Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.5 № 542, 2002, с. 52–58

О некоторых классах нестационарных кривых, порождаемых нелинейными операторными уравнениями в гильбертовых пространствах

Шахаде Асади

Университет, г. Алеппо, Сирия

В статье в терминах $K(t,s) = \langle z_t, z_s \rangle$ изучаются кривые в гильбертовом пространстве, порождаемые задачей Коши $\frac{dz_t}{dt} = A(t)z_t$, $z_t\big|_{t=0} = z_0$, где $A(t)$ – семейство ограниченных самосопряженных операторов, у которых разложение единицы не зависит от t. При дополнительных ограничениях на $K(t,s)$ для $A(t)$ получены нелинейные операторные уравнения, позволяющие представить решение задачи Коши в явном виде.
2000 Mathematics Subject Classification 30A99.

Кривую z_t в гильбертовом пространстве H назовем эволюционно представимой (ЭП), если $z_1 = U_t z_0$, где U_t – однопараметрическое семейство ограниченных операторов и $U_0 = I$.

Пусть U_t задается при помощи решения задачи Коши в гильбертовом пространстве:

$$\frac{dz_t}{dt} = A(t)z_t, \quad z_t|_{t=0} = z_0, \tag{1}$$

где $A(t)$ семейство ограниченных самосопряженных операторов с разложением единицы, не зависящим от t:

$$A(t) = \int_a^b \varphi(t,\lambda)dE_\lambda, \tag{2}$$

где

$$\varphi(t,\lambda) = \overline{\varphi(t,\lambda)} \tag{3}$$

непрерывная по t функция.

Соотношения (1) и (2) использовались в работах [1], [2], [3] для введения некоторых классов нестационарных кривых в гильбертовых пространствах, но в этих работах не изучались условия, которые надо наложить на билинейную форму (корреляционную функцию) $K(t,s) = \langle z_t, z_s \rangle$, чтобы z_t порождалась задачей (1)–(3).

Теорема(об эволюционной представимости). *Для того чтобы $K(t,z)$ была корреляционной функцией эволюционной представимой кривой, порождаемой задачей Коши (1)-(3), необходимо и достаточно, чтобы $K(t,s)$ имела вид:*

$$K(s,t) = \int_a^b \psi(t,\lambda)\psi(s,\lambda)dF\lambda, \qquad (4)$$

где $F(\lambda)$– неубывающая функция ограниченной вариации, а $\psi(t,\lambda)$ – непрерывная по t вещественнозначная функция.

Доказательство. Необходимость. Пусть z_t – решение задачи Коши (1)-(3). Будем искать z_t в виде

$$z_t = \int_a^b \psi(t,\lambda)dE_\lambda z_0, \quad \psi(0,\lambda) = 1. \qquad (5)$$

Тогда, подставляя это представление для z_t в (1) и используя свойства разложения единицы E_λ, для функции $\psi(t,\lambda)$ получаем уравнение :

$$\frac{d\psi}{dt} = \psi(t,\lambda)\varphi(t,\lambda), \quad \psi|_{t=0} = 1.$$

Откуда имеем

$$\psi(t,\lambda) = e^{\int_0^t \varphi(\tau,\lambda)d\tau}, \qquad K(t,s) = \langle z_t, z_s\rangle = \int_a^b \psi(t,\lambda)\psi(s,\lambda)dF(\lambda),$$

где $\Delta F(\lambda) = \langle \Delta E_\lambda z_0, z_0\rangle$.

Таким образом, необходимость доказана и попутно получено представление для U_t: $U_t = \int_a^b \psi(t,\lambda)dE_\lambda$.

Перейдем к доказательству достаточности. Для этого по функции $F(\lambda)$ построим гильбертово пространство H и соответствующее разложение единицы [4]. Тогда реконструируем $A(t)$, взяв в качестве $\varphi(t,\lambda) = \frac{d}{dt}\ln[\psi(t,\lambda)]$ и, очевидно,

$$\langle z_t, z_s\rangle = \int_a^b \psi(t,\lambda)\psi(s,\lambda)dF(\lambda) = K(t,s).$$

Замечание 1. Теорема остается в силе, если $\varphi(t,\lambda)$ – комплекснозначная функция, но E_λ по-прежнему разложение единицы самосопряженного оператора, а в представлении (4) $\psi(s,\lambda)$ заменено на комплексно сопряженное. В этом случае часто удобно считать, что $A^*(t) = -A(t)$, т.е. $\varphi(t,\lambda) = i\varphi_1(t,\lambda)$, где $\varphi_1(t,\lambda)$ – вещественная функция.

Замечание 2. С учетом сказанного выше, если $A(t) = iA$, $A = A^*$, $\varphi(t,\lambda) \equiv \lambda$, то приходим к случаю стационарной кривой и теореме Боннера – Хинчина, т. к. $\psi(t,\lambda) = e^{i\lambda t}$.

Замечание 3. Если $A(t)$ произвольное семейство ограниченных операторов, то результаты теоремы остаются в силе, если в представлении (4) $\psi(s,\lambda)$ заменить на $\overline{\psi(s,\lambda)}$, т.е. считать функцию $\psi(t,\lambda)$ комплекснозначной.

Комплекснозначные функции $\psi(t,\lambda)$ появляются естественным образом тогда, когда на $K(t,s)$ налагаются дополнительные условия. Пусть, например, $K(t,s)$ удовлетворяет (сохраняем для z_t задачу Коши (1)–(2), но уже без условия (3)):

$$LK = \left(\frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) K(t,s) = 0.$$

В этом случае имеем:

$$LK = \left(\frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) \langle z_t, z_s\rangle = 0.$$

Отсюда, полагая $D(t) = A'(t) + A^2(t)$, получаем

$$\langle D(t)z_t, D(s)z_s\rangle + \langle D(t)z_t, z_s\rangle + \langle z_t, D(s)z_s\rangle = 0$$

или

$$\langle (D(t)+I)z_t, (D(s)+I)z_s\rangle = \langle z_t, z_s\rangle. \tag{6}$$

Соотношение (6) будет выполнено, если $D(t) + I = D_0$, D_0 – унитарный оператор. Тогда

$$\frac{dA(t)}{dt} + A^2(t) = D_0 - I. \tag{7}$$

Выписывая для D_0 спектральное разложение $D_0 = \int\limits_0^{2\pi} e^{i\lambda} dE_\lambda$, где E_λ разложение единицы оператора D_0, из (7) получаем:

$$\frac{dA}{dt} + A^2(t) = \int\limits_0^{2\pi} (e^{i\lambda} - 1) dE_\lambda. \tag{8}$$

Будем искать решение уравнения (8) в виде $A(t) = \int\limits_0^{2\pi} \varphi(t,\lambda) dE_\lambda$, тогда получим уравнение $\varphi'_t(t,\lambda) + \varphi^2(t,\lambda) = e^{i\lambda} - 1$, решение которого имеет вид: $\varphi(t,\lambda) = \zeta th \zeta t$, где ζ – один из квадратных корней из $e^{i\lambda} - 1$, т.е. $\zeta^2 = e^{i\lambda} - 1$, следовательно, $A(t) = \int\limits_0^{2\pi} \zeta th\zeta t dE_\lambda$. (Отметим, что в этом случае $A(t) \neq A^*(t)$).

Решение задачи Коши будем искать в виде $z_t = \int\limits_0^{2\pi} \psi(t,\lambda) dF(\lambda) z_0$, $\psi(0,\lambda) = 1$, тогда для $\psi(t,\lambda)$ получаем уравнение $\psi' = \varphi(t,\lambda)\psi(t,\lambda)$, $\psi(0,\lambda) = 1$.

Отсюда $\psi(t,\lambda) = e^{\int\limits_0^t \varphi(\tau,\lambda) d\tau}$ и $z_t = \int\limits_0^{2\pi} e^{\int\limits_0^t \zeta th \zeta \tau d\tau} dE_\lambda$, $dE_\lambda = dF(\lambda) z_0$,

$K(t,s) = \int\limits_0^{2\pi} \psi(t,\lambda) \overline{\psi(s,\lambda)}\, dF_\lambda$.

Можно рассмотреть схему, которая приводит к операторному уравнению для A, в котором самосопряженный оператор D_0 входит не в правую часть, а является операторным коэффициентом. Пусть модель для z_t остается вида (1–2), а $K(t,s)$ удовлетворяет уравнению в частных производных вида $(\partial^3_{t^2 s} - \partial^3_{ts^2})\,K(t,s) = 0$. Тогда

$$\left\langle \left(\frac{dA(t)}{dt} + A^2(t)\right) z_t, A(s)z_s \right\rangle - \left\langle A(t)z_t, \left(\frac{dA(s)}{ds} + A^2(s)\right) z_s \right\rangle = 0.$$

Полагая

$$\frac{dA(t)}{dt} + A^2(t) = D_0 A(t), \quad D_0 = D_0^*, \tag{9}$$

получим $\langle A^*(s) D_0 A(t) z_t, z_s\rangle - \langle (D_0 A(s))^* A(t) z_t, z_s\rangle \equiv 0$. Пусть E_λ разложение единицы самосопряженного оператора D_0 : $D_0 = \int\limits_a^b \lambda dE_\lambda$. Если искать решение уравнения (9) в виде $A(t) = \int\limits_a^b \varphi(t,\lambda) dE_\lambda$, то получим дифференциальное уравнение $\varphi' + \varphi^2 = \lambda\varphi$, общим решением которого является $\varphi = \dfrac{\lambda}{c\lambda e^{-\lambda t} + 1}$. Тогда в представлении (5) $\psi(t,\lambda) = \dfrac{1}{c\lambda + 1}(e^{\lambda t} + c\lambda)$ при условии, что $\psi(0,\lambda) = 1$. Если задачу Коши в уравнении (9) решать при условии $A(t)|_{t=0} = (I - D_0)^{-1}$, $1 \overline{\in} \sigma(D_0)$, то $c = \frac{1}{1-\lambda}$.

Предложенный метод может быть распространен и на случай многопараметрических эволюционных представлений, т.е. на соответствующие классы неоднородных полей, когда эволюционные уравнения для $z(t,x)$ в H имеют, например, вид

$$\frac{\partial z}{\partial t} = A(t,x)z, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = B(t,x)z, \quad z|_{t=0} = z_{01}, \quad z|_{x=0} = z_{10}. \tag{10}$$

Условие совместимости (10) дает $\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial t} = [BA]$, где $[BA] = BA - AB$ — коммутатор.

Если корреляционная функция $K(t,x;s,y) = \langle z(t,x), z(s,y)\rangle$ удовлетворяет уравнению

$$(L_{t,x} - L_{s,y})K = 0, \tag{11}$$

где

$$L_{t,x} = \alpha\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\beta\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \gamma\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial t} + \zeta I,$$

то из (10) и (11) следует, что A и B удовлетворяют нелинейному операторному уравнению

$$\alpha\left(\frac{\partial A}{\partial t} + A^2\right) + 2\beta\left(\frac{\partial A}{\partial x} + AB\right) + \gamma\left(\frac{\partial B}{\partial x} + B^2\right) + \delta B + \eta A + \zeta I = D, \quad D = D^*,$$

или (с учетом условия совместимости) уравнению

$$\alpha\left(\frac{\partial A}{\partial t} + A^2\right) + \beta\left(\frac{\partial A}{\partial x} + AB\right) + \beta\left(\frac{\partial B}{\partial t} + BA\right) + \gamma\left(\frac{\partial B}{\partial x} + B^2\right) + \delta B + \eta A + \zeta I = D.$$

Положим для простоты $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $\delta = \eta \neq \zeta \neq 0$, тогда для $Y = A + B$ получаем уравнение $(\partial_t + \partial_x)Y + Y^2 + qY + \zeta I = D$, $(q = \delta)$. Если искать решение этого уравнения в виде $Y = W + \chi(t,x)I$, где $W(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(t,x,\lambda)dE_\lambda$, E_λ – разложение единицы самосопряженного оператора D, то для ψ и χ получаем систему

$$\left.\begin{aligned} &(\partial_t + \partial_x)\psi + (q + 2\chi)\psi + \psi^2 = \lambda \\ &(\partial_t + \partial_x)\chi + \chi^2 + q\chi = -\zeta \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда имеем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\psi}{du} + (q + 2\chi)\psi + \psi^2 = \lambda \\ &\frac{d\chi}{du} + \chi^2 + q\chi = -\zeta \end{aligned}\right\},$$

где $u = x + t$, $v = x - t$. Для функций $\Theta = \psi + \chi$ и χ система этих уравнений распадается:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\Theta}{du} + \Theta^2 + q\Theta = \lambda - \zeta \\ &\frac{d\chi}{du} + \chi^2 + q\chi = -\zeta \end{aligned}\right\}.$$

В частном случае, когда, например, $q = \zeta = 0$, $\beta = 0$, $[AB] = 0$, для $A(t,x)$ приходим к нелинейному операторному уравнению Бюргерса:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2A\frac{\partial A}{\partial t},$$

при этом $\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial x}$.

Такой подход позволяет получить и другие известные и новые нелинейные операторные уравнения в частных производных для A и дать интегральные представления вида (4) для эрмитово неотрицательных функций.

Если $z(t,x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} = A(t,x)z,$$

а $K(t,x;s,y)$ уравнению

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2\right] K(t,x;s,y) = 0,$$

то для $A(t,x)$ легко получить уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} + A^2 = B, \;\; (B = B^*),$$

а для $\psi(t,x,\lambda)$ $\left(A(t,x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(t,x,\lambda)dE_\lambda\right)$ приходим к скалярному квазилинейному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}+\psi^2=\lambda, \tag{12}$$

решение которого может быть сведено к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Если, в частности,

$$\psi|_{t=0}=\begin{cases}\alpha th\dfrac{\alpha x}{2}, & (\lambda=\alpha^2)\\ -\alpha tg\dfrac{\alpha x}{2}, & (\lambda=-\alpha^2),\\ \dfrac{2}{x}, & (\lambda=0)\end{cases}$$

то решение уравнения (12) может быть представлено в виде

$$\psi(t,x,\lambda)=\begin{cases}\alpha th\dfrac{\alpha}{2}(t+x), & (\lambda>0,\lambda=\alpha^2)\\ -\alpha tg\dfrac{\alpha}{2}(t+x), & (\lambda<0,\lambda=-\alpha^2)\\ \dfrac{2}{t+x}, & (\lambda=0)\end{cases}$$

Подход, изложенный в работах [1,2,3] и продолженный в данной статье, позволяет рассматривать не только аддитивные, но и мультипликативные возмущения эрмитовых ядер. Рассмотрим, например, сепарабельный случайный процесс, для которого [5]:

$$K(t,s)=K_1(t-s)K_0\left(\frac{t+s}{2}\right)$$

Для него функция $\psi(t,s)=\ln K(t,s)$ является решением уравнения

$$\left(\partial_t^2-\partial_s^2\right)\psi(t,s)=0.$$

Пусть теперь $\psi(t,s)$ удовлетворяет уравнению вида:

$$\left(\partial_t^2-\partial_s^2\right)\psi(t,s)=\varphi(t)\overline{\varphi(s)}, \tag{13}$$

тогда

$$K(t,s)=K_1(t,s)K_0\left(\frac{t-s}{2}\right)K_2(t,s)$$

является решением нелинейного уравнения

$$\left(\partial_t^2 - \partial_s^2\right) K(t,s) - \frac{1}{K(t,s)}\left[(\partial_t K)^2 - (\partial_s K)^2\right] = \varphi(t)\varphi(s)K(t,s),$$

анализ которого и интегральное представление для $K(t,s)$ могут быть получены при помощи (13). Отметим, что если $\psi(t,s)$ эрмитово неотрицательное решение (13), то и $e^{\psi(t,s)}$ также эрмитово неотрицательная функция.

ЛИТЕРАТУРА

1. Золотарев В.А., Янцевич А.А. Нестационарные кривые в гильбертовых пространствах и нелинейные операторные уравнения. // Теория операторов, субгармонические функции. – Киев: Наукова думка, – 1991. – С. 54-60.

2. Золотарев В.А., Янцевич А.А. Об одном классе нелинейных операторных уравнений с несамосопряженной правой частью. // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – Харьков: Вища школа, – 1991. – Вип. 5. – С. 74-78.

3. Загороднюк С.М. О свойствах последовательностей, имеющих спектральные разложения по системам полиномов. // Доповіді НАН України. – 1998. – 8. – С. 30-33.

4. Бродский М.С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. – М.: Наука, – 1969. – 287 с.

5. Silvevman R.A. Locally Stationary Random Processes. – IRE Trans. IT-3. – 3. – 1957. – P. 182-184.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.9:535.4 № 542, 2002, с. 59–68

Регуляризация задачи электростатики на бесконечном конусе и двух сферических сегментах

Л. А. Варяница, В. А. Резуненко

Харьковский национальный университет, Украина

Получено регулярное решение задачи электростатики. Выделена и методом контурного интегрирования найдена главная часть оператора задачи, затем обращена с помощью интегрального преобразования типа Абеля. Получена система двух связанных интегральных уравнений Фредгольма II рода, показана эффективная разрешимость этих уравнений. *2000 Mathematics Subject Classification:* 65N12, 35A25, 78A45.

1. Конические и сферические поверхности и их части с различными физическими характеристиками находят широкое применение. Так, в антенной и волноводной технике [1-4] конические и сферические экраны используются для создания широкополосного излучения. При этом важно знать электростатический характер поля в вершине конуса и около ребер сферических сегментов. В электронной оптике полые сферические сегменты (катоды) в комбинации с коническими поверхностями (экранами) могут быть использованы для создания электронных линз и катодно-подогревательных узлов [5]. В связи с этим постоянно существует потребность в решении прямых и обратных задач электродинамики в применении к коническим и сферическим структурам [6,7]. Применяемые здесь методы разнообразны и включают, например, классические численно-аналитические методы работ [8,9] и метод гиперсингулярных интегральных уравнений [10]. Методы регуляризации, основанные на применении обращения вспомогательного интегрального оператора типа Абеля и сравнительно хорошо себя зарекомендовавшие при решении ряда задач математической физики, возникающих в прикладных проблемах на сферических сегментах [11,7], непосредственно неприменимы для исследования тех же задач на более сложной системе поверхностей: конус и два сферических сегмента. Неприменимы по той причине, что отсутствуют необходимые аналоги интегральных представлений Мелера-Дирихле для полиномов и функций Лежандра на сегменте $[0,\gamma]$, где $0<\gamma<\pi$ [3]. Методы, основанные на применении интегрального преобразования Канторовича - Лебедева и эффективные в ряде задач математической физики, возникающих на конических поверхностях, также неприменимы к рассматриваемым задачам, в частности,

из-за отсутствия у сферической поверхности образующей, которая бесконечна вдоль некоторого направления [2].

Целью данной работы является модификация метода регуляризации, основанная на выделении обращаемой части вспомогательного интегрального оператора типа Абеля, возникающего при суммировании ряда Фурье по функциям Лежандра I рода с нецелым нижним индексом. В работе построено регулярное решение задачи и получена система двух связанных интегральных уравнений Фредгольма II рода относительно двух неизвестных функций. Рассмотрен частный случай постановки задач, наиболее важный в приложениях, для которого получена система двух несвязанных интегральных уравнений Фредгольма II рода относительно линейной комбинации двух отыскиваемых функций.

2. Рассмотрим задачу электростатики как краевую задачу математической физики для соответствующей системы уравнений Максвелла. Пусть в сферической системе координат (r, θ, φ) совпадают начало координат, вершина бесконечного кругового конуса $L_\gamma = \{0 \le r < \infty, \theta_0 = \gamma \in (0, \pi), \varphi \in [0, 2\pi]\}$ и геометрические центры двух сферических сегментов $L_a = \{r = a, 0 \le \theta \le \theta_a, \varphi \in [0, 2\pi]\}$, $L_b = \{r = a, 0 \le \theta \le \theta_b, \varphi \in [0, 2\pi]\}$. Пусть радиусы сегментов $0 < a < b < \infty$ и полярные углы раскрыва сегментов и конуса $0 < \theta_a, \theta_b < \gamma < \pi$. Полагаем заданными потенциалы для сегментов $V_a, V_b \ne 0$ и для конуса $V_\gamma = 0$; полагаем сферические сегменты бесконечно тонкими идеально проводящими, а конус (так как $V_\gamma = 0$) - заземленным. Пусть проводники помещены в вакуум (для вакуума, как известно, диэлектрическая и магнитная проницаемость $\epsilon = 1$, $\mu = 1$, проводимость $\sigma = 0$). Требуется найти в пространстве R^3 распределение электростатического поля $\vec{E}$ двух заряженных сферических сегментов в присутствии конуса. Из однородных уравнений Максвелла $rot\vec{E} = 0$, $div\vec{D} = \rho$, $\vec{H} = \vec{B} = 0$ (здесь магнитное поле $\vec{H}$ отсутствует, $\rho-$ плотность зарядов на поверхности проводников, $\vec{D}$- вектор электрической индукции, $\vec{B}$ - вектор магнитной индукции) и материальных уравнений $\vec{D} = \epsilon\vec{E}, \vec{B} = \mu\vec{H}$ следует, что всюду вне проводников поле $\vec{E}$ может быть представлено (с точностью до постоянного слагаемого) скалярным электростатическим потенциалом $u : \vec{E} = -grad(u)$. Потенциал u должен: всюду вне поверхности проводников удовлетворять однородному уравнению Лапласа; быть непрерывным на сферических сегментах и конусе; его нормальная производная должна быть непрерывной на сферических сегментах; исчезать на бесконечности; удовлетворять условию конечности интеграла энергии $W = \int\int\int_V |grad\, u|^2\, dv < \infty$ в любой ограниченной области $V \subset R^3$ (интеграл Лебега). В такой постановке задача имеет единственное решение [12].

Искомый потенциал u от координаты φ не зависит: $u(r, \theta, \varphi) = u(r, \theta)$, так как структура конус - сегменты имеет осевую симметрию. Область внутри конуса, в которой ищем решение, естественно разбить на три частичных подобласти:
$Q_1 = \{(r, \theta) : 0 \le r < a, 0 \le \theta \le \gamma\}$, $Q_2 = \{(r, \theta) : a < r < b, 0 \le \theta \le \gamma\}$, $Q_3 = \{(r, \theta) : b < r, 0 \le \theta \le \gamma\}$.

В уравнении Лапласа разделим переменные и учтем некоторые свойства частных решений $u(r,\theta) = R(r)T(\theta)$, где $\theta \in [0,\gamma] \subset [0,\pi], r \in [0,\infty)$. Рассмотрим такие ограниченные функции $T(\theta)$, чтобы при $\theta_0 = \gamma$ выполнялось равенство $T(\gamma) = 0$. Для функций $T(\theta)$ приходим к задаче Штурма-Лиувилля

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}T(\theta)\right) = \lambda T(\theta), \qquad 0 \le \theta \le \gamma, \qquad \lambda \in \mathbf{C}, \tag{1}$$

$$T(\theta)|_{\theta=\gamma} = 0, \qquad \frac{d}{d\theta}T(\theta)|_{\theta=0} = 0.$$

Оператор $A : \widetilde{H}^2[0,\gamma] \to \widetilde{L}^2(0,\gamma)$ этой задачи является самосопряженным неограниченным, его спектр вещественный, дискретный с единственной предельной точкой на бесконечности [13]. Требование получения ограниченных периодических решений $T(\theta)$ приводит к необходимости выбора параметра разделения λ в (1) в виде произведения $\lambda_n = \nu_n(\nu_n+1)$, $\nu_n > 0$ и выбору в качестве $T_n(\theta)$ функций Лежандра 1-го рода $P_{\nu_n}(\cos\theta)$ индекса (порядка) ν_n аргумента $\cos\theta$, $n = 1,2,...$ Здесь функции Лежандра $P_{\nu_n}(\cos\theta)$ (ν_n - вещественное число, не обязательно целое) - базисные функции в $L^2(0,\gamma)$ с весом $sin\theta$ [13]. Значения чисел ν_n для $\theta_0 = \gamma \in (0,\pi)$ находим из трансцендентного уравнения

$$P_{\nu_n}(\cos\gamma) = 0, \tag{2}$$

имеющего счетное число вещественных нулей [3]. Используя асимптотическое представление $P_{\nu_n}(\cos\gamma), n \to \infty, 0 < \gamma \le \pi$, находим [14]:

$$\nu_n = \frac{\pi}{\gamma}n + \frac{3}{4}\frac{\pi}{\gamma} - \frac{1}{2} + O(n^{-1}), \quad n = 1,2,...$$

В частном случае $\theta_0 = \gamma = \pi/2$ (конус раскрывается в плоскость XOY) используя равенство [3]:

$$P_{\nu_n}(\cos\frac{\pi}{2}) = P_{\nu_n}(0) = \frac{2\Gamma\left(\frac{\nu_n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\nu_n\Gamma\left(\frac{\nu_n}{2}\right)}\cos\frac{\nu_n\pi}{2},$$

где $\Gamma(x)$- гамма-функция Эйлера аргумента $x > 0$, получаем точные значения положительных корней уравнения (2): $\nu_n = 2n-1$, $n = 1,2,..$

Для функций $R(r)$ получаем из $\Delta u = 0$ известное уравнение Эйлера с частными решениями $r^{\nu_n}, r^{-\nu_n-1}$, $n = 1,2,..$

Искомый потенциал $u(r,\theta)$ в частичных областях $Q_i (i = 1,2,3)$ представим рядами Фурье-Лежандра:

$$u(r,\theta) = \begin{cases} u^1(r,\theta) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n r^{\nu_n} P_{\nu_n}(\cos\theta), & r < a, \quad 0 \le \theta < \gamma, \\ u^2(r,\theta) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_n r^{\nu_n} + c_n r^{-\nu_n-1}) P_{\nu_n}(\cos\theta), & a < r < b, \quad 0 \le \theta < \gamma, \\ u^3(r,\theta) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n r^{-\nu_n-1} P_{\nu_n}(\cos\theta), & r > b, \quad 0 \le \theta < \gamma, \end{cases} \tag{3}$$

Коэффициенты $a_n, b_n, c_n, d_n (n \geq 1)$ будем искать в гильбертовом пространстве ℓ^2, определяемом условием конечности интеграла энергии.

3. Из условия непрерывности потенциалов на сферических сегментах ($r = a,\ 0 \leq \theta < \theta_a;\ r = b,\ 0 \leq \theta < \theta_b$) и на их дополнении, т.е. при $r = a,\ \theta_a < \theta \leq \gamma;\ r = b,\ \theta_b < \theta \leq \gamma$, с учётом ортогональности $P_{\nu_n}(\cos\theta)$ в $L^2(0,\gamma)$ с весом $\sin\theta$ получаем линейную связь между коэффициентами рядов (3):

$$\begin{cases} a_n a^{\nu_n} = b_n a^{\nu_n} + c_n a^{-\nu_n - 1}, \\ d_n b^{-\nu_n - 1} = b_n b^{\nu_n} + c_n b^{-\nu_n - 1}, n = 1, 2, 3... \end{cases} \tag{4}$$

Из условия непрерывности нормальных к сферическим поверхностям $r = a, r = b$ производных потенциалов приходим к уравнениям:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n - b_n)\nu_n a^{\nu_n - 1} + \frac{c_n(\nu_n + 1)}{a^{\nu_n + 2}} \right] P_{\nu_n}(\cos\theta) = 0, \qquad \theta \in (\theta_a, \gamma],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(c_n - d_n)\frac{\nu_n + 1}{b^{\nu_n + 2}} + b_n \nu_n b^{\nu_n - 1} \right] P_{\nu_n}(\cos\theta) = 0, \qquad \theta \in (\theta_b, \gamma]. \tag{5}$$

Используя равенство потенциалов на сферических сегментах заданным константам V_a, V_b, исключая из (4), (5) коэффициенты b_n, c_n и вводя обозначения:

$$\mathrm{C}_n^1 = \frac{a_n b^{\nu_n} - d_n b^{-\nu_n - 1}}{(a/b)^{\nu_n} - (a/b)^{-\nu_n - 1}}, \qquad D_n^1 = \frac{a_n a^{\nu_n} - d_n a^{-\nu_n - 1}}{(a/b)^{\nu_n} - (a/b)^{-\nu_n - 1}}, \qquad n \geq 1, \tag{6}$$

получаем итоговую систему сумматорных функциональных уравнений:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\nu_n + \frac{1}{2} \right) C_n^1 P_{\nu_n}(\cos\theta) = 0, \qquad \theta_a < \theta \leq \gamma, \tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{b}{a} C_n^1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{\nu_n} D_n^1 \right] P_{\nu_n}(\cos\theta) = -V_a, \quad 0 \leq \theta < \theta_a, \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\nu_n + \frac{1}{2} \right) D_n^1 P_{\nu_n}(\cos\theta) = 0, \quad \theta_b < \theta \leq \gamma, \tag{9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[D_n^1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{\nu_n} C_n^1 \right] P_{\nu_n}(\cos\theta) = -V_b, \quad 0 \leq \theta < \theta_b. \tag{10}$$

4. Система (7) - (10) - есть система 4-х связанных уравнений I рода с ядром в виде функций Лежандра положительных индексов; аргумент θ функций Лежандра изменяется на "неполном" сегменте $[0, \gamma]$, $0 < \gamma < \pi$.

Прямые численные методы решения (7) - (10) неэффективны, так как требуют решения систем алгебраических уравнений I рода высоких порядков, как правило, с неограниченным оператором в ℓ^2. Методы регуляризации системы

(7) - (10), применяемые в задачах электродинамики отдельно на сферических и отдельно на конических поверхностях, как было отмечено во введении, непосредственно неприменимы. Вместе с тем система (7) - (10) допускает эффективную регуляризацию. С этой целью сначала в (7) - (10) выделим главную часть, которая соответствует аналогичной рассматриваемой здесь задаче электростатики отдельно на сферических сегментах [5] без наличия конуса. Затем обратим эту главную часть и получим систему интегральных уравнений Фредгольма II рода в $L^2(0,\gamma)$.

Подставим в (7) - (10)

$$C_n^1 = \beta_n \int_0^{\theta_a} \varphi(t)\cos(\nu_n + \frac{1}{2})t\,dt,$$

$$D_n^1 = \beta_n \int_0^{\theta_b} \psi(t)\cos(\nu_n + \frac{1}{2})t\,dt, \tag{11}$$

где функции $\varphi(t), \psi(t)$ ищем в пространстве $H^2[0,\gamma]$. Коэффициенты β_n, $n \geq 1$ полагаем такими, чтобы равенства (7), (9) выполнялись тождественно, а уравнения (8), (10) можно было бы свести к интегральным уравнениям. Отметим, что в (11) изменение β_n, $n \geq 1$ приводит к изменению функций $\varphi(t), \psi(t)$ в силу единственности решения рассматриваемой задачи электростатики и, значит, единственности коэффициентов C_n^1, D_n^1. Пусть коэффициенты β_n будут пропорциональны обратной величине квадрата нормы $P_{\nu_n}(\cos\theta)$ в $L^2(0,\gamma)$ с весом $\sin\theta$:

$$\beta_n = -2\left\{(\sin\gamma)^2 \left(\frac{\partial}{\partial\theta}P_{\nu_n}(\cos\theta)\right)\bigg|_{\theta=\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial\nu}P_\nu(\cos\gamma)\right)\bigg|_{\nu=\nu_n}\right\}^{-1}, n \geq 1. \tag{12}$$

Рассмотрим сначала (7) и подстановку (11). Изменив порядки суммирования и интегрирования в (7) и выполнив интегрирование по частям, получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) C_n^1 P_{\nu_n}(\cos\theta) = \varphi(\theta_a)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n \sin\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right)\theta_a P_{\nu_n}(\cos\theta)\right] -$$

$$- \int_0^{\theta_a} \varphi'(t)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n \sin\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) t P_{\nu_n}(\cos\theta)\right] dt, \quad \theta_a < \theta \leq \gamma. \tag{13}$$

Покажем, что ряды в (13) обращаются в нуль. Для этого сначала в рядах (13) выделим сингулярную часть и рассмотрим суммы вспомагательных разрывных рядов [16]:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n + \tfrac{1}{2}\right) t P_n(\cos\theta) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \theta < \pi, \\ (2(\cos\theta - \cos t))^{-\frac{1}{2}}, & 0 < \theta < t \leq \pi, \end{cases} \\
\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n + \tfrac{1}{2}\right) t P_n(\cos\theta) &= \begin{cases} (2(\cos t - \cos\theta))^{-\frac{1}{2}}, & 0 \leq t < \theta < \pi, \\ 0, & 0 < \theta < t \leq \pi, \end{cases}
\end{aligned} \tag{14}$$

Суммы в (14) известны [16]. Их можно получить, например, разложив однозначную ветвь аналитической функции (производящей функции) $w(z,x) = (z^2-2zx+1)^{-\frac{1}{2}}$ при $|z^2-2zx|<1$, $|x|<1$, $w(0,x)=1$ в ряд по степеням z. Затем в полученный ряд следует подставить $z=e^{it}$, весь ряд умножить на $e^{i\frac{t}{2}}$, отделить реальную и мнимую части и в завершении подставить вместо x функцию $\cos\theta$.

Затем для (13) рассмотрим вспомогательную функцию:

$$F(z;t,\theta,\gamma) = [Q_z(\cos\gamma) + Q_{-z-1}(\cos\gamma)]\,\frac{P_z(\cos\theta)}{P_z(\cos\gamma)}e^{i\left(z+\frac{1}{2}\right)t} \tag{15}$$

и выполним ее контурное интегрирование. В (15) $P_z(x)$ ($Q_z(x)$) - функции Лежандра 1-го (2-го) рода комплексного индекса z вещественного аргумента x; параметры θ, $t\in(0,\gamma)$, $\gamma\in(0,\pi)$ [2-4]. Функция $F(z)$ имеет простые полюсы при $z=\nu_n$ за счёт $P_{\nu_n}(\cos\gamma)$ и при $z=n$ за счёт связи $Q_z(x)$, $Q_{-z-1}(x)$ с $P_z(x)$ [3]:

$$Q_{-z-1}(x) = Q_z(x) - \pi\operatorname{ctg} z\pi P_z(x), \quad x=\cos\gamma.$$

Для вычисления интеграла от $F(z;t,\theta,\gamma)$ (15) выберем контур, состоящий из отрезка прямой $-\frac{1}{2}+i\tau$, $|\tau|\le R<\infty$ и из дуги (замкнутой вправо) окружности радиуса R с центром в точке $z=-\frac{1}{2}$. По теореме о вычетах, в частности в полюсах $z=\nu_n$, и, используя значение вронскиана $W(P_{\nu_n}(\cos\theta), Q_{\nu_n}(\cos\theta))$ при $\theta=\gamma$ получаем:

$$res\ F(z=\nu_n;t,\theta,\gamma) = -2\frac{1}{\sin^2\gamma}\frac{P_{\nu_n}(\cos\theta)}{(P_{\nu_n}(\cos\gamma))'}e^{i(\nu_n+1/2)t}\left[\frac{\partial P_z(\cos\gamma)}{\partial z}\right]^{-1}_{z=\nu_n}.$$

Учтя равенство [3,16]:

$$P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(-\cos\gamma) = \frac{\operatorname{ch}\lambda\pi}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\cos\gamma) + Q_{-\frac{1}{2}-i\lambda}(\cos\gamma)\right)$$

и применив лемму Жордана, устремив R к бесконечности, приходим к равенству:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n P_{\nu_n}(\cos\theta)e^{i\left(\nu_n+\frac{1}{2}\right)t} - \sum_{n=1}^{\infty}P_n(\cos\theta)e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t} - I(\theta,t) = 0, \tag{16}$$

где

$$I(\theta,t) = -\int_0^{\infty}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\cos\gamma)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos\gamma)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos\theta)\frac{\operatorname{ch}t\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau}d\tau. \tag{17}$$

Интеграл (17) сходится равномерно по θ, t на $[\varepsilon_1,\gamma-\varepsilon_2]$ ($\varepsilon_i>0$, $i=1,2$). Отделим в (16) реальную и мнимую части. С учётом равенств (14) и вещественности функций $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$, $x \in R$, $|x| \le 1$ из (16) получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\nu_n + \tfrac{1}{2}\right) t P_{\nu_n}(\cos\theta) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \theta \le \gamma, \\ (2(\cos\theta - \cos t))^{-\frac{1}{2}}, & 0 < \theta < t < \gamma, \end{cases} \quad (18)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos\left(\nu_n + \tfrac{1}{2}\right) t P_{\nu_n}(\cos\theta) - I(\theta, t) = \begin{cases} 0, & 0 < \theta < t < \gamma, \\ (2(\cos t - \cos\theta))^{-\frac{1}{2}}, & 0 < t < \theta < \gamma. \end{cases} \quad (19)$$

По (18) находим суммы рядов в правой части (13): они равны нулю, так как $t < \theta_a < \theta \le \gamma$. Значит, равенство (7) выполняется для всех $\theta \in (\theta_a, \gamma]$. Аналогично убеждаемся в выполнении равенства (9). Теперь подставим C_n^1, D_n^1 (11) в уравнение (8). Изменив порядки суммирования и интегрирования, перепишем (8):

$$\frac{b}{a} S_1 + S_2 = -V_a, \quad (20)$$

где

$$S_1 = \int_0^{\theta_a} \varphi(t) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos\left(\nu_n + \tfrac{1}{2}\right) t P_{\nu_n}(\cos\theta) \right] dt, \quad (21)$$

$$S_2 = \int_0^{\theta_b} \psi(t) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\tfrac{a}{b}\right)^{\nu_n} \cos\left(\nu_n + \tfrac{1}{2}\right) t P_{\nu_n}(\cos\theta) \right] dt. \quad (22)$$

Подставим (19) в S_1 (21), тогда

$$S_1 = \int_0^{\theta} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2(\cos t - \cos\theta)}} dt + \int_0^{\theta_a} \varphi(t) I(\theta, t) dt. \quad (23)$$

В S_2 (22) подставим интегральное представление для $P_{\nu_n}(\cos\theta)$ типа Мелера-Дирихле [3]:

$$P_{\nu_n}(\cos\theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\cos\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) x}{\sqrt{2(\cos x - \cos\theta)}} dx$$

и, изменив порядки суммирования и интегрирования, запишем S_2 так:

$$S_2 = \int_0^{\theta} \int_0^{\theta_b} \frac{\psi(t) G(t, x)}{\sqrt{2(\cos x - \cos\theta)}} dt dx, \quad (24)$$

где

$$G(t, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{a}{b}\right)^{\nu_n} \cos\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) t \cos\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) x. \quad (25)$$

Этим уравнение (8) с использованием (20) - (25) преобразовано к интегральному уравнению первого рода типа Абеля:

$$\int_0^{\theta} \frac{\Phi(t) dt}{\sqrt{2(\cos t - \cos\theta)}} = F(\theta), \quad 0 < \theta < \gamma, \quad (26)$$

где

$$\Phi(t) = \varphi(t) - \frac{a}{b}\int\limits_0^{\theta_b} \psi(x)G(t,x)dx, \quad F(\theta) = -\frac{a}{b}V_a - \int\limits_0^{\theta_a} \varphi(t)I(\theta,t)dt. \tag{27}$$

Решим уравнение (26). Используя композицию с ядром $(2(\cos s - \cos\theta))^{-\frac{1}{2}}$ [17,15] и выполнив интегрирование по частям, получим:

$$\Phi(\theta) = \frac{2}{\pi}F(0)\cos\frac{\theta}{2} + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\theta} \frac{F'(t)\sin\theta}{\sqrt{2(\cos t - \cos\theta)}}dt. \tag{28}$$

Далее используем равенство [3]:

$$\frac{\sin\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\nu_n + \frac{1}{2}} = \int\limits_0^{\theta} \frac{P_{\nu_n}(\cos t)\sin t}{\sqrt{2(\cos t - \cos\theta)}}dt$$

и учитываем, что

$$\frac{d}{d\theta}\int\limits_0^{\theta} \frac{V_a \sin t}{\sqrt{2(\cos t - \cos\theta)}}dt = V_a\cos\frac{\theta}{2}.$$

В итоге вместо (8), (20), (28) получаем неоднородное интегральное уравнение II рода:

$$\varphi(\theta) - \int\limits_0^{\theta_a} \varphi(t)K(t,\theta)dt - \frac{a}{b}\int\limits_0^{\theta_b} \psi(t)G(t,\theta)dt = -\frac{2}{\pi}\frac{a}{b}V_a\cos\frac{\theta}{2}, \tag{29}$$

где

$$K(t,\theta) = -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\cos\gamma)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos\gamma)}\frac{\operatorname{ch} t\tau \operatorname{ch}\theta\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau}d\tau, \tag{30}$$

а функция $G(t,\theta)$ определена в (25).

Аналогичные выкладки приводят уравнение (10) подстановкой (11) в уравнение

$$\psi(\theta) - \int\limits_0^{\theta_b} \psi(t)K(t,\theta)dt - \int\limits_0^{\theta_a} \varphi(t)G(t,\theta)dt = \frac{2}{\pi}V_b\cos\frac{\theta}{2}. \tag{31}$$

5. Система (29), (31) интегральных уравнений имеет единственное решение, так как интеграл в (30) и ряд в (25) сходятся равномерно, функции $K(t,\theta)$, $G(t,\theta)$ и правые части в (29), (31) принадлежат пространству $L^2((0,\gamma)\times(0,\gamma))$. Более того, $G(t,\theta)$ и правые части (29),(31) являются бесконечно дифференцируемыми функциями на $[0,\gamma]\times[0,\gamma]$ и $[0,\gamma]$ соответственно. Для систем (29), (31) справедлива альтернатива Фредгольма. Заметим, что

ядра $K(t,\theta)$ и $G(t,\theta)$ являются симметричными функциями и это упрощает их вычисление и исследование системы. Система (29), (31) эффективно разрешима как численно, без ограничения на параметры задачи, так и аналитически в ряде практически важных случаев [17].

6. Отметим частный случай, когда сферические сегменты имеют одинаковые полярные углы раскрыва $\theta_a = \theta_b$. Тогда система (29), (31) сводится к двум несвязанным интегральным уравнениям Фредгольма II рода относительно линейной комбинации функций $\varphi(\theta)$, $\psi(\theta)$:

$$\left\{\begin{aligned} &\psi(\theta)+\sqrt{\tfrac{b}{a}}\varphi(\theta)-\int\limits_0^{\theta_a}\left[\psi(t)+\sqrt{\tfrac{b}{a}}\varphi(t)\right]\left(K(t,\theta)+\sqrt{\tfrac{a}{b}}G(t,\theta)\right)dt = \\ &\qquad = \tfrac{2}{\pi}\left(V_b-\sqrt{\tfrac{a}{b}}V_a\right)cos\tfrac{\theta}{2}, &(32)\\ &\psi(\theta)-\sqrt{\tfrac{b}{a}}\varphi(\theta)-\int\limits_0^{\theta_a}\left[\psi(t)-\sqrt{\tfrac{b}{a}}\varphi(t)\right]\left(K(t,\theta)+\sqrt{\tfrac{a}{b}}G(t,\theta)\right)dt = \\ &\qquad = \tfrac{2}{\pi}\left(V_b+\sqrt{\tfrac{a}{b}}V_a\right)cos\tfrac{\theta}{2}. &(33)\end{aligned}\right.$$

В (32), (33) одно и тоже симметричное ядро, а правые части отличаются лишь числовым множителем. В этом случае "размерность" задачи уменьшается как минимум в два раза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 2. – М.: Мир, –1978. – 555 с.
2. Конторович М.И., Лебедев Н. Н. Об одном методе решения некоторых задач дифракции и родственных ей проблем. // Журн.Тех.Физ. – 1938. – Т. 8,**10-11**. –С. 1193-1206.
3. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. – М.: ГИТЛ, – 1953. – 399 с.
4. Уфлянд Я. С. О решении одного класса задач электростатики методом парных рядов. // Письма в Журн.Тех.Физ. – 1976. -Т.2,**17**. – С. 794-798.
5. Вязьмитинов И.А., Вязьмитинова С.С., Резуненко В.А. Два концентрических сферических сегмента в симметрическом электростатическом поле. // Радиотехника. Изд. ХГУ. – 1989. – Т. 89. – С. 124-127.
6. Куриляк Д.Б., Назарчук З.Т. О симметричном электромагнитном облучении конечного конуса // Радиофизика и радиоастрономия. – 2000. – Т.35,4. – С. 29-37.
7. Шестопалов В.П., Тучкин Ю.А., Поединчук А.Е., Сиренко Ю.К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. – Харьков: Основа, –1997. – 284 с.

8. Агранович З.С., Марченко В.А., Шестопалов В.П. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. // Журн.техн.физ. – 1962. – Т. 32,4. – С. 381-394.

9. Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках.– Харьков: Изд. ХГУ, –1973. – 288 с.

10. Анфиногенов А.Ю., Лифанов И.К, Лифанов П.И. К численному решению гиперсингулярных интегральных уравнений на сфере и торе. // Доклады РАН. – 2001. – Т. 378,3. – С. 395-400.

11. Радин А.М., Резуненко В.А., Шестопалов В.П. Излучение волн сферой с отверстием. // ЖВМ и МФ – 1977. – Т. 17, 2.– С. 394-406.

12. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории расеяния. – М.: Мир. –1987, – 312 с.

13. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, –1977. – 362 с.

14. Садовничий В.А. Дубровский В.В., Малеко Е.М. Об одном способе приближенного нахождения собственных чисел оператора Штурма-Лиувилля. // Доклады РАН. – 1999. – Т. 369,1. –С. 16-18.

15. Кузьменко С.В., Резуненко В.А. О частичном обращении оператора задачи дифракции поля решетки вертикальных магнитных диполей на экранированном шаре // Вісник Харківського національного університету. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2000. – 475. –С. 241-249.

16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. Т.1. –М.: Наука. –1965. – 296 с.

17. Верлань А.Ф., Сизиков В.С., Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наукова Думка, – 1986. – 543 с.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.5 № 542, 2002, с. 69–72

К вопросу об эффективном обращении положительно-определенных матриц Ганкеля-Адамара

Ю. В. Лысенко, И. Е. Овчаренко, Р. А. Угриновский

Харьковский национальный университет, Украина,
Институт Проблем Машиноведения РАН С.-Петербург,
IPME, USA.

Предлагается, основанная на методах степенной проблемы моментов, процедура обращения положительно-определенных матриц Ганкеля-Адамара. *2000 Mathematics Subject Classification* 42A70.

1. Исходные положения и основные конструкции.

Пусть $\{a_k\}, k = \overline{0, 2m+1}$ позитивная последовательность вещественных чисел, $\mathrm{H}(m)$ формируемая по ней матрица Ганкеля-Адамара,

$$\mathrm{H}(m) = \| \, a_{j+k} \, \|_{j,k=0}^{m} \tag{1}$$

элементы которой зависят от суммы номеров строки и столбца. Главные миноры матрицы $\mathrm{H}(m)$ являются положительными.

Предлагаемый ниже способ обращения матриц Ганкеля-Адамара основан на конструкциях, связанных со степенной проблемой моментов. Заметим, что сама последовательность $a = \{a_k\}, \quad k \in \overline{0, 2m+1}$ — суть последовательность степенных моментов некоторой положительной меры на оси. С учетом интересов читателя и для самозамкнутости изложения приводится схематическое описание основных объектов и конструкций.

Пусть $\mathcal{L}(m)$ — пространство многочленов на вещественной оси, степень которых $\leq m$. Для любых $\mathrm{P}(x), \mathrm{Q}(x) \in \mathcal{L}(m)$ определим скалярное произведение

$$< \mathrm{P}, \mathrm{Q} >_a := \mathrm{P}\overline{\mathrm{Q}}(x)\Big|_{x^k := a_k} \tag{2}$$

Форма $<,>_a$ — вещественная на вещественных многочленах. Для любого многочлена $\mathrm{P}(x) \not\equiv 0$ $< \mathrm{P}, \mathrm{P} >_a > 0$ и справедливо соотношение

$$< \mathrm{P}, \mathrm{Q} >_a = < \mathrm{P}\overline{\mathrm{Q}}, 1 >_a \tag{3}$$

Таким образом форма $<,>_a$ — невырожденное скалярное произведение на $\mathcal{L}(m)$, относительно которого строятся две, отличающиеся нормировкой, системы $<,>_a$ — ортогональных многочленов:
моническая $\{\mathrm{P}_k(x)\}, k \in \overline{0,m}$ $\quad \mathrm{P}_k(x) = x^k + \cdots, < \mathrm{P}_k, \mathrm{P}_j >_a = 0, k \neq j$
и *ортонормальная* система многочленов $\{\hat{\mathrm{P}}_k(x)\}$, определяемая условием положительности коэффициента при старшей степени и условием нормировки $< \hat{\mathrm{P}}_k, \hat{\mathrm{P}}_j >_a = \delta_{k,j}$

Моническая система удовлетворяет трехчленным рекуррентным соотношениям и начальным данным:

$$\begin{gathered} \mathrm{P}_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)\mathrm{P}_k(x) - \beta_k \mathrm{P}_{k-1}(x), \; k = \overline{1,m} \\ \mathrm{P}_{-1}(x) \equiv 0, \; \mathrm{P}_0(x) \equiv 1 \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\beta_0 := a_0 =< 1, 1 >_a$$

$$\alpha_k = \frac{< x\mathrm{P}_k(x), \mathrm{P}_k(x) >_a}{< \mathrm{P}_k(x), \mathrm{P}_k(x) >_a}, \qquad \beta_k = \frac{< \mathrm{P}_k(x), \mathrm{P}_k(x) >_a}{< \mathrm{P}_{k-1}(x), \mathrm{P}_{k-1}(x) >_a} \tag{5}$$

а ортонормальная система:

$$\begin{gathered} x\hat{\mathrm{P}}_k(x) = \hat{\beta}_{k-1}\hat{\mathrm{P}}_{k-1}(x) + \hat{\alpha}_k \hat{\mathrm{P}}_k(x) + \hat{\beta}_k \hat{\mathrm{P}}_{k+1}(x), \quad k = \overline{0, (m-1)} \\ \hat{\mathrm{P}}_{-1}(x) \equiv 0, \quad \hat{\mathrm{P}}_0(x) \equiv a_0{}^{-1/2} = \beta_0{}^{-1/2} \end{gathered} \tag{6}$$

По последовательности $\{a_k\}$ можно рекуррентным процессом П.Л. Чебышева ((m)-Т рекурсия) вычислить коэффициенты в (4) для монической системы $\{\mathrm{P}_k(x)\}$. А формулы перехода

$$\hat{\alpha}_k = \alpha_k, \quad \hat{\beta}_k = \sqrt{\beta_{k+1}}, \quad k = \overline{0, (m-1)} \tag{7}$$

позволяют получить коэффициенты трехчленных рекуррентных соотношений (6) для ортонормальной системы $\{\hat{\mathrm{P}}_k\}$.

Кратко опишем процесс (m)-Т рекурсии или обобщенной рекурсии П.Л.Чебышева (подробнее см. напр. [1] и указанные там ссылки), позволяющий находить коэффициенты трехчленных рекуррентных соотношений $\{\alpha_k, \beta_k\}$, $k = 0, \ldots, m$ для монической системы ортогональных многочленов по известным моментам $\{a_k\}$, $k = 0, \ldots, 2m+1$:
задаем начальные данные

$$\begin{gathered} \sigma_{-1,l} := 0, \quad l = \overline{0, (2m+2)}, \\ \sigma_{0,l} := a_l, \quad l = \overline{0, (2m+1)}, \\ \alpha_0 := a_1/a_0, \quad \beta_0 := a_0, \end{gathered} \tag{8}$$

для $k = 1, 2, \dots, m$ вычисляем

$$\sigma_{k,l} := \sigma_{k-1,l+1} - \alpha_{k-1}\sigma_{k-1,l} - \beta_{k-1}\sigma_{k-2,l}, \qquad l = \overline{k, (2m-k+1)}, \tag{9}$$
$$\alpha_k := \frac{\sigma_{k,k+1}}{\sigma_{k,k}} - \frac{\sigma_{k-1,k}}{\sigma_{k-1,k-1}}, \qquad \beta_k := \frac{\sigma_{k,k}}{\sigma_{k-1,k-1}}.$$

В некоторых случаях (m)-T-рекурсия оказывается чувствительной к точности представления начальных данных, что можно обнаружить по появлению на некотором шаге рекуррентного процесса отрицательного β_j, в этом случае необходимо повторить вычисления с увеличенным числом разрядов.

2. Специальное представление матриц $\mathrm{H}(m), \mathrm{H}^{-1}(m)$.

Теорема *Матрица* $\mathrm{H}(m)$ *представима в виде*

$$\mathrm{H}(m) = \Gamma_m^{(-1)} \left(\operatorname{diag} \sigma_{k,k}\right)_{k=0}^{m} \left(\Gamma_m^{(-1)}\right)^{\tau} \tag{10}$$

здесь через $\Gamma_m^{(-1)}$ обозначена матрица размера $(m+1)\times(m+1)$, являющаяся обратной к нижнетреугольной матрице Γ_m, составленной из коэффициентов монической системы ортогональных многочленов:

$$\mathrm{P}_k(x) = \sum_{j=0}^{m} \Gamma_{k,j} x^j, \qquad (\Gamma_{j,j} = 1) \tag{11}$$

(через τ обозначена операция транспонирования матриц).

Доказательство факторизационного представления (10) проводится прямым вычислением.

Приводимый ниже алгоритм вычисления $\mathrm{H}^{-1}(m)$ основан на равенстве, следующем из (10):

$$\mathrm{H}^{-1}(m) = \left(\Gamma_m^{\tau} \operatorname{diag} \sigma_{k,k}^{-1/2}\right) \left(\operatorname{diag} \sigma_{k,k}^{-1/2} \Gamma_m\right) \tag{12}$$

Оба сомножителя в правой части равенства (12) являются треугольными матрицами, причем строка с номером k правого сомножителя имеет вид

$$\left[\sigma_{k,k}^{-1/2}\Gamma_{k,0},\, \sigma_{k,k}^{-1/2}\Gamma_{k,1} \dots \sigma_{k,k}^{-1/2}\Gamma_{k,k},\, 0 \dots 0\right], \tag{13}$$

т.е. ее элементами являются коэффициенты $k-$ го ортонормированного многочлена $\hat{\mathrm{P}}_k(x)$. Левый сомножитель — транспонированная матрица.

Замечание: Переход от монической к ортонормальной системе многочленов в принципе можно осуществить согласно (12), умножая монические многочлены на нормировочные множители $\sigma_{k,k}^{-1/2} = \|\mathrm{P}_k\|^{-1}$. Однако реализовать это затруднительно, т.к. нормировочные множители даже при сравнительно небольших номерах многочленов как правило являются либо очень большими либо очень маленькими числами. Именно по этой причине переход от монической к ортонормальной системе многочленов предпочтительнее осуществлять с использованием формул (7) после чего, используя трехчленные рекуррентные соотношения (6) для ортонормальной последовательности, находить строки (13).

Опишем алгоритм в виде, реализованном нами с использованием системы Maple.

Исходные данные: позитивная последовательность $\{a_k\},\ k \in \overline{0, 2m+1}$.

Первый шаг: используя (m)-Т рекурсию находим коэффициенты $\{\alpha_i, \beta_i\}$, $i \in \overline{0, m}$ трехчленных рекуррентных соотношений для монической системы.

Второй шаг: по формулам перехода (7) получаем последовательность коэффициентов $\{\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i\},\ i \in \overline{0, m-1}$ трехчленных рекуррентных соотношений для ортонормированной системы.

Третий шаг: строим матрицу $\hat{\Gamma}_m$ коэффициентов ортонормальной системы по формулам:

$$\hat{\Gamma}_{0,0} = a_0{}^{-1/2},\ \hat{\Gamma}_{1,0} = -\hat{\alpha}_0\hat{\Gamma}_{0,0}/\hat{\beta}_0,\ \hat{\Gamma}_{1,1} = \hat{\Gamma}_{0,0}/\hat{\beta}_0$$

для $k = \overline{1, (m-1)}$ *находим:*

$$\begin{aligned}
&\hat{\Gamma}_{k+1,k+1} = \hat{\Gamma}_{k,k}/\hat{\beta}_k \\
&\hat{\Gamma}_{k+1,k} = (\hat{\Gamma}_{k,k-1} - \hat{\alpha}_k\hat{\Gamma}_{k,k})/\hat{\beta}_k \\
&\hat{\Gamma}_{k+1,j} = (\hat{\Gamma}_{k,j-1} - \hat{\alpha}_k\hat{\Gamma}_{k,j} - \hat{\beta}_{k-1}\hat{\Gamma}_{k-1,j})/\hat{\beta}_k,\ j = (k-1), \ldots, 1 \\
&\hat{\Gamma}_{k+1,0} = (-\hat{\alpha}_k\hat{\Gamma}_{k,0} - \hat{\beta}_{k-1}\hat{\Gamma}_{k-1,0})/\hat{\beta}_k
\end{aligned} \tag{14}$$

Последний шаг: получаем обратную матрицу путем перемножения двух треугольных матриц

$$\mathrm{H}^{-1}(m) = \left(\hat{\Gamma}_m\right)^{\tau} \hat{\Gamma}_m \tag{15}$$

Проведенные вычислительные эксперименты показали высокую, по нашему мнению, эффективность предлагаемого алгоритма.

В частности строилась матрица обратная к "традиционно плохой для обращения" матрице Гильберта (в этом случае $a_k = 1/(k+1)$). Сопоставлялась работа приведенного в статье алгоритма и встроенной в систему Maple процедуры обращения матриц. Точность процедуры Maple оказалась на много порядков ниже, а время вычисления в два раза дольше.

Авторы выражают глубокую благодарность Ю.М. Дюкареву, обратившему их внимание на задачу обращения положительно-определеных матриц Ганкеля-Адамара.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корж С.А., Овчаренко И.Е., Угриновский Р.А., Рекурсия П.Л. Чебышева: некоторые аналитические и вычислительные аспекты. // Укр.Мат.журнал – 1995. – Т. 45, 5 – С. 626-646.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.518.6 № 542, 2002, с. 73–84

Мероморфные почти периодические функции и их непрерывное продолжение на Боровский компакт

Н. Д. Парфёнова

Харьковский национальный университет, Украина

Вводится понятие модуля для мероморфных почти периодических функций в полосе, изучаются его свойства и связь с модулями дивизоров нулей и полюсов. Доказано, что мероморфная почти периодическая функция допускает непрерывное продолжение на соответствующую её модулю Боровскую компактификацию полосы.

2000 Mathematics Subject Classification 42A74, 30D35.

Хорошо известно, что любая непрерывная почти периодическая функция $f(x)$ на вещественной оси $\mathbb{R}$ допускает единственное непрерывное продолжение на Боровский компакт. Более точно, пусть $G(f)$ минимальная аддитивная подгруппа в $\mathbb{R}$, содержащая спектр f; эта группа называется $\mathbb{Z}$-модулем (или просто модулем) функции f. Тогда f продолжается непрерывно на дуальную по Понтрягину к $G(f)$ компактную группу $\widehat{G}(f)$, которую можно также рассматривать как пополнение $\mathbb{R}$ в специальной топологии, порожденной $G(f)$, при этом если $f(z)$ почти периодическая функция в полосе $S = \{z : a < \operatorname{Im} z < b\}$, то $f(z)$ непрерывно продолжается на множество $\widehat{G}(f) \times (a, b)$. Наиболее простое доказательство этого использует теорему об аппроксимации почти периодической функций экспоненциальными суммами с показателями в спектре f.

Класс мероморфных почти периодических функций в полосе рассматривался в [1], а также в [9]. Функции из этого класса не обладают средним значением, поэтому для них нельзя стандартным образом ввести понятие спектра и доказать теорему об аппроксимации. Для построения продолжения мероморфной почти периодической функции на Боровский компакт мы используем так называемую функцию сдвига. Эта функция позволяет ввести понятие модуля мероморфной почти периодической функции и доказать ряд теорем, которые показывают в некотором смысле устойчивость и естественность этого понятия. В частности, мы доказываем, что любая мероморфная почти периодическая функция f в S представима в виде отношения аналитических почти периодических функций в S, модули которых лежат в модуле f.

Для формулировки и доказательства результатов нам понадобятся следующие определения.

Функция $f \in C(\mathbb{R})$ называется *почти периодической*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество ε-почти периодов

$$E_\varepsilon(f) := \{t \in \mathbb{R} : |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

относительно плотно в $\mathbb{R}$, то есть для некоторого $L < \infty$ и всех $a \in \mathbb{R}$ отрезки $[a, a+L]$ имеют общие точки с $E_\varepsilon(f)$.

Функция $f(z)$, голоморфная в полосе $S := \{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Im} z < b\}$, где $-\infty \le a < b \le +\infty$, называется *голоморфной почти периодической функцией* в полосе S, если множество ε, S'–почти периодов

$$E_{\varepsilon,S'}(f) := \{t \in \mathbb{R} : |f(z+t) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in S'\}$$

является относительно плотным в $\mathbb{R}$ для любого $\varepsilon > 0$ и любой подполосы $S' := \{z \in \mathbb{C} : a' < \operatorname{Im} z < b'\} \subset\subset S$, то есть при $a < a' < b' < b$.

Другое эквивалентное определение почти периодичности состоит в том, что *из любой последовательности* $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ *можно выделить подпоследовательность* $\{t'_n\}$ *так, чтобы последовательность функций* $\{f(x+t'_n)\}$ (или $\{f(z+t'_n)\}$)*сходилась равномерно по* $x \in \mathbb{R}$ (или по $z \in S' \subset\subset S$, соответственно).

Мероморфная в полосе S функция $f(z)$ называется *мероморфной почти периодической функцией* в этой полосе S, если множество ε, S'-почти периодов

$$E_{\varepsilon,S'}(f) := \{t \in \mathbb{R} : \rho(f(z+t), f(z)) < \varepsilon, \ \forall z \in S'\}$$

является относительно плотным в $\mathbb{R}$ для любого $\varepsilon > 0$ и любой подполосы $S' \subset\subset S$; через ρ здесь обозначена сферическая метрика в $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. (см.[1, 9]).

Легко видеть, что данное определение эквивалентно тому, что *из любой последовательности* $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ *можно выделить подпоследовательность* $\{t'_n\} \subset \{t_n\}$ *для которой последовательность функций* $\{f(z+t'_n)\}$ *сходится равномерно в метрике* ρ *в каждой подполосе* $S' \subset\subset S$.

Пусть $f(z)$ мероморфная в полосе S функция. Для любой подполосы $S' \subset\subset S$ определим *функцию сдвига*

$$\varphi_{f,S'}(t) := \sup_{z \in S'} \rho(f(z+t), f(z)).$$

Теорема 1. *Для того, чтобы мероморфная функция $f(z)$ в S была почти периодической, необходимо и достаточно, чтобы в любой подполосе $S' \subset\subset S$ функция $\varphi_{f,S'}(t)$ была непрерывной почти периодической по $t \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим произвольную подполосу $S' \subset\subset S$. Как было доказано в [1] (см. также [9]), $f(z)$ как мероморфная почти периодическая функция равномерно непрерывна в S'. Проверим непрерывность функции $\varphi_{f,S'}(t)$. Выберем произвольные $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}$.

Из свойств метрики следует неравенство:

$$\left|\sup_{z\in S'}\rho(f(z+t'),f(z))-\sup_{z\in S'}\rho(f(z+t),f(z))\right|\leq\sup_{z\in S'}\rho(f(z+t'),f(z+t)).\quad(1)$$

Таким образом непрерывность функции $\varphi_{f,S'}(t)$ легко следует из неравенства (7) и равномерной непрерывности в S' функции $f(z)$.

Далее, для всех $t\in\mathbb{R}$ из (7) следует

$$|\varphi_{f,S'}(t)-\varphi_{f,S'}(t+\tau)|\leq\sup_{z\in S'}\rho(f(z+t),f(z+t+\tau))=\sup_{w\in S'}\rho(f(w+\tau),f(w)).$$

Если τ ε, S'-почти период $f(z)$, то τ является ε-почти периодом $\varphi_{f,S'}(t)$.

Достаточность. Для всех $z\in S'$

$$\rho(f(z),f(z+t))\leq\sup_{w\in S'}\rho(f(w+t),f(w))=\varphi_{f,S'}(t).\quad(2)$$

Так как $\varphi_{f,S'}(0)=0$, то для всех $\tau\in E_\varepsilon(\varphi_{f,S'})$

$$\rho(f(z),f(z+\tau))\leq\varphi_{f,S'}(\tau)=|\varphi_{f,S'}(\tau)-\varphi_{f,S'}(0)|\leq\varepsilon,$$

то есть $\tau\in E_{\varepsilon,S'}(f)$. ∎

Замечание 1. *Из доказательства теоремы 1 следует, что*

$$E_{\varepsilon,S'}(f)=E_\varepsilon(\varphi_{f,S'}).$$

Итак, функция $\varphi_{f,S'}(t)$ является почти периодической на $\mathbb{R}$, и у неё существует счётный спектр $\mathrm{sp}\,\varphi_{f,S'}$. Определим $\mathbb{Z}$-модуль функции f в полосе S' как линейную оболочку над $\mathbb{Z}$ $\mathrm{sp}\,\varphi_{f,S'}$, то есть

$$G(S',f):=\mathrm{Lin}_{\mathbb{Z}}\ \mathrm{sp}\,\varphi_{f,S'},\quad S'\subset\subset S.$$

Это множество также счетное.

Нетрудно видеть, что для $S'\subset\subset S''\subset\subset S$ $\quad G(S',f)\subset G(S'',f)$. (3)

Объединение

$$G(f)=\bigcup_{S'\subset\subset S}G(S',f)\quad(4)$$

назовём *$\mathbb{Z}$-модулем мероморфной почти периодической функции f.*

Так как ввиду (3) в объединении (4) можно взять счётную систему полос $S'\subset\subset S$, то $G(f)$ счётный для любой мероморфной почти периодической функции.

Разумеется, можно было бы вместо $\mathbb{Z}$-модуля f определить спектр f как $\bigcup_{S'\subset\subset S}\mathrm{sp}\,\varphi_{f,S'}$. Однако уже для голоморфной функции $f(z)=e^{iz}$ в полосе $S:=\mathbb{C}$ имеем для любой $S'\subset\subset S$ такой, что $\mathbb{R}\subset S'$

$$\varphi_{f,S'}(t)=\sup_{z\in S'}\rho(f(z+t);f(z))=\sup_{z\in S'}\frac{|e^{i(z+t)}-e^{iz}|}{\sqrt{1+|e^{i(z+t)}|^2}\sqrt{1+|e^{iz}|^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sup_{z\in S'}|e^{it}-1| = \left|\sin\frac{t}{2}\right|.$$

Ряд Фурье этой функции имеет вид $\varphi_{f,S'}(t) \sim \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi(1-4k^2)}e^{ikt}$.

Таким образом $\mathrm{sp}\,\varphi_{f,S'} = \mathbb{Z}$, в то время как $\mathrm{sp}\ f = \{1\}$. С другой стороны, естественность определения $\mathbb{Z}$-модуля f подтверждает следующая

Теорема 2. *Пусть $f(z)$ голоморфная в S почти периодическая функция. Тогда $\mathbb{Z}$-модуль функции $f(z)$ совпадает с $\mathbb{Z}$-модулем функции $\varphi_{f,S'}(t)$ для любой $S' \subset\subset S$.*

Доказательство этой теоремы мы приведём после того, как опишем связь почти периодов и $\mathbb{Z}$-модуля f.

Отметим следующие свойства функции $\varphi_{f,S'}$.

I. Пусть $\{h_n\}$ произвольная вещественная последовательность. Последовательность $\{f(z+h_n)\}$ сходится равномерно по $z \in S'$ тогда и только тогда, когда сходится равномерно по $t \in \mathbb{R}$ последовательность $\{\varphi_{f,S'}(t+h_n)\}$.

Это немедленно следует из (7) и (9).

II. Пусть $f(z)$ мероморфная почти периодическая в полосе S, тогда из равенства $\rho(a,b) = \rho(\frac{1}{a},\frac{1}{b})$ для всех $a,b \in \mathbb{C}$ получаем $G(f) = G(\frac{1}{f})$, так как они определяют одну и ту же функцию $\varphi_{f,S'}(t)$ в любой полосе $S' \subset\subset S$.

III. Пусть $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ почти периодические функции на $\mathbb{R}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(1) $G(\psi_1) \subset G(\psi_2)$;

(2) $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \tau \in E_\delta(\psi_2) \Rightarrow \tau \in E_\varepsilon(\psi_1)$;

(3) Если $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ выбрана так, что $\{\psi_2(t_n+t)\}$ равномерно по t сходится, то $\{\psi_1(t_n+t)\}$ также равномерно сходится.

Доказательство этого свойства имеется в [2, теорема 2.6.3], и [6, леммы 1-4]. Отметим, однако, что доказательство в [2] неполно.

IV. Пусть $g(w) = \frac{aw+b}{cw+d}$, $ad-cb \neq 0$, $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ и $f(z)$ мероморфная почти периодическая функция в полосе S, тогда $G(g\circ f) = G(f)$.

Действительно, легко видеть, что

$$\forall S' \subset\subset S \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \tau \in E_{\delta,S'}(f) \Rightarrow \tau \in E_{\varepsilon,S'}(g\circ f).$$

С одной стороны из свойства III $G(f) \supset G(g\circ f)$, с другой стороны, если g^{-1} обратная функция к g, то $G(g\circ f) \supset G(g^{-1}\circ g\circ f) = G(f)$. Поэтому в действительности

$$G(g\circ f) = G(f).$$

Доказательство теоремы 2.

Рассмотрим сужение $f(z)$ на какую-нибудь прямую $y = y_0$ в S'. Если $f(z)$ соответствует ряд Дирихле $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\lambda nz}$, то $f(x+iy_0)$ соответствует ряд Фурье

$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-\lambda_n y_0} e^{i\lambda_n x}$, так что спектры $f(z)$ и $f(x+iy_0)$ совпадают. Далее, из [2, теорема 1.2.3, с. 311-312] для любых $\varepsilon > 0$ и $S' \subset\subset S$ найдётся $\delta > 0$ такое, что любой δ-почти период $f(x+iy_0)$ есть (ε, S')-почти период для $f(z)$. Из определения функции $\varphi_{f,S'}(t)$ следует

$$\varphi_{f,S'}(t) = \sup_{z\in S'} \rho(f(z+t); f(z)) \le \sup_{z\in S'} |(f(z+t) - f(z))|.$$

Таким образом, любой δ-почти период для $f(x+iy_0)$ есть ε-почти период для $\varphi_{f,S'}(t)$ и из свойства III $G(\varphi_{f,S'}) \subset G(f(x+iy_0))$. С другой стороны, так как значения $f(x+iy_0)$ равномерно ограничены, то в области значений $f(z)$ сферическая метрика эквивалентна евклидовой. Полоса S' содержит прямую $y = y_0$, и для $M = \sup\limits_{z\in S'} |f(z)|$ верно

$$|f(x+iy_0+t) - f(x+iy_0)| \le \varphi_{f,S'}(t)(1+M^2),$$

Следовательно для каждого $\varepsilon > 0$ и $\delta = \frac{\varepsilon}{1+M^2}$ имеем $E_\delta(\varphi_{f,S'}) \subset E_\varepsilon(f(x+iy_0))$. Поэтому на основании свойства III $G(f(x+iy_0)) \subset G(\varphi_{f,S'})$. Таким образом $G(f(x+iy_0)) = G(\varphi_{f,S'})$. Отсюда $\forall S' \subset\subset S \quad G(\varphi_{f,S'}) = G(S', f)$. ■

Как было показано в [9, с. 93], если f_1 и f_2 мероморфные почти периодические функции в полосе S, то функция $f_1 f_2$ будет мероморфной почти периодической функцией в S, тогда и только тогда, когда у функции $f_1 f_2$ корни и полюса разделены, то есть расстояние между корнями и полюсами в любой полосе $S' \subset\subset S$ равномерно отграничено от нуля.

Теорема 3. *Пусть f_1, f_2 и $f_1 f_2$ мероморфные почти периодические функции в полосе S. Тогда $G(f_1 f_2) \subset G(f_1) + G(f_2)$. В частности, если G некоторая группа и $G(f_1) \cup G(f_2) \subset G$, то $G(f_1 f_2) \subset G$.*

Доказательство. Пусть γ_0 произвольное число из $G(f_1 f_2)$. Тогда найдётся подполоса $S' \subset\subset S$ такая, что $\gamma_0 \in G(S'; f_1 f_2)$. Достаточно показать, что $\gamma_0 \in G(S'; f_1) + G(S'; f_2)$.

Все три функции почти периодические и для любого $\varepsilon > 0$ $E_\varepsilon(\varphi_{f_1 f_2, S'}) = E_{\varepsilon,S'}(f_1 f_2)$, $E_\varepsilon(\varphi_{f_1,S'}) = E_{\varepsilon,S'}(f_1)$, и $E_\varepsilon(\varphi_{f_2,S'}) = E_{\varepsilon,S'}(f_2)$.

Как видно из [9, теорема 5, с. 193], для любой последовательности $\{h_n\} \subset \mathbb{R}$ из равномерной сходимости последовательностей $\{f_1(z+h_n)\}$ и $\{f_2(z+h_n)\}$ в метрике ρ в S' следует равномерная сходимость $\{f_1(z+h_n) f_2(z+h_n)\}$.

Докажем, что отсюда следует такое утверждение
$\forall\alpha > 0 \quad \exists\beta > 0 \quad (\tau \in E_\beta(\varphi_{f_1,S'}) \cap E_\beta(\varphi_{f_2,S'})) \Longrightarrow (\tau \in E_\alpha(\varphi_{f_1 f_2,S'}))$.

Предположим, что это не так. Тогда найдутся $\alpha_0 > 0$ и
$\tau_n \in E_{2^{-n}}(\varphi_{f_1,S'}) \cap E_{2^{-n}}(\varphi_{f_2,S'})$, но $\tau_n \notin E_{\alpha_0}(\varphi_{f_1 f_2,S'})$.

Пусть $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \tau_k$ и $p > 0$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$

$$|\varphi_{f_1,S'}(t+h_{n+p}) - \varphi_{f_1,S'}(t+h_n)| = |\varphi_{f_1,S'}(t+h_n+\sum_{k=n+1}^{n+p}\tau_k) - \varphi_{f_1,S'}(t+h_n)|$$
$$\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |\varphi_{f_1,S'}(t+h_{k-1}+\tau_k) - \varphi_{f_1,S'}(t+h_{k-1})| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} 2^{-k}.$$

Аналогично

$$|\varphi_{f_2,S'}(t+h_{n+p}) - \varphi_{f_2,S'}(t+h_n)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} 2^{-k}.$$

То есть последовательности $\{\varphi_{f_1,S'}(t+h_n)\}$ и $\{\varphi_{f_2,S'}(t+h_n)\}$ сходятся при $n \to \infty$ равномерно по $t \in \mathbb{R}$. Отсюда и из свойства I последовательность $\{\varphi_{f_1 f_2,S'}(t+h_n)\}$ равномерно сходится.

При достаточно больших n имеем $|\varphi_{f_1 f_2,S'}(t+h_{n+p}) - \varphi_{f_1 f_2,S'}(t+h_n)| \leq \alpha_0$ и $|\varphi_{f_1 f_2,S'}(t+\tau_n) - \varphi_{f_1,S'}(t)| \leq \alpha_0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, а это противоречит выбору τ_n.

Согласно [2, теорема 2.1.1, с.104]

$$\forall \gamma \in \operatorname{sp} \varphi_{f_1 f_2,S'}\ \forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall \tau \in E_\varepsilon(\varphi_{f_1 f_2,S'}) \Longrightarrow |\gamma\tau| \leq \delta (\operatorname{mod} \mathbb{Z}).$$

Легко видеть, что такое же утверждение справедливо для любой конечной комбинации с целыми коэффициентами элементов из $\operatorname{sp} \varphi_{f_1 f_2,S'}(t)$, то есть для элементов из $G(S', f_1 f_2)$. Следовательно, для всех $\delta > 0$ найдется $\varepsilon > 0$ и затем $\varepsilon_1 > 0$ такие, что

$$\tau \in E_{\varepsilon_1}(\varphi_{f_1,S'}) \cap E_{\varepsilon_1}(\varphi_{f_2,S'}) \Longrightarrow |\gamma_0\tau| \leq \delta (\operatorname{mod} \mathbb{Z}) \tag{5}$$

так как $E_{\varepsilon_1}(\varphi_{f_1,S'}) \cap E_{\varepsilon_1}(\varphi_{f_2,S'}) \subset E_\varepsilon(\varphi_{f_1 f_2,S'})$ и $\gamma_0 \in G(S', f_1 f_2)$.

Покажем, что $\gamma_0 \in G(S', f_1) + G(S', f_2)$.

Предположим, что это не так, то есть $\gamma_0 \notin G(S', f_1) + G(S', f_2)$. По [2, теорема 2.1.2, с. 105] для функций $\varphi_{f_1,S'}$ и $\varphi_{f_2,S'}$ для всех $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать $0 < \delta < \frac{1}{6}$ и $(\gamma_1^1, \ldots, \gamma_n^1) \subset G(S'; f_1)$ и $(\gamma_1^2, \ldots, \gamma_m^2) \subset G(S'; f_2)$ такие, что все решения τ системы

$$\begin{cases} |\gamma_j^1\tau| \leq \delta(\operatorname{mod}\mathbb{Z}), & j = \overline{1,n} \\ |\gamma_k^2\tau| \leq \delta(\operatorname{mod}\mathbb{Z}), & k = \overline{1,m} \end{cases} \tag{6}$$

являются ε-почти периодом $\varphi_{f_1,S'}$ и $\varphi_{f_2,S'}$ одновременно.

Рассмотрим идеал $I = \{g \in \mathbb{Z} | g\gamma_0 \in G(S'; f_1) + G(S'; f_2)\} \subset \mathbb{Z}$. Либо $I \setminus \{0\} = \emptyset$, тогда положим $g_0 := 0$, либо обозначим через g_0 минимальное положительное число в I.

Дополним систему (6) неравенством $|\gamma_0\tau - a| \leq \delta\ (\operatorname{mod}\mathbb{Z})$ для

$$a := \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } g_0 = 0, \\ \frac{[\frac{g_0}{3}+1]}{g_0}, & \text{если } g_0 \neq 0 \end{cases}$$

По теореме Кронекера [2, с. 106] полученная система будет иметь решения, если для любого набора $(g, g_1^1, \dots, g_n^1, g_1^2, \dots, g_m^2) \subset \mathbb{Z}$ из того, что $g\gamma_0 = \sum_{j=1}^{n} g_j^1\gamma_j^1 + \sum_{j=1}^{m} g_j^2\gamma q_j^2$ будет следовать, что $ga \in \mathbb{Z}$. По предположению $\gamma_0 \notin G(S', f_1) + G(S', f_2)$, следовательно, $g_0 \neq 1$. Из выбора a следует, что $a \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ и $ga \in \mathbb{Z}$, потому что любое $g \in I$ является целым кратным g_0. Так как все идеалы в $\mathbb{Z}$ главные.

Дополненная неравенством $|\gamma_0\tau - a| \le \delta\,(\mathrm{mod}\,\mathbb{Z})$, система (6) имеет решение τ, но её решение не может удовлетворять неравенству $|\gamma_0\tau| \le \delta\,(\mathrm{mod}\mathbb{Z})$. Таким образом, нашелся $\tau \in E_\varepsilon(\varphi_{f_1,S'}) \cap E_\varepsilon(\varphi_{f_2,S'})$ и не удовлетворяющий $|\gamma_0\tau| \le \delta\ (\mathrm{mod}\mathbb{Z})$, что противоречит (5). Таким образом доказано, что $\gamma_0 \in G(S', f_1) + G(S', f_2)$. ■

В [9] мы доказали, что любая мероморфная почти периодическая функция представима в виде отношения двух голоморфных почти периодических функций. Здесь мы докажем, что мероморфная почти периодическая функция f с $\mathbb{Z}$-модулем $G(f)$ представима в виде отношения двух голоморфных почти периодических функций с модулями, лежащими в $G(f)$. Для этого нам понадобятся некоторая дополнительная информация о нулях и полюсах f. При этом нам удобно пользоваться понятием дивизора.

Под *дивизором* d в области $H \subset \mathbb{C}$ понимается множество пар $\{(a_n, k_n)\}$, где носитель дивизора $|d| = \operatorname{supp} d = \{a_n\}$ дискретное множество в H без предельных точек внутри H, а k_n – числа из $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Дивизором d_f *мероморфной функции* $f(z)$ *в* H называется множество $\{(a_n, k_n)\}$, где a_n корни или полюса $f(z)$ в H, $|k_n|$ их кратности, причём $k_n > 0$ для корня и $k_n < 0$ для полюса.

Дивизор можно также трактовать как заряд, сосредоточенный в точках a_n с массами k_n; для дивизора мероморфной функции $f(z)$ этот заряд равен $1/(2\pi) \triangle \log|f|$, где оператор Лапласа понимается в смысле распределений.

Следуя [3], назовём *дивизор* d *в полосе* S *почти периодическим*, если для любой бесконечно дифференцируемой финитной в S функции $\chi(z)$ сумма $\sum_{a_n \in |d|} k_n\chi(a_n + t)$ (то есть свёртка заряда d с функцией χ) является почти периодической функцией по переменной $t \in \mathbb{R}$.

Объединение спектров функций $\sum_{a_n \in |d|} k_n\chi(a_n + t)$ по всем χ называется *спектром* d и обозначается $\operatorname{sp} d$. Спектр любого почти периодического дивизора счётный (см. [3]). Обозначим через $G(d)$ линейную оболочку над $\mathbb{Z}$ $\operatorname{sp} d$.

В [9, теорема 6, с. 195], дивизоры нулей и полюсов мероморфной почти периодической функции являются почти периодическими.

Теорема 4. *Пусть f мероморфная почти периодическая функция в полосе S, d^+ и d^- её дивизоры нулей и полюсов, соответственно. Тогда $G(d^+) \subset G(f)$ и $G(d^-) \subset G(f)$.*

Доказательство. Дивизоры d^+ и d^- являются почти периодическими. Для произвольной финитной в S бесконечно дифференцируемой функции $\chi(z)$ и произвольной вещественной последовательности $\{h_n\}$ из равномерной сходимости последовательности $\{f(z+h_n)\}$ в сферической метрике в любой подполосе $S' \subset\subset S$ следует равномерная сходимость по $t \in \mathbb{R}$ свёртки

$$(d^+ * \chi)(h_n + t) = \sum_{a_n \in |d^+|} k_n \chi(a_n + t + h_n).$$

Учитывая замечение 1 и свойство I, имеем для любой вещественной последовательности $\{h_n\}$ из того, что $\varphi_{f,S'}(t+h_n)$ сходится равномерно по $t \in \mathbb{R}$, следует равномерная сходимость $(d^+ * \chi)(h_n + t)$ по $t \in \mathbb{R}$.

Из теоремы 2 следует $G(d^+ * \chi) \subset G(f)$ для произвольной финитной в S бесконечно дифференцируемой функции $\chi(z)$. Поэтому $G(d^+) \subset G(f)$.

Учитывая свойство II, также имеем $G(d^-) \subset G(\frac{1}{f}) = G(f)$.

■

В [9, с.196], было показано, что любая мероморфная почти периодическая в полосе S функция представима в виде отношения двух голоморфных почти периодических функций в S.

Теорема 5. *Пусть $f(z)$ мероморфная почти периодическая в полосе S функция. Тогда ее можно представить в виде $f = \frac{g}{h}$, где $g(z)$, $h(z)$ голоморфные почти периодические функции в полосе S и $G(g) \cup G(h) \subset G(f)$.*

Доказательство. Согласно [9, теорема 6, с.195] дивизор полюсов d_f^- является почти периодическим, при этом, по предыдущей теореме,

$$G(d_f^-) \subset G(f). \tag{7}$$

Согласно [4, теорема 3, с.334] этот дивизор можно дополнить до дивизора d_h голоморфной почти периодической в полосе S функции $h(z)$ следующим образом: строятся два почти периодических дивизора d_1, d_2 такие, что d_1 не имеет точек носителя выше прямой $y = y_0$, d_2 не имеет точек носителя ниже прямой $y = y_0$ и при этом $d_1 \cup d_2 \supset d_f^-$. Кроме того, дивизоры d_1, d_2 устроены так, что для любой финитной непрерывной в S функции χ имеет место $d_1 * \chi = d_f^- * \tilde{\chi}$, $d_2 * \chi = d_f^- * \tilde{\tilde{\chi}}$ для некоторых финитных в S функций $\tilde{\chi}$, $\tilde{\tilde{\chi}}$ и, таким образом

$$\operatorname{sp} d_1 \subset \operatorname{sp} d_f^-, \ \operatorname{sp} d_2 \subset \operatorname{sp} d_f^-. \tag{8}$$

Так как дивизоры d_1, d_2 не имеют точек носителя в полуплоскостях, то они удовлетворяют условию предложения 1 [4, с.329], и по ним можно построить голоморфные почти периодические функции h_1, h_2 в S с дивизорами $d_{h_1} = d_1$, $d_{h_2} = d_2$. Эти функции строятся таким образом, чтобы их ε-почти периоды совпадали с γ-почти периодами функций, соответственно, $d_1 * \chi$, $d_2 * \chi$, где $\gamma = \gamma(\varepsilon)$, а $\chi(z)$ некоторая непрерывная функция в S. Поэтому по свойству III

$$G(h_1) \subset G(d_1), \ G(h_2) \subset G(d_2). \tag{9}$$

Итак, функция $h = h_1 h_2$ является голоморфной почти периодической в S, $d_h = d_1 \cup d_2 \supset d_f^-$ и, согласно [9, с.93], функция $g(z) = f(z)h(z)$ голоморфная почти периодическая в S. Из (7), (8), (9) и теоремы 4 следует

$$G(h) \subset G(h_1) + G(h_2) \subset G(d_1) + G(d_2) \subset G(d_f^-) \subset G(f),$$

$$G(g) \subset G(f) + G(h) = G(f).$$

■

Следствие 1. *$G(g) + G(h) = G(f)$, где $f = \frac{g}{h}$.*

Действительно, по теореме 3 и свойству II

$$G(f) = G\left(g\frac{1}{h}\right) \subset G(g) + G\left(\frac{1}{h}\right) = G(g) + G(h),$$

но $G(g) + G(h) \subset G(f)$ по теореме 5.

В [8, 10] рассмотрено продолжение голоморфных почти периодических функций на Боровскую компактификацию вещественной оси.

Приведём аналогичный результат для мероморфных почти периодических функций. Напомним, что семейство множеств

$$U(\delta; N, \lambda_1, \dots, \lambda_N) = \{t \in \mathbb{R} : |e^{i\lambda_k t} - 1| < \delta, \quad k = \overline{1, N}\}$$

$\delta > 0$, $N < \infty$, $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in G$ является базой окрестностей $0 \in \mathbb{R}$ в Боровской топологии, порождённой аддитивной подгрупой $G \subset \mathbb{R}$.

Пополнение $\mathbb{R}$ в этой топологии является Боровской компактификацией $\widehat{G}$ вещественной оси. В других терминах, $\widehat{G}$ является мультипликативной группой всех комплексных характеров G со слабой топологией и отображение $j : t \longrightarrow \{e^{i\lambda t}\}_{\lambda \in G}$ вкладывает $\mathbb{R}$ в $\widehat{G}$; оба определения эквивалентны.

Теорема 6. *Дана мероморфная почти периодическая функция f в полосе $S = \{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Im} z < b\}$ с $\mathbb{Z}$-модулем $G(f)$, тогда существует единственная функция $\bar{f}(\theta, y) \in C(\widehat{G}(f) \times (a, b); \overline{\mathbb{C}})$ такая, что $f(z) = \bar{f}(jx, y)$. Обратно, если $\bar{f}(\theta, y) \in C(\widehat{G}(f) \times (a, b); \overline{\mathbb{C}})$ такая, что $f(z) = \bar{f}(jx, y)$ мероморфная функция, то $f(z)$ является почти периодической функцией в полосе S.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную подполосу $S' = \{z \in S : a' < \operatorname{Im} z < b'\}$. Соответствующая $f(z)$ в S', функция $\varphi_{f,S'}(t)$ является непрерывной почти периодической функцией в S' с таким же, как у $f(z)$ $\mathbb{Z}$-модулем $G(f)$.

Рассмотрим тригонометрический многочлен $P(x) = \sum_{k=1}^{N} B_k e^{i\lambda_k x}$, где λ_k взяты из $G(f)$, и который удовлетворяет неравенству $\sup |\varphi_{f,S'}(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{6}$. Из неравенства

$$|\varphi_{f,S'}(x+t) - \varphi_{f,S'}(x)| \le |\varphi_{f,S'}(x+t) - P(x+t)| + |P(x+t) - P(x)| + |P(x) - \varphi_{f,S'}(x)|$$

следует, что каждый $\frac{\varepsilon}{6}$-почти период $P(x)$ является $\frac{\varepsilon}{2}$-почти периодом $\varphi_{f,S'}(x)$. С другой стороны, если число $t \in U(\delta; N, \lambda_1, \dots, \lambda_N)$, то $|e^{i\lambda_k t} - 1| < \delta$, $k = \overline{1, N}$. Поэтому если $\delta < \varepsilon(6 \sum\limits_{k=1}^{N} |B_k|)^{-1}$, то

$$|P(x+t) - P(x)| \le \sum_{k=1}^{N} |B_k||e^{i\lambda_k t} - 1| < \delta \sum_{k=1}^{N} |B_k| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что $t \in U(\delta; N, \lambda_1, \dots, \lambda_N) \Longrightarrow t \in E_{\frac{\varepsilon}{2}}(\varphi_{f,S'})$.

Далее выберем произвольное положительное ε. Найдём по нему $\delta > 0$ и N. Тогда в силу неравенства (9), и предыдущего, если t и $t' \in U(\delta; N, \lambda_1, \dots, \lambda_N)$, то $\rho(f(t+iy), f(t'+iy)) \le \varphi_{f,S'}(t-t') \le \varepsilon$. Поэтому функция $f(t+iy)$ равномерно непрерывна по $(t, y) \in \mathbb{R} \times [a', b']$ в топологии Бора на $\mathbb{R}$. Следовательно, можно продолжить эту функцию на $\widehat{G}(f) \times [a', b']$ до непрерывной функции $\bar{f}(\theta, y)$ такой, что $f(z) = \bar{f}(jx, y)$. (см. [11], Основные структуры, Глава II, §3.6, теорема 2.)

Обратно, предположим, что функция $\bar{f}(\theta, y) \in C(\widehat{G}(f) \times (a, b); \overline{\mathbb{C}})$ такая, что $f(z) = \bar{f}(jx, y)$ мероморфная. Чтобы проверить её почти периодичность, заметим, что для любого $z \in S' \quad z = x + iy, \quad y \in [a', b']$, имеем в силу непрерывности $\bar{f}(\theta, y)$ на $\widehat{G}(f) \times [a', b']$ $\rho(f(z+t), f(z)) = \rho(\bar{f}(jx+jt, y), \bar{f}(jx, y)) \le \varepsilon$, для всех $t \in U(\delta; N, \lambda_1, \dots, \lambda_N)$.

Отметим, что множество $U(\delta; N, \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ относительно плотно на $\mathbb{R}$, поскольку, по теореме Кронекера [2, с. 106], почти периодическая функция $f(t) = \max\limits_{1 \le k \le N} |e^{i\lambda_k t} - 1|$ принимает на $\mathbb{R}$ значения, сколь угодно близкие к 0, а, следовательно, на относительно плотном множестве δ-близка к 0. ■

Далее, согласно [10, с. 33] каждому почти периодическому дивизору d со спектром в группе $G(d)$ отвечает характеристическое число - элемент $c(d)$ группы когомологий $H^2(\widehat{G}(d), \mathbb{Z})$. При этом характеристическое число $c(d)$ любого дивизора является конечной суммой характеристических чисел дивизоров $d^{\lambda_n \mu_n}$, где $d^{\lambda_n \mu_n} = \{(\lambda_n + i\mu_n)^{-1}(n_1 + in_2) : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ $\lambda_n, \mu_n \in \mathbb{R}$; все λ_n и μ_n можно брать из $G(d)$.

Теорема 7. *Пусть A и B почти периодические дивизоры в полосе S со спектрами в $G(A)$ и $G(B)$, соответственно. A и B разделены, т. е. $\inf\{|a - b| : a \in A, b \in B\} > 0$, и $c(A) = c(B)$. Тогда существует почти периодическая функция $f(z)$ в полосе S такая, что A и B являются её множествами нулей и полюсов, соответственно, и $G(f) = G(A) + G(B)$.*

Доказательство. По теореме 3 ([10], с. 36) дивизор A можно дополнить конечным числом дивизоров $d^{\lambda\mu}$ так, чтобы полученный дивизор был множеством нулей голоморфной почти периодической функции $g(z)$ в полосе S. Причём по теореме 1 ([10], с.34) спектр $g(z)$ будет в $G(A)$, так как все

λ и μ можно брать только из $G(A)$. Таким образом дивизору нулей функции g $d_g = A \cup \sum_i d^{\lambda_i \mu_i}$ соответствует $c(d_g) = c(A) + \sum_i \lambda_i \wedge \mu_i = 0$. Дополним дивизор B теми же дивизорами $d^{\lambda\mu}$, полученный дивизор по теореме 1 ([10], с. 34) также будет дивизором нулей некоторой голоморфной почти периодической функции $h(z)$ в полосе S, со спектром в $G(B)$, так как $c(d_h) = c(B) + \sum_i \lambda_i \wedge \mu_i = 0$.

Итак, мы построили две голоморфные почти периодические функции в полосе S такие, что $G(A) \supset G(d_g)$, $G(A) \supset G(g)$ и $G(B) \supset G(d_h)$, $G(B) \supset G(h)$.

Далее, определим $f(z) := \frac{g(z)}{h(z)}$. Так как мы дополняли A и B одним и тем же множеством, то множества нулей и полюсов $f(z)$ будут совпадать с A и B, соответственно. A и B разделены, g и h голоморфные почти периодические функции.

Функция $f(z)$ [9], с. 193) будет мероморфной почти периодической функцией в полосе S [9, теорема 5, с. 193].

С одной стороны по теореме 4 $G(A) \subset G(f)$ и $G(B) \subset G(f)$, а другой стороны по теореме 3 и свойству II

$$G(f) = G\left(\frac{g}{h}\right) \subset G(g) + G\left(\frac{1}{h}\right) = G(g) + G(h) \subset G(A) + G(B).$$

Таким образом, $G(f) = G(A) + G(B)$. ∎

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS, проект 99-00089.

ЛИТЕРАРУРА

1. Sunyer I Balaguer F. Una nova generalitzaci ó de les functions garieé-periòdiques. // Inst.d'Estudis Catalans, Arxius de la secció de ciències. – XVII. – 1949.

2. Левитан Б. М. Почти периодические функции.– М.: Гостехиздат. – 1953.

3. Ронкин Л. И. Почти периодические обобщенние функции и дивизоры в трубчатих областях. // Записки науч. семинаров ПОМИ. – **247.** – 1997. – С. 210-236.

4. Favorov S. Ju., Rashkovskii A. Ju. and Ronkin L. I. Almost periodic divisors in a strip. //Journal D'analyse Mathematique. – **74.** – 1998. – P. 325-345.

5. Рашковский А. Ю., Ронкин Л. И., Фаворов С. Ю. О почти периодических множествах в комплексной плоскости.// Доповіді Національної Академії Наук України. – **12.** – 1998. – С. 37-39.

6. Tornehave H. Systems of zeros of holomorphic almost periodic functions. //Kobenhavns Universitet Matematisk Institut, Preprint №30. – 1988.

7. Tornehave H. On the zeros of entire almost periodic function. //The Harald Bohr Centenary (Copenhagen 1987). Math. Fys. Medd. Danske. – 84. – No.3. – 1989. – P. 125-142.

8. Favorov S.Yu. Zeros of holomorphic almost periodic functions.//Journal d'Anallyzse Mathematique. – 84. – 2001. – P. 51-66.

9. Parfyonova N. D., Favorov S.Yu. Meromorphic almost periodic functions.// Mat. Stud. Lviv. – 13. – 2000. – P. 190-198.

10. Фаворов С. Ю. Нулі аналітичних майже періодичних функцій.// Доповіді Національної Академії Наук України. – 1.–2001.– С. 32-36.

11. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. – М.: Наука. – 1968.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.934 № 542, 2002, с. 85–95

Об аналитическом представлении классов управлений, решающих задачи управляемости и стабилизации

А. В. Луценко, Е. В. Скляр*

Харьковский национальный университет, Украина,
**Щецинский университет, Польша*

Исследуется возможность построения классов управлений, решающих задачи управляемости и стабилизации для линейных систем. Получены в явной форме классы суммируемых управлений, решающих указанные задачи. *2000 Mathematics Subject Classification* 93B05.

1. Введение

В линейном n-мерном пространстве $\mathbb{C}^n$ над полем комплексных чисел рассматривается система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t), \tag{1}$$

где $A(t), B(t)$ – комплексные кусочно-непрерывные матрицы размеров $n \times n$ и $n \times r$ соответственно, определенные на $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, а управление $u(t) \in \mathbb{C}^r$ – локально суммируемая функция.

В теории оптимального управления важную роль играют следующие две задачи: при каких условиях существует управление $u(t)$, переводящее систему (1) из точки x_0 в точку x_1 за время $[t_0, t_1]$; и если такое управление существует, требуется найти его аналитическое представление.

К настоящему моменту первая задача решена полностью. Получены многочисленные формы необходимых и достаточных условий существования управлений, переводящих x_0 в x_1 (см., например, [1] – [7]). Получены также необходимые и достаточные условия стабилизируемости системы (1) при постоянных матрицах $A(t), B(t)$ (см. [8] – [11]).

Данная работа посвящена второй из названных задач – построению в явной форме классов управлений, переводящих точку x_0 в точку x_1 в задаче управляемости, и управлений, обеспечивающих стремление к нулю всех решений в задаче стабилизации.

Впервые управление, переводящее x_0 в x_1, было построено Калманом [1], [2]. Позже (см., например, [3], [4]) к этому управлению стали добавлять функции $v(t)$, удовлетворяющие условию $\int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)B(\tau)v(\tau)d\tau = 0$, где $\Phi(t,\tau)$ –

матрица Коши системы $\dot{x} = A(t)x$. По-видимому, впервые широкие классы управлений в явной форме, переводящих x_0 в x_1, были получены в [12] при решении задачи позиционного синтеза. В задаче стабилизации предпринимались отдельные попытки получения бесконечного множества стабилизирующих управлений (см. [8]–[10]), однако авторы ограничились указанием лишь алгоритмов получения таких управлений без указания их аналитического представления.

2. Конструктивное решение задачи управляемости

В следующих трех теоремах получены классы управлений, решающих задачу перевода системы из точки x_0 в точку x_1.

Теорема 1. *Если система (1) удовлетворяет условию существования управления, переводящего систему из x_0 в x_1 за время $[t_0, t_1]$, то в качестве управления, осуществляющего этот перевод, можно брать любую функцию вида*

$$u(t) = f(t)B^*(t)\Phi^*(t_1, t)\xi. \tag{2}$$

Здесь $f(t)$ – произвольная локально суммируемая, почти всюду на $[t_0, t_1]$ положительная функция, звездочка означает сопряжение, ξ – какое-либо решение уравнения $N_f\xi = x_1 - \Phi(t_1, t_0)x_0$, $N_f = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)\Phi(t_1, t)B(t)B^*(t)\Phi^*(t_1, t)dt.$

Доказательство. Как известно [4], управление, переводящее систему (1) из точки x_0 в x_1 за время $[t_0, t_1]$, существует тогда и только тогда, если выполняется включение $x_1 - \Phi(t_1, t_0)x_0 \in R(N)$, где

$$N = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)B(t)B^*(t)\Phi^*(t_1, t)dt.$$

Покажем, что $R(N) = R(N_f)$. Пусть $x \in R(N)$, но допустим, что существует f такая, что $x \overline{\in} R(N_f)$. Так как N_f – самосопряженная матрица, то ее ядро и образ являются взаимно ортогональными подпространствами. Следовательно, справедливо разложение $\mathbb{C}^n = R(N_f) + Ker N_f$, откуда получаем $x = y + z$, $y \in R(N_f)$, $z \in \mathrm{Ker} N_f$. Так как $x \overline{\in} R(N_f)$, то $z \neq 0$ и, значит,

$$z^*x \neq 0. \tag{3}$$

Включение $x \in R(N)$ означает, что существует вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ такой, что $x = N\xi$. Тогда (3) принимает вид

$$\left(\int\limits_{t_0}^{t_1} z^*\Phi(t_1, t)B(t)B^*(t)\Phi^*(t_1, t)dt \right) \xi \neq 0. \tag{4}$$

С другой стороны, из равенства $N_f z = 0$ следует

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)z^*\Phi(t_1,t)B(t)B^*(t)\Phi^*(t_1,t)z dt = 0, \text{ или } \int_{t_0}^{t_1} f(t)\|z^*\Phi(t_1,t)B(t)\|^2 dt = 0,$$

откуда $z^*\Phi(t_1,t)B(t) = 0$, $t \in [t_0, t_1]$, что противоречит (4).

Аналогично устанавливается включение $R(N_f) \subset R(N)$. Таким образом, $x_1 - \Phi(t_1,t_0)x_0 \in R(N_f)$ и, следовательно, существует вектор $\xi \in \mathbb{C}^n$ такой, что $N_f\xi = x_1 - \Phi(t_1,t_0)x_0$. Положив $u(t) = f(t)B^*(t)\Phi^*(t_1,t)\xi$ в формуле Коши $x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi_1(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$, получаем

$$x(t_1) = \Phi(t_1,t_0)x_0 + \left(\int_{t_0}^{t_1} f(\tau)\Phi_1(t_1,\tau)B(\tau)\Phi_1^*(t_1,\tau)B^*(\tau)d\tau\right)\xi =$$

$$= \Phi(t_1,t_0)x_0 + N_f\xi = x_1.$$

Следовательно, управление (2) переводит систему из x_0 в x_1. □

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times r}$. Обозначим через L линейную оболочку векторов-столбцов матриц $B, AB, ..., A^{n-1}B$, т.е.

$$L = Lin(B, AB, ..., A^{n-1}B) = R(B) + R(AB) + ... + R(A^{n-1}B). \qquad (5)$$

Теорема 2. *Если $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times r}$ – постоянные матрицы, то для того, чтобы существовало управление $u(t)$, переводящее систему $\dot{x} = Ax + Bu$ из точки x_0 в точку x_1 за время $[t_0, t_1]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось включение $x_1 - e^{A(t_1-t)}x_0 \in L$. При этом в качестве управления, осуществляющего этот перевод, можно брать любую функцию вида $u(t) = f(t)B^*e^{A^*(t_1-t)}\xi$, где ξ – какое-либо решение уравнения $N_f\xi = x_1 - e^{A(t_1-t_0)}x_0$, а матрица N_f задается равенством*

$$N_f = \int_{t_0}^{t_1} f(t)e^{A(t_1-t)}BB^*e^{A^*(t_1-t)}dt, \qquad (6)$$

где f – произвольная локально суммируемая, почти всюду на $[t_0, t_1]$ положительная функция.

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$R(N_f) = L \qquad (7)$$

и применить теорему 1. Вместо (7) докажем эквивалентное ему равенство $KerN_f = L^{\perp}$.

Пусть $x \in KerN_f$. Тогда $x^*N_f x = 0$, или $\int_{t_0}^{t_1} f(t)\|B^*e^{A^*(t_1-t)}x\|^2 dt = 0$, откуда следует, что $B^*e^{A^*(t_1-t)}x = 0$, $t \in [t_0, t_1]$. Продифференцировав последнее равенство достаточное число раз и положив $t = t_1$, будем иметь

$$B^*(A^*)^m x = 0, \quad m = \overline{0, n-1}. \tag{8}$$

Эти равенства означают, что

$$x \in \bigcap_{m=0}^{n-1} Ker(B^* A^{*m}) = \bigcap_{m=0}^{n-1} R(A^m B)^{\perp}. \tag{9}$$

Так как $\bigcap\limits_{m=0}^{n-1} R(A^m B)^{\perp} = \left(\sum\limits_{m=0}^{n-1} R(A^m B)\right)^{\perp}$, то соотношение (9) принимает вид $x \in \left(\sum\limits_{m=0}^{n-1} R(A^m B)\right)^{\perp} = L^{\perp}$. Пусть теперь $x \in L^{\perp}$, т.е.

$$x \in \left(\sum_{m=0}^{n-1} R(A^m B)\right)^{\perp} = \bigcap_{m=0}^{n-1} R(A^m B)^{\perp} = \bigcap_{m=0}^{n-1} Ker(B^* A^{*m}).$$

Тогда справедливы равенства (8). Учитывая, что $e^{A(t_1-t)} = \sum\limits_{s=0}^{p-1} \alpha_s(t_1-t)A^s$, где p – степень минимального полинома матрицы A, и принимая во внимание равенства (8), получаем: $B^* e^{A^*(t_1-t)} x = \sum\limits_{s=0}^{p-1} \alpha_s(t_1-t) B^* A^{*s} x = 0,\ t \in [t_0, t_1]$. Отсюда, в силу (6), следует, что

$$x^* N_f x = \int_{t_0}^{t_1} f(t) \| B^* e^{A^*(t_1-t)} x \|^2 dt = 0. \tag{10}$$

Поскольку $N_f^* = N_f$ и матрица N_f неотрицательно определена, то равенство (10) означает, что $N_f x = 0$. Действительно, если бы $N_f x \neq 0$, то из неравенства $(N_f x + \lambda x)^* N_f (N_f x + \lambda x) \geq 0$, где $\lambda \in R$ – любое, получили бы неравенство $(N_f x)^* N_f (N_f x) + 2\lambda \| N_f x\|^2 \geq 0$, которое не может выполняться при всех λ. Таким образом, $x \in Ker N_f$. □

Теорема 3. *Если система (1) полностью управляема на* $[t_0, t_1]$, *то в качестве управления, переводящего систему из произвольной точки* x_0 *в произвольную точку* x_1 *за время* $[t_0, t_1]$, *можно брать любую функцию вида*

$$u(t) = f(t) B^*(t) \Phi^*(t_1, t) N_f^{-1}(x_1 - \Phi(t_1, t_0) x_0), \tag{11}$$

где f – *произвольная локально суммируемая, почти всюду на* $[t_0, t_1]$ *положительная функция, а*

$$N_f = \int_{t_0}^{t_1} f(t) \Phi(t_1, t) B(t) B^*(t) \Phi^*(t_1, t) dt. \tag{12}$$

Доказательство. В силу теоремы 1 полная управляемость означает, что для любой пары $\{x_0, x_1\} \subset \mathbb{C}^n$ должно выполняться включение $x_1 - \Phi(t_1, t_0)x_0 \in R(N_f)$, что эквивалентно, ввиду произвольности x_0, x_1, включению $\mathbb{C}^n \subset R(N_f)$. Последнее включение представляет собой в действительности равенство $\mathbb{C}^n = R(N_f)$, которое возможно тогда и только тогда, когда матрица N_f невырождена. Таким образом, полная управляемость системы (1) означает, что неотрицательно определенная матрица N_f невырождена, следовательно, положительно определена. В таком случае уравнение $N_f\xi = x_1 - \Phi(t_1, t_0)x_0$ имеет решение $\xi = N_f^{-1}(x_1 - \Phi(t_1, t_0)x_0)$ и формула (2) для управления, переводящего систему из x_0 в x_1, принимает форму (11). □

Следствие. *Если система $\dot{x} = Ax + Bu$ с постоянными матрицами полностью управляема, то в качестве управления, переводящего систему из произвольной точки x_0 в произвольну точку x_1 за время $[t_0, t_1]$, можно брать любую функцию вида*

$$u(t) = f(t)B^* e^{A^*(t_1-t)} N_f^{-1}(x_1 - e^{A^*(t_1-t_0)}x_0),$$

где f – произвольная локально суммируемая, почти всюду на $[t_0, t_1]$ положительная функция, а $N_f = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)e^{A^*(t_1-t)}BB^*e^{A^*(t_1-t)}dt.$

Доказательство. Достаточно в (12), (11) положить $\Phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$.

3. Конструктивное решение задачи стабилизации

В следующих двух теоремах получены классы управлений, решающих задачу стабилизации системы $\dot{x} = Ax + Bu$. Пусть $\sigma(A)$ – спектр матрицы A.

Теорема 4. *Если система $\dot{x} = Ax + Bu$ с постоянными матрицами $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times r}$ полностью управляема, то она стабилизируема. При этом в качестве стабилизирующего управления можно брать любую функцию вида $u = -B^*N_\lambda^{-1}(t_1)x$, где*

$$N_\lambda(t_1) = \int\limits_0^{t_1} e^{-2\lambda t}e^{-At}BB^*e^{-A^*t}dt, \tag{13}$$

а λ, t_1 – любые числа, удовлетворяющие условиям $\lambda > 0$, $0 < t_1 \le \infty$, причем если $t_1 = \infty$, то положительное число λ должно удовлетворять условию

$$\lambda > \max\{Re(-\lambda_i) : \lambda_i \in \sigma(A)\}. \tag{14}$$

Доказательство. Полная управляемость системы $\dot{x}=Ax+Bu$ означает, как это установлено в теореме 3, что матрица $N = \int\limits_0^{t_1} e^{-2\lambda t}e^{A(t_1-t)}BB^*e^{A^*(t_1-t)}dt$

положительно определена. В таком случае будет положительно определенной и матрица $N_\lambda(t_1) = e^{-At_1} N e^{-A^* t_1}$. Подставив управление $u = -B^* N_\lambda^{-1}(t_1)x$ в исходную систему, получаем

$$\dot{x} = (A - BB^* N_\lambda^{-1}(t_1))x. \tag{15}$$

Чтобы доказать, что все решения системы (15) стремятся к нулю при $t \to +\infty$, введем в рассмотрение квадратичную форму $V(x) = x^* N_\lambda^{-1}(t_1)x$. Так как матрица $N_\lambda^{-1}(t_1)$ положительно определена, то

$$V(x) \geq a\|x\|^2, \tag{16}$$

где $a = \min\{\lambda_i : \lambda_i \in \sigma(N_\lambda^{-1}(t_1))\}$.

Пусть $x(t)$ – произвольное решение системы (15). Покажем, что функция $V(x(t))$ удовлетворяет соотношению $\frac{d}{dt}V(x(t)) + 2\lambda V(x(t)) \leq 0, \ \ t \in \mathbb{R}$. С этой целью вычислим производную $\frac{d}{dt}V(x(t))$:

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{x}^*(t)N_\lambda^{-1}(t_1)x(t) + x^*(t)N_\lambda^{-1}(t_1)\dot{x}(t) =$$

$$= x^*(t)(A^* - N_\lambda^{-1}(t_1)BB^*)N_\lambda^{-1}(t_1)x(t) + x^*(t)N_\lambda^{-1}(t_1)(A - BB^*N_\lambda^{-1}(t_1))x(t) =$$
$$= x^*(t)(A^*N_\lambda^{-1}(t_1) + N_\lambda^{-1}(t_1)A - 2N_\lambda^{-1}(t_1)BB^*N_\lambda^{-1}(t_1))x(t) =$$
$$= x^*(t)N_\lambda^{-1}(t_1)(AN_\lambda^{-1}(t_1) + N_\lambda^{-1}(t_1)A^* - 2BB^*)N_\lambda^{-1}(t_1))x(t). \tag{17}$$

Используя (13), рассмотрим выражение

$$AN_\lambda(t_1) + N_\lambda(t_1)A^* - 2BB^* = \int_0^{t_1} e^{-2\lambda t}(Ae^{-At}BB^*e^{-A^*t} + e^{-At}BB^*e^{-A^*t}A^*)dt -$$

$$-2BB^* = -\int_0^{t_1} e^{-2\lambda t}(e^{-At}BB^*e^{-A^*t})^{\cdot}dt - 2BB^* = -\left(e^{-2\lambda t}e^{-At}BB^*e^{-A^*t}\Big|_0^{t_1} +\right.$$

$$\left.+2\lambda\int_0^{t_1} e^{-2\lambda t}e^{-At}BB^*e^{-A^*t}dt\right) - 2BB^* = -e^{-2\lambda t_1}e^{-At_1}BB^*e^{-A^*t_1} - 2\lambda N_\lambda(t_1) - BB^*.$$

Умножив с обеих сторон на $N_\lambda^{-1}(t_1)$, будем иметь:

$$N_\lambda^{-1}(t_1)(AN_\lambda(t_1) + N_\lambda(t_1)A^* - 2BB^*)N_\lambda^{-1}(t_1) =$$
$$= -e^{-2\lambda t_1}N_\lambda^{-1}(t_1)e^{-At_1}BB^*e^{-A^*t_1}N_\lambda^{-1}(t_1) - N_\lambda^{-1}(t_1)BB^*N_\lambda^{-1}(t_1) - 2\lambda N_\lambda^{-1}(t_1).$$

Подставив в (17), получим

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = -2\lambda V(x(t)) - x^*(t)N_\lambda^{-1}(t_1)BB^*N_\lambda^{-1}(t_1)x(t) -$$

$$-e^{-2\lambda t_1}x^*(t)N_\lambda^{-1}(t_1)e^{-At_1}BB^*e^{-A^*t_1}N_\lambda^{-1}(t_1)x(t).$$

Так как

$$x^*(t)N_\lambda^{-1}(t_1)e^{-At_1}BB^*e^{-A^*t_1}N_\lambda^{-1}(t_1)x(t) = \|B^*e^{-A^*t_1}N_\lambda^{-1}(t_1)x(t)\|^2 \ge 0,$$
$$x^*(t)N_\lambda^{-1}(t_1)BB^*N_\lambda^{-1}(t_1)x(t) = \|B^*N_\lambda^{-1}(t_1)x(t)\|^2 \ge 0,$$

то $\frac{d}{dt}V(x(t)) \le -2\lambda V(x(t))$, или $\frac{d}{dt}V(x(t)) + 2\lambda V(x(t)) \le 0$. Проинтегрировав это неравенство по промежутку $[0,t]$, имеем: $V(x(t)) \le e^{-2\lambda t}V(x(0))$. Применив (16), получаем

$$\|x(t)\|^2 \le \frac{V(x(0))}{a}e^{-2\lambda t}. \tag{18}$$

Таким образом, $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Условие (14) гарантирует сходимость интеграла

$$N_\lambda(\infty) = \int_0^\infty e^{-2\lambda t}e^{-At}BB^*e^{-A^*t}dt = \int_0^\infty e^{(-A-\lambda I)t}BB^*e^{(-A-\lambda I)^*t}dt.$$

Действительно, собственные значения матрицы $(-A-\lambda I)$ имеют вид $(-\lambda_j-\lambda)$, где $\lambda_j \in \sigma(A)$. Поэтому условие (14) означает, что $\max\{Re(-\lambda_j-\lambda) : \lambda_j \in \sigma(A)\} < 0$. В таком случае справедливы оценки $\|e^{(-A-\lambda I)t}\| \le Le^{-\alpha t}$, $\|e^{(-A-\lambda I)^*t}\| \le Le^{-\alpha t}$, где $t \ge 0$, $\alpha > 0$. Следовательно,

$$\|e^{(-A-\lambda I)t}BB^*e^{(-A-\lambda I)^*t}\| \le Ce^{-2\alpha t},$$

откуда вытекает сходимость интеграла $N_\lambda(\infty)$. Поскольку $x^*N_\lambda(\infty)x \ge x^*N_\lambda(t_1)x$, $t_1 > 0$, то матрица $N_\lambda(\infty)$ положительно определена. Воспроизведя предыдущее доказательство с $t_1 = +\infty$ и с матрицей $N_\lambda(\infty)$, вновь получаем оценку (18). □

Пусть $\dim L = m$, где L из (5), $K(\lambda_j)$– корневое подпространство матрицы A, отвечающее собственному значению $\lambda_j \in \sigma(A)$. Обозначим через $v_1, ..., v_m$ – базис L, через $v_{m+1}, ..., v_n$ – базис $L^\perp$. Образуем матрицы

$$F_1 = \begin{pmatrix} v_1^* \\ ... \\ v_m^* \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times n},\ F_2 = \begin{pmatrix} v_{m+1}^* \\ ... \\ v_n^* \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(n-m)\times n} \tag{19}$$

Теорема 5. *Если система $\dot{x} = Ax + Bu$ с постоянными матрицами $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times r}$ стабилизируема, то в качестве стабилизирующего управления можно брать любую функцию вида*

$$u = -B_0^*HN_\lambda^{-1}(t_1)H^*Fx, \tag{20}$$

где $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$, F_1, F_2 *из (19),* $H = (e_1, ..., e_m) \in \mathbb{C}^{n\times m}$, e_i *– i-й столбец единичной матрицы,* $B_0 = FB$, $N_\lambda(t_1) = \int\limits_0^{t_1} e^{-2\lambda t} e^{-H^*A_0Ht} H^* B_0 B_0^* H e^{-H^*A_0^*Ht} dt$, $A_0 = FAF^{-1}$, λ, t_1 *– любые числа, удовлетворяющие условиям* $\lambda > 0$, $0 < t_1 \le +\infty$, *причем если* $t_1 = +\infty$, *то положительное число* λ *должно удовлетворять условию* $\lambda > \max\{Re(-\lambda_j) : \lambda_j \in \sigma(H^*A_0H)\}$.

Доказательство. Как известно [10], стабилизируемость системы $\dot{x} = Ax + Bu$ эквивалентна условию

$$\forall \lambda_j \in \sigma(A) : Re\lambda_j \ge 0 \Longrightarrow K(\lambda_j) \subset L. \tag{21}$$

Убедимся, что при условии (21) управление (20) стабилизирует систему. С этой целью произведем над системой

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{22}$$

ряд преобразований. Применив к (22) преобразование

$$z = Fx, \quad \text{где } z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad z_1 = F_1x, \quad z_2 = F_2x, \tag{23}$$

получим

$$\dot{z} = A_0z + B_0u, \tag{24}$$

где $A_0 = FAF^{-1}$, $B_0 = FB$. Покажем, что матрицы A_0, B_0 имеют следующую структуру:

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где $A_{11} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $A_{22} \in \mathbb{C}^{(n-m)\times(n-m)}$, $B_1 \in \mathbb{C}^{m\times r}$. Действительно, в силу (23) имеем: $\dot{z}_2 = F_2\dot{x} = F_2Ax + F_2Bu$. Поскольку $b_j \in L$, где b_j – столбцы матрицы B, а $v_j \perp L$ при $j = \overline{m+1, n}$, то $F_2B = 0$. Поэтому

$$\dot{z}_2 = F_2Ax. \tag{26}$$

Так как подпространство $L^\perp$ является A^*-инвариантным, то

$$A^*v_j = \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_{ji}v_i, \quad j = \overline{m+1, n}.$$

В таком случае

$$F_2A = (A^*F_2^*)^* = (A^*v_{m+1}, ..., A^*v_n)^* =$$

$$= \left(\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_{m+1,i} v_i, ..., \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_{ni} v_i \right)^* . \qquad (2$$

Если положить

$$A_{22} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha}_{m+1,m+1} & ... & \overline{\alpha}_{m+1,n} \\ ... & ... & ... \\ \overline{\alpha}_{n,m+1} & ... & \overline{\alpha}_{nn} \end{pmatrix},$$

то

$$A_{22}F_2 = (F_2^* A_{22}^*)^* = \left((v_{m+1}, ..., v_n) \begin{pmatrix} \alpha_{m+1,m+1} & ... & \alpha_{n,m+1} \\ ... & ... & ... \\ \alpha_{m+1,n} & ... & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \right)^* =$$

$$= \left(\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_{m+1,i} v_i, ..., \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_{ni} v_i \right)^* . \qquad (28$$

Из (27), (28) вытекает, что $F_2 A = A_{22} F_2$. Подставив в (26), получаем $\dot{z}_2 = A_{22} z_2$. Теперь продифференцируем z_1 из (23):

$$\dot{z}_1 = F_1 \dot{x} = F_1(Ax + Bu) = F_1 A F^{-1} z + F_1 B u = A_{11} z_1 + A_{12} z_2 + B_1 u.$$

Здесь матрица A_{11} образована первыми m столбцами матрицы $F_1 A F^{-1}$, матрица A_{12} – остальными столбцами $F_1 A F^{-1}$, $B_1 = F_1 B$.

Таким образом, система (24) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_{11} z_1 + A_{12} z_2 + B_1 u, \\ \dot{z}_2 = A_{22} z_2, \end{cases} \qquad (29)$$

а матрицы A_0, B_0 – структуру (25).

Покажем, что

$$rg(B_1, A_{11} B_1, ..., A_{11}^{m-1} B_1) = m. \qquad (30)$$

Действительно, принимая во внимание соотношение

$$rgF(B, AB, ..., A^{n-1} B) = rg(B, AB, ..., A^{n-1} B) = m,$$

а также то, что из равенства $(FAF^{-1})^j = FA^j F^{-1}$ вытекает, что

$$FA^j B = A_0^j B_0 = \begin{pmatrix} A_{11}^j B_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

получаем

$$rg(FB, FAB, ..., FA^{n-1} B) = rg \begin{pmatrix} B_1 & A_{11} B_1 & ... & A_{11}^{n-1} B_1 \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= rg(B_1, A_{11} B_1, ..., A_{11}^{n-1} B_1).$$

Применив теорему Гамильтона – Кели, имеем:

$$rg(B_1, A_{11}B_1, ..., A_{11}^{n-1}B_1) = rg(B_1, A_{11}B_1, ..., A_{11}^{m-1}B_1).$$

Таким образом, $m = rgF(B, AB, ..., A^{n-1}B) = rg(B_1, A_{11}B_1, ..., A_{11}^{m-1}B_1)$.

Перейдем теперь к доказательству того, что управление (20) стабилизирует систему (22). Произвольное решение системы (22) имеет вид $x(t) = e^{At}x_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$. Откуда, приняв во внимание (23), получаем $z_2(t) = F_2e^{At}x_0 + \int\limits_0^t F_2e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$. Так как $e^{A(t-\tau)}B = \sum\limits_{s=0}^{p-1}\alpha_s(t-\tau)A^sB$, где p – степень минимального полинома матрицы A, и так как $v_i \perp L$, $i = \overline{m+1, n}$, то $F_2e^{A(t-\tau)}B = 0$. Поэтому $z_2(t) = F_2e^{At}x_0$. Так как пространство $\mathbb{C}^n$ раскладывается в прямую сумму корневых подпространств матрицы A, то $x_0 = \sum\limits_{j=1}^k \xi_j$, где $\xi_j \in K(\lambda_j)$. Подставив в предыдущее равенство, получаем $z_2(t) = F_2\sum\limits_{j=1}^k e^{At}\xi_j$. Поскольку $\xi_j \in K(\lambda_j)$, то

$$z_2(t) = F_2\sum_{j=1}^k e^{\lambda_j t}\sum_{s=0}^{n_j-1}\frac{t^s}{s!}\xi_{js} = \sum_{j=1}^k e^{\lambda_j t}\sum_{s=0}^{n_j-1}\frac{t^s}{s!}F_2\xi_{js},$$

где $\xi_{js} = (A - \lambda_j I)^s\xi_j \in K(\lambda_j)$, n_j – кратность λ_j как корня характеристического полинома. В силу условия (21) имеем $F_2\xi_{js} = 0$ для тех j, для которых $Re\lambda_j \geq 0$. В таком случае $z_2(t) = \sum\limits_{j:Re\lambda_j<0} e^{\lambda_j t}\sum\limits_{s=0}^{n_j-1}\frac{t^s}{s!}F_2\xi_{js} \longrightarrow 0$ при $t \to +\infty$.

Таким образом, при условии (21) функция $z_2(t) \longrightarrow 0$ при $t \to +\infty$ независимо от выбора управления.

Система $\dot{z}_1 = A_{11}z_1 + B_1u$, в силу (30), полностью управляема, поэтому по теореме 4 управление $u = -B_1^*N_\lambda^{-1}(t_1)z_1$, где $\lambda > 0$, $0 < t_1 \leq +\infty$ стабилизирует ее. Причем при $t_1 = +\infty$ положительное число λ должно удовлетворять условию $\lambda > \max\{Re(-\lambda_j) : \lambda_j \in \sigma(A_{11})\}$. Поскольку $A_{12}z_2(t) \longrightarrow 0$ при $t \to +\infty$, то при этом управлении все решения системы $\dot{z}_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + B_1u$ стремятся к нулю при $t \to +\infty$.

Таким образом, управление $u = -B_1^*N_\lambda^{-1}(t_1)z_1$ стабилизирует систему (29), а значит, в силу невырожденности преобразования (23), и исходную систему (22). Поскольку $B_1 = H^*B_0$, $z_1 = H^*Fx$, $A_{11} = H^*A_0H$,

$$N_\lambda(t_1) = \int_0^{t_1} e^{-2\lambda t}e^{-H^*A_0^*Ht}H^*B_0B_0^*He^{-H^*A_0^*Ht}dt, \tag{31}$$

причем при $t_1 = +\infty$ должно быть $\lambda > \max\{Re(-\lambda_j) : \lambda_j \in \sigma(H^*A_0H)\}$, то $u = -B_0^*HN_\lambda^{-1}(t_1)H^*Fx$, где $t_1 \leq +\infty$, а $N_\lambda(t_1)$ имеет вид (31). □

ЛИТЕРАТУРА

1. Kalman R.E., Ho Y.C., Narendza K.S. Controllability of linear dynamical systems. // Contributions to Differential Equations. – 1962. – v.1,2. – – P. 189-213.

2. Kalman R.E. Mathematical description of linear dynamical systems. // SIAM J. Control. – 1963. – 1. – P. 152-192.

3. Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, – 1975. – 496 с.

4. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. – М.: Наука, – 1976. – 424 с.

5. Попов В.М. Гиперустойчивость автоматических систем. – М.: Наука, – 1970. – 456 с.

6. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, – 1968 – 476 с.

7. Ли Э., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, – 1972. – 576 с.

8. Коробов В.И., Луценко А.В., Подольский Е.Н. Стабилизация линейной автономной системы относительно подпространства. I//Вестник Харьк. ун-та. – 1976. – N 134, Математика и механика, вып. 41. – С. 114-123.

9. Коробов В.И., Луценко А.В., Подольский Е.Н. Стабилизация линейной автономной системы относительно подпространства. II//Вестник Харьк. ун-та. – 1977. – 148, Прикладная математика и механика, вып. 42. – С. 3-11.

10. Коробов В.И., Луценко А.В. Критерии стабилизируемости линейной системы. // Вестник Харьк. ун-та. – 1988. – 315, Управляемые системы. – С. 3-12.

11. Уонэм У.М. Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход. – М.: Наука, – 1980. – 376 с.

12. Коробов В.И., Скляр Г.М. Методы построения позиционных управлений и допустимый принцип максимума // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26,11. – 1914 – 1924 с.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.518.6 № 542, 2002, с. 96–105

Голоморфные почти периодические функции в трубчатой области [1]

О. И. Удодова

Харьковский национальный университет, Украина

Существует ряд теорем, утверждающих, что из голоморфности функции в полосе и почти периодичности на одной прямой при некоторых условиях следует почти периодичность во всей полосе голоморфности. В работе эти теоремы переносятся на голоморфные функции в трубчатой области; при этом, кроме равномерной метрики, рассмотрена метрика Степанова. *2000 Mathematics Subject Classification 42A75, 30B50.*

Непрерывная в полосе

$$S_{a,b} = \{z = x + iy : x \in \mathbf{R},\ a \le y \le b\},\ -\infty \le a \le b \le +\infty.$$

комплекснозначная функция $f(z)$ называется *почти периодической по Бору* в этой полосе, если для любого $\varepsilon > 0$ на любом интервале числовой оси длины $l = l(\varepsilon)$ найдется точка τ (ε-почти период для $f(z)$) такая, что

$$\sup_{z\in S} |f(z+\tau) - f(z)| < \varepsilon. \tag{1}$$

В частности, при $a = b = 0$ получаются почти периодические функции на прямой.

Каждой почти периодической функции $f(x)$ на прямой можно сопоставить ряд Фурье $f(x) \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$, $\lambda_n \in \mathbf{R}$. Если $f(z)$ голоморфна в открытой полосе $\overset{\circ}{S}_{a,b} = \{z = x + iy : x \in \mathbf{R},\ a < y < b\}$ и почти периодична в каждой замкнутой полосе вида $S_{\alpha,\beta}$, $a < \alpha < \beta < b$, то функции $f(z)$ можно сопоставить ряд Дирихле

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n z}.$$

(см. [1],[4]).

[1] Работа поддержана INTAS-грантом №99-00089

Для голоморфных в полосе функций условие (1) часто можно проверять на существенно меньшем множестве. В монографии ([4], с. 318-319) приведены различные результаты подобного типа, принадлежащие в основном Г. Бору [1], [2]. Так, если $f(z)$ голоморфна и ограничена в S и почти периодична на одной прямой внутри этой полосы, то она почти периодична в любой меньшей полосе. Другой признак почти периодичности: пусть $f(z)$ голоморфная при $a < y < b$, непрерывна при $a \leq y \leq b$, а функции $f(x+ia)$ и $f(x+ib)$ являются почти периодическими по Бору с рядами Фурье $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x - \lambda_n a}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x - \lambda_n b}$ соответственно; тогда $f(z)$ - почти периодическая функция в полосе $a \leq y \leq b$ с рядом Дирихле $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n z}$.

В последние годы появилось много работ, связанных с голоморфными почти периодическими функциями от многих переменных (см.[3], [6]-[9]). Поэтому представляется естественным выяснить, в какой степени описанные выше результаты Бора переносятся на такие функции. Этому и посвящена данная работа; при этом, кроме равномерной, рассмотрена так же интегральная p-метрика Степанова.

Обозначим через T_K множество в $\mathbf{C}^m$ вида

$$\{z = x + iy : x \in \mathbf{R}^m, y \in K \subset \mathbf{R}^m\}.$$

Это множество называется *трубчатым* с основанием K.

Определение. *Функция $f(z)$, непрерывная на множестве T_K, называется почти периодической по Бору в T_K, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $l = l(\varepsilon)$, что в каждом m-мерном кубе в $\mathbf{R}^m$ со стороной l найдется хотя бы одно τ (ε-почти период $f(z)$) такое, что*

$$\sup_{z \in T_K} |f(z+\tau) - f(z)| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Так же как и для почти периодических по Бору функций на прямой, легко проверить, что почти периодические по Бору функции ограничены в T_K.

Определение. *Функция $f(z)$, определенная на множестве T_D, D - область в $\mathbf{R}^m$, называется почти периодической по Бору внутри T_D, если для каждого компакта $K \subset D$ функция $f(z)$ является почти периодической по Бору в T_K.*

Известно ([10], с. 71), что любая голоморфная функция в трубчатой области T_D, D - произвольная область в $\mathbf{R}^m$,, голоморфно продолжается на область T_{convD}, причем множества ее значений в T_D и в T_{convD} совпадают. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать функции в трубчатых областях T_D с выпуклым основанием D.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ голоморфная функция в трубчатой области T_D с выпуклым основанием D, и пусть $f(z)$ ограничена в каждой области $T_{D'}$*

при $D' \subset\subset D$. [2] *Если для некоторого* $y_0 \in D$ *функция* $f(x+iy_0)$ *является почти периодической по Бору по переменной* $x \in \mathbf{R}^m$, *то* $f(z)$ *есть почти периодическая функция по Бору внутри* T_D.

Доказательство этой теоремы опирается на следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi(z)$ *- плюрисубгармоническая функция в трубчатой области* T_D, *ограничена сверху в каждой области* $T_{D'}$ *при* $D' \subset\subset D$. *Тогда функция*

$$\psi(y) = \sup_{x \in \mathbf{R}^m} \varphi(x+iy)$$

выпукла в D.

Доказательство леммы 1. Положим

$$u(z) = \sup_{t \in \mathbf{R}^m} \varphi(t+z),$$

$$u^*(z) = \overline{\lim_{z' \to z}}\, u(z').$$

Функция $u^*(z)$ также плюрисубгармонична (см. [5], с.152) и множество

$$\{z \in T_{D'} : u(z) < u^*(z)\}$$

обладает тем свойством, что его пересечение с любой плоскостью вида

$$\{z = x + iy_0 \in \mathbf{C}^m, x \in \mathbf{R}^m\},$$

где $y_0 \in D$, имеет m-мерную Лебегову меру нуль ([5], с. 147, 153.) Поскольку $u^*(z)$ не зависит от x, то неравенство $u(z) < u^*(z)$ при каком-то $z = z' = x' + iy'$ влечет такое же неравенство во всей плоскости вида

$$\{z = x + iy' : x \in \mathbf{R}^m\}.$$

Это невозможно, следовательно, $u(z) \equiv u^*(z)$, то есть $u(z)$ - плюрисубгармоническая в T_D. Так как $u(z)$ не зависит от $x \in \mathbf{R}^m$, то согласно теореме 2.1.3 (см. [5], с. 139) функция $\psi(y) = u(iy)$ выпукла в D. ■

Лемма 2. *Пусть* D', D'' *- выпуклые области в* $\mathbf{R}^m$, *причем*

$$D' \subset\subset D'' \subset\subset \mathbf{R}^m,$$

и пусть $y_0 \in D'$. *Тогда для любых* $N > -\infty$, $M < \infty$ *найдется такое число* $N' > -\infty$, *что для любой выпуклой в* $\overline{D''}$ *функции* $\psi(y)$ *из неравенств* $\psi(y) \le M$ *в* $\overline{D''}$ *и* $\psi(y_0) \le N'$ *следует неравенство* $\psi(y) \le N$ *в* D'.

[2] Это означает, что D' ограничено и $\overline{D'} \subset D$.

Доказательство леммы 2. Выбираем произвольное $y_1 \in D'$, а затем $y_2 \in \partial D''$ так, чтобы y_0, y_1 и y_2 лежали на одной прямой, при этом y_1 между y_0 и y_2. Ввиду выпуклости $\psi(y)$, имеем

$$\psi(y_1) \leq \frac{\|y_2 - y_1\|}{\|y_2 - y_0\|}\psi(y_0) + \frac{\|y_1 - y_0\|}{\|y_2 - y_0\|}\psi(y_2) \leq \frac{\|y_2 - y_1\|}{\|y_2 - y_0\|}N' + \max\{M, 0\}.$$

Считая $N' < 0$ и пользуясь тем, что $\|y_2 - y_0\| \leq diam\ D''$ и $\|y_2 - y_1\| \geq dist(D', \partial D'')$, получаем отсюда, что утверждение леммы выполняется при

$$N' \leq [N - \max\{M, 0\}]\,\frac{diam\ D''}{dist(D', \partial D'')}.$$

■

Доказательство теоремы 1. Пусть D_1 - произвольная область, $D_1 \subset\subset D$, y_0 - какая-нибудь точка из $\mathbf{R}^m$,

$$D_1 \cup \{y_0\} \subset D' \subset\subset D'' \subset\subset D.$$

Пусть, кроме того, δ - произвольное положительное число, а τ - δ-почти период функции $f(x + iy_0)$. Положим

$$\varphi_\delta(z) = log(|f(z+\tau) - f(z)|).$$

$\varphi_\delta(z)$ - плюрисубгармоническая функция в T_D, равномерно ограничена сверху не зависящей от τ константой в любой области $T_{D''}$, $D'' \subset\subset D$. По лемме 1 $\psi_\delta(y) = \sup\limits_{x\in\mathbf{R}^m} \varphi_\delta(z)$ выпукла в D.

Так как $\psi_\delta(y_0) \leq \log\delta$, то для любого $\varepsilon > 0$ при $\delta = \delta(\varepsilon)$ в силу леммы 2 $\psi_\delta(y) \leq \log\varepsilon$ для всех $y \in D'$. Поэтому и $|f(z+\tau) - f(z)| \leq \varepsilon$ для всех $z \in T_{D'}$, то есть τ является ε-почти периодом функции $f(z)$ внутри $T_{D'}$. Так как множество таких τ пересекается с любым m-мерным кубом со стороной $l = l(\delta)$, то $f(z)$ - почти периодическая функция по Бору в $T_{D'}$, а, значит, и в T_{D_1}. По определению это означает, что f почти периодическая внутри T_D.

■

Далее будем рассматривать функции на T_K, которые локально интегрируемы на любой вещественной плоскости

$$\{z = x + iy_0 : x \in \mathbf{R}^m\},\ y_0 \in K.$$

Определение. *Расстоянием по Степанову порядка $p \geq 1$ между функциями f и g назовем величину*

$$S_{p,T_K}(f, g) = \sup_{z\in T_K}\left(\int\limits_{[0,1]^m} |f(z+u) - g(z+u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Определение. *Действительное число τ назовем (T_K, ε, p)-почти периодом по Степанову функции $f(z)$, если выполняется неравенство*

$$S_{p,T_K}(f(z), f(z+\tau)) < \varepsilon. \tag{3}$$

Эти определения обобщают соответствующие определения для функций в полосе [4].

Используя эти определения вместо (2), можно аналогично тому, как определялись почти периодические функции по Бору в T_K и внутри T_D, где D - область в $\mathbf{R}^m$, определить почти периодические функции по Степанову в T_K и внутри T_D.

Определение. *Функцию $f(z)$, определенную на множестве T_K, назовем почти периодической по Степанову в T_K, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $l = l(\varepsilon)$, что в каждом m-мерном кубе со стороной l найдется хотя бы одно τ, для которого верно (3).*

Определение. *Функцию $f(z)$, определенную на множестве T_D, D - область в $\mathbf{R}^m$, назовем почти периодической по Степанову внутри T_D, если для каждого компакта $K \subset D$ функция $f(z)$ является почти периодической по Степанову в T_K.*

Определение. *Функцию $f(z)$ назовем ограниченой по Степанову внутри T_D, если для любого компакта $K \subset D$ существует константа $M(K)$ такая, что*

$$S_{p,T_K}(f, 0) \leq M(K).$$

Так же, как и для почти периодических по Бору функций, легко проверяется, что любая почти периодическая функция по Степанову внутри T_D является ограниченной по Степанову внутри T_D.

Следующая теорема показывает, что классы голоморфных почти периодических функций по Бору и по Степанову совпадают (при $m = 1$ этот результат хорошо известен, см., например, [4] с. 334).

Теорема 2. *Пусть голоморфная функция $f(z)$ в T_D, D - область в $\mathbf{R}^m$, является почти периодической по Степанову внутри T_D. Тогда $f(z)$ - почти периодическая функция по Бору внутри T_D.*

Доказательство опирается на следующую лемму:

Лемма 3. *Для любой пары областей $D' \subset\subset D''$ найдется константа $A(D', D'') < \infty$ такая, что для любой голоморфной в $T_{D''}$ функции $f(z)$, для любого $z \in T_{D'}$, любого $p \geq 1$*

$$|f(z)| \leq A \cdot S_{p,T_{D''}}(f, 0),$$

где A зависит только от расстояния между $\partial D'$ и $\partial D''$.

Доказательство леммы 3. Пусть $r < dist(\partial D', \partial D'')$, $r < \frac{1}{2}$.

Так как $f(z)$ - голоморфна в $T_{D''}$, то $|f(z)|$ - субгармонична в $T_{D''}$, поэтому для любого $z_0 \in T_{D'}$

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{r^m \omega_m} \int\limits_{|z-z_0|<r} |f(z)| dx dy.$$

Так как $B(z_0, r) \subset \{z = x + iy : |y - y_0| < r,\ x \in x_0 + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^m\}$, то

$$|f(z_0)| \leq r^{-m} \omega_m^{-1} \int\limits_{u \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^m} \int\limits_{|v|<r} |f(z_0 + u + iv)| du dv$$

$$\leq r^{-m} \omega_m^{-1} \sup_{z \in T_{D''}} \int\limits_{[0,1]^m} |f(z+u)| du = r^{-m} \omega_m^{-1} S_{1,T_{D''}}(f, 0).$$

Отсюда и из неравенства Гельдера следует утверждение леммы для любого $p \geq 1$.

■

Доказательство теоремы 2. Зафиксируем $D' \subset\subset D$. Выберем область D'' так, что $D' \subset\subset D'' \subset\subset D$. Применяя лемму 3 к функции $f(z+\tau) - f(z)$, где τ - $(T_{D''}, \varepsilon, p)$-почти период для функции $f(z)$, получаем, что τ будет $A\varepsilon$-почти периодом (в смысле равномерной метрики) для $f(z)$ в $T_{D'}$. Отсюда следует утверждение теоремы. ■

Теорема 3. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в T_D, D - область в $\mathbf{R}^m$, и ограничена по Степанову внутри T_D. Пусть также $f(z)$ - почти периодическая функция по Степанову на одной прямой $y = y_0 \in D$. Тогда $f(z)$ - почти периодическая функция по Бору внутри T_D.*

Доказательство. Пусть τ - $T_{\{y_0\},\delta,p}$-почти период по Степанову функции $f(x + iy_0)$. Рассуждая, как и в теореме 1, с функцией

$$\tilde{\varphi}_\delta(z) = \log \left(\int\limits_{[0,1]^m} |f(z + u + \tau) - f(z + u)|^p du \right)^{\frac{1}{p}}$$

вместо $\varphi_\delta(z)$ и применяя леммы 1 и 2, получаем, что для любых $\varepsilon > 0$ и $D' \subset\subset D$ найдется такое $\delta > 0$, что любой $T_{\{y_0\},\delta,p}$-почти период по Степанову функции $f(x + iy_0)$ является $T_{D',\varepsilon,p}$-почти периодом по Степанову функции $f(z)$. Поэтому $f(z)$ - почти периодическая функция по Степанову внутри T_D, а ввиду теоремы 2 функция $f(z)$ - почти периодическая по Бору внутри T_D.

■

Изучим теперь вопрос о голоморфном почти периодическом продолжении внутрь трубчатой области функций почти периодических на части границы.

Вначале, следуя [6], [7], введем определение ряда Фурье почти периодической (по Бору или по Степанову) функции $f(z)$ на множестве T_K. Именно так называется ряд вида

$$\sum_{\lambda \in \mathbf{R}^m} a(\lambda, y) e^{i\langle x, \lambda \rangle}, \tag{4}$$

где $\langle x, \lambda \rangle$ - скалярное произведение в $\mathbf{R}^m$, а

$$a(\lambda, y) = \lim_{N \to \infty} \left(\frac{1}{2N} \right)^m \int\limits_{[-N,N]^m} f(x+iy) e^{-i\langle x, \lambda \rangle} dx. \tag{5}$$

В цитированных выше работах доказывается, что если у двух функций ряды Фурье совпадают, то функции совпадают тождественно.

Множество $\lambda \in \mathbf{R}^m$, для которых $a(\lambda, y) \not\equiv 0$, называется спектром $f(z)$ и обозначается spf; это множество всегда не более чем счетно, поэтому ряд (4) может быть также записан в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y) e^{i\langle x, \lambda_n \rangle}.$$

Заметим, что частные суммы ряда (4) вообще говоря, не обязаны сходиться к функции $f(z)$, однако их чезаровские средние, так называемые суммы Бохнера-Фейера, сходятся (равномерно для почти периодических по Бору и в метрике S_{p,T_K} для почти периодических по Степанову) к функции $f(z)$. Отметим также, что, согласно [8], для голоморфных почти периодических функций в T_D ряд (4) может быть записан в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\langle y, \lambda_n \rangle} e^{i\langle x, \lambda_n \rangle}, \; a_n \in \mathbf{C} \tag{6}$$

или, что то же самое, как

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\langle z, \lambda_n \rangle}, \; a_n \in \mathbf{C}. \tag{7}$$

В дальнейшем любой ряд вида (7) будем называть рядом Дирихле.

Теорема 4. *Пусть для некоторого ряда Дирихле вида (7) при каждом* $y = \alpha_j$, $j = \overline{1,k}$ *существуют почти периодические функции по Бору* $f_j(x)$ *с рядами Фурье*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\langle \alpha_j, \lambda_n \rangle} e^{i\langle x, \lambda_n \rangle}. \tag{8}$$

Тогда существует почти периодическая функция по Бору $F(z)$ *на множестве* $T_{conv\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}}$, *ряд Фурье которой совпадает с (7); кроме того, если внутренность* D *множества* $conv\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}$ *не пуста, то* $F(z)$ *- голоморфна на множестве* T_D.

Доказательство. Рассмотрим суммы Бохнера-Фейера ряда (7):

$$\sigma_q(z) = \frac{S_0(z) + S_1(z) + \ldots + S_{q-1}(z)}{q} = \sum_{n=0}^{q-1} \left(1 - \frac{n}{q}\right) a_n e^{i\langle z, \lambda_n \rangle},$$

где $S_l(z) = \sum_{n=0}^{l} a_n e^{i\langle z, \lambda_n \rangle}$. На плоскостях $y = \alpha_j$, $j = \overline{1,k}$ эти суммы совпадают с суммами Бохнера-Фейера для $f_j(x)$ и, следовательно, сходятся к этим функциям. Положим $\varphi_{q,l}(z) = \log |\sigma_q(z) - \sigma_l(z)|$. По лемме 1 функция $\psi(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \varphi_{q,l}(x + iy)$ выпукла в $\mathbb{R}^m$. Для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших l и q имеем $\psi(\alpha_j) \leq \log \varepsilon$, в силу равномерной по $x \in \mathbb{R}^m$ сходимости сумм Бохнера-Фейера при $y = \alpha_j$, $j = \overline{1,k}$. Ввиду выпуклости $\psi(y)$ такое же неравенство выполняется на множестве $conv\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ и поэтому

$$|\sigma_q(z) - \sigma_l(z)| < \varepsilon \tag{9}$$

для всех $z \in T_{conv\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}}$. Таким образом, суммы Бохнера-Фейера $\sigma_q(z)$ образуют фундаментальную последовательность в равномерной метрике на $T_{conv\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}}$ и их предельная функция $F(z)$ имеет ряд Фурье (6) на этом множестве. Если же $D \neq \emptyset$, то суммы Бохнера-Фейера равномерно сходятся на D и, следовательно, в этом случае $F(z)$ голоморфна в T_D с рядом Дирихле (7). ■

Теорема 5. *Пусть задан ряд Дирихле (7) и при каждом $y = \alpha_j$, $j = \overline{1,k}$ существуют почти периодические функции по Степанову $f_j(x)$, ряд Фурье которых имеет вид (8). Тогда существует почти периодическая функция по Степанову $F(z)$ на множестве $T_{conv\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}}$ с рядом Фурье (6); кроме того, если внутренность D множества $conv\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$ не пуста, то $F(z)$ - голоморфная почти периодическая функция по Бору внутри T_D.*

Доказательство. Первая часть доказательства теоремы аналогична теореме 4, где вместо $\varphi_{q,l}(z)$ берется

$$\tilde{\varphi}_{q,l}(z) = \log \left(\int\limits_{[0,1]^m} |\sigma_q(z+u) - \sigma_l(z+u)|^p du \right)^{\frac{1}{p}}.$$

При этом мы получаем функцию $F(z)$, которая является почти периодической по Степанову на $T_{conv\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}}$. Покажем, что $F(z)$ - голоморфная почти периодическая функция по Бору внутри T_D, если $D \neq \emptyset$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем q и l столь большие, что

$$\tilde{\psi}_{q,l}(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \tilde{\varphi}_{q,l}(z) \leq \log \varepsilon.$$

Выберем область $D' \subset\subset D$ и применим лемму 3 к функции $\sigma_q(z) - \sigma_l(z)$. Мы получим

$$|\sigma_q(z) - \sigma_l(z)| \leq A\varepsilon,$$

где A зависит только от D', но не зависит от q, l и поэтому, как и в теореме 4, $\sigma_q(z)$ сходятся к голоморфной функции $F(z)$. ■

Теорема 6. *Пусть имеется ряд Дирихле вида (7), множество $E \subset \mathbf{R}^m$, и пусть при каждом $y \in E$ существует почти периодическая функция по Степанову $f_y(x)$, ряд Фурье которой равен (6), и пусть внутренность D множества $convE$ непуста. Тогда существует голоморфная почти периодическая функция по Бору внутри T_D, ряд Дирихле которой совпадает с (7).*

Сначала докажем следующую лемму:

Лемма 4. *Пусть множество $E \subset \mathbf{R}^m$ такое, что $\overline{E}$ содержит некоторую окрестность точки y_0. Тогда существует $\rho > 0$, существуют $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1} \in E$ такие, что шар $B(y_0, \rho)$ лежит в $conv\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}\}$.*

Доказательство леммы 4.

Возьмем шар $B(y_0, 2\rho)$. Пусть T - правильный симплекс, описанный около шара $B(y_0, 2\rho)$. Тогда $T \subset B(y_0, k\rho)$, $k = k(m)$. При достаточно малом ρ $T \subset \bar{E}$. Пусть $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{m+1}$ - вершины T, $\varepsilon > 0$. Существуют точки $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1} \in E$ такие, что $\rho(\alpha_k, \bar{\alpha}_k) < \varepsilon$. Пусть T_1 - симплекс с вершинами $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}$. При достаточно малом ε имеем $B(y_0, \rho) \subset T_1$. ■

Доказательство теоремы 6. Пусть $y_0 \in D' \subset\subset D$. По лемме 4 найдутся такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}$, что

$$B(y_0, \rho) \subset conv\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}\}$$

для некоторого $\rho > 0$. В силу компактности $\overline{D'}$ покрывается конечным числом $B(y_i, \rho_i)$ таких, что

$$B(y_i, \rho_i) \subset conv\{\alpha_1^i, \ldots, \alpha_{m+1}^i\}.$$

Таким образом,

$$D' \subset \bigcup_i conv\{\alpha_1^i, \ldots, \alpha_{m+1}^i\} \subset conv\{\bigcup_i \{\alpha_1^i, \ldots, \alpha_{m+1}^i\}\}$$

В силу теоремы 5 существует $F(z)$ - голоморфная почти периодическая функция по Бору внутри $T_{D'}$, ряд Дирихле которой совпадает с (7). Так как выбор $D' \subset\subset D$ был произволен, то это доказывает теорему. ■

ЛИТЕРАРУРА

1. Bohr H. Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. III Teil: Dirichletentwicklung analytischer Funktionen. // Acta math. – **47**. – 1926. – P. 237-281.

2. Bohr H. Contribution to the theory of analytic almost-periodic functions. – Kobenhaven. – 1943. – 37 p.

3. Favorov S. Yu., Rashkovskii A. Yu. and Ronkin L. I. Almost periodic currents and holomorphic chains. // C. R. Acad. Sci. Paris. – Serie I. – **327**. – 1998. – P. 302-307.

4. Левитан Б. М. Почти периодические функции.– М.: Гостехиздат, – 1953. – 396 с.

5. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. – М.: Наука, – 1971. – 430 с.

6. Ронкин Л. И. CR-функции и голоморфные почти периодические функции с целым конечным базисом. // МАГ. – Т.4. – 1997. – С. 472-490.

7. Ронкин Л. И. О некотором классе голоморфных почти периодических функций. // СМЖ. – **33**. – 1992. – С. 135-141.

8. Ронкин Л. И. Почти периодические обобщенные функции в трубчатых областях. – Зап. научн. сем. ПОМИ. – **247**. – 1997. – С. 210-236.

9. Ронкин Л. И. Теорема Йессена для голоморфных почти периодических функций в трубчатых областях. // СМЖ – **28**. – 1987. – С.199-204.

10. Ронкин Л. И. Элементы теории аналитических функций многих переменных. – К.: Наук. думка, – 1977. – 167 с.