{-\omega t})] \sin \omega x; \quad (23)$$

$$B = -1/8 (\gamma_1 + \gamma_2) (2F - F'_E), \quad D = \gamma_2 (2F - F'_E) \omega^{-4} - f'_E \omega^{-3}.$$

Отметим, что решение (23) легко получить, решая уравнение (20) при граничных условиях: при $t = 0$ $\psi = 0$, $d\psi/dy = 0$, при $t \rightarrow \infty$: $\psi < \infty$, $d\psi/dt \rightarrow 0$. Из (23) находим скорость вдали от электрода ($\omega t \gg 1$)

$$v_y|_{\omega t \gg 1} = \frac{\xi}{\omega^2} G \left[-C \gamma_2 (2F - F'_E) + \omega \frac{dn_c}{dE} \right] \cos \omega x. \quad (24)$$

Из (24) следует, что при слабой зависимости константы скорости диссоциации от поля $2F > F'_E$ и слабой инжекции $C \gamma_2 (2F - F'_E) > \omega dn_c / dE$ при $\xi < 0$ будет $v_y > 0$.

Это означает, что жидкость течет в область более сильной неоднородности электрического поля, т. е. к выпуклостям изогнутого электрода (рисунок в). Если инжекция достаточно сильная $\omega n_c / dE > C \gamma_2 |2F - F'_E|$, либо константа скорости диссоциации сильно зависит от поля $2F < F'_E$, течение всегда направлено от выпуклостей изогнутого электрода (рисунок, а).

Рассмотрим подробнее закономерности электроконвекции в диссоционном режиме проводимости. Используя для F выражение (8), нетрудно видеть, что в слабых полях разность $2F - F'_E$ положительна, в сильных полях — отрицательна. Это означает, что с ростом поля вращение в ЭК ячейках должно меняться на противоположное направление (реверс течения). Реверс течения с ростом поля наблюдался в экспериментах [6]. Для физического объяснения этого явления рассмотрим выражение для кулоновской силы

$$f_E = q_{(0)} E_0 + f_1; \quad f_1 = \xi (q_{(1)} E_0 + q_{(0)} E_1); \quad (25)$$

$$q_{(0)} = (\gamma_1 + \gamma_2) F y - \gamma_2 F; \quad E_0 = -\nabla \Phi_0; \quad E_1 = -\nabla \Phi_1; \\ q_{(1)} = (\gamma_1 + \gamma_2) (F - F'_E) e^{-\omega t} \cos \omega x + \gamma_2 (2F - F'_E) \cos \omega x.$$

Из (25) видно, что составляющая силы $q_{(0)} E_0$ перераспределяет давление в жидкости, так как имеет потенциал. Вихревое течение вызывает вторая составляющая силы f_1 . В том случае, когда константа скорости диссоциации слабо зависит от поля ($2F > F'_E$), кулоновская сила направлена к выпуклостям изогнутого электрода, именно: при $\xi < 0$, $\omega t \gg 1$ $f_y = f_1 e_y = -\xi 2F \cos \omega x > 0$, где e_y — орт оси y . Поэтому в этом случае жидкость течет к выпуклостям. Обратно, при сильной зависимости скорости диссоциации от поля $2F < F'_E$ имеем при $\omega t \gg 1$, $\xi < 0$, $f_y = \xi F'_E \cos \omega x < 0$, поэтому в этом случае течение направлено от выпуклостей изогнутого электрода. Оценим значение напряженности поля, при котором наблюдается реверс течения, предполагая, что F определяется фактором Онзагера (8). Можно показать, что значение z , при котором функция $2F - F'_E$ меняет знак, определяется из уравнения $6 I_1(x) - x I_0(x) = 0$, где $x = 2z$. Корень x_* этого уравнения с точностью 1 % равен $x_* = 5,4$, откуда $z_* = 2,7$. Используя $z_* = e(eE_*/\varepsilon)^{1/2} / k_B T$, для комнатной температуры $T = 300\text{K}$ и $\varepsilon = 2,2$ получаем $E_* = 74,5 \text{ кВ/см}$.

Из (24) видно, что для предельного случая (22) направление течения не зависит от подвижностей ионов. В случае слабой изогнутости электродов $\omega \ll 1$ структура течения существенно зависит от отношения подвижностей $\beta = b_2/b_1$. Действительно, при $\omega \ll 1$ из (21) получаем

$$v_y = -\frac{\xi \omega^2}{5!} C G y^2 (1 - y)^2 (2F - F'_E) (\gamma_1 + \gamma_2) (y_* - y) \cdot \cos \omega x; \quad (26)$$

$$y_* = (3 - 2\beta)/(1 + \beta); \quad \beta = b_2/b_1.$$

Из (26) видно, что при $\beta > 3/2$ будет $y_* < 0$. В этом случае жидкость течет от выпуклостей изогнутых электродов ($v_y < 0$ при $\xi < 0$, $\cos \omega x > 0$ (рисунок, а). При $2/3 < \beta < 3/2$ значение y_* заключено в пределах $0 < y_* < 1$, причем в окрестности нижнего электрода $v_y > 0$, верхнего изогнутого $v_y < 0$. Структура такого двухъячейного течения схематично изображена на рисунке, б. Наконец, при $\beta < 2/3$ имеем $y_* > 1$. В этом случае течение направлено к выпуклостям изогнутого электрода (рисунок, в). Нетрудно показать, что при перемене полярностей электродов скорость течения v_y также будет определяться выражением (26), в котором $\beta = b_1/b_2$. Отсюда следует вывод, важный для экспериментальной проверки диссоционного режима проводимости по структуре ЭК течения: если $b_2/b_1 \leq 2/3$, либо $b_2/b_1 \geq 3/2$, то при перемене полярностей электродов направление вращения в ячейках меняется на противоположное; при $2/3 < \beta < 3/2$ на полупериоде изогнутости верхнего электрода $0 \leq x \leq \lambda/2$ наблюдается двухъячейная электроконвекция.

Рассмотрим теперь закономерности электроконвекции в инжекционном режиме проводимости. Из (24) видно, что если инжектирует изогнутый электрод, то с увеличением ω скорость течения убывает пропорционально $1/\omega$. При инжектирующем плоском электроде при $\omega \gg 1$ находим

$$v_y = -\xi CG \frac{dn_c}{dE} \frac{e^{-\omega}}{\omega} [1 - (1 + \omega y) e^{-\omega y}] \cos \omega x.$$

Отсюда видно, что, во-первых, направление вращения в электроконвективных ячейках изменяется на противоположное, во-вторых, скорость электроконвекции убывает с ростом ω пропорционально $e^{-\omega}/\omega$. Таким образом, при униполярной инжекции перемена полярностей в системе периодически изогнутого и плоского электродов должна приводить к резкому изменению скорости электроконвективного течения. Этот эффект наблюдался в экспериментах [6].

Исходя из (24), легко проследить закономерность изменения скорости электроконвекции в зависимости от прикладываемого напряжения. Так, в диссоционном режиме при $E < E_*$, где E_* находится из уравнения $2F - F_E = 0$, с ростом поля электроконвекция затухает, а при $E > E_*$ — монотонно возрастает, причем наблюдается реверс течения. В инжекционном режиме скорость течения монотонно увеличивается с ростом напряжения. Так, при постоянном коэффициенте инжекции $\eta_c = dn_c/dE = \text{const}$ при $C \ll 1$ скорость линейна по напряжению, при $C \gg 1$ — квадратична [6].

4. Приближение локального равновесия: $C \gg 1$. Второй предельный случай при диссоционной проводимости связан с большими значениями параметра ЭГД безындукционности: $C \gg 1$. Казалось бы, рост параметра C должен обуславливаться

в сильных полях зависимостью константы скорости диссоциации от напряженности поля. Действительно, из (16) видно, что, несмотря на уменьшение параметра C с ростом поля: $C \sim E_0^{-1}$, за счет быстрого роста $q_{10} \sim q_{20} \sim F(E_0) \sim \exp(2z)/z^{3/2}$ условия асимптотической сходимости рядов нарушаются. Это означает, что параметр C необходимо оценивать не по характерной плотности n_0 , а по плотности $n_0 F(E_0)$. А в этом случае с ростом поля параметр C растет и в конце концов в сильных полях $C > 1$. Если предположить, что имеется локальное равновесие, то $n_1 = n_2 = n_0 \sqrt{F}$ [21]. Оценки параметра C по характерному значению плотности $n_0 \sqrt{F}$ и F , определяемой фактором Онзагера (8), показывают, что если $C \ll 1$ при характерной плотности n_0 , то будет $C \ll 1$ и при характерной плотности $n_0 \sqrt{F}$. Это видно из табл. 2, для которой $C = 4\pi e n_0 \sqrt{F} L / \varepsilon E$; $L = 1$ см; $\varepsilon = 2,2$; $n_0 =$

Таблица 2

$E_0, \frac{\text{кВ}}{\text{см}}$	10	20	50	100	200	500
z	0,99	1,4	2,2	3,1	4,4	6,7
$F = I_1(2z)/z$	1,6	2,3	6,4	24,8	200	17530
$C = \frac{4\pi e n_0 F^{1/2} L}{\varepsilon E_0}$	0,1	0,063	0,041	0,041	0,058	0,22

$= 10^9 \text{ см}^{-3}$. И лишь в сверхсильных полях $E \sim 1 \text{ МВ/см}$ значения $C \sim 1$. Эти оценки указывают на то, что локальное равновесие в сильных полях обуславливается не зависимостью константы скорости диссоциации от поля, а большой начальной концентрацией n_0 примесных ионов A^+ , B^- .

Получим предельные уравнения для случая $C \gg 1$ и укажем на рамки их справедливости. Из физических соображений и непосредственных расчетов [22] вытекает, что решение задачи (11), (12) состоит из внутреннего и пограничного, справедливого в узкой приэлектродной области толщиной $\delta_d \sim L/C \sqrt{F} = \varepsilon E / 4\pi e n_0 \sqrt{F}$ [22]. Здесь ограничимся рассмотрением внутреннего решения, вызывающего наибольший интерес. Решение задачи (11), (12) ищем в виде асимптотических рядов по параметру $\delta \equiv C^{-1}$: $n_j = n_{j(0)} + \delta n_{j(1)} + \delta^2 n_{j(2)} + \dots$ ($j = 1, 2$), $\Phi = \Phi_{(0)} + \delta \Phi_{(1)} + \dots$, $v = u + \delta v_{(1)} + \dots$, $p = p_{(0)} + \delta p_{(1)} + \dots$

В нулевом приближении получаем

$$n_{1(0)} = n_{2(0)} \sqrt{F} \equiv n. \quad (27)$$

Для скорости u с учетом того, что параметр ЭГД взаимодействия может быть $G \sim C$, и для членов порядка δ имеем

$$(u \nabla) u = -\nabla p_{(0)} + \Delta u + (G/C) q_1 E_{(0)}, \quad \operatorname{div} u = 0; \quad (28)$$

$$\operatorname{div} E_{(0)} = q_1, \quad q_1 = n_{1(1)} - n_{2(1)}, \quad E_{(j)} = -\nabla \Phi_{(j)} \quad (j=0,1); \quad (29)$$

$$\operatorname{div} [n ((-1)^{j-1} E_{(0)} + P_j u)] = \gamma_j [F'_E E_{(1)} \cdot E_{(0)} / E_0 - n (n_{1(1)} + n_{2(1)})] \\ (j=1,2). \quad (30)$$

Задача (27) — (30) не является замкнутой, так как число неизвестных больше числа уравнений. Задачу нахождения ЭК течения можно замкнуть следующим образом. Разделив уравнения (30) соответственно на γ_j ($j=1,2$) и беря их разность с учетом $P_1/\gamma_1 = P_2/\gamma_2$, получим

$$\operatorname{div} n E_{(0)} = 0. \quad (31)$$

Система уравнений (27) — (29), (31) является замкнутой. Граничные условия к ней определяются заданием потенциала Φ_0 на электродах и условиями прилипания и для рассматриваемой геометрии электродов имеют вид

$$y=0: \quad u=0, \quad \Phi_{(0)}=0; \\ y=1+\xi \cos \omega x: \quad u=0, \quad \Phi_{(0)}=1. \quad (32)$$

Заметим, что уравнение (31) не содержит конвективного члена. Это обстоятельство связано с тем, что в рассматриваемом приближении $G \leq C$, поэтому $|u| \leq 1$. Так как величина объемного заряда $q \sim C^{-1} q_1$, где $|q_1| \sim 1$, то конвективный ток значительно меньше миграционного $|qu|/|n E (1/P_1 + 1/P_2)| \leq \leq 2 P_1/C \ll 1$ (обычно $P_1 \lesssim P_2 \lesssim 1$).

Для $n_{1(1)}$, $n_{2(1)}$ получаем

$$n_{1(1)} = \frac{1}{2n} \left(\frac{P_1}{\gamma_1} \operatorname{div} n u - F'_E \frac{E_{(1)} \cdot E_{(0)}}{E_{(0)}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{div} E_{(0)}; \quad (33)$$

$$n_{2(1)} = n_{1(1)} - \operatorname{div} E_{(0)}.$$

Из рассмотрения второго приближения для $E_{(1)} = \nabla \Phi_{(1)}$ получаем

$$\operatorname{div} \left[n \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right) E_{(1)} + \left(\frac{n_{1(1)}}{\gamma_1} + \frac{n_{2(1)}}{\gamma_2} \right) E_{(0)} + \frac{P_1}{\gamma_1} q_1 u \right] = 0. \quad (34)$$

Можно показать, что все последующие члены $n_{1(j)}$, $n_{2(j)}$ определяются аналогично (34) через известные n , $n_{1(m)}$, $n_{2(m)}$, $E_{(0)}$, $E_{(m)}$, u , $u_{(m)}$ ($m=1, 2, \dots, j-1$) и неизвестную вектор-функцию $E_{(j)}$, для которой аналогично (34) существует замкнутое уравнение.

Заметим, что $P_j = \chi_j C$, $\chi_j = \epsilon \nu / (4\pi e n_0 d^2 b_j)$, поэтому при $\chi_j \approx 1$ вместо (31) имеем

$$\operatorname{div} \left[\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right) n E_{(0)} + \frac{P_1}{\gamma_1 C} q_1 u \right] = 0. \quad (35)$$

Система уравнений (27)–(29), (34) совпадает с уравнениями для расчетов ЭГД течений [5, 23, 24].

Применим полученные уравнения к исследованию течения в конденсаторе с периодическим изогнутым электродом. Исходим из системы уравнений (27)–(29), (31), (32), предполагая $C^{-1} \equiv \delta \ll \xi \ll 1$. Вновь ищем решение в виде асимптотических рядов по ξ . С приближением $\omega \gg 1$, $\xi \omega \ll 1$ можно получить

$$v_y = \xi \frac{\omega^2 G}{C(\Omega^4 + \omega^4)} g(y) \cos \omega x; \quad (36)$$

$$\Omega = \omega / (1 + n'_E/n)^{1/2}, \quad g(y) = (1 + (\omega - \Omega)t e^{-\omega t} - e^{-\Omega t}), \quad t = 1 - y.$$

Так как $\omega > \Omega$, то $g(y)$ положительна. С учетом этого замечания из (36) вытекает, что в окрестности выпуклостей изогнутого электрода ($\xi < 0$, $\cos \omega x > 0$) течение направлено на него. При любой полярности течение всегда локализовано вблизи изогнутого электрода и его структура не меняется при перемене полярностей. При слабой зависимости $n(E)$ скорость течения квадратично зависит от напряжения, при сильной зависимости — экспоненциально.

Выявленные закономерности ЭК течений дают простой гидродинамический способ определения механизма проводимости жидкого диэлектрика. Так, сравнение экспериментальных данных о течении трансформаторного масла с йодом показывает, что оно обладает в слабо однородных полях ярко выраженной униполярной проводимостью за счет инжекции отрицательных ионов с катода.

Список литературы: 1. *Остроумов Г. А.* Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. — М.: Физматгиз, 1979. — 319 с. 2. *Болога М. К., Гросу Ф. П., Кожухарь И. А.* Электроконвекция и теплообмен. — Кишинев: Штиинца, 1977. — 320 с. 3. *Felici N. D. D. C.* Conduction in liquid dielectrics (part I) // Direct Current. — 1971. — 2. — Р. 90–99. 4. *Стишков Ю. К.* Наблюдение изотермической электроконвекции в электрическом поле плоского конденсатора // Электрон. обработка материалов. — 1971. — № 2. — С. 52–56. 5. *Янговский Е. И.* Об изотермической электроконвекции // 8-е Рижск. совещ. по магнит. гидродинамике. Рига, 1975. — Т. 1. — С. 172. 6. *Жакин А. И.* Редокс-системы в электрогидродинамике и расчет электроконвективных течений // Магнит. гидродинамика. — 1982. — № 2. — С. 70–78. 7. *Жакин А. И.* Электрогидродинамика многокомпонентных диэлектрических жидкостей // Вестн. Харьк. ун-та. Механика и управление динам. систем. — 1983. — № 241. — С. 3–20. 8. *Сканави Г. И.* Физика диэлектриков. — М.; Л.: Гостехиздат, 1949. — 500 с. 9. *Адамчевский И.* Электрическая проводимость жидких диэлектриков. — Л.: Энергия, 1972. — 296 с. 10. *Петриченко Н. А.* Давление при электрогидродинамических течениях в изолирующих жидкостях // Электрон. обработка материалов. — 1979. — № 5. — С. 43–45. 11. *Мицкевич П. К.,*

Казацкая Л. С. Исследование распределения потенциала в жидких диэлектриках методом эффекта Керра//Электрон. обработка материалов. — 1968. — № 2, 20. — С. 71—75. 12. Жакин А. И., Тарапов И. Е., Федоненко А. И. Экспериментальное изучение механизма проводимости полярных жидких диэлектриков//Электрон. обработка материалов. — 1983. — № 5. — С. 37—41. 13. Герасимов Я. И. Курс физической химии. — М.: Химия, 1973. — Т. 2. — 240 с. 14. Догонадзе Р. Р., Кузнецов А. М., Черненко А. А. Теория гомогенных и гетерогенных электронных процессов//Усп. химии. — 1965. — 34. — С. 1779—1812. 15. Кришталек Л. И. Электродные реакции. Механизм элементарного акта. — М.: Наука, 1979. — 22 с. 16. Моррисон С. Химическая физика поверхности твердого тела. — М.: Мир, 1980. — 489 с. 17. Литвинов Е. А., Месяц Г. А., Проскуровский Д. Н. Автоэмиссионные и взрывоэмиссионные процессы при вакуумных разрядах//Успехи физ. наук. — 1983. — 132, вып. 2. — С. 265—302. 18. Onsager L. Deviation from Ohm's law in weak electrolytes//J. Chem. Phys. — 1934. — 2. — Р. 599—615. 19. Plumley H. J. Conduction of electricity by dielectric liquid at high field strength's//Phys. Rev. Ser. 2. — 1941. — 59. — Р. 200—207. 20. Шварц М. Анионная полимеризация. — М.: Мир, 1971. — 424 с. 21. Анфельбаум М. С., Полянский В. А. Об образовании объемного заряда в слабопроводящих средах//Магнит. гидродинамика. — 1982. — № 1. — С. 71—76. 22. Жакин А. И., Тарапов И. Е. О диссоционной проводимости жидких диэлектриков//Электрон. обработка материалов. — 1983. — № 3. — С. 47—50. 23. Жакин А. И. К вопросу об электроконвективной устойчивости слабопроводящей жидкости//Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1979. — № 4. — С. 137—142. 24. Янговский Е. И., Анфельбаум М. С. О насосном действии тонкого высоковольтного электрода в слабопроводящей диэлектрической жидкости//Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1980. — 50, вып. 7. — С. 1511—1520.

Поступила в редколлегию 29.01.86

УДК 532.51:538.3:538.4

И. И. ИЕВЛЕВ, Л. Н. ПОПОВА

ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ЖИДКИХ ДИЭЛЕКТРИКОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Рассматривается задача численного нахождения двухсвязных осесимметричных равновесных форм поверхности раздела двух несмешивающихся однородных изотропных диэлектриков, помещенных в поле

сил тяжести интенсивности $\vec{g}$, и электрическое поле, существующее за счет разности потенциалов U_0 между идеально проводящими стенками сосуда $S=S_1 \cup S_2$ и $\Sigma=S_1 \cup S_2$ (рис. 1). Предполагается, что заряды в объемах жидкостей Ω_1, Ω_2 и на поверхности раздела Γ отсутствуют.

1. Выберем декартову систему координат (x, y, z) так, чтобы ось z совпадала с осью симметрии задачи, а начало координат (точка O) находилось внутри поверхности S .

Равновесие границы раздела жидкостей

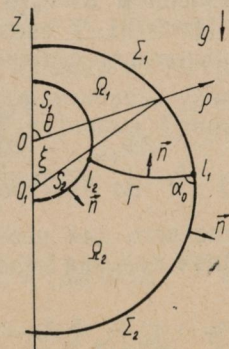


Рис. 1

в рассматриваемом случае описывается известной системой уравнений, которые в безразмерных переменных имеют вид [1]:

$$2\kappa - Bz + c = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{8\pi} \left[(\nabla \Phi_2)^2 + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1 \right) \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \right)^2 \right] \quad (\Gamma); \quad (1.1)$$

$$\alpha = \alpha_0(l_1, l_2), \quad \int_{\Omega_2} d\Omega = V; \quad \Delta \Phi_k = 0 \quad (\Omega_k), \quad \Phi_1 = \Phi_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \\ = \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \quad (\Gamma); \quad \Phi_k = 0 \quad (\Sigma), \quad \Phi_k = U \quad (S).$$

Здесь κ — средняя кривизна поверхности Γ ; $B = (\rho_2 - \rho_1)gR^2/\sigma$ — число Бонда; $\rho_1, (\rho_2), \varepsilon_1, (\varepsilon_2)$ — плотность и диэлектрическая проницаемость жидкости, занимающей объем Ω_1 (Ω_2); Φ_k — потенциал электрического поля в области Ω_k ($k=1, 2$); c — постоянная, которая определяется в процессе решения задачи; $l_1(l_2)$ — линия пересечения поверхности Γ со стенкой Σ (S); α_0 — угол смачивания, отсчитываемый в сторону второй жидкости, заданный; V — безразмерный объем второй жидкости; $\vec{n}$ — единичная нормаль к поверхности Γ , направленная в сторону области Ω_1 ; $U = U_0/\sqrt{\sigma R}$; σ — коэффициент поверхностного натяжения на Γ ($\sigma = \text{const}$); R — характерный линейный размер задачи.

Пусть (ρ, θ, φ) — сферическая система координат. Введем криволинейную систему координат (u, θ, φ) так, чтобы стенки сосуда S, Σ совпадали с координатными поверхностями $u=0, u=1$. В том случае, когда поверхности S и Σ задаются уравнениями $\rho=R_0(\theta)$ и $\rho=R_1(\theta)$, координату u можно определить равенством $u = [\rho - R_0(\theta)] / [R_1(\theta) - R_0(\theta)]$. В качестве криволинейных координат на Γ выберем переменные u, φ , а уравнение неизвестной границы раздела жидкостей будем искать в виде $\theta = \theta(u)$.

Решение задачи (1.1) будем искать методом итераций. Пусть начальное приближение Γ_0 к неизвестной поверхности Γ задано уравнением $\theta = \theta_0(u)$. Определение последующих приближений Γ_{m+1} ($m=0, 1, \dots$) сводится к решению линейной краевой задачи относительно потенциала электрического поля Φ_{km} :

$$\Delta \Phi_{km} = 0 \quad (\Omega_{km}), \quad \Phi_{1m} = \Phi_{2m} \quad (\Gamma_m); \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_{1m}}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_{2m}}{\partial n} \quad (\Gamma_m), \quad \Phi_{km} = 0 \quad (\Sigma), \quad \Phi_{km} = 1 \quad (S),$$

после чего для неизвестной функции $\theta_{m+1}(u)$ получается нелинейная краевая задача:

$$2\kappa_{m+1} - Bz + c_{m+1} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{8\pi} \left[(\nabla \Phi_2)^2 + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1 \right) \left(\frac{\partial \Phi_{2m}}{\partial n} \right)^2 \right] \quad (\Gamma_m), \quad (1.3a)$$

$$\alpha = \alpha_0(l_{1m}, l_{2m}), \int_{\Omega_{2m}} d\Omega = V. \quad (1.36)$$

2. Для построения поверхности Γ_{m+1} достаточно знать распределение потенциала Φ_{2m} и его производной $\partial\Phi_{2m}/\partial n$ вдоль поверхности Γ_m . В этом случае удобно перейти от краевой задачи (1.2) к системе интегральных уравнений относительно значений функций Φ_{km} и $\partial\Phi_{km}/\partial n$ на границе области Ω_{km} .

Предварительно исследуем поведение потенциала Φ_{km} в окрестности ребра $l_{1m}(l_{2m})$. Для этого в произвольной точке кривой $l_{1m}(l_{2m})$ введем локальную цилиндрическую систему координат (r_0, φ_0, z_0) так, чтобы ось z_0 была направлена по касательной к $l_{1m}(l_{2m})$. Потенциал электрического поля вблизи $l_{1m}(l_{2m})$ имеет вид

$$\Phi_{km} = r_0^\beta (A_k \sin \beta \varphi_0 + B_k \cos \beta \varphi_0). \quad (2.1)$$

Параметр β определяется из уравнения

$$\sin \beta \pi = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \sin [(\pi - 2\alpha_0) \beta],$$

исследование которого показывает, что функции Φ_{km} и $\nabla\Phi_{km}$ непрерывны и ограничены на $l_{1m}(l_{2m})$ в трех случаях: 1) $\alpha_0 = \pi/2$; 2) $\alpha_0 < \pi/2$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$; 3) $\alpha_0 > \pi/2$, $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$. При этом из восьми коэффициентов A_k, B_k ($k=1,2$) на l_{1m} и l_{2m} только два являются линейно независимыми, их значения должны быть найдены в результате решения задачи (1.2) во всем объеме жидкостей $\Omega_{1m} \cup \Omega_{2m}$. Нетрудно убедиться в том, что случай 3 сводится к случаю 2 путем простых переобозначений. Поэтому в дальнейшем для определенности будем считать, что $\alpha_0 \leq \pi/2$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$.

Пусть Ω — область, ограниченная замкнутой кусочно-гладкой поверхностью $\partial\Omega$, которая может иметь конечное число ребер l_i ($i=1, 2, \dots, k$). На границе $\partial\Omega$ зафиксируем точку $A(A \in l_i, i=1, 2, \dots, k)$ и введем обозначение: $f = (\vec{E} \vec{n})$, где $\vec{E} = -\nabla\Phi$, $\Delta\Phi = 0$ в Ω , а $\vec{n}$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке A . Нетрудно проверить, что в области Ω функция f удовлетворяет уравнению Лапласа. Следовательно, имеют место формулы Грина:

$$2\pi\Phi_A + \int_{\partial\Omega} \left[\Phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right] dS = 0; \quad (2.2)$$

$$2\pi(\vec{E}_A \vec{n}) + \int_{\partial\Omega} \left[(\vec{E} \vec{n}) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n} (\vec{E} \vec{n}) \right] dS = 0, \quad (2.3)$$

где $r = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2}$; $(x, y, z) \in \partial\Omega$; $\Phi_A \equiv \Phi(x_A, y_A, z_A)$; $\vec{n}$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке (x, y, z) .

В каждой точке поверхности $\partial\Omega$ введем локальную декартову систему координат (x^1, x^2, x^3) так, чтобы ось x^3 совпадала с нормалью $\vec{n}$. Используя равенства $\text{rot } \vec{E} = 0$, $\text{div } \vec{E} = 0$, формулу (2.3) можно преобразовать к виду

$$2\pi(\vec{E}_A \cdot \vec{n}) + \int_{\partial\Omega} \left\{ \left[v_\alpha \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - v_\beta \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\frac{1}{r} \right) \right] E^\alpha + \right. \\ \left. + \vec{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) E^\beta + \nabla_\alpha \left(\frac{v_\beta E^\alpha - v^\alpha E_\beta}{r} \right) \right\} dS = 0. \quad (2.4)$$

Здесь $a^i(a_i)$ — i -я контравариантная (ковариантная) компонента вектора $\vec{a}$ ($i=1, 2, 3$); $\nabla_\alpha a^\beta$ — ковариантная производная вектора $\vec{a}$ на поверхности [3]; по индексу α , принимающему значения 1, 2, производится суммирование.

В дальнейшем будем считать, что граница области Ω и поле $\vec{E}$ симметричны относительно оси z . Через Ω , $\partial\Omega$, S , Σ и l_i обозначим пересечение соответствующих областей, поверхностей и кривых с полуплоскостью, содержащей прямую z . Предположим, что вектор $\vec{E}$ непрерывен на всей границе $\partial\Omega$, включая ребра l_i ($i=1, 2, \dots, k$). В этом случае равенства (2.2), (2.4) упрощаются и принимают вид

$$2\pi\Phi_A + \int_0^L \left[G_1(\tau_A, \tau) \frac{\partial\Phi}{\partial n}(\tau) + G_2(\tau_A, \tau) \Phi(\tau) \right] d\tau = 0; \\ 2\pi(\vec{E}_A \cdot \vec{n}) + \int_0^L \left[G_3(\tau_A, \tau) \frac{\partial\Phi}{\partial n}(\tau) + G_4(\tau_A, \tau) \frac{\partial\Phi}{\partial \tau}(\tau) \right] d\tau = 0, \quad (2.5)$$

где

$$G_1 = -\frac{4\rho \sin \theta}{e} K; \quad G_2 = \frac{2}{be} \left[(\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta) K + \right. \\ \left. + \frac{(\rho \sin \theta - \rho' \cos \theta)g + 2\rho \sin \theta (\rho \cos \theta - \rho' \sin \theta) (\rho \cos \theta + \rho_A \cos \theta_A)}{\omega} E \right]; \\ G_3 = \frac{2\rho \sin \theta}{b_A \rho_A e \sin \theta_A} \left\{ (\rho'_A \cos \theta_A - \rho_A \sin \theta_A) K + \right. \\ \left. + \frac{\rho'_A [2\rho \rho_A \cos \theta_A - (\rho^2 + \rho_A^2) \cos \theta_A] + \rho_A (\rho^2 - \rho_A^2) \sin \theta_A}{\omega} E \right\};$$

$$G_4 = \frac{2}{b_A \rho_A e \sin \theta_A} \left\{ a(K - E) - \frac{2\rho\rho_A \sin \theta \sin \theta_A [a - \rho \sin \theta (\rho'_A \sin \theta_A + \rho_A \cos \theta_A)]}{w} E \right\};$$

$$a = \rho \rho'_A - \rho \rho'_A \cos \theta \cos \theta_A + \rho \rho_A \sin \theta_A \cos \theta;$$

$$b = \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}; \quad e^2 = \rho^2 + \rho_A^2 - 2\rho\rho_A \cos(\theta + \theta_A);$$

$$g = \rho_A^2 + \rho^2 \cos 2\theta - 2\rho\rho_A \cos \theta + \cos \theta_A;$$

$$w = \rho^2 + \rho_A^2 - 2\rho\rho_A \cos(\theta - \theta_A).$$

Здесь $\rho = \rho(\theta)$ — уравнение кривой $\partial\Omega$; $K = K(t)$, $E = E(t)$ — полные эллиптические интегралы I и II рода; $t^2 = 4\rho\rho_A \sin \theta \sin \theta_A / e^2$; τ_A — длина дуги кривой $\partial\Omega$, соответствующей точке A ; L — длина кривой $\partial\Omega$; $\gamma = \varepsilon_1 / \varepsilon_2$.

Интегральные ядра $G_1(\tau_A, \tau)$, $G_2(\tau_A, \tau)$, $G_3(\tau_A, \tau)$ имеют логарифмическую, а ядро $G_4(\tau_A, \tau)$ — логарифмическую и сингулярную особенности в точке A .

Вернемся к решению задачи (1.2). Выписывая соотношения (2.5) для $\partial\Omega = \sum_1 U \Gamma_m U S_1$, $\partial\Omega = \sum_2 U \Gamma_m U S_2$ и учитывая краевые условия для потенциала электрического поля, можно получить систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\partial\Phi_{km}/\partial n$ на Γ_m , Σ , S и Φ_{km} на Γ_m , не содержащую сингулярных интегралов.

Приближенное решение этой системы можно найти методом сплайн-коллокации [4]. Для этого на границе области $\Omega_{1m}(\Omega_{2m})$ введем сетку $\Delta_1(\Delta_2)$, неизвестные функции представим в виде линейных комбинаций кубических В-сплайнов с узлами на Δ_1 , Δ_2 и потребуем, чтобы полученные представления удовлетворяли интегральным уравнениям в узлах сетки, а также краевым условиям: в точках пересечения S и Σ с прямой z — условием осевой симметрии электрического поля и в ближайших к l_{1m} и l_{2m} узлах сетки — условию срачивания указанных представлений с выражениями (2.1), представляющими решение в малых окрестностях угловых точек. Решая систему линейных алгебраических уравнений (обозначим ее матрицу через $\|P_{ik}\|$) и подставляя кубические сплайны, аппроксимирующие Φ_{1m} и $\partial\Phi_{1m}/\partial n$ на Γ_m , в правую часть дифференциального уравнения (1.3а), приходим к краевой задаче, определяющей поверхность Γ_{m+1} . Задача (1.3) может быть линеаризована, например, методом Канторовича—Ньютона, после чего решается посредством сплайн-коллокации [2].

3. Приведенный в п. 2 алгоритм был использован для нахождения равновесной формы границы раздела двух диэлектриков, заполняющих сосуд с эксцентрично расположенными

сферическими стенками. Начало координат выбиралось в центре меньшей сферы. В этом случае

$$R_0 = \text{const}, \quad R_1(\theta) = \sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \theta} - d \cos \theta,$$

где R_0, R — радиус меньшей и большей сферы соответственно; $|d|$ — расстояние между их центрами ($\text{sign}(d) = -\text{sign}(z_{01})$).

Для решения задачи (1.2) вводилась дополнительная угловая координата ξ согласно условию $\text{tg } \xi = \rho \sin \theta / (d + \rho \cos \theta)$

(рис. 1). Сетки Δ_1 и Δ_2 задавались следующим образом: $\Delta_1 = \Delta_0 \cup \Delta_u \cup \Delta_\xi$, $\Delta_2 = \Delta'_0 \cup \Delta'_u \cup \Delta'_\xi$; $\Delta_0: \{ih_0\}$, $i = 0, 1 \dots N_0$, $h_0 = \theta_l / (N_0 + 1)$; $\Delta_\xi: \{ih_\xi\}$, $i = 0, 1 \dots N_\xi$, $h_\xi = \xi_l / (N_\xi + 1)$; $\Delta'_0: \{\theta_l + ih'_0\}$, $i = 1, 2 \dots N'_0$, $h'_0 = (\pi - \theta_l) / (N'_0 + 1)$, $\Delta'_\xi: \{\xi_l + ih'_\xi\}$, $i = 1, 2 \dots N'_\xi$, $h'_\xi = (\pi - \xi_l) / (N'_\xi + 1)$ (ξ_l, θ_l — координаты точек l_{1m}, l_{2m} соответственно), причем соблюдалось соотношение $h_0 \approx h_\xi \approx h'_0 \approx h'_\xi \approx h \approx 0,1$.

Элементы матрицы $\|P_{ik}\|$, представляющие собой интегралы от произведения ядра G_i ($i = 1, 2, 3, 4$) на В-сплайн или его первую производную, вычислялись с помощью квадратуры Гаусса с 6 узлами. Интегралы с логарифмической особенностью находились с помощью специальной квадратуры $\int_0^1 \lg(e/x) f(x) dx \approx$

$$\approx \sum_{i=1}^N w_i f(x_i) \quad [5].$$

На рис. 2 показано распределение электрического поля на поверхностях S и Σ при следующих значениях параметров задачи: $R_0 = 1$, $R = 2$, $\alpha_0 = 90^\circ$, $B = 0$, $\gamma = 0,5$, $U = 1$, $d = 0,9$, $V = 14,7$ (сплошная линия); $d = -0,9$, $V = 4,9$ (пунктирная линия).

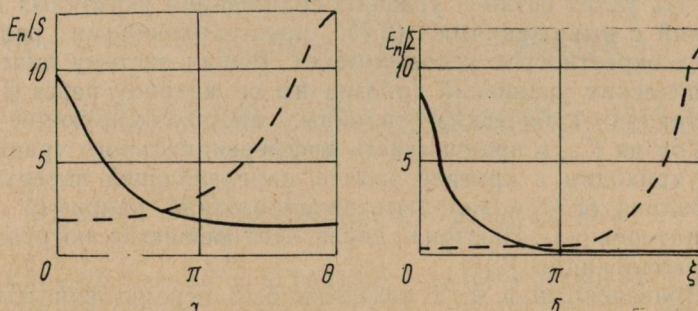


Рис. 2

Из графиков видно, что электрическое поле максимально вблизи стенки S в той части области Ω , где расстояние между электродами минимально.

Равновесные формы поверхности Γ при $R_0 = 1$, $R = 2$, $\alpha_0 = 90^\circ$ и $\gamma = 1$ (сплошная линия), $\gamma = 0,5$ (пунктирная линия) представлены на рис. 3 ($a - d = 0,9$; $1 - V = 29,2$, $U^2 = 0,05$;

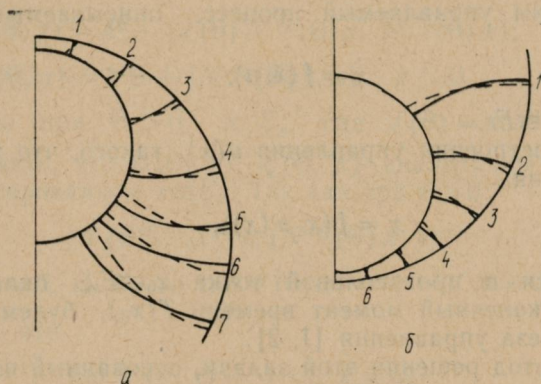


Рис. 3

$2 - V = 28,7$, $U^2 = 1$; $3 - V = 26,6$, $U^2 = 10$, $4 - V = 23,1$, $U^2 = 10$; $5 - V = 19,3$, $U^2 = 10$; $6 - V = 14,7$, $U^2 = 10$; $7 - V = 9,0$, $U^2 = 5$; $b - d = -0,9$; $1 - V = 11,9$, $U^2 = 5$; $2 - V = 4,9$, $U^2 = 1$; $3 - V = 1,9$, $U^2 = 1$; $4 - V = 0,8$, $U^2 = 1$; $5 - V = 0,24$, $U^2 = 2$; $6 - V = 0,04$, $U^2 = 2$).

Под действием пондеромоторных сил диэлектрическая жидкость втягивается в область максимальной напряженности электрического поля. При этом деформация поверхности тем сильнее, чем меньше число γ .

Список литературы: 1. Иевлев И. И., Исерс А. Б. Равновесие и устойчивость поверхности раздела жидких диэлектриков в электрическом и гравитационном полях//Магнит. гидродинамика. — 1976. — № 4. — С. 89 — 95. 2. Попова Л. Н. Численное нахождение равновесной поверхности раздела жидкостей в осесимметричном сосуде//Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1981. — № 5. — С. 134—137. 3. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. — М.: Физматгиз, 1963. — 411 с. 4. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. — М.: Наука, 1976. — 248 с. 5. Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. — М.: Наука, 1966. — 372 с.

Поступила в редколлегию 14.04.86

В. И. КОРОБОВ, Г. М. СКЛЯР, В. И. КРУТИНЬ

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА
С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ УПРАВЛЯЕМОСТИ

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый уравнением

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (1)$$

где $x \in E_n$, $u \in E_r$.

Задачу построения управления $u(x)$, такого, что траектория $x(t)$ уравнения

$$\dot{x} = f(x, u(x)), \quad (2)$$

начинающаяся в произвольной точке $x_0 \in E_n$, оканчивается* в точке 0 в конечный момент времени $T(x_0)$, будем называть задачей синтеза управления [1, 2].

Общий метод решения этой задачи, основанный на введении функции управляемости $\Theta(x)$, предложен в работах [3, 4], а, в [3—5] — различные методы построения функции управляемости $\Theta(x)$ и синтезирующего управления $u(x)$.

Отметим, что одним из важнейших требований, предъявляемых в работах [3—6] к функции $\Theta(x)$, является ее непрерывность.

Нами предложен новый метод построения функции управляемости $\Theta(x)$ для линейных уравнений, когда функция $\Theta(x)$, вообще говоря, не является непрерывной, сохраняя это свойство лишь на траекториях уравнения (2). С помощью этого метода построения функции управляемости в работе решена одна задача оптимального синтеза.

§ 1. Решение задачи синтеза с помощью разрывной
функции управляемости

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1.1)$$

где $x \in E_n$, $u \in E_r$, A — $(n \times n)$ — матрица; B — $(n \times r)$ — матрица.

В дальнейшем всюду уравнение (1.1) будем предполагать полностью управляемым.

* То, что траектория $x(t)$ оканчивается в момент времени $T(x_0)$ в точке 0, означает, что $\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t) = 0$, что в дальнейшем мы специально оговаривать

не будем.

Обозначим

$$N(T) = \int_0^T e^{-A^*t} B B^* e^{A^*t} dt.$$

Из полной управляемости уравнения (1.1) следует, что матрица $N(T)$ положительно определена при $T > 0$. Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\Phi(\Theta, x) = k^2 - (J(\Theta) N^{-1}(\Theta) x, N^{-1}(\Theta) x); \quad (1.2)$$

$$\Psi(\Theta, x) = k^2 \Theta + (N^{-1}(\Theta) x, x), \quad k > 0, \quad (1.3)$$

определенные при $\Theta > 0$, $x \in E_n$, где $J(\Theta) = e^{-A\Theta} B B^* e^{-A^*\Theta}$.

Легко видеть, что $\Phi(\Theta, x)$, $\Psi(\Theta, x)$ аналитичны по Θ при каждом фиксированном $x \in E_n$. Так как при $\Theta > 0$

$$\|N(\Theta)\|^{-1} \|x\|^2 \leq (N^{-1}(\Theta) x, x)$$

$$\text{и } \lim_{\Theta \rightarrow 0} \|N(\Theta)\| = 0, \quad (1.4), \quad \text{то } \lim_{\Theta \rightarrow 0} \Psi(\Theta, x) = +\infty, \quad x \neq 0. \quad (1.5)$$

Учитывая, что

$$\lim_{\Theta \rightarrow +\infty} \Psi(\Theta, x) = +\infty, \quad x \neq 0, \quad (1.6)$$

получаем, что функция $\Psi(\Theta, x)$ достигает при любом фиксированном $x \neq 0$ минимума в некоторой точке $\Theta(x)$, $0 < \Theta(x) < \infty$.

Поскольку $\Psi'_\Theta(\Theta, x) = \Phi(\Theta, x)$, то уравнение

$$\Phi(\Theta, x) = 0 \quad (1.7)$$

имеет, по крайней мере, одно положительное решение $\Theta = \Theta(x) > 0$ при каждом фиксированном $x \neq 0$.

Кроме того, из аналитичности функции $\Phi(\Theta, x)$ по Θ , учитывая соотношения (1.5), (1.6), следует, что функция $\Psi(\Theta, x)$ имеет конечное число точек глобального минимума.

Определим теперь функцию управляемости $\Theta(x)$ при $x \neq 0$ как минимальное решение уравнения (1.7), в котором функция $\Psi(\Theta, x)$ достигает своего глобального минимума.

При $x = 0$ положим $\Theta(0) = 0$.

Свойства функции $\Theta(x)$.

1. Из $\Theta(x) \rightarrow 0$ следует, что $x \rightarrow 0$, т. е. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \Theta(x) < \delta$ влечет $\|x\| < \varepsilon$.

Действительно, $\|N(\Theta(x))\|^{-1} \|x\|^2 \leq \Psi(\Theta(x), x) = k^2 \Theta(x) + (N^{-1}(\Theta(x)) x, x)$.

С другой стороны,

$$\Psi(\Theta(x), x) \leq \Psi(1, x) = k^2 + (N^{-1}(1) x, x) \leq k^2 + \|N^{-1}(1)\| \|x\|^2.$$

Поэтому $\|x\|^2 (\|N(\Theta(x))\|^{-1} - \|N^{-1}(1)\|) \leq k^2$.

Пусть ε — любое положительное число такое, что $1 - \|N^{-1}(1)\| \varepsilon > 0$. Тогда в силу (1.4) выберем $\delta > 0$ такое, что при

$0 < \Theta(x) < \delta$, $\|N(\Theta(x))\| < \varepsilon$, т. е. $\|N(\Theta(x))\|^{-1} > \frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому

при $0 < \Theta(x) < \delta$ выполнено $\|x\|^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} - \|N^{-1}(1)\| \right) \leq k^2$; $\|x\|^2 \leq$

$\leq \frac{\varepsilon k^2}{1 - \|N^{-1}(1)\| \varepsilon} = \varepsilon_1$, откуда и следует свойство 1.

2. При $\Theta(x) \rightarrow 0$ $\Psi(\Theta(x), x) \rightarrow 0$, т. е. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: $\Theta(x) < \delta$ влечет $|\Psi(\Theta(x), x)| < \varepsilon_1$.

Действительно, пусть ε — любое положительное число. Выберем $\varepsilon > \delta > 0$ столь малым, чтобы при $\Theta(x) < \delta$ $(N^{-1}(\varepsilon)x, x) < \varepsilon$. (Это возможно в силу свойства 1). Тогда

$$\Psi(\Theta(x), x) \leq \Psi(\varepsilon, x) \leq (k^2 + 1)\varepsilon,$$

что и доказывает свойство 2.

Будем выбирать уравнение $u(x)$ в виде

$$u(x) = -B^*N^{-1}(\Theta(x))x. \quad (1.8)$$

Определение 1. Решением дифференциального уравнения (1.1) с управлением (1.8) будем называть функцию $x(t)$, удовлетворяющую почти всюду соотношению $\dot{x} = Ax - BB^*N^{-1}(\Theta(x))x$ и такую, что функция $\Theta(x(t))$ абсолютно непрерывна по t .

Как видно из определения, решение $x(t)$ является непрерывно дифференцируемой функцией.

Замечание. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - BB^*N^{-1}(\theta)x; \\ \dot{\theta} = f(t) \quad x(0) = x_0, \theta(0) = \theta(x_0). \end{cases} \quad (1.9)$$

Как видно из определения 1, функция $x(t)$ является решением уравнения (1.1) тогда и только тогда, если существует $f(t)$ из класса локально суммируемых функций такая, что пара $(x(t), \Theta(t))$ решений системы (1.9) удовлетворяет уравнению $\Phi(\theta(t), x(t)) = k^2 - (J(\theta(t))N^{-1}(\theta(t))x(t), N^{-1}(\theta(t))x(t)) = 0$,

причем при каждом t : $\theta(t) = \Theta(x(t))$. (1.10)

Теорема 1.1. Для любого начального условия $x_0 \in E_n$ решение $x(t)$ уравнения (1.1) с управлением $u = -B^*N^{-1}(\Theta(x))x$ в смысле определения 1 существует и единственно на отрезке $[0, \Theta(x_0)]$, причем $\dot{\Theta}(x(t)) = -1$ для любого $t \in [0, \Theta(x_0)]$.

Доказательство.

Существование.

Лемма 1.1. Для функции $\Phi(\theta, x)$, определяемой (1.2), справедливо соотношение

$$\Phi_{\theta} = (\Phi_x, Ax - BB^*N^{-1}(\theta)x). \quad (1.11)$$

Доказательство. Предварительно докажем тождество

$$N^{-1}(\theta)A + A^*N^{-1}(\theta) = N^{-1}(\theta)BB^*N^{-1}(\theta) - N^{-1}(\theta)J(\theta)N^{-1}(\theta). \quad (1.12)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} AN(\theta) + N(\theta)A^* &= \\ &= A \int_0^{\theta} e^{-At} BB^* e^{-A^*t} dt + \int_0^{\theta} e^{-At} BB^* e^{-A^*t} dt \cdot A^* = \\ &= - \int_0^{\theta} dJ(t) = J(0) - J(\theta) = BB^* - J(\theta). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Домножая (1.13) слева и справа на $N^{-1}(\theta)$, получаем (1.12).

Следовательно, обозначив

$$I(\theta) = N^{-1}(\theta)J(\theta)N^{-1}(\theta), \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \text{имеем, используя (1.12): } \Phi_{\theta} &= -([N^{-1}(\theta)J(\theta)N^{-1}(\theta)]_{\theta} x, x) = \\ &= ([I(\theta)J(\theta)N^{-1}(\theta) + N^{-1}(\theta)J(\theta)A^*N^{-1}(\theta) + \\ &+ N^{-1}(\theta)AJ(\theta)N^{-1}(\theta) + N^{-1}(\theta)J(\theta)I(\theta)]x, x) = \\ &= ([-A + BB^*N^{-1}(\theta)]^* I(\theta) - I(\theta)(A - BB^*N^{-1}(\theta))]x, x) = \\ &= (-2I(\theta)x, A - BB^*N^{-1}(\theta)x) = (\Phi_x, Ax - BB^*N^{-1}(\theta)x). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

$$\text{Положим в (1.9) } f(t) = -1, \quad t \in [0, \theta(x_0)]. \quad (1.15)$$

Пусть $(x(t), \theta(t))$ — решение (1.9) при $f(t)$, определенном (1.15). Тогда в силу леммы 1.1

$$\frac{d}{dt} \Phi(\theta(t), x(t)) = -\Phi_{\theta} + (\Phi_x, Ax - BB^*N^{-1}(\theta(t))x(t)) = 0.$$

Поскольку в начальный момент $\theta(0) = \theta(x_0)$, то следовательно, $\Phi(\theta(t), x(t)) = 0, \quad \forall t \in [0, \theta(x_0)]$. (1.16)

Покажем теперь, что $\forall t \in [0, \theta(x_0)], \theta(t) = \theta(x(t))$, т. е. $\theta(t)$ является минимальным корнем уравнения

$$\Phi(\theta, x(t)) = 0, \quad (1.17)$$

на котором функция $\Psi(\theta, x(t))$ достигает глобального минимума.

Действительно, рассмотрим функцию двух переменных $G(\theta, t) = \Psi(\theta, x(t))$, $t \in [0, \theta(x_0))$.

Лемма 1.2. Для любого фиксированного $\theta_1 > 0$

$\dot{G}(\theta_1 - t, t) \geq \dot{G}(\theta(x_0) - t, t) = G(\theta(t), t)$; $\forall t \in [0, \min(\theta_1, \theta(x_0)))$ имеем, используя (1.12), (1.16):

$$\begin{aligned} \bar{G}(\theta(t), t) &= -\Phi(\theta(t), x(t)) + (N^{-1}(\theta(t))x(t), Ax(t) - \\ &\quad - BB^*N^{-1}(\theta(t))x(t)) + (Ax(t) - BB^*N^{-1}(\theta(t))x(t), \\ N^{-1}(\theta(t))x(t)) &= -(N^{-1}(\theta(t))BB^*N^{-1}(\theta(t))x(t), x(t)) - k^2; \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{G}(\theta_1 - t, t) &= (N^{-1}(\theta_1 - t)J(\theta_1 - t)N^{-1}(\theta_1 - t)x(t), \\ x(t)) - k^2 &+ (N^{-1}(\theta_1 - t)BB^*N^{-1}(\theta_1 - t)x(t), x(t)) - \\ &- (N^{-1}(\theta_1 - t)BB^*N^{-1}(\theta(t))x(t), x(t)) - (N^{-1}(\theta(t)). \\ BB^*N^{-1}(\theta_1 - t)x(t), x(t)) &- (N^{-1}(\theta_1 - t)J(\theta_1 - t) \times \\ &\times N^{-1}(\theta_1 - t)x(t), x(t)). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Вычитая из (1.19) (1.18), получаем $\dot{G}(\theta_1 - t, t) - G(\theta(t), t) = \|B^*(N^{-1}(\theta_1 - t) - N^{-1}(\theta(t)))x(t)\|^2 \geq 0$.

Лемма доказана.

Пусть $t_1 \in [0, \theta(x_0))$ и $y \in (0, +\infty)$. Тогда, обозначая $\theta_1 = y + t_1$, в силу леммы 1.2 получаем $\dot{G}(\theta_1 - t, t) \geq \dot{G}(\theta(t), t)$, $\forall t \in [0, \min(\theta_1, \theta(x_0)))$; $G(\theta_1 - t_1, t_1) - G(\theta_1, 0) \geq G(\theta(t_1), t_1) - G(\theta(x_0), 0)$; $G(\theta_1 - t_1, t_1) - G(\theta(t_1), t_1) = \Psi(y, x(t_1)) - \Psi(\theta(t_1), x(t_1)) \geq G(\theta_1, 0) - G(\theta(x_0), 0) = \Psi(\theta_1, x_0) - \Psi(\theta(x_0), x_0) \geq 0$.

Если $y < \theta(t_1)$, то $\theta_1 < \theta(x_0)$ и $\Psi(\theta_1, x_0) - \Psi(\theta(x_0), x_0) > 0$, так как $\theta(x_0)$ является минимальной точкой глобального минимума функции $\Psi(\theta, x_0)$. Поэтому $\Psi(y, x(t_1)) - \Psi(\theta(t_1), x(t_1)) > 0$.

Таким образом, $\theta(t)$ является минимальным корнем уравнения (1.7), в котором функция $\Psi(\theta, x(t))$ достигает глобального минимума ($\forall t \in [0, \theta(x_0))$), т. е. $\theta(t) = \theta(x(t))$, и существование решения уравнения (1.1) в силу определения 1 доказано.

Единственность. Разобьем $E_n\{0\}$ на следующие множества: $E_n\{0\} = M_1 \cup M_2$, где $M_1 = \{x \in E_n\{0\} : \Phi'_\theta(\theta(x), x) \neq 0\}$;

$$M_2 = \{x \in E_n\{0\} : \Phi'_\theta(\theta(x), x) = 0\}.$$

1. Пусть $x_0 \in M_1$. Тогда в точке x_0 выполнено равенство $\Phi(\Theta(x_0), x_0) = 0$, причем $\Phi_\Theta(\Theta(x_0), x_0) \neq 0$. Пусть $x(t)$ — произвольное решение уравнения $\dot{x} = Ax - BB^* N^{-1}(\Theta(x))x$; $x(0) = x_0$ в смысле определения 1. Тогда функция $g(\Theta, t) = \Phi(\Theta, x(t))$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные по Θ, t в некоторой окрестности точки $(\Theta(x_0), 0)$ и так как $g_\Theta(\Theta(x_0), 0) \neq 0$, то по теореме о неявной функции существует единственная абсолютно непрерывная функция $\theta(t)$ такая, что $g(\theta(t), t) = \Phi(\theta(t), x(t)) = 0$, причем в силу (1.11)

$$\dot{\theta} = - \frac{\Phi_x, Ax(t) - BB^* N^{-1}(\theta(x(t)))x(t)}{\Phi_\Theta} = -1. \quad (1.20)$$

Поэтому $x(t)$ есть решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - BB^* N^{-1}(\theta)x; \\ \dot{\theta} = -1, \quad x(0) = x_0, \quad \theta(0) = \Theta(x_0), \end{cases}$$

что и доказывает единственность для любой точки $x_0 \in M_1$.

2. Пусть $x_0 \in M_2$. Тогда в силу определения функции $\Theta(x)$ и аналитичности функции $\Psi(\Theta, x)$ по первому аргументу существует конечное число $n = 2k, k > 1$ такое, что

$$\frac{\partial^i \Phi(\Theta(x_0), x_0)}{\partial \Theta^i} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \text{а} \quad \frac{\partial^{n+1} \Phi(\Theta(x_0), x_0)}{\partial \Theta^{n+1}} \neq 0.$$

Пусть $x(t)$ — произвольное решение уравнения $\dot{x} = Ax - BB^* N^{-1}(\Theta(x))x$; $x(0) = x_0$ в смысле определения 1. Тогда существует некоторый отрезок $[0, \tau(x_0))$, $\tau(x_0) > 0$ такой, что

$$\frac{\partial^{n+1} \Phi(\Theta(x(t)), x(t))}{\partial \Theta^{n+1}} \neq 0, \quad \forall t \in [0, \tau(x_0)]. \quad (1.21)$$

Покажем, что почти всюду на отрезке $[0, \tau(x_0)]$ производная $\dot{\theta}(x(t)) = -1$.

Предположим противное. Так как из (1.20) следует, что при $x(t) \in M_1$, $\dot{\theta}(x(t)) = -1$, то наше предположение означает, что $\mu Q > 0$, где $Q = \{t \in [0, \tau(x_0)]: x(t) \in M_2, \dot{\theta}(x(t)) = -1\}$. Тогда существует замкнутое множество $Q^1 \subset Q$, $\mu Q^1 > 0$, которое может быть представлено в виде объединения $Q' = Q_1 \cup Q_2$, где множество Q_1 — совершенно, Q_2 — не более чем счетно.

Лемма 1.3. Для любой точки (Θ, x) справедливо соотношение $\Phi_\Theta^{(m)}(\Theta, x) - ([\Phi_x(\Theta, x)]_\Theta^{m-1}, Ax - BB^* N^{-1}(\Theta)x) =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{m-1} c_j^m (B^* [\Phi_x(\Theta, x)]_\Theta^{(m-j-1)}, B^* [\Phi_x(\Theta, x)]_\Theta^{(j-1)}), \\ &c_j^m > 0, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad m = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1.22)$$

Доказательство. Предварительно заметим, что

$$BB^* \Phi_x(\theta, x) = 2BB^* I(\theta) x = 2(Ax - BB^* N^{-1}(\theta)x)_\theta. \quad (1.23)$$

Доказательство проводим по индукции. При $m=2$ формула (1.22) справедлива в силу (1.11). Пусть $m=k$ и

$$\begin{aligned} & \Phi_\theta^{(k)} - ([\Phi_x]_\theta^{(k-1)}, Ax - BB^* N^{-1}(\theta)x) = \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} c_j^k (B^* [\Phi_x]_\theta^{(k-1)}, B^* [\Phi_x]_\theta^{(j-1)}), \quad c_j^k > 0, \quad j = \overline{1, k-1}. \end{aligned}$$

Дифференцируя это соотношение по θ и используя (1.23), получаем

$$\begin{aligned} & \Phi_\theta^{(k+1)} - ([\Phi_x]_\theta^{(k)}, Ax - BB^* N^{-1}(\theta)x) = \\ &= \sum_{j=1}^k c_j^{k+1} (B^* [\Phi_x]_\theta^{(k-1)}, B^* [\Phi_x]_\theta^{(j-1)}), \end{aligned}$$

где $c_1^{k+1} = c_1^k + \frac{1}{2} > 0$; $c_j^{k+1} = c_{j-1}^k + c_j^k > 0$, $j = \overline{2, k-1}$,

$$c_k^{k+1} = c_{k-1}^k > 0.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим траекторию $x(t)$, $t \in Q_1$. Тогда

$$\Phi_\theta(\theta(x(t)), x(t)) = 0, \quad (1.24)$$

так как $x(t) \in M_2$, и

$$\Phi_{\theta\theta}(\theta(x(t)), x(t)) = 0, \quad (1.25)$$

так как $\theta(x(t))$ является точкой глобального минимума функции $\Psi(\theta, x(t))$. Дифференцируя тождество (1.24) по t в точках совершенного множества Q_1 , имеем

$$\begin{aligned} & (\Phi_{\theta x}(\theta(x(t)), x(t)), Ax(t) - BB^* N^{-1}(\theta(x(t))x(t)) + \\ & + \Phi_{\theta\theta}(\theta(x(t)), x(t))_\theta = 0. \end{aligned}$$

Учитывая (1.25), получаем

$$(\Phi_{\theta x}(\theta(x(t)), x(t)), Ax(t) - BB^* N^{-1}(\theta(x(t))x(t)) = 0, \quad t \in Q_1. \quad (1.26)$$

Применяя лемму 1.3 при $m=2$ и используя (1.25), (1.26), получаем

$$B^* \Phi_x(\theta(x(t)), x(t)) = 0, \quad t \in Q_1. \quad (1.27)$$

Пусть при некотором $n=2k$ выполнено

$$\begin{aligned} & \Phi_\theta(\theta(x(t)), x(t)) = \Phi_{\theta\theta}(\theta(x(t)), x(t)) = \dots = \Phi_\theta^{(n)}(\theta(x(t)), \\ & x(t)) = 0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

и

$$B^* [\Phi_x]_{\theta}^{(i)} (\Theta(x(t)), x(t)) = 0, \quad i = \overline{0, k-1}, \quad \forall t \in Q_1. \quad (1.29)$$

Покажем, что тогда

$$\Phi_{\theta}^{(n+1)} (\Theta(x(t)), x(t)) = \Phi_{\theta}^{(n+2)} (\Theta(x(t)), x(t)) = 0;$$

$$B^* [\Phi_x]_{\theta}^{(k)} (\Theta(x(t)), x(t)) = 0, \quad \forall t \in Q_1.$$

Действительно, применяя лемму 1.3 при $m = n+1$ и используя соотношения (1.29), получаем

$$\begin{aligned} & \Phi_{\theta}^{n+1} (\Theta(x(t)), x(t)) - ([\Phi_x]_{\theta}^{(n)} (\Theta(x(t)), x(t)), Ax(t) - \\ & - BB^* N^{-1} (\Theta(x(t))), x(t)) = 0, \quad t \in Q_1. \end{aligned}$$

С другой стороны, дифференцируя (1.28) по t , $t \in Q_1$, имеем

$$\begin{aligned} & \Phi_{\theta}^{(n+1)} (\Theta(x(t)), x(t)) \dot{\Theta}(x(t)) + ([\Phi_x]_{\theta}^{(n)} (\Theta(x(t)), x(t)), \\ & Ax(t) - BB^* N^{-1} (\Theta(x(t))), x(t)) = 0. \end{aligned}$$

Складывая два последних равенства и учитывая, что $\dot{\Theta}(x(t)) = -1$, $t \in Q_1$, имеем

$$\Phi_{\theta}^{(n+1)} (\Theta(x(t)), x(t)) = 0, \quad t \in Q_1. \quad (1.30)$$

В силу того, что $\Psi(\Theta, x(t))$ имеет глобальный минимум в точке $\Theta(x(t))$, с учетом (1.28), (1.30) запишем

$$\Phi_{\theta}^{(n+2)} (\Theta(x(t)), x(t)) = 0, \quad \forall t \in Q_1. \quad (1.31)$$

Применяя лемму 1.3 при $m = n+2$ и используя (1.29) — (1.31), получаем

$$B^* [\Phi_x]_{\theta}^{(k)} (\Theta(x(t)), x(t)) = 0, \quad \forall t \in Q_1.$$

Таким образом, доказано, что для любого целого $n > 0$

$$\Phi_{\theta}^{(n)} (\Theta(x(t)), x(t)) = 0, \quad \forall t \in Q_1,$$

что противоречит (1.21).

Таким образом, доказано, что почти всюду на отрезке $[0, \tau(x_0)]$ $\dot{\Theta}(x(t)) = -1$, а в силу абсолютной непрерывности $\dot{\Theta}(x(t)) = -1$ $\forall t \in [0, \tau(x_0)]$. Поэтому $x(t)$ есть решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - BB^* N^{-1} (\theta) x; \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases}$$

и $x(0) = x_0$, $\theta(0) = \Theta(x_0)$,

что и доказывает единственность для $\forall x_0 \in M_2$. Теорема 1.1 полностью доказана.

Учитывая свойство 1 функции $\Theta(x)$, из теоремы 1.1 легко следует

Теорема 1.2. Рассмотрим управляемый процесс, описываемый уравнением (1.1).

Пусть функции $\Theta(x)$ — минимальное решение уравнения $\Phi(\Theta, x) = k^2 - (J(\Theta)N^{-1}(\Theta)x, N^{-1}(\Theta)x) = 0$;

$$N(\Theta) = \int_0^{\Theta} e^{-At} B B^* e^{-A^*t} dt; \quad J(\Theta) = e^{-A\Theta} B B^* e^{-A^*\Theta},$$

на котором функция $\Psi(\Theta, x) = k^2\Theta - (N^{-1}(\Theta)x, x)$ достигает своего глобального минимума, а управление $u(x) = -B^*N^{-1} \times \times (\Theta(x))x$. Тогда для любого $x_0 \in E_n$ выполнено $x(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow T = \Theta(x_0)$, где $x(t)$ — решение уравнения (1.1) с управлением $u(x)$ и начальным условием $x(0) = x_0$ в смысле определения 1.

На самом деле, можно получить явный вид решения уравнения $\dot{x} = Ax - BB^*N^{-1}(\Theta(x))x$, $x(0) = x_0$. Действительно, учитывая, что на траекториях уравнения $\dot{\Theta}(x(t)) = -1$, и проводя замену $y(t) = N^{-1}(\Theta(x(t)))x(t)$, имеем $\dot{y}(t) = [N^{-1}(\Theta(x \times \times (t)))A + N^{-1}(\Theta(x(t)))J(\Theta(x(t)))N^{-1}(\Theta(x(t))) - N^{-1}(\Theta(x(t))) \times \times BB^*N^{-1}(\Theta(x(t)))]y(t)$.

В силу тождества (1.12) получаем $\dot{y}(t) = -A^*y(t)$. Откуда $y(t) = e^{-A^*t}N^{-1}(\Theta(x_0))x_0$, т. е. $x(t) = N(\Theta(x(t)))e^{-A^*t}N^{-1}(\Theta(x_0))x_0 = N(\Theta(x_0) - t)e^{-A^*t}N^{-1}(\Theta(x_0))x_0$, $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \Theta(x_0)$, так как $N(\Theta(x_0) - t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \Theta(x_0)$.

§2. Оптимальность построенного синтеза. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(v) = k^2T + \int_0^T \|v(t)\|^2 dt \rightarrow \inf, \quad k > 0, \quad (2.1)$$

$$A - (n \times n), B - (n \times r); \quad \dot{x} = Ax + Bv; \quad (2.2)$$

$$x(t) \in E_n, v(t) \in E_r, \quad \forall t \in [0, T]; \quad (2.3)$$

$$x(0) = x_0, x(T) = 0; \quad v \in L_2^{loc}([0, \infty), E_r). \quad (2.4)$$

Теорема 2.1. Если уравнение (2.2) обладает свойством полной управляемости, то для любого начального условия $x_0 \in E_n$ управление $v_{x_0}(t) = u(x(t))$, где $u(x)$ — управление, построенное в теореме 1.2, а $x(t)$ — решение задачи Коши $\dot{x} = Ax + + Bv(x)$, $x(0) = x_0$ в смысле определения 1, является оптимальным для задачи (2.1) — (2.4).

Доказательство теоремы.

Лемма 2.1. Рассмотрим задачу

$$J_1(v) = \int_0^T \|v(t)\|^2 dt \rightarrow \inf (T > 0 - \text{фикс}); \quad (2.5)$$

$$\dot{x} = Ax + Bv, \quad x \in E_n, \quad u \in E_r; \quad (2.6)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = 0; \quad (2.7)$$

$$v \in L^2([0, T], E_r). \quad (2.8)$$

Если уравнение (2.6) обладает свойством полной управляемости, то оптимальное значение функционала $J_1(v)$ равно

$$J_1^{\wedge} = (N^{-1}(T)x_0, x_0),$$

где

$$N(T) = \int_0^T e^{-At} B B^* e^{-A^*t} dt.$$

Доказательство леммы. Пусть $v(t)$ — произвольное управление, $v(t) \in L^2([0, T], E_r)$, переводящее точку x_0 в 0. Тогда

$$x_0 = - \int_0^T e^{-A^*t} B^* v(t) dt. \quad (2.9)$$

Используя (2.9), получаем

$$\begin{aligned} J_1(v) &= \int_0^T (v(t), v(t)) dt = \int_0^T (v(t), -B^* e^{-A^*t} N^{-1}(T) x_0) dt + \\ &+ \int_0^T -B^* e^{-A^*t} N^{-1}(T) x_0, v(t) + B^* e^{-A^*t} N^{-1}(T) x_0 dt = \\ &= (N^{-1}(T) x_0, x_0) + \|v(t) + B^* e^{-A^*t} N^{-1}(T) x_0\|_{L_2([0, T], E_r)}^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Так как $\|v(t) + B^* e^{-A^*t} N^{-1}(T) x_0\|_{L_2([0, T], E_r)}^2 \geq 0$, очевидно минимальное значение функционала $\geq (N^{-1}(T) x_0, x_0)$. В то же время значение функционала $J_1 = (N^{-1}(T) x_0, x_0)$ достигается на управлении

$$v^T(t) = -B^* e^{-A^*t} N^{-1}(T) x_0. \quad (2.11)$$

Лемма доказана.

Пусть $x(t)$ — решение уравнения $\dot{x} = Ax + Bu(x)$, $x(0) = x_0$, где $u(x)$ определено в теореме 1.2. Рассмотрим значение критерия (2.1) на решении $x(t)$:

$$\begin{aligned} J(v_{x_0}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\Theta(x_0) - \varepsilon} \|u(x(t))\|^2 dt + k^2 \Theta(x_0) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{\Theta(x_0) - \varepsilon} [N^{-1}(\Theta(x(t))) B B^* N^{-1}(\Theta(x(t))) x(t), x(t)) + k^2] dt. \end{aligned}$$

Поскольку в силу (1.18)

$$\dot{\Psi} = (\Theta(x(t)), x(t)) = -(N^{-1}(\Theta(x(t))) BB^* N^{-1}(\Theta(x(t))) x(t), x(t)) - k^2, \text{ то}$$

$$J(v_{x_0}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{\Theta(x_0) - \varepsilon} -\dot{\Psi}(\Theta(x(t)), x(t)) dt = \Psi(\Theta(x_0), x_0) - \\ - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Psi(\Theta(x(\Theta(x_0) - \varepsilon)), x(\Theta(x_0) - \varepsilon)).$$

Используя свойство 2 функции $\Theta(x)$, имеем

$$J(v_{x_0}) = \Psi(\Theta(x_0), x_0) = k^2 \Theta(x_0) + (N^{-1}(\Theta(x_0)) x_0, x_0) = \\ = \min_{\Theta > 0} [k^2 \Theta + (N^{-1}(\Theta) x_0, x_0)].$$

Поскольку $J(v_{x_0}) = \min_{T > 0} [J_1(v^T) + k^2 T]$, где v^T определено формулой (2.11), в силу леммы 2.1 и соотношения (2.12) управление $v_{x_0}(t) = u(x(t))$ решает задачу (2.1) — (2.4), что и доказывает теорему.

Замечание. Задача $J(v) = k^2 T + \int_0^T (Rv(t), v(t)) dt \rightarrow \inf$;

$$\dot{x} = Ax + Bv, x(t) \in E_n, v(t) \in E_r, \forall t \in [0, T], x(0) = x_0, \\ x(T) = 0, v \in L_2^{\text{loc}}([0T], E_r),$$

R — положительно определенная матрица сводится заменой управления $v_1 = \sqrt{R}v$ к задаче (2.1) — (2.4) и легко решается методом, изложенным в § 1.

§3. Примеры.

$$1. \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \text{ т. е. } \dot{x} = Ax + Bu, \text{ где } x \in R^2, u \in R^1.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$J(\Theta) = e^{-A\Theta} BB^* e^{-A^*\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta^2 - \Theta \\ -\Theta & 1 \end{pmatrix},$$

$$N(\Theta) = \int_0^\Theta e^{-At} BB^* e^{-A^*t} dt = \begin{pmatrix} \frac{\Theta^3}{3} - \frac{\Theta^2}{2} \\ -\frac{\Theta^2}{2} & \Theta \end{pmatrix}; N^{-1}(\Theta) = \frac{12}{\Theta^4} \begin{pmatrix} \Theta & \frac{\Theta^2}{2} \\ \frac{\Theta^2}{2} & \frac{\Theta^3}{3} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим функции

$$\Psi(\Theta, x) = (N^{-1}(\Theta)x, x) + k^2\Theta = \frac{12x_1^2}{\Theta^3} + \frac{12x_1x_2}{\Theta^2} + \frac{4x_2^2}{\Theta} + k^2\Theta,$$

$$k > 0;$$

$$\Phi(\Theta, x) = k^2 - (N^{-1}(\Theta)J(\Theta)N^{-1}(\Theta)x, x) = k^2 -$$

$$-\frac{36x_1^2}{\Theta^4} - \frac{12x_1x_2}{\Theta^3} - \frac{4x_2^2}{\Theta^2} = k^2 - \left(6\frac{x_1}{\Theta^2} + 2\frac{x_2}{\Theta}\right)^2, \quad k > 0,$$

определенные при $\Theta > 0$. Находим функцию $\Theta = \Theta(x)$ как минимальное решение уравнения

$$k^2\Theta^4 = (6x_1 + 2x_2\Theta)^2, \quad (3.1)$$

на котором функция

$$\Psi(\Theta, x) = \frac{12x_1^2}{\Theta^3} + \frac{12x_1x_2}{\Theta^2} + \frac{4x_2^2}{\Theta} + k^2\Theta \quad (3.2)$$

достигает своего глобального минимума.

Рассмотрим параболу, определяемую уравнением

$$x_1 = -\alpha_0 x_2(x_2), \quad (3.3)$$

где $\alpha_0, 0 < \alpha_0 < \frac{1}{6k}$ — корень уравнения

$$G(\alpha) = k^2[b_1 - b_2] + 4\left[\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2}\right] - 12\alpha\left[\frac{1}{b_1^3} - \frac{1}{b_2^3}\right] +$$

$$+ 12\alpha^2\left[\frac{1}{b_1^3} - \frac{1}{b_2^3}\right] = 0,$$

$$b_1 = \frac{1}{k}[\sqrt{1+6k\alpha} - 1], \quad b_2 = \frac{1}{k}[\sqrt{1-6k\alpha} + 1]. \quad (3.4)$$

Замечание. Уравнение (3.4) имеет единственный корень

$\alpha_0 \in \left(0, \frac{1}{6k}\right)$. Действительно, при $\alpha \ll 1, G(\alpha) \sim \frac{4}{9\alpha} > 0$, при $\alpha = \frac{1}{6k}, G(\alpha) = \frac{4}{3}(2\sqrt{2} - 3) < 0$.

Покажем, что корень α_0 единственный. Вычислим

$$G'(\alpha) = \frac{2\alpha - b_1}{b_1^3} - \frac{2\alpha - b_2}{b_2^3} = \frac{2\alpha}{k^3} \left[2(\sqrt{1+6k\alpha} - \sqrt{1-6k\alpha}) + \right.$$

$$+ \sqrt{1+6k\alpha} \sqrt{1-6k\alpha} - 3 \Big] = \frac{2\alpha}{k^2} P(\alpha), \quad P(0) = -3,$$

$$P\left(\frac{1}{6k}\right) = 2\sqrt{2} - 3 < 0 \quad \text{и}$$

$$P'(\alpha) = \frac{6k}{\sqrt{1+6k\alpha} \sqrt{1-6k\alpha}} [\sqrt{1+6k\alpha} + \sqrt{1-6k\alpha} - 6k\alpha] > 0$$

для $\forall \alpha \in \left(0, \frac{1}{6k}\right)$. Поэтому $P(\alpha) < 0$ для $\forall \alpha \in \left(0, \frac{1}{6k}\right)$,

т. е. $G'(\alpha) < 0$, $\alpha \in \left(0, \frac{1}{6k}\right)$ (3.4) имеет единственный корень.

Пусть

$$\begin{aligned} S_1 &= \{x \in R^2: x_1 = -\alpha_0 x_2 |x_2|, x_1 > 0\}; \\ S_2 &= \{x \in R^2: x_1 = -\alpha_0 x_2 |x_2|, x_1 < 0\}; \\ S^+ &= \{x \in R^2: x_1 > -\alpha_0 x_2 |x_2|\}; \\ S^- &= \{x \in R^2: x_1 < -\alpha_0 x_2 |x_2|\}; \\ \Theta(x) &= \begin{cases} \frac{1}{k} (x_2 + \sqrt{x_2^2 + 6kx_1}), & (x_1, x_2) \in S^+ \cup S_1; \\ \frac{1}{k} (-x_2 + \sqrt{x_2^2 - 6kx_1}), & (x_1, x_2) \in S^- \cup S_2. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Функция $\Theta(x)$ терпит разрыв в точках множества $S_1 \cup S_2$, так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} (x_2 + \sqrt{x_2^2 + 6kx_1}) &> \frac{1}{k} (-x_2 + \sqrt{x_2^2 - 6kx_1}), \quad (x_1, x_2) \in S_2; \\ \frac{1}{k} (-x_2 + \sqrt{x_2^2 - 6kx_1}) &> \frac{1}{k} (x_2 + \sqrt{x_2^2 + 6kx_1}), \quad (x_1, x_2) \in S_1. \end{aligned}$$

Очевидно, что в нашем случае множество

$$M_2 = \{x \in R^2 / \{0\}: \Phi_0^1(\Theta(x), x) = 0\},$$

введенное в §1, является пустым. Управление $u(x)$, переводящее произвольную точку пространства R^2 в начало координат

$$\begin{aligned} u(x) &= -B^* N^{-1}(\Theta(x)) x = -\frac{6}{\Theta^2 x} x_1 - \frac{4}{\Theta(x)} x^2, \quad \text{т. е.} \\ u(x) &= \begin{cases} \frac{1}{3} \frac{x_2^2}{x_1} - \frac{x_2 \sqrt{x_2^2 + 6kx_1}}{3x_1} - k, & (x_1, x_2) \in S^+ \cup S_1; \\ \frac{1}{3} \frac{x_2^2}{x_1} + \frac{x_2 \sqrt{x_2^2 - 6kx_1}}{3x_1} + k, & (x_1, x_2) \in S^- \cup S_2. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Решение системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad (3.7)$$

где $u(x)$ задается (3.6) в смысле определения 1, получим по формулам

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 (\Theta(x_0) - t)^2 + c_2 (\Theta(x_0) - t)^3; \\ x_2(t) &= -2c_1 (\Theta(x_0) - t) - 3c_2 (\Theta(x_0) - t)^2. \end{aligned}$$

Здесь c_1, c_2 находятся из начальных условий. Заметим, что если точка $x_0 = (x_{10}, x_{20}) \in S_1 \cup S_2$, то существуют две траектории, удовлетворяющие системе (3.7) для $\forall t$ и ведущие к 0:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 (a_1 - t)^2 + c_2 (a_1 - t)^3; \\ x_2(t) &= -2c_1 (a_1 - t) - 3c_2 (a_1 - t)^2, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $a_1 = \frac{1}{k}(x_{20} + \sqrt{x_{20}^2 + 6kx_{10}}); \quad c_1 = \frac{a_1 x_{20} - 3\alpha_0 x_{20} |x_{20}|}{a_1^2};$

$$c_2 = \frac{2\alpha_0 x_{20} |x_{20}| - a_1 x_{20}}{a_1^3};$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1^1 (a_2 - t)^2 + c_2^1 (a_2 - t)^3; \\ x_2(t) &= -2c_1^1 (a_2 - t) - 3c_2^1 (a_2 - t)^2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $a_2 = \frac{1}{k}(-x_{20} + \sqrt{x_{20}^2 - 6kx_{10}}); \quad c_1^1 = \frac{a_2 x_{20} - 3\alpha_0 x_{20} |x_{20}|}{a_2^2};$

$$c_2^1 = \frac{2\alpha_0 x_{20} |x_{20}| - a_2 x_{20}}{a_2^3}.$$

Причем легко видеть, что при $x_0 \in S_1$ определению 1 удовлетворяет траектория (3.8). На траектории (3.9) функция $\Theta(x)$ не является абсолютно непрерывной, хотя равенство $\Theta(x(t)) = -1$ выполняется для $\forall t$. Для $x_0 \in S_2$ определению 1 удовлетворяет только траектория (3.9). Построенный синтез дает оптимальное решение задачи 1 для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases} \quad (3.10)$$

Оптимальное значение критерия

$$J_{x_0}^* = \frac{12x_{10}^2}{\Theta^3(x_0)} + 12 \frac{x_{10}x_{20}}{\Theta^2(x_0)} + \frac{4x_{20}^2}{\Theta(x_0)} + k^2\Theta(x_0),$$

где $\Theta(x)$ задается (3.5). Из (3.4) следует, что для $x \in S_1 \cup S_2$ решением задачи 1 для (3.10) является как траектория (3.8), так и траектория (3.9).

Список литературы: 1. Понtryгин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1961. — 250 с. 2. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 220 с. 3. Коробов В. И. Решение задачи синтеза с помощью функции управляемости//Докл. АН СССР. — 1979. — 248, № 5. — С. 1051—1055. 4. Коробов В. И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости//Мат. сб. — 1979. — 109, № 4. — С. 582—606. 5. Коробов В. И. Решение задачи синтеза в дифференциальных играх с помощью функции управляемости//Докл. АН СССР. — 1982. — 266, № 2. — С. 269—273.

Поступила в редколлегию 01.03.86

УДК 517.977

В. М. ГАВРИЛЯКО

ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ УПРАВЛЯЕМОСТИ

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1)$$

где A, B — постоянные матрицы размера $n \times n$ и $n \times r$ соответственно, $x \in E_n$, $u \in \Omega \subset E_r$. В работах [1—3] для процесса (1) была решена задача синтеза управления, т. е. построения функции $u = u(x) \in \Omega$ такой, что траектория $x(t, x_0)$ системы $\dot{x} = Ax + Bu(x)$, начинающаяся в произвольной точке $x_0 \in E_n$ в момент времени $t=0$, попадает в точку $x_1=0$ за конечное время $T(x_0)$. Решение данной задачи было осуществлено с помощью положительно определенной функции управляемости $\theta(x)$ [1], играющей роль функции Ляпунова в задачах устойчивости. В работе [1] определение значения функции $\theta(x)$ сводилось к решению уравнения

$$\theta^{1+\frac{n-1}{\alpha}} = \frac{1}{2a_0} \sum_{i,j=1}^n f_{ij} \theta^{\frac{i+j-2}{\alpha}}(c, A^{i-1}x)(c, A^{j-1}x) \quad (2)$$

при каждом известном векторе x . В дальнейших работах [3—5] было показано, что значение функции $\theta(x)$ может быть определено также из уравнения вида

$$2a_0\theta = (N_\theta^{-1}x, x), \quad (3)$$

где

$$N_{\theta} = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\theta}} e^{-At} BB^* e^{-A^*t} dt, \quad (4)$$

или

$$N_{\theta} = \int_0^{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}} e^{-At} BB^* e^{-A^*t} dt. \quad (5)$$

При определении значения функции $\theta(x)$ из уравнения (3) как в случае (4), так и в случае (5) возникает задача вычисления матрицы N_{θ}^{-1} при различных значениях вектора x . Один из возможных путей решения этой задачи состоит в приведении (3) к форме (2) путем разложения матрицы N_{θ}^{-1} в ряд по степеням θ . Однако это разложение в общем случае содержит бесконечное число слагаемых. Ограничиваясь конечным числом, получаем приближенное значение матрицы N_{θ}^{-1} и соответственно приближенное значение функции $\theta(x)$. Поэтому необходимо оценить погрешность определения N_{θ}^{-1} и рассмотреть вопрос о численном нахождении решения уравнения типа (2). Рассмотрению этих вопросов для матрицы вида (4) и посвящена данная статья.

В дальнейшем будем предполагать выполненным неравенство

$$0 < \theta < 1/(2\|A\|), \quad (6)$$

которое гарантирует существование несобственного интеграла (4). Нетрудно убедиться, что

$$N_{\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^{k+1} D_k, \quad (7)$$

где

$$D_k = (-1)^k \sum_{i=0}^k C_k^i A^{k-i} BB^* (A^*)^i \quad (8)$$

и

$$\|D_k\| \leq (2\|A\|)^k \|BB^*\|. \quad (9)$$

Так как справедливо неравенство (6), то ряд (7) мажорируется сходящимся степенным рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta (2\theta\|A\|)^k \|BB^*\|,$$

и в любой области $[0, \theta_0] \subset [0, 1/(2\|A\|)]$ сходится равномерно (матрицу N_{θ} при $\theta=0$ доопределим равной нулевой матрице). Для построения приближенного значения матрицы N_{θ} воспользуемся конечным отрезком ряда

$$\Psi(t) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \frac{A^i t^i}{i!}.$$

Приближенное значение матрицы N_θ определим выражением

$$N_{\theta,m} = \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\theta}} \Psi(t) B B^* \Psi^*(t) dt.$$

Следовательно,

$$N_{\theta,m} = \sum_{k=0}^{2m} \theta^{k+1} P_k, \quad (10)$$

где

$$P_k = (-1)^k \sum_{i=0}^k C_k^i A^{k-i} B B^* (A^*)^i; \\ \max \{k-i, i\} \leq m, \quad k = 0, 1, \dots, 2m. \quad (11)$$

Нетрудно получить для P_k оценку, аналогичную (9): $\|P_k\| \leq (2\|A\|)^k \|B B^*\|$. Можно показать также, что матрица $N_{\theta,m}$ симметрическая и при $m \geq n-1$ положительно определенная в силу условия управляемости $\text{rank}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$.

Оценим величину погрешности $\Gamma_m = N_\theta - N_{\theta,m}$ определения матрицы N_θ . Учитывая (7), (8), (10), (11), получаем

$$\Gamma_m = \sum_{i=m+1}^\infty C_i \theta^{i+1} \quad (12)$$

$$\text{и } \|C_i\| \leq \|D_i\|, \quad i = m+1, m+2, \dots \quad (13)$$

Поэтому $\|\Gamma_m\| \leq \sum_{i=m+1}^\infty \|D_i\| \theta^{i+1} \leq \theta (2\theta\|A\|)^{m+1} \|B B^*\| / (1 - 2\theta\|A\|).$ (14)

Справедливы следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть s — наибольшая высота корневых векторов матрицы A^* .

Тогда а) $\|N_\theta^{-1}\| \leq c \theta^{1-2s}$, $c > 0$, $\theta < 1$; б) функция $\|N_\theta^{-1}\|$ непрерывна и строго монотонно убывает на интервале (6).

Доказательство аналогично доказательству леммы 2 [5].

Лемма 2. Пусть $\rho \in (0, 1)$, $\theta_0 \in (0, 1/(2\|A\|))$. Существует M такое, что при $m \geq M$ для всех $\theta \in [0, \theta_0]$ справедливо неравенство

$$\|N_\theta^{-1}\| \|\Gamma_m\| \leq \rho. \quad (15)$$

Доказательство. Согласно лемме 1 $\|N_\theta^{-1}\| \leq c \theta^{1-2s}$, $\theta < 1$.

Поэтому (см. (14)) при

$$m \geq M_1, \quad M_1 = 2s - 3 \quad (16)$$

существует достаточно малое θ_1 такое, что неравенство (15) справедливо на интервале $(0, \theta_1]$. Пусть $\theta \in (\theta_1, \theta_0]$.

Согласно лемме 1 $\|N_{\theta}^{-1}\| < \|N_{\theta_1}^{-1}\|$. Следовательно,

$$\|N_{\theta}^{-1}\| \|\Gamma_m\| < \|N_{\theta_1}^{-1}\| q^{m+1} \theta_0 \|BB^*\| (1 - 2\theta_0 \|A\|)^{-1},$$

где $q = 2\theta_0 \|A\| < 1$. Поэтому неравенство (15) справедливо для всех $\theta \in [\theta_1, \theta_0]$ при

$$m \geq M_2, \quad M_2 = \ln \alpha / \ln q - 1, \quad (17)$$

где

$$\alpha = \rho (1 - 2\theta_0 \|A\|) / (\theta_0 \|BB^*\| \|N_{\theta_1}^{-1}\|).$$

Объединяя неравенства (16), (17), получаем, что неравенство (15) справедливо для всех $\theta \in (0, \theta_0]$ при $m \geq M$, $M = \max \{M_1, M_2\}$. Заметим также, что $m \geq n - 1$.

Численное построение матрицы N_{θ}^{-1} . Приближенное значение матрицы N_{θ}^{-1} будем искать в виде

$$N_{\theta, m}^{-1} = \sum_{i=0}^{2m+1} \theta^{-1} S_{i+1}. \quad (18)$$

Здесь S_i — некоторые квадратные матрицы размера $n \times n$.

Так как $N_{\theta, m}$ — симметрическая положительно определенная матрица, то такой же будет и матрица $N_{\theta, m}^{-1}$. При этом в силу линейной независимости функций θ^{-i} матрицы S_i будут симметрическими. Обозначим $x = \theta^{-1}$. Тогда

$$N_{\theta, m}^{-1} = \sum_{i=0}^{2m+1} x^i S_{i+1}. \quad (19)$$

Неизвестные матрицы S_i определим с помощью построения интерполяционного полинома для $N_{\theta, m}^{-1}$. Действительно, в силу теоремы единственности матричные коэффициенты этого полинома совпадут с матрицами S_i . Возьмем $2m + 2$ значения $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2m+2}$; ($\theta_i \neq \theta_j$, $i \neq j$) и найдем матрицы $F_i = N_{\theta_i, m}^{-1}$. Для определения коэффициентов интерполяционного полинома имеем систему уравнений

$$S_1 + S_2 x_i + S_3 x_i^2 + \dots + S_{2m+2} x_i^{2m+1} = F_i, \quad i = \overline{1, 2m+2}. \quad (20)$$

Учитывая, что размерность S_i равна $n \times n$, получаем, что общее число неизвестных, подлежащих определению, равно $n(n+1)(m+1)$. Число уравнений в системе (20) также равно $n(n+1)(m+1)$. Симметрические матрицы S_i , F_i хранятся в ЭВМ в так называемом симметрическом виде. Этот вид хранения предполагает, что верхняя треугольная часть матрицы хранится по столбцам в $n(n+1)/2$ последовательных ячейках памяти. Поэтому будем обозначать k -й элемент матриц S_i , F_i

через $S_i^{(k)}$, $F_i^{(k)}$. Согласно (20) k -й элемент матриц S_i может быть найден из системы уравнений

$$S_1^{(k)} + S_2^{(k)} x_1 + S_3^{(k)} x_1^2 + \dots + S_{2m+2}^{(k)} x_1^{2m+1} = f_1^{(k)}. \quad (21)$$

Запишем систему в матричном виде. Для этого введем векторы

$$y^{*(k)} = (S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, \dots, S_{2m+2}^{(k)}), \quad f^{*(k)} = (f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots, f_{2m+2}^{(k)})$$

и матрицу

$$W = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{2m+1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{2m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{2m+2} & x_{2m+2}^2 & \dots & x_{2m+2}^{2m+1} \end{pmatrix}.$$

Тогда (21) запишется в виде

$$W y^{(k)} = f^{(k)}, \quad (22)$$

где $k=1, 2, \dots, n(n+1)/2$. Матрица W невырождена ($x_i \neq x_j$, $i \neq j$). Введем теперь матрицы

$$Y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(\frac{n(n+1)}{2})}); \quad \Phi = (f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(\frac{n(n+1)}{2})}).$$

Тогда система (20) примет вид

$$WY = \Phi. \quad (23)$$

Эту систему можно решить на ЭВМ с помощью одной из стандартных программ. Например с помощью программы Gelg на языке Fortran. В этом случае результат помещается на место элементов матрицы Φ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} S_1^{(1)} & S_1^{(2)} & \dots & S_1^{(\frac{n(n+1)}{2})} \\ S_2^{(1)} & S_2^{(2)} & \dots & S_2^{(\frac{n(n+1)}{2})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{2m+2}^{(1)} & S_{2m+2}^{(2)} & \dots & S_{2m+2}^{(\frac{n(n+1)}{2})} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, элементы матрицы S_i , записанные в симметрической форме хранения, совпадают с элементами первой строки результирующей матрицы Φ , элементы матрицы S_2 расположены во второй строке и т. д.

Погрешность определения матрицы N_{θ}^{-1} . Выберем произвольное $0 < \rho < 1$, θ_0 . Согласно лемме 2 существует M такое, что для всех $m \geq M$ справедливо неравенство (15).

Представим матрицу $N_{\theta, m}^{-1}$ в виде

$$N_{\theta, m}^{-1} = N_{\theta}^{-1} + N_{\theta, m}^{-1} - N_{\theta}^{-1}.$$

Обозначим

$$\delta N_{\theta}^{-1} = N_{\theta}^{-1} - N_{\theta, m}^{-1}.$$

Тогда

$$(N_{\theta} - \Gamma_m)(N_{\theta}^{-1} - \delta N_{\theta}^{-1}) = E.$$

Следовательно,

$$\delta N_{\theta}^{-1} = -(E - N_{\theta}^{-1} \Gamma_m)^{-1} N_{\theta}^{-1} \Gamma_m N_{\theta}^{-1}.$$

Или

$$\|\delta N_{\theta}^{-1}\| \leq \frac{\rho}{1-\rho} \|N_{\theta}^{-1}\|. \quad (24)$$

Откуда

$$\frac{\|\delta N_{\theta}^{-1}\|}{\|N_{\theta}^{-1}\|} \leq \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Значит, относительная погрешность определения матрицы N_{θ}^{-1}

может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора M .

Замечание. Если ограничиться областью $0 < \alpha \leq \theta \leq \theta_0 < 1/(2\|A\|)$, то неравенство (24) показывает, что последовательность $N_{\theta, m}^{-1}$ равномерно сходится к предельной матрице N_{θ}^{-1} .

О вычислении значения функции управляемости $\theta(x)$. Функция управляемости $\theta(x)$ определяется в [3] как положительное непрерывно дифференцируемое решение уравнения (3). Это уравнение для численно определенной матрицы N_{θ}^{-1} принимает вид

$$2a_0\theta = (N_{\theta, m}^{-1}x, x), \quad (25)$$

или, учитывая (18),

$$2a_0\theta = \sum_{i=0}^{2m+1} \theta^{-i} (S_i x, x). \quad (26)$$

Аналогично [3] можно показать, что это уравнение имеет единственное положительное решение при $x \neq 0$. Положим $\theta(x) = 0$ при $x = 0$. Непрерывность функции $\theta(x)$ и непрерывная дифференцируемость при $x \neq 0$ доказывается также аналогично [3].

Так как при $x \neq 0$ и $\theta(x) \neq 0$, то уравнение (26) приобретает вид

$$2a_0\theta^{2m+2} + \sum_{i=0}^{2m+1} v_i \theta^{2m-i+1} = 0, \quad (27)$$

где

$$v_i = -(S_i x, x).$$

В задачах управления корень уравнения (27) находится в точках x , близких друг другу. Поэтому задача состоит в разовом вычислении корня θ_0 в начальной точке x_0 и в дальнейшем процессе его уточнения в близлежащих точках. Разовое вычисление может быть осуществлено путем обращения к СП ЭВМ. Уточнение корня удобно проводить одним из итерационных методов, например методом бисекции.

Список литературы: 1. Коробов В. И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости//Мат. сб. — 1979. — 109, № 4. — С. 582 — 606. 2. Коробов В. И. Решение задачи синтеза с помощью функции управляемости//Докл. АН СССР. Физ.-мат. науки. — 1979. — 248, № 5. — С. 1051—1055. 3. Коробов В. И., Скляр Г. М. Решение задачи синтеза с помощью функционала управляемости для систем в бесконечномерных пространствах//Докл. АН УССР. Физ.-мат. науки. — 1983. — № 5. — С. 11—14. 4. Коробов В. И., Гавриляко В. М. Синтез управления, обеспечивающего попадание на подпространство. Деп. в ВИНТИ. 1982, № 3290—82. 5. Гавриляко В. М., Коробов В. И., Скляр Г. М. Синтез ограниченного управления динамическими системами во всем пространстве с помощью функции управляемости//Автоматика и телемеханика. (В печати).

Поступила в редколлегию 14.02.86

УДК 517.948.3

А. С. СОХИН

УПРАВЛЕНИЕ ЭВОЛЮЦИОННОЙ СИСТЕМОЙ, ОПИСЫВАЕМОЙ НЕСТАЦИОНАРНЫМ УРАВНЕНИЕМ ОДНОСКОРОСТНОГО ПЕРЕНОСА

Рассмотрим эволюционную систему, описываемую уравнением односкоростного переноса с нестационарным неизотропным потенциалом (управлением)

$$\frac{\partial y}{\partial t} + a \frac{\partial y}{\partial x} = \int_{-1}^1 u(x, t, a, a') y(x, t, a') da', \quad (1)$$

$$-\infty < x, t < \infty$$

$$-1 < a < 1$$

и начальным условием

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(x + at, t, a) = f_-(x, a). \quad (2)$$

Функция $y(x, t, a)$ описывает плотность частиц в точках, летящих под углом $\arccos a$ к оси Ox со скоростью 1. Введем обозначения для некоторых величин, связанных с управлением:

$$\hat{u}(x, t, a, a') = u(x, t, a, a')/a';$$

$$\bar{u}(x, t, a, a') = u(x, t, a, a')/(a' - a);$$

$$q(t) = \int_{-1}^1 \text{vraimax} |q(x, t, a, a')| da', \quad (3)$$

$$q_1^\pm(t) = \left| \int_{\pm\infty}^t q(s) ds \right|, \quad q^\pm(t) = \max_{t' \in [t, \pm\infty]} q(t'),$$

где

$$q = u, \bar{u}, \hat{u}.$$

Обозначим $N = \sup_{a, a'} u$ — множество точек на $[-1, 1; -1, 1]$,

$n(a) = \sup_{a'} u$, $n^*(a') = \{\bar{a}: a' \in n(\bar{a})\}$ — множества точек на $[-1, 1]$. Управление $u(x, t, a, a')$ подчиним условиям:

$$N \subset \left\{ (a, a'): \frac{a}{a'} < 1 \right\}; \quad (4)$$

$$n(a) \cap n^*(a') = \emptyset, \quad \forall a' \in n(a); \quad (5)$$

$$q^\pm(t) \in L_{1, \infty}^\pm, \quad (6)$$

где $q = u$, $\hat{u}$, $\bar{u}$, $L_{1, \infty}^\pm = L_1(c, \pm \infty) \cap L_\infty(c, \pm \infty)$, $\forall c \neq \pm \infty$.

Из условия (6) вытекает, что все функции, введенные обозначениями (3), являются ограниченными.

Назовем обобщенным решением задачи (1)–(2) решение интегрального уравнения

$$y(x, t, a) = f_-(x - at, a) +$$

$$+ \int_{-\infty}^t \int_{-1}^1 u(x - a(t - t'), t', a, a') y(x - a(t - t'), t', a') dt' da'. \quad (7)$$

Если функции $u(x, t, a, a')$ и $f_-(x, a)$ непрерывно дифференцируемы по x , то задачи (1)–(2) и (7) эквивалентны. Задачу (1)–(2) при $u \equiv 0$ назовем невозмущенной задачей. Пусть $f_-(x, a) \in L_i(-\infty, \infty; -1, 1) = L_i$, $i = 1, \infty$. Задачей эволюции назовем задачу отыскания обобщенного решения уравнения (1) по начальному состоянию $f_-(x, a)$, т. е. задачу отыскания решения $y(t) \in L_i$ интегрального уравнения (7), которое при $t \rightarrow -\infty$ сходится в топологии L_i к решению невозмущенной задачи. Таким образом, интегральное уравнение (7) имеет вид

$$y(t) = f_-(x - at, a) + \varepsilon_-(t),$$

где $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varepsilon_-(t) = 0$ в топологии L_i .

Легко видеть, что уравнение (7) представимо также в виде $y(t) = f_+(x - at, a) + \varepsilon_+(t)$, где $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_+(t) = 0$ в топологии L_i :

$$f_+(x, a) = f_-(x, a) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-1}^1 u(x + at', t', a, a') y(x + at', t', a') \times$$

$\times dt' da'$. Функцию $f_+(x, a)$ назовем финальным состоянием системы, а отображение $S: f_- \rightarrow f_+$ — оператором перехода системы. Задачу отыскания оператора перехода S по заданному управлению $u(x, t, a, a')$ назовем задачей управления.

Теорема. Для $f_- \in L_i$, $i = 1, \infty$ при условии (4)–(6) на управление $u(x, t, a, a')$ существует единственное решение $y(t) \in$

$\in L_i, i=1, \infty \forall t \in (-\infty, \infty)$ задачи эволюции, и это решение удовлетворяет неравенству

$$\|y(t) - G_t f_{\pm}(t)\| \leq \|f_{\pm}\| \exp(u_1^{\pm}(t) - 1), \text{ где } G_t f_{\pm}(t) = f_{\pm}(x - at, a).$$

Из предыдущей теоремы легко вытекает, что оператор перехода является линейным непрерывным оператором в $L_i, i=1, \infty$, имеющим вид $S=I+F$, где I — тождественный оператор, а норма F удовлетворяет неравенству

$$\|F\| \leq \exp(u_1^{-} + \infty) - 1.$$

В работе [3] доказана теорема, дающая треугольное представление решения задачи эволюции через решение невозмущенной задачи

$$y(x, t, a) = f_{-}(x - at, a) + \int_{-\infty}^t \int_{-1}^1 K^{-}(x, t, a, t', a') f_{-}(x - a't', a') dt' da'. \quad (8)$$

Заметим, что $\supp_a K^{-} \subseteq n(a), \forall x, t, t'$.

Отправляясь от определения финального состояния $f_{+}(x, a)$, представления (8) и интегрального уравнения для функции $K^{-}(x, t, a, t', a')$, имеющегося в работе [3], нетрудно получить равенство

$$F(x, a, x', a') = \frac{\text{sign } a'}{a' - a} u\left(\frac{a'x - ax'}{a' - a}, \frac{x - x'}{a' - a}, a, a'\right) - \int_{\frac{x-x'}{a'-a}}^{\infty} d\bar{t} \int_{-1}^1 \frac{1}{a'} u(x + a\bar{t}, \bar{t}, a, \bar{a}) K^{-}(x + a\bar{t}, \bar{t}, \bar{a}, \frac{x - x' + a\bar{t}}{a'}, a') d\bar{a},$$

дающее явное выражение ядра $F(x, a, x', a')$ оператора перехода $S=I+F$ через управление $u(x, t, a, a')$ и ядро $K^{-}(x, t, a, t', a')$ оператора, отображающего начальное состояние эволюции и системы в ее текущее состояние. Из формулы (9) также следует, что $\supp_a F \subseteq n(a)$.

Метод исследования данной задачи примыкает к методам исследования стационарной задачи [1] и нестационарной задачи для системы двух гиперболических уравнений [2].

Список литературы: 1. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля. — К.: Наук. думка, 1972. — 219 с. 2. Нижник Л. П. Обратная нестационарная задача рассеяния. — К.: Наук. думка, 1973. — 182 с. 3. Сохин А. С. Преобразование решений нестационарного уравнения переноса // Вестн. Харьк. ун-та. Механика, математика и процессы управления. — 1984. — № 254. — С. 42—45.

Поступила в редколлегию 09.11.85

УДК 681.51:519.8

В. В. БАРАНОВ, канд. техн. наук,
Н. С. ПОДЦЫКИН, Н. И. ХАРЫБИН

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В УПРАВЛЯЕМЫХ МАРКОВСКИХ СИСТЕМАХ С НЕНАБЛЮДАЕМЫМ СОСТОЯНИЕМ

Рассматривается класс динамических управляемых систем, эволюция которых описывается управляемым марковским процессом. Проблема оптимальных решений в этом классе систем описывается следующей моделью. Предполагаются заданными множества состояний E , управлений Y , семейство условных распределений Q на $E \times Y \times E$, описывающее вероятности одношаговых переходов, и функция полезностей $w: E \times Y \rightarrow R^1$, описывающая материальную полезность принимаемых решений. Вводится отображение $\pi: E \rightarrow Y$, называемое стратегией принятия решений и определяющее правило принятия решений в каждый момент времени $t=0, 1, \dots$. Каждой стратегии π ставится в соответствие математическое ожидание ее средней полезности вида

$$\varphi(\pi)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} M_x^n \sum_{t=0}^{n-1} w(x_t, y_t),$$

где $x \in E$ — начальное состояние. Задача состоит в отыскании стратегии π^* , максимизирующей критерий φ , т. е. такой, что

$$\varphi(\pi^*)(x) \geq \varphi(\pi)(x) \text{ для всех } x \in E \text{ и всех } \pi: E \rightarrow Y. \quad (1)$$

Как известно, для решения этой задачи в случае конечных множеств E и Y используется итерационная оптимизационная схема Ховарда [1, 2]. В [3] была предложена рекуррентная оптимизационная схема и методы, позволяющие эффективно решать задачи больших размерностей.

В рамках сформулированной задачи предполагается, что состояние системы в момент наблюдения достоверно известно. Однако на практике часто возникают задачи, в которых состояние системы наблюдается достоверно либо недоступно непосредственному наблюдению. Типичным примером является задача управления работоспособностью магистрального газопровода. Для решения такой задачи требуется знать техническое состояние оборудования и систем газопровода. Однако непосредственному наблюдению оно недоступно, за исключением некоторых выходных параметров (давление, температура, расход газа и др.). Эти параметры несут лишь косвенную информацию о состоянии газопровода. Естественно, что такую информацию целесообразно использовать при выборе решений.

Формальная постановка задачи в этих условиях состоит в следующем. Будем предполагать, что состояние системы $x \in E$ недоступно непосредственному наблюдению, но наблюдаются некоторые их признаки h , принимающие значения из множества H . Связь между признаками и ненаблюдае-

мыми состояниями задается семейством условных распределений $\bar{P}(h/x)$ на H , $x \in E$.

Поскольку состояния $x \in E$ ненаблюдаемы, а наблюдаются их признаки $h \in H$, то управлять можно лишь ориентируясь на эти признаки. Поэтому следует рассмотреть стратегии вида $\sigma: H \rightarrow Y$ и выбрать среди них оптимальную по критерию средней полезности φ , т. е. такую стратегию σ^* , что

$$\varphi(\sigma^*) \geq \varphi(\sigma) \quad \text{для всех } \sigma: H \rightarrow Y. \quad (2)$$

На первый взгляд может показаться, что эта задача аналогична задаче (1). Однако на самом деле они существенно различны. Действительно, по исходным предположениям функция полезностей w и переходная функция Q заданы на $E \times Y$ и стратегия π отображает $E \rightarrow Y$. В задаче же (2) стратегия σ^∞ отображает $H \rightarrow Y$ и поэтому для построения критерия $\varphi(\sigma^\infty)$ функция полезностей w и переходная функция Q должны быть заданы на $H \times Y$. Поскольку требуемые функции не заданы, то они должны быть доопределены так, чтобы критерий $\varphi(\sigma)$ мог быть вычисляем.

Требуемое доопределение введем следующим образом.

Предположим вначале, что множество состояний E для любой стационарной стратегии образует один эргодический класс.

Заметим, что по исходным предположениям любое управление $y \in Y$ допустимо в каждом состоянии $x \in E$. Тогда имеют смысл стационарные стратегии $\pi^y: E \rightarrow Y$ вида $\pi^y(x) = y$, где $y \in Y$ — фиксировано. Стационарное распределение вероятностей на E , соответствующее стратегии π^y , обозначим $q(\pi^y)$. Оно является решением системы

$$\begin{cases} q(\pi^y) = q(\pi^y)Q(\pi^y); \\ \sum_{x \in E} q_x(\pi^y) = 1, \end{cases} \quad (3)$$

где $Q(\pi^y)$ — матрица переходных вероятностей, отвечающая стратегии π^y ; $q_x(\pi^y)$ — x -я компонента вектора $q(\pi^y)$.

Поскольку при использовании любой стационарной стратегии, в частности, π^y , наблюдаются лишь признаки $h \in H$, связанные с состояниями условными распределениями $P(h/x)$, то естественно использовать стационарное распределение на множестве E в качестве априорного и вычислить апостериорное распределение $\mu_{\pi^y}(x/h)$ на E при условии наблюдения признаков $h \in H$ по теореме Байеса:

$$\mu_{\pi^y}(x/h) = \frac{q_x(\pi^y)P(h/x)}{\sum_{z \in E} q_z(\pi^y)P(h/z)}. \quad (4)$$

При использовании стратегии π^y апостериорное распределение μ_{π^y} определяет стационарное распределение на E при условии использования фиксированного управления y во всех состояниях $x \in E$ и наблюдении признаков $h \in H$. Это позволяет описать качество используемого управления $y \in Y$ при наблюдении признака $h \in H$ условной полезностью вида

$$w(h, y) = \sum_{x \in E} w(x, y) \mu_{\pi^y}(x/h) \quad (5)$$

и условной переходной функцией вида

$$Q(h'/h, y) = \sum_{s \in E} \sum_{x \in E} P(h'/s) Q(s/x, y) \mu_{\pi^y}(x/h). \quad (6)$$

Этим однозначно определяются условная функция полезностей $w(h, y)$ на $H \times Y$ и переходная функция $Q(h'/h, y)$ на $H \times Y \times H$, необходимые для определения критерия полезности φ стратегии $\sigma^\infty: H \rightarrow Y$ и решения задачи (2). Последняя может быть решена методами, предложенными в [1—3]. Тем самым приходим к следующей многошаговой оптимизационной схеме.

Шаг 1. Для каждого $y \in Y$ определить стратегию $\pi^y: E \rightarrow Y$, полагая $\pi^y(x) \equiv y$. Вычислить стационарное распределение $q(\pi^y)$, решая систему (3).

Шаг 2. Для каждого $y \in Y$, используя $q(\pi^y)$ в качестве априорного распределения и условное распределение $P(h/x)$, найти условные апостериорные распределения μ_{π^y} на E для каждого $h \in H$, используя (4).

Шаг 3. Для каждого $y \in Y$ вычислить условные функции полезностей $w(h, y)$ на $H \times Y$ и переходную функцию $Q(h'/h, y)$ на $H \times Y \times H$ в соответствии с (5), (6).

Шаг 4. Используя множество признаков H в качестве множества состояний, решить задачу (2) методами, предложенными в [1—3].

Пример. Пусть множество состояний E содержит три элемента x_1, x_2, x_3 . Множество Y допустимых управлений в каждом состоянии также содержит три элемента y_1, y_2, y_3 . Обозначим $Q_{ij}^y = (Q(x_j/x_i, y), j=1, 2, 3)$ — вектор переходных вероятностей для заданных $x_i \in E, y \in Y$ и $w_i^y = (w(x_i, y), i=1, 2, 3)$ — вектор полезностей для заданного $y \in Y$. Пусть $\pi^y(x) \equiv y$ — стратегия при фиксированном $y \in Y$. Ей соответствует матрица переходных вероятностей $Q(\pi^y)$ и вектор полезностей $w(\pi^y)$. Положим

$$\begin{aligned} Q(\pi^{y_1}) &= \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}, & w(\pi^{y_1}) &= \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}; \\ Q(\pi^{y_2}) &= \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}, & w(\pi^{y_2}) &= \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}; \\ Q(\pi^{y_3}) &= \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}, & w(\pi^{y_3}) &= \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где (i, j) -й элемент матрицы $Q(\pi^k)$ равен $Q_{ij}^{y_k}$; i -я компонента вектора $w(\pi^k)$ равна $w_i^{y_k}$.

Пусть множество признаков H содержит четыре элемента h_1, h_2, h_3, h_4 . Вероятности $P(h/x), x \in E, h \in H$, заданы матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix},$$

где (i, j) -й элемент равен $P(h_i/x_j)$.

В соответствии с первым шагом оптимизационной схемы для каждой стратегии $\pi^{y_k}, k=1, 2, 3$ вычислим стационарное распределение $q(\pi^{y_k})$:

$q(\pi^{y_1}) = (0,42 \ 0,38 \ 0,2)$; $q(\pi^{y_2}) = (0,14 \ 0,59 \ 0,27)$; $q(\pi^{y_3}) = (0,25 \ 0,28 \ 0,47)$.

Найдем далее для каждого $y \in Y$ условные апостериорные распределения $\mu_{\pi^y}(\cdot/h), h \in H$ на E . Представим их в виде матриц

$$\begin{aligned} \mu_{\pi^{y_1}} &= \begin{pmatrix} 0,719 & 0,223 & 0,057 \\ 0,322 & 0,599 & 0,077 \\ 0,233 & 0,432 & 0,334 \\ 0,189 & 0,352 & 0,457 \end{pmatrix}; & \mu_{\pi^{y_2}} &= \begin{pmatrix} 0,37 & 0,52 & 0,11 \\ 0,1 & 0,81 & 0,09 \\ 0,07 & 0,53 & 0,4 \\ 0,05 & 0,44 & 0,51 \end{pmatrix}; \\ \mu_{\pi^{y_3}} &= \begin{pmatrix} 0,59 & 0,22 & 0,19 \\ 0,24 & 0,53 & 0,23 \\ 0,11 & 0,25 & 0,64 \\ 0,08 & 0,18 & 0,74 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

где (i, j) -й элемент матрицы $\mu_{\pi} y_k$ равен $\mu_{\pi} y_k(x_j/h_i)$.

В соответствии с (5), (6) вычислим $\omega(h, y)$ и $Q(h'/h, y)$.

$$\omega = \begin{pmatrix} 9,54 & 7,54 & 6,83 & 6,49 \\ 8,3 & 7,84 & 5,1 & 6,06 \\ 9,63 & 8,34 & 5,49 & 4,8 \end{pmatrix}; \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,28 & 0,19 & 0,23 \\ 0,36 & 0,25 & 0,17 & 0,22 \\ 0,37 & 0,25 & 0,17 & 0,21 \\ 0,36 & 0,25 & 0,17 & 0,22 \end{pmatrix};$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0,23 & 0,27 & 0,22 & 0,28 \\ 0,22 & 0,31 & 0,21 & 0,26 \\ 0,24 & 0,29 & 0,21 & 0,26 \\ 0,23 & 0,29 & 0,21 & 0,27 \end{pmatrix}; \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 0,21 & 0,19 & 0,24 & 0,36 \\ 0,25 & 0,21 & 0,22 & 0,32 \\ 0,27 & 0,21 & 0,22 & 0,3 \\ 0,27 & 0,21 & 0,22 & 0,3 \end{pmatrix},$$

где (i, j) -й элемент матрицы ω равен ω_{ij}^y (i, j -й элемент матрицы Q_k равен $Q(h_j/h_i, y_k)$). Оптимальная стратегия управления $\sigma^*: H \rightarrow Y$ имеет вид

$$\sigma^*(h) = \begin{cases} y_1, & h = h_1; \\ y_3, & h = h_2; \\ y_1, & h = h_3; \\ y_1, & h = h_4. \end{cases}$$

Обсуждение результатов. Развитый здесь метод решения с неполной информацией о состоянии основан на построении апостериорных стационарных распределений μ_{π} , отвечающих стратегии $\pi: E \rightarrow Y$ в условиях полной информации. Это позволяет определить все элементы, необходимые для отыскания оптимальной стратегии $\sigma^*: H \rightarrow Y$, и приводит к предложенной многошаговой оптимизационной схеме.

Заметим, что рассматриваемую задачу можно решать, следуя, например, традиционному байесовскому подходу [4]. Он состоит в последовательном построении апостериорных распределений по результатам последовательных наблюдений признаков, т. е. в реальном масштабе времени. Однако поскольку состояние в любом случае остается неизвестным, наибольшее, чего можно достичь в рамках байесовского подхода, — это приблизиться к апостериорному распределению μ_{π} на E , соответствующему оптимальной стратегии $\sigma^*: H \rightarrow Y$. Отсюда ясно, что получаемая в рамках развитого здесь подхода оптимальная стратегия σ^* не хуже байесовской стратегии в смысле критерия ϕ . Причем она вычисляется до наблюдения процесса управления.

Из приведенных соображений следует, что предложенный здесь многошаговый оптимизационный метод имеет преимущества по сравнению с байесовским подходом при решении сформулированной выше задачи.

Список литературы: 1. Ховард Р. Динамическое программирование и марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1964. — 189 с. 2. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений. — М.: Наука, 1977. — 175 с. 3. Баранов В. В. Оптимизационные методы последовательных приближений в марковских процессах решений // Кибернетика. — 1985. — № 4. — С. 103—111. 4. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. — М.: Мир, 1974. — 490 с.

Поступила в редколлегию 04.03.86

О. С. ЧИНЕДУ

НАЧАЛЬНОЕ МНОГООБРАЗИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В работе рассматривается система линейных однородных стохастических дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной

$$Adx + Bxdx = \sigma(x) dw, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

с начальным случайным условием $x(0, \omega) = x_0(\omega)$.

Предполагается, что w — стандартный винеровский процесс в $\mathbb{R}^n$ с единичным корреляционным оператором, коэффициент диффузии $\sigma(x)$ линеен по x , а пучок $\lambda A + B$ — регулярный.

В силу регулярности пучка $\lambda A + B$ существуют неособенные преобразования P и Q , приводящие его к каноническому виду

$$PAQdy + PBQydt = P\sigma(Qy)dw, \quad (2)$$

где пучок $\lambda PAQ + PBQ$ имеет вид [1, с. 334]:

$$\lambda PAQ + PBQ = (N^{(u_1)}, \dots, N^{(u_s)}, J + \lambda I), \quad (3)$$

$$N^{(u_i)} = I^{(u_i)} + \lambda H^{(u_i)}.$$

Проектор P_0 [2] на подпространство, отвечающее конечным элементарным делителям, вычисляется по формуле

$$P_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (\lambda A + B)^{-1} Ad\lambda, \quad (4)$$

где окружность $|\lambda|=r$ содержит все конечные собственные числа пучка $\lambda A + B$. Тогда $P_\infty = I - P_0$ проектор на подпространство, соответствующее бесконечным элементарным делителям пучка. В работе [3] установлено, что условия

$$P_\infty Q P_\sigma(P_0 x(t)) = 0; \quad (5)$$

$$P_\infty x(t) = 0 \quad (6)$$

являются необходимыми для существования решения $x(t)$ уравнения (1).

В частности, решение уравнения (1) может существовать только для начальных условий $x_0 = x(0) \in X_0$.

Поскольку $P_\infty x(t) = 0$, $x = P_0 x$. Поэтому в x представлении разрешенная компонента уравнения (1) (соответствующая (3)) будет иметь вид

$$P_0 Q P A dx + P_0 Q P B x dt = P_0 Q P \sigma(x) dw. \quad (7)$$

В силу обратимости P_0QPA в X_0 и линейности уравнение (7) имеет решение [4, с. 40] при любом начальном условии $x_0 \in X_0$. Для того чтобы это решение было еще и решением уравнения (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (5). Действительно, если (5) выполнено, то

$$QP\sigma(x) = P_0QP\sigma(x).$$

Поскольку P и Q — приводящие матрицы для пучка

$$\lambda A + B, \text{ то } P_0QPA = QPA, \quad P_0QPB = QPB.$$

Поэтому уравнение (7) становится эквивалентно уравнению

$$QPA dx + QPB x dt = QP\sigma(x) dw. \quad (8)$$

Отсюда ввиду обратимости QP получим (1).

Найдем множество $D(A, B, \sigma)$ начальных векторов $x_0 \in X_0$, для которых решение уравнения (7) будет удовлетворять условию (5), т. е. множество начальных векторов, при которых уравнение (1) разрешимо.

Уравнение (7) можно разрешить относительно dx :

$$dx = - (P_0QPA)^{-1} P_0QPB x dt + (P_0QPA)^{-1} P_0QP\sigma(x) dw = \\ = Tx dt + \sigma_1(x) dw. \quad (9)$$

Отметим, что T может быть записано в виде $T = A^{-1}B$.

Введем матрицу функцию $F_0(x) = P_\infty QP\sigma(x)$. В силу условия (5) $F_0(x(t)) \equiv 0$. Применяя к $F_0(x(t))$ формулу Ито, получим

$$0 = dF_0(x(t)) = P_\infty QP\sigma(Tx(t)) dt + P_\infty QP\sigma_1(x(t)) dw. \quad (10)$$

Отсюда следует, что

$$F_0(Tx(t)) = 0 \text{ и } F_0(\sigma_1(x(t))\xi_0) = 0, \quad \forall \xi_0 \in R^n.$$

$$F_1(x(t)) = F_0(Tx(t) + \sigma_1(x(t))\xi_0) = 0, \quad \forall \xi_0 \in R^n. \quad (11)$$

Далее, применяя к F_1 формулу Ито, запишем

$$F_2(x(t)) = F_1(Tx(t) + \sigma_1(x(t))\xi_1) = 0, \quad \forall \xi_1 \in R^n.$$

Продолжая эту процедуру, находим

$$F_{k+1}(x(t)) = F_k(Tx(t) + \sigma_1(x(t))\xi_k) = 0, \quad \forall \xi_k \in R^n. \quad (12)$$

Отсюда, в частности, следует $F_k(x_0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots$

Тем самым доказана

Теорема 1. Множество $D(A, B, \sigma)$ начальных условий, для которых разрешимо уравнение (1), принадлежит пространству

$$L = \{x_0 \in X_0 : F_k(x_0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots\}. \quad (13)$$

Отметим следующие два важные свойства пространства L .

Свойство 1. $TL \subset L$, т. е. L инвариантно относительно оператора T .

Свойство 2. $\sigma_1(L)\xi \subset L$.

Установим справедливость этих свойств. Пусть $\bar{x} = Tx_0 + \sigma_1(x_0)\xi$, где $x_0 \in L$. Тогда по определению пространства L

$$F_k(\bar{x}) = F_{k+1}(x_0), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (14)$$

т. е. $x \in L$. Свойства 1, 2 доказаны.

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2. $L \subset D(A, B, \sigma)$.

Доказательство. Поскольку L конечномерно, то оно может быть задано при помощи конечного числа $f_1(x) \dots f_l(x)$ линейно независимых функционалов: $L = \{x_0 \in X_0 : f_1(x_0) = \dots = f_l(x_0) = 0\}$. Сделаем невырожденную линейную замену $y(x) = Dx$, такую, что

а) $y_i(x) = f_i(x)$, $i = 1, \dots, l$;

б) $D^{-1}y \in L$ для $y = (\underbrace{0, \dots, 0}_l, y_{l+1}, \dots, y_n)$.

Понятно, что такая замена возможна. Рассмотрим, какой вид будет иметь система (7) в новых координатах. Нас будут интересовать только первые l уравнений этой системы. Согласно формуле Ито

$$dy_i = df_i(x) = (\nabla f_i, Tx) dt + (\nabla f_i, \sigma_1(x) d\omega) = f_i(Tx) dt + f_i(\sigma_1(x) d\omega).$$

Запишем x в виде $x = x_L + \bar{x}$, где $x \in D^{-1}y_L$. Точнее $x_L = D^{-1}y$,

где $\bar{y} = (y_1, \dots, y_l, 0, \dots, 0)$, $y = (y_1, \dots, y_n) = Dx$; $y_L =$
 $= (0, \dots, 0, y_{l+1}, \dots, y_n)$.

Тогда

$$dy_i = f_i(Tx_L) dt + f_i\sigma_1(x_L) d\omega + f_i(Tx) dt + f_i \times \\ \times (\sigma_1(\bar{x}) d\omega) = f_i(T\bar{x}) dt + f_i(\sigma_1(\bar{x}) d\omega). \quad (15)$$

Последнее равенство справедливо в силу свойств 1, 2 и определения функций f_i ($f_i(x) = 0$, $\forall x \in L$). Переходя в правой части (15) к координатам y , получаем

$$dy_i = f_i(TD^{-1}\bar{y}) dt + f_i(\sigma_1(D^{-1}\bar{y}) d\omega) = g_i(y_1, \dots, y_l) dt + \\ + \Phi_i(y_1, \dots, y_l) d\omega, \quad i = 1, \dots, l. \quad (16)$$

Таким образом, в координатах y первые l уравнений системы не содержат переменных $y_{l+1}, \dots, y_n$, т. е. подсистема первых уравнений (в y представлении) замкнута относительно $y_1, \dots, y_l$.

Заметим, что начальным условием этой подсистемы является нулевой вектор $y_1(0) = y_2(0) = \dots = y_l(0) = 0$. Действительно, поскольку $x_0 \in L$, то $y_0 = Dx_0 = (0, \dots, 0, y_{l+1}, \dots, y_n)$.

Докажем, что решение подсистемы (16) с нулевым начальным значением равно 0. Очевидно, что $y_1(t) = y_2(t) = \dots = y_l(t) = 0$ является решением (16), а в силу единственности решения (система (16) линейна) других решений нет.

Но тогда, переходя к x представлению, получим, что решение $x(t)$ уравнения (7) с начальным условием x_0 принадлежит L : $x(t) = D^{-1}y(t) = D^{-1}y_L(t) \in L$.

Из принадлежности $x(t) \in L$ следует, в частности, что $F_0(x(t)) = P_\infty Q P \sigma(x(t)) = 0$, т. е. условие (5). Теорема 2 доказана.

Таким образом, множество допустимых случайных начальных векторов для нашей системы полностью описывается уравнением (13).

Список литературы: 1. Гантмахер Ф. Г. Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 576 с. 2. Руткас А. Г. Задачи Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t)dt = f(t)/\text{Дифференц. уравнения. — 1975. — 1, № 11. — С. 1996—2010. 3. Гурия Т. В., Чинеду О. С., Руткас А. Г. Об одном классе стохастических систем уравнений, не разрешенных относительно производной//Вестн. Харьк. ун-та. Пробл. управления и механики сплошных сред.—1985.—№ 271.—С. 48—51. 4. Тихман Н. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. — К.: Наук. думка, 1968. — 354 с.$

Поступила в редколлегию 09.06.85

УДК 681.5.013+517.977

В. Н. ЗЕФИРОВ, В. А. КОВАЛЬ,
Н. Т. КУЦЕНКО, Е. Н. ПОДОЛЬСКИЙ

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ВОЗМУЩЕНИЯ

В некоторой области D фазовой плоскости $хох$ рассматривается управляемая система, описываемая дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = u + v(x, \dot{x}, t), \quad (1)$$

где a_1, a_2 — постоянные, удовлетворяющие условию неположительности корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0, \quad (2)$$

u — управление с ограничением

$$|u| \leq U, \quad (3)$$

$v(x, \dot{x}, t)$ — неизвестная и неизмеряемая функция, удовлетворяющая в области D при $t \geq t_0$ условию

$$|v| \leq \delta U (\delta < 1) \quad (4)$$

и называемая в дальнейшем возмущением.

Фазовые переменные $x(t)$, $\dot{x}(t)$ доступны непосредственно-му измерению с единственным ограничением:

А) временной интервал между двумя последовательными измерениями не может быть меньшим заданной величины h .

Ставится задача быстрого попадания фазовой точки $(x(t), \dot{x}(t))$ в малую окрестность начала координат и удержание ее в этой окрестности.

Решение поставленной задачи без ограничения А) для попадания фазовой траектории в нуль за конечное время предложено В. И. Коробовым (Решение задачи синтеза в дифференциальных играх с помощью функции управляемости // Докл. АН СССР. — 1982. — 266, № 2. — С. 269—273). Фазовая плоскость разбивается линией переключения, состоящей из двух ветвей Γ_1 и Γ_2 , на две области: D_1 и D_2 . В области D_1 (выше $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$) и на Γ_2 управление u принимается равным $-U$, а в области D_2 и на Γ_1 управление $u = U$.

Ветвь Γ_1 является фазовой траекторией «невозмущенного» уравнения с управлением $u = U$

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = U,$$

ведущей в начало координат. Уравнение ветви Γ_1 отдельно для $a_2 > 0$ и $a_2 = 0$:

$$a_2 > 0 \begin{cases} \left(\frac{\lambda_2 \left(\frac{U}{a_2} - x \right) + \dot{x}}{\lambda_2 \frac{U}{a_2}} \right)^{-\lambda_2} = \left(\frac{\lambda_1 \left(\frac{U}{a_2} - x \right) + \dot{x}}{\lambda_1 \frac{U}{a_2}} \right)^{-\lambda_1} ; \\ \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$a_2 = 0 \begin{cases} U - a_1 \dot{x} = U e^{-\frac{a_1}{U}(a_1 x + \dot{x})}; \\ \dot{x} < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Ветвь Γ_2 является фазовой траекторией невозмущенного уравнения с управлением $u = -U$, ведущая в начало координат; ее уравнение получается из (5) (соответственно (6)) заменой U на $-U$ и неравенства $\dot{x} < 0$ на неравенство $\dot{x} > 0$.

Рассмотрим работу алгоритма В. И. Коробова при наличии ограничения А). Пусть для определенности начальная точка находится в области D_1 (выше линии $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$). Управление принимается равным $-U$. С временным интервалом h производятся замеры $(x, \dot{x})$ и проверка, не оказались ли мы в области D_2 . В последнем случае управление переключается на значение U . Через интервал времени h мы в зависимости от возмущения v можем как остаться в области D_2 , так и возвратиться

в область D_1 , что потребует переключения вновь на значение $u = -U$. И так далее.

Таким образом, возможны очень частые переключения управления. В ряде задач это нежелательно.

Поэтому ниже предлагается модифицированный алгоритм переключений. Для уменьшения частоты переключений строятся две «полупроницаемых» линии переключения:

$\Gamma_{-+} = \Gamma_1 \cup \Gamma_3$, $\Gamma_{+-} = \Gamma_2 \cup \Gamma_4$, где Γ_3 — отрицательная полуось оси ox ; Γ_4 — положительная полуось той же оси.

Переключение управления с $-U$ на U происходит при пересечении сверху вниз линии Γ_{-+} ; переключение управления с U на $-U$ — при пересечении снизу вверх линии Γ_{+-} .

В результате применения этого алгоритма можно гарантировать попадание и удержание в окрестности

$$|x| \leq \frac{1}{2} h^2 U (1 + \delta); \quad |\dot{x}| \leq hU (1 + \delta).$$

Для уменьшения окрестности можно рекомендовать вблизи начала координат (и, в частности, для удержания в его окрестности) заменять управление $u = \pm U$ на $u = \pm kU$ (с такой же заменой в (5), (6)), где $\delta < k < 1$, тогда оценка окрестности принимает вид

$$|x| \leq \frac{1}{2} h^2 U (k + \delta) \approx h^2 U \delta; \quad |\dot{x}| \leq hU (k + \delta) \approx 2hU \delta,$$

что при малых δ даст значительный эффект.

Если полученная точность является недостаточной, то можно некоторым усложнением описанного алгоритма значительно увеличить его точность (при условии достаточной точности измерений $x(t)$, $\dot{x}(t)$).

В окрестности начала координат заменяем линии Γ_1 , Γ_2 аппроксимирующими параболой

$$\Gamma_1: x = \frac{1}{2U} \dot{x}^2, \quad \dot{x} < 0 \quad (7); \quad \Gamma_2: x = -\frac{1}{2U} \dot{x}^2, \quad \dot{x} > 0. \quad (8)$$

Фазовую траекторию также заменяем параболой, используя результаты двух последних замеров

$$x(t_k), \quad \dot{x}(t_k), \quad x(t_{k-1}) \quad (t_{k-1} = t_k - h).$$

Обозначая

$$x_k = x(t_k), \quad \dot{x}_k = \dot{x}(t_k), \quad \ddot{x}_k = \frac{1}{h} [\dot{x}(t_k) - \dot{x}(t_{k-1})],$$

запишем уравнение параболы

$$x(t) = x_k + (t - t_k) \dot{x}_k + \frac{(t - t_k)^2}{2} \ddot{x}_k; \quad \dot{x}(t) = \dot{x}_k + (t - t_k) \ddot{x}_k. \quad (9)$$

Для определенности снова будем считать, что этот участок фазовой траектории соответствует $u(t) \equiv -U$ (т. е. мы находимся выше линии Γ_{-+}). Сначала находим точку пересечения параболы (9) с осью ox : $\dot{x}_k + (t - t_k) \ddot{x}_k = 0$, откуда

$$\Delta t \equiv t - t_k = -\frac{\dot{x}_k}{\ddot{x}_k}. \quad (10)$$

Если $\Delta t < 0$, то надо искать пересечение с линией Γ_1 . Подставляя (9) в (7), получим для Δt квадратное уравнение, положительный корень которого можно приближенно записать в таком виде

$$\Delta t = \frac{2x_k - \frac{1}{U} \dot{x}_k^2}{\dot{x}_k \left(1 - \frac{1}{U} \ddot{x}_k\right)}. \quad (11)$$

Если же Δt , вычисленное по формуле (10), больше нуля, то следует вычислить координату x^0 точки пересечения фазовой траектории (9) с осью ox :

$$x^0 = x_k + \Delta t \dot{x}_k + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{x}_k = x_k - \frac{\dot{x}_k^2}{2\ddot{x}_k}.$$

Если $x_0 < 0$, то мы пересекаем ветвь Γ_3 , и Δt вычисляется по формуле (10). Если $x^0 > 0$, то ищем пересечение с Γ_1 и вновь приходим к формуле (11).

Таким образом, мы нашли момент переключения, определяемый либо формулой (10), либо формулой (11). Если при этом $\Delta t > h$, то не меняем в течение промежутка h управление и, получив новые измерения $x(t)$, $\dot{x}(t)$, повторяем вычисления.

Получив, наконец, Δt меньше или равное h , через промежуток времени Δt меняем управление $\ddot{u} = -U$ на $u = U$ и для удобства повторения алгоритма заменяем $\dot{x}_k$ на $\dot{x}_k - 2U\Delta t$ (так, чтобы, получив через $h - \Delta t$ новый замер, соответствующий новому управлению U , считать, что и предыдущий замер x получен при этом же управлении).

Переключение на линии Γ_{+-} осуществляется вполне аналогично.