

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені В. Н. КАРАЗІНА

В. М. Дубовик
В. М. Сухов

**РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З ОПТИКИ В КУРСІ
ЗАГАЛЬНОЇ ФІЗИКИ**

Навчальний посібник

Харків – 2023

УДК 535 (076.1)

Д 79

Рецензенти:

С. І. Тарапов – член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділу Інституту радіофізики та електроніки ім. О. Я. Усикова Національної академії наук України;

О. В. Лазоренко – завідувач кафедри загальної фізики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, доктор фізико-математичних наук.

*Затверджено до друку рішенням Вченої ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол № 4 від 29.03.2021 року)*

Дубовик В. М.

Д 79

Розв'язання задач з оптики в курсі загальної фізики : навчальний посібник / В. М. Дубовик, В. М. Сухов. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2023. – 184 с.

Навчальний посібник містить теоретичний огляд кожного розділу навчальної дисципліни «Оптика» та методичні рекомендації щодо розв'язання задач з оптики. Наведений розв'язок 98 задач з 9 розділів оптики. Кожен розділ містить контрольні питання для самостійної підготовки і задачі для самостійного розв'язання.

Навчальний посібник спрямований на студентів фізичних фахів університетів, які навчаються за спеціальностями 104 – «Фізика та астрономія», 105 – «Прикладна фізика та наноматеріали», а також може бути корисним студентам природознавчих факультетів.

УДК 535 (076.1)

© Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, 2023

© Дубовик В. М., Сухов В. М., 2023

ЗМІСТ

Передмова	4
РОЗДІЛ 1. Геометрична оптика	5
1.1. Розв'язання задач	10
1.2. Контрольні питання до розділу 1	16
РОЗДІЛ 2. Фотометрія	17
2.1. Розв'язання задач	21
2.2. Контрольні питання до розділу 2	26
РОЗДІЛ 3. Електромагнітні хвилі	27
3.1. Розв'язання задач	30
3.2. Контрольні питання до розділу 3	49
РОЗДІЛ 4. Інтерференція світла	51
4.1. Розв'язання задач	55
4.2. Контрольні питання до розділу 4	77
РОЗДІЛ 5. Дифракція світла	78
5.1. Розв'язання задач	90
5.2. Контрольні питання до розділу 5	123
РОЗДІЛ 6. Поляризація світла	124
6.1. Розв'язання задач	130
6.2. Контрольні питання до розділу 6	139
РОЗДІЛ 7. Кристалооптика	141
7.1. Розв'язання задач	149
7.2. Контрольні питання до розділу 7	162
РОЗДІЛ 8. Дисперсія та поглинання світла	164
8.1. Розв'язання задач	165
8.2. Контрольні питання до розділу 8	176
РОЗДІЛ 9. Ефект Доплера в оптиці	177
9.1. Розв'язання задач	178
9.2. Контрольні питання до розділу 9	181
Список літератури	183

ПЕРЕДМОВА

Метою навчального посібника є поєднання фізичної теорії і практики розв'язання задач з оптики в курсі загальної фізики. Структура навчального посібника побудована таким чином, що до кожного розділу спочатку надається теорія відповідного розділу і далі йде розв'язання задач, пояснюється методика і принципи розв'язання конкретних типів задач. Теоретична частина написана коротко, вона містить опис і пояснення основних законів і формул, що використовуються в даному розділі.

Посібник містить розділи, де розглядаються лише хвильові властивості світла. Коротко розглядається розділ геометричної оптики. Квантові властивості світла не розглядаються. Вони розглянуті у навчальному посібнику В. М. Дубовик «Розв'язання задач з атомної фізики в курсі загальної фізики», який вийшов з друку у 2018 році. При написанні посібника використана система СІ. Після кожної глави наведені контрольні питання для самоконтролю і задачі для самостійного розв'язання.

Автори висловлюють вдячність співробітникам ХНУ імені В. Н. Каразіна професору І. А. Гірке і доценту В. П. Олефіру за корисні обговорення, критику і поради в ході роботи над посібником. Автори вдячні науковому співробітнику А. Невгасімову за допомогу в роботі над малюнками.

Навчальний посібник може бути корисним студентам для самостійної підготовки, які навчаються за напрямком підготовки «Фізика та астрономія», «Прикладна фізика та наноматеріали», а також студентам природознавчих факультетів.

Автори

РОЗДІЛ 1. ГЕОМЕТРИЧНА ОПТИКА

Геометрична оптика є найстарішим розділом оптики. Її завдання полягає в дослідженні оптичних явищ на основі двох експериментальних законів: закону відбиття і закону заломлення світлового променя. В геометричній оптиці ці закони поряд з принципом прямолінійності світлового променя відіграють роль встановлених дослідом істин.

Швидкість світла. Світло, яке випромінюється будь-яким джерелом, досягає спостерігача не миттєво, а через деякий проміжок часу. Максвелл теоретично довів існування електромагнітних хвиль. Він дістав для швидкості поширення хвиль у вакуумі значення, яке співпадає з електродинамічною сталою $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Ця величина входить до рівнянь Максвелла як відношення величини елементарного заряду у магнітній системі до величини елементарного заряду у електричній системі, яку на досліді виміряли німецькі фізики В. Вебер і Р. Кольрауш у 1857 році. Максвелл зробив висновок, що світло є одним із видів електромагнітних коливань.

За вимірами Майкельсона, зробленими у 1926 р. з точністю до 1 км/с, швидкість світла в порожнечі дорівнює $c = 299796$ км/с. У подальшому в теоретичній фізиці швидкість світла приймається $c = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$.

Закони відбиття світла. До числа найпростіших явищ, що розглянуті в геометричній оптиці, належить відбиття світла від дзеркала. Відбиття світла від дзеркала підпорядковується двом законам, які були відкриті дослідним шляхом.

Промінь, який падає на поверхню, нормаль до поверхні в точці падіння, і промінь, відбитий від поверхні, лежать в одній площині, яка називається площиною падіння.

Кут між падаючим променем і нормаллю до поверхні у точці падіння (кут падіння) дорівнює куту між відбитим променем і тією ж нормаллю (кут відбиття).

Скориставшись цими двома законами відбиття світла, можна пояснити усі явища, які спостерігаються при відбиванні світлового променя від дзеркала найскладнішої форми.

Сферичне дзеркало. Розглянемо випадок відбиття паралельного світлового пучка від увігнутого сферичного дзеркала. На рис. 1.1 дуга кола являє собою переріз сферичного дзеркала, точка O – центр дзеркала. Промінь світла, який іде паралельно прямій OS , яка зветься **оптичною**

віссю, падає на дзеркало у точці A і після відбиття йде униз, перетинаючи вісь OS у точці B .

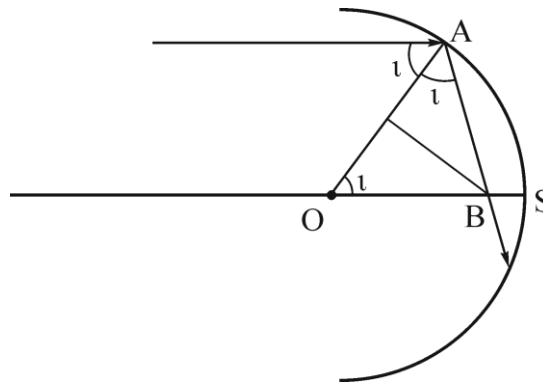


Рис. 1.1. Сферичне дзеркало

Трикутник AOB – рівнобедрений, радіус кривизни $R=OA$. Сторона OB пов'язана з радіусом кривизни наступною формулою:

$$OB = \frac{R}{2 \cos i}, \quad (1.1)$$

звідки BS , як функція R, i , буде мати наступний вигляд:

$$BS = OS - OB = R - \frac{R}{2 \cos i}. \quad (1.2)$$

Промені, які падають на дзеркало на різних відстанях від вершини S під різними кутами, будуть перетинати вісь OS у різних точках B .

Таким чином, сферичне дзеркало не збирає відбиті промені в одну точку. Лише якщо воно має нескінченно малі розміри порівняно з радіусом кривизни, можна приблизно вважати, що всі відбиті промені сходяться в одній точці. У цьому випадку кут $i=0$, $\cos i=1$, і формула (1.2) набуває такого вигляду:

$$BS \approx \frac{R}{2}.$$

У цьому випадку BS позначають літерою f і звать **головною фокусною відстанню дзеркала**. Несходження променів в одну точку зветься **сферичною аберациєю**.

Заломлення світла. Повне внутрішнє відбиття. При переході світла з одного середовища до іншого відбувається заломлення світлового променя. Це явище пов'язане з тим, що світло поширюється з різною

швидкістю в різних середовищах. Заломлення світлових променів підлягає двом таким законам.

Промінь, який падає на поверхню заломлення, нормаль до поверхні у точці падіння і заломлений промінь лежить в одній площині.

Синус кута падіння i між падаючим променем і нормаллю відноситься до синуса кута заломлення r між заломленим променем і нормаллю як швидкість світла в першому середовищі v_1 до швидкості світла у другому середовищі v_2 :

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (1.3)$$

Або вводять показник заломлення n , який дорівнює

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n. \quad (1.4)$$

При зворотному напрямку променя – з більш густого середовища в менш густе – картина буде зворотною. Збільшуючи кут r , ми можемо дійти до такого кута r_0 , при якому

$$n \sin r_0 = \sin i$$

буде дорівнювати одиниці. Тоді $\sin i = 1$, $i = \frac{\pi}{2}$.

Заломлений промінь буде ковзати уздовж границі розділу. Це явище називається **повним внутрішнім відбиттям**.

Граничний кут r_0 визначається формулою:

$$\sin r_0 = \frac{1}{n}. \quad (1.5)$$

Для звичайного скла $n=1,5$ і кут r_0 дорівнює 42° .

На рис. 1.2 зображено **призму повного внутрішнього відбиття**, яку часто застосовують замість дзеркала. Промені падають під кутом 45° на грань, що відбиває.

Тонка призма. Лінза. На рис. 1.3 зображено переріз тонкої призми, виготовленої зі скла з показником заломлення n і малим кутом $\alpha \ll 1$.

Кут падіння i – кут між променем і перпендикуляром, встановленим в точку падіння променя; кут заломлення r – кут між перпендикуляром і заломленим променем.

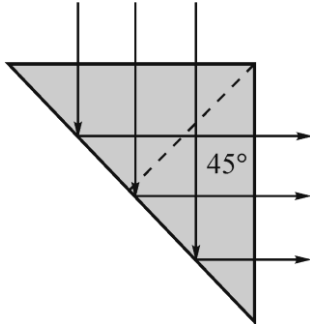


Рис. 1.2. Призма повного внутрішнього відбиття

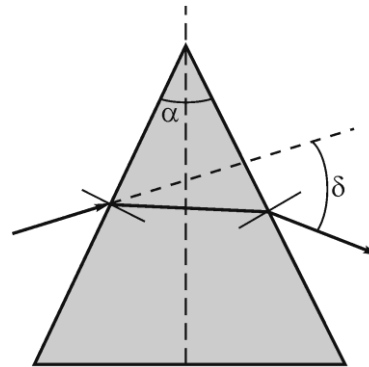


Рис. 1.3. Тонка призма. δ – кут, на який призма відхиляє промінь

У випадку малих кутів падіння i і заломлення формула (1.4) набуває вигляду:

$$\frac{\sin i}{\sin r} \approx \frac{i}{r} = n. \quad (1.6)$$

Застосовуючи формулу (1.6) послідовно до двох границь призми, можна знайти зв'язок між кутом відхилення променя δ , кутом заломлення призми α і показником заломлення n :

$$\delta = \alpha(n-1). \quad (1.7)$$

Прозоре тіло обмежене двома сферичними поверхнями, називається **лінзою**. Одна з поверхонь може бути й плоскою: її можна розглядати як сферичну поверхню з нескінченим радіусом кривизни. Пряма, що проходить

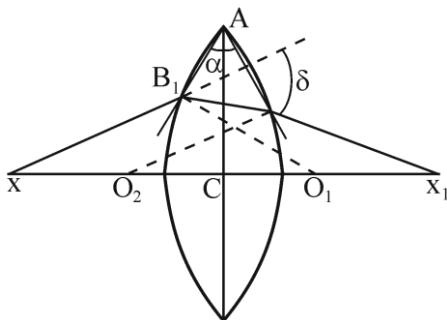


Рис. 1.4. Тонка лінза

через центри сферичних поверхонь, називається **головною віссю лінзи**. Для **тонкої лінзи** товщина O_1O_2 (рис. 1.4) нескінченно мала порівняно з радіусами кривизни R_1 і R_2 обох її поверхонь (для симетричної лінзи $O_1B = R$.) У тонкій лінзи є точка C (вона називається **оптичним центром лінзи**). Всі промені, що проходять крізь точку C , практично не заломлюються лінзою. Будь-яка пряма, що проходить крізь **оптичний центр лінзи під кутом до**

головної оптичної осі, називається побічною оптичною віссю. Світловий промінь, який проходить вздовж оптичної осі (головної або побічної), називається **центральним**.

Питання про тонку лінзу легко звести до питання про тонку призму, точніше, до питання про цілу сукупність тонких призм, на які можна поділити нашу лінзу. При зроблених припущеннях одержимо формулу лінзи:

$$\frac{1}{cx} + \frac{1}{cx_1} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (1.8)$$

При зроблених нами припущеннях cx_1 не залежить від AC , тобто промені, які вийшли з точки x і заломилися потім різними частинами лінзи (вони відповідають різним AC), зберуться всі в одній точці x_1 , яка зветься зображенням x .

Якщо точка x знаходиться нескінченно далеко, то $cx = \infty$ і формула (1.8) набуває вигляду:

$$\frac{1}{cx_1} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (1.9)$$

У цьому випадку cx_1 позначають f і називають **ГОЛОВНОЮ ФОКУСНОЮ ВІДСТАННЮ ЛІНЗИ**:

$$f = \frac{R_1 \cdot R_2}{(n-1) \cdot (R_1 + R_2)}, \quad (1.10)$$

і формула (1.8) переходить у формулу:

$$\frac{1}{cx} + \frac{1}{cx_1} = \frac{1}{f}. \quad (1.11)$$

Величина, обернена головній фокусній відстані, зветься **ОПТИЧНОЮ СИЛОЮ ЛІНЗИ**. Одиницею оптичної сили є **діоптрія**. Діоптрія дорівнює оптичній силі лінзи з фокусною відстанню в один метр.

Найпростішим прикладом оптичної системи є пара тонких лінз, складених щільно одна до одної. В цьому випадку фокусна відстань системи дуже просто пов'язана з фокусною відстанню окремих лінз:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \quad (1.12)$$

У 1662 р. французький фізик і математик П. Ферма встановив основний принцип, з якого випливають всі закони геометричної оптики. Принцип Ферма стверджує, що світло поширюється таким шляхом, при якому час, необхідний для проходження світла від однієї точки до іншої, має найменше значення.

Якщо середовище має показник заломлення n_1 , то швидкість світла в цьому середовищі дорівнює $c_1 = \frac{c}{n_1}$, де c – швидкість світла в пустоті. Тому час, протягом якого світло проходить відстань l , у середовищі з показником заломлення n_1 , визначається співвідношенням:

$$t = \frac{l}{c_1} = \frac{ln_1}{c}. \quad (1.13)$$

Добуток геометричного шляху l на показник заломлення n_1 називають **оптичним шляхом**.

1.1. Розв'язання задач

1.1. Одержати за допомогою принципу Ферма закони відбиття і заломлення на границі розподілу двох однорідних прозорих середовищ. Границя розподілу є площиною.

Розв'язок. Згідно з принципом Ферма світло поширюється таким шляхом, при якому час, необхідний для проходження світла від точки A до точки B , є мінімальним (рис. 1.5). Відстань AOB світло пройде за час t :

$$t = \frac{AO}{c} n_1 + \frac{OB}{c} n_2 = \frac{n_1}{c} \sqrt{x^2 + h_1^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{(b-x)^2 + h_2^2},$$

де c – швидкість світла в пустоті; n_1, n_2 – абсолютні показники заломлення середовищ 1 і 2.

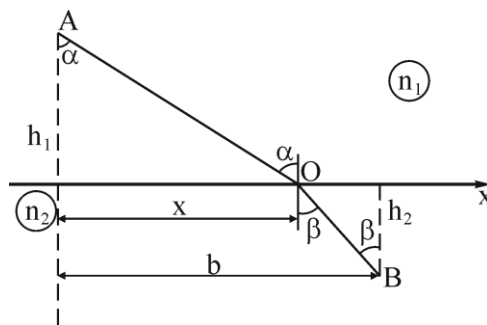


Рис. 1.5. Заломлення світла на границі розподілу двох середовищ

Оскільки час t повинен бути мінімальним, то

$$\frac{dt}{dx} = 0,$$

і ми одержимо рівняння

$$n_1 = n_1 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + n_1^2}} = n_2 \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2 + n_2^2}}.$$

Оскільки

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + n_1^2}} = \sin \alpha, \quad \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2 + n_2^2}} = \sin \beta,$$

то одержимо закон заломлення світла:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta.$$

При розв'язку другої частини задачі слід врахувати, що точка B знаходиться в середовищі 1, тобто $n_1 = n_2$ і $\sin \alpha = \sin \beta$, звідки $\alpha = \beta$. Одержаний вираз називається **законом відбиття світла**.

1.2. На дні водоймища завглибшки h світить лампочка. Знайти мінімальний радіус непрозорого диска R_{\min} , при якому лампочка не буде спостерігатися з берега. Центр диска і лампочка лежать на одному перпендикулярі до поверхні води.

Розв'язок. Лампочка не буде видною, коли промінь від неї буде ковзати уздовж границі розподілу вода – повітря (рис. 1.6).

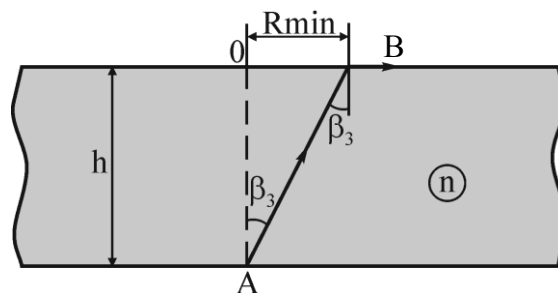


Рис. 1.6. Лампочка на дні водоймища

Згідно із законом заломлення світла для кута падіння променя AB виконується співвідношення $n \sin \beta = 1$, де n – абсолютний показник заломлення води (із довідника визначимо $n = 1,33$). Оскільки кут $OAB = \beta_3$, то

З двох останніх виразів одержимо:

$$\frac{r}{R} = \frac{\cos \Theta}{\cos \beta} \cdot \frac{d\beta}{d\Theta} \quad \text{і} \quad h' = h \frac{\cos^2 \Theta}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{d\beta}{d\Theta}.$$

Згідно із законом Снелліуса

$$\sin \Theta = n \sin \beta.$$

Із диференціювання останнього виразу одержимо похідну $d\beta/d\Theta$:

$$\cos \Theta d\Theta = n \cos \beta d\beta, \quad \frac{d\beta}{d\Theta} = \frac{\cos \Theta}{n \cos \beta}.$$

Після підстановки цього виразу в формулу для h' одержимо

$$h' = \frac{h}{n} \cdot \frac{\cos^3 \Theta}{\cos^3 \beta}.$$

Оскільки

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \Theta}{n^2}} = \sqrt{\frac{n^2 - \sin^2 \Theta}{n^2}},$$

то остаточно одержимо для h' вираз:

$$h' = h n^2 \cos^3 \Theta (n^2 - \sin^2 \Theta)^{-3/2}.$$

1.4. Предмет AB , висота якого $h = 12$ см, розташований перпендикулярно до головної оптичної осі лінзи з фокусною відстанню $f = 20$ см. Відстань від предмета до лінзи $a_1 = 60$ см. Визначити положення зображення предмета, його напрямок і величину.

Розв'язок. Згідно з формулою тонкої лінзи положення зображення предмета визначається відстанню a_2 :

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{f}, \quad a_2 = \frac{a_1 \cdot f}{a_1 - f} = 30 \text{ (см)}.$$

Зображення знаходиться на відстані 30 см від лінзи. Оскільки $a_2 > 0$, то зображення дійсне.

Запишемо формулу тонкої лінзи у вигляді $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$, де F – фокусна відстань лінзи, d – відстань від предмета до лінзи, f – відстань від зображення до лінзи. Лінійне збільшення лінзи Γ – це відношення лінійного розміру зображення H до розміру h самого предмета: $\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{f}{d}$.

У наших позначеннях

$$\Gamma = -\frac{a_2}{a_1} = -0,5.$$

Оскільки $\Gamma < 0$, то зображення є переверненим, а його величина $A'B' = 0,5 \cdot AB = 6$ (см).

1.5. Уявний предмет знаходиться на відстані 10 см від тонкої лінзи розсіювання з фокусною відстанню 15 см. Знайти положення, напрямок і величину зображення.

Розв'язок. Оскільки це лінза розсіювання, то $a_1 = 60$ см (предмет уявний), $f = -15$ см (рис. 1.8).

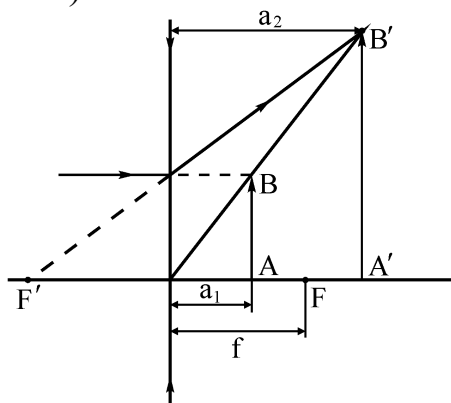


Рис. 1.8. Лінза розсіювання

За формулою тонкої лінзи

$$a_2 = \frac{a_1 \cdot f}{a_1 - f}, \quad a_2 = \frac{-10 \cdot (-15)}{-10 - (-15)} = 30 \text{ (см)}.$$

Висновок: зображення предмета дійсне ($a_2 > 0$) і розташоване на відстані 30 см від лінзи.

Згідно з формулою для лінійного збільшення лінзи

$$\Gamma = -\frac{a_2}{a_1},$$

де $a_1 = -10$ см; $a_2 = 30$ см. визначимо напрямок і величину зображення:

$$\Gamma = -\frac{a_2}{a_1} = 3.$$

Таким чином, зображення є прямим і втричі більшим за предмет.

1.6. Тонка плоско-опукла лінза з радіусом кривизни R виготовлена зі скла з показником заломлення $n=1,5$. Лінза знаходиться у повітрі. Знайти оптичну силу Φ такої лінзи.

1.7. На рис. 1.9 показані бідзеркала Френеля. S – джерело світла; r – відстань від джерела S до точки O ; кут φ – малий ($\varphi \ll 1$). Побудувати зображення уявних джерел S_1 і S_2 та знайти їх положення, а також відстань d між ними. Бідзеркала Френеля – це два плоскі дзеркала, дотичні у точці O (їх відбиваючі поверхні утворюють кут, близький до π).

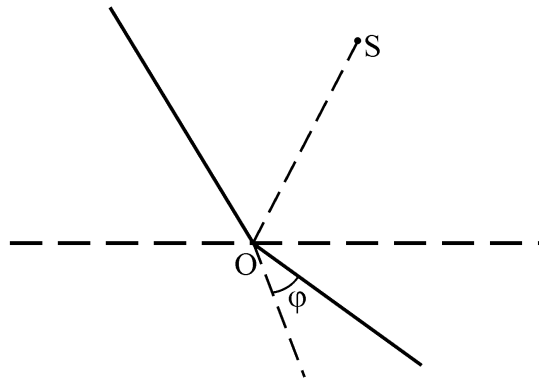


Рис. 1.9. Бідзеркала Френеля

1.8. Біпризма Френеля виготовлена зі скла з показником заломлення $n=1,5$. Кут заломлення θ такої призми малий ($\theta \ll 1$). Побудувати зображення уявних джерел S_1 і S_2 та знайти їх положення, а також відстань d між ними (рис. 1.10). Біпризма Френеля – це виготовлені з одного шматка скла дві призми з малим кутом заломлення θ , які мають одну загальну грань.

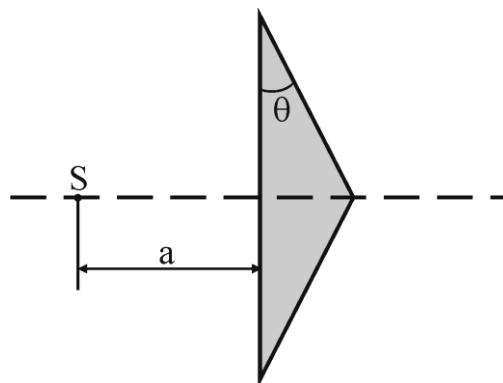


Рис. 1.10. Біпризма Френеля

Для збільшення віддалених предметів застосовують підзорну трубу або телескоп. У найпростішому вигляді телескоп складається з двох лінз, об'єктива і окуляра. Останній може бути як позитивною (збиральною) лінзою (кеплерова труба), так і негативною (розсіювальною) лінзою (галілеєва труба, або бінокль).

1.9. Побудувати хід променів у підзорній трубці, якщо окуляром є лінза розсіювання (трубка Галілея). Обчислити кутове збільшення підзорної труби, якщо фокусні відстані об'єктива і окуляра дорівнюють, відповідно, 0,5 м і 0,2 м. Кутове збільшення підзорної труби визначається співвідношенням

$$\Gamma = \frac{F}{f}, \quad \text{де } F - \text{фокусна відстань об'єктива, } f - \text{фокусна відстань}$$

окуляра.

1.10. Побудувати хід променів у підзорній трубці, якщо окуляром є збиральна лінза (трубка Кеплера). Обчислити кутове збільшення підзорної труби, якщо фокусні відстані об'єктива і окуляра дорівнюють 0,5 м і 0,2 м, відповідно. Кутове збільшення підзорної труби визначається

співвідношенням $\Gamma = \frac{F}{f}$, де F – фокусна відстань об'єктива, f –

фокусна відстань окуляра.

1.11. Промінь світла падає на плоско паралельну пластинку, яка виготовлена зі скла з показником заломлення $n=1,5$. Кут падіння Θ дорівнює $\Theta=60^\circ$. Знайти величину зміщення променя, який вийшов з пластинки завтовшки $d=6$ см.

1.12. Знайти кут падіння Θ_1 світлового променя, який після відбиття від поверхні води (показник заломлення $n=1,33$) буде перпендикулярним до заломленого променя.

Контрольні питання до розділу 1

1. Закони відбивання і заломлення лінзи.
2. Формула тонкої лінзи. Оптична сила лінзи.
3. Проходження світлових променів крізь тонку призму.
4. Принцип Ферма.
5. Застосування опуклої лінзи у ролі збільшувального скла, або лупи.
6. Хід світлових променів у мікроскопі.
7. Схема фотографічного апарата.
8. Схема проекційного апарата.
9. Схема кеплерової труби.
10. Схема труби Галілея.
11. Схема телескопа (рефлектора та рефрактора).

РОЗДІЛ 2. ФОТОМЕТРІЯ

Основою реєстрації електромагнітних хвиль оптичного діапазону є вимірювання потоку енергії, який переносить хвиля при її поширюванні, тобто оптичного вимірювання потужності випромінювання. Для оптичного діапазону період коливань складає приблизно 10^{-15} с. Тому усі існуючі приймачі випромінювання у оптичному діапазоні вимірюють тільки ті величини, які є квадратичними за напруженістю поля.

При випромінюванні джерел вимірюється кількість енергії, що її висилає джерело щосекунди.

З усієї падаючої променевої енергії око сприймає лише вузьку область спектра від 0,38 до 0,76 мкм. Але і в цих межах чутливість зорового апарату неоднакова. Найбільшу чутливість око має при довжині хвилі $\lambda=0,556$ мкм. Чутливість середнього нормального ока людини до випромінювання різної довжини хвилі характеризується кривою відносної спектральної чутливості $V(\lambda)$ (рис. 2.1). Функція $V(\lambda)$ для довжини хвилі $\lambda=0,556$ мкм приймається за одиницю. Функція $V(\lambda)$ зворотно пропорційна до потоків енергії, які викликають у людини однакові за

інтенсивністю зорові відчуття: $\frac{V(\lambda_1)}{V(\lambda_2)} = \frac{(d\Phi_e)_2}{(d\Phi_e)_1}$.

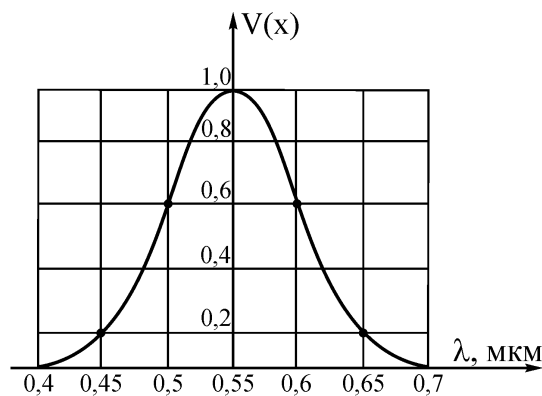


Рис. 2.1. Крива видимості $v(\lambda)$. Максимуму функції відповідає довжина хвилі $\lambda = 0,556$ мкм ($v(0,556 \text{ мкм})=1$)

Для характеристики інтенсивності світла з урахуванням його здатності викликати зорові відчуття вводиться величина, яку називають **світловим потоком**. Для інтервала $d\lambda$ світловий потік визначається співвідношенням

$$d\Phi = V(\lambda)d\Phi_e.$$

Оскільки функція $V(\lambda)$ – безрозмірна величина, то розмірність світлового потоку збігається з розмірністю потоку енергії.

Існує два принципові методи вимірювання світлових характеристик: енергетичний і фотометричний, які взаємопов'язані.

Абсолютні виміри променистої енергії пов'язані з дуже великими труднощами. При визначенні енергетичних величин основною величиною є потік випромінювання, яка вимірюється у ваттах (Вт). При визначенні фотометричних величин основною величиною є сила світла, яка вимірюється у **канделах (Кд)**. Кандела є однією з основних одиниць Міжнародної системи СІ.

Енергетичні величини. Основною величиною є потік випромінювання. Потік випромінювання Φ_0 характеризується потужністю випромінювання, яку переносять електромагнітні хвилі крізь площу σ . Потік Φ_0 є середнім потоком за проміжок часу, який значно перевищує період колювання. Одиницею потоку випромінювання є ватт (Вт). Потік пов'язаний із інтенсивністю $I = | \langle \vec{S} \rangle |$ співвідношенням:

$$\Phi_0 = \int_{\sigma} \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{\sigma}, \quad (2.1)$$

де $I = | \langle \vec{S} \rangle |$ – інтенсивність випромінювання, тобто середнє значення модуля вектора Пойнтінга.

Разом з величинами Φ_0 і $\langle \vec{S} \rangle$, які характеризують випромінювання, вводять ще енергетичні величини для характеристики освітленості поверхні і самого джерела випромінювання.

Енергетична освітленість E характеризується відношенням потоку випромінювання до площі цієї ділянки:

$$E = \frac{d\Phi}{d\sigma}. \quad (2.2)$$

Якщо випромінювання падає під кутом Θ відносно перпендикуляра до поверхні, тоді освітленість зменшується:

$$E = \langle S \rangle \cdot \cos \Theta. \quad (2.3)$$

Одиницею освітленості є Вт/м² (збігається з інтенсивністю світла).

Енергетична експозиція характеризується повною енергією випромінювання, яке падає на 1 м² поверхні за час t :

$$H = E \cdot t. \quad (2.4)$$

Одиницею вимірювання енергетичної експозиції є Дж/м².

Сила світла I характеризує випромінювання джерела у даному напрямку. Сила світла визначається як світловий потік, який припадає на одиницю тілесного кута стерadian (ср). Якщо джерело випромінює в даному напрямку потік Φ у межах тілесного кута $d\Omega$, то сила світла I дорівнює:

$$I(\Theta, \varphi) = \frac{d\Phi}{d\Omega}. \quad (2.5)$$

Одиницею вимірювання сили світла є Вт/ср.

Повний потік випромінювання (потік крізь замкнуту поверхню, яка оточує джерело) дорівнює:

$$\Phi = \int_{4\pi} I d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (\Theta, \varphi) \cdot \sin \Theta d\Theta. \quad (2.6)$$

Для характеристики джерела світла вводять ще дві енергетичні величини: енергетичну яскравість $B(\Theta)$ і енергетичну світимість R . Якщо площадка площею $d\sigma$ (джерело) випромінює потік Φ в межах тілесного кута $d\Omega$, вісь якого складає кут Θ з нормаллю до площадки, то яскравість $B(\Theta)$ дорівнює силі світла з 1 м^2 проєкції поверхні джерела (рис. 2.2) на площадку, перпендикулярну до променя зору:

$$B(\Theta) = \frac{d\Phi}{d\Omega d\sigma \cos \Theta}. \quad (2.7)$$

Одиницею енергетичної яскравості є Вт/м² ср.

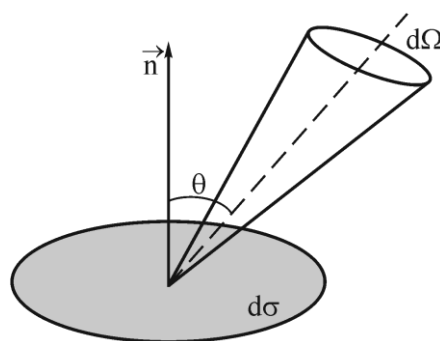


Рис. 2.2. До визначення поняття яскравості

Енергетична світність R визначається як світловий потік, який випромінює кожен квадратний метр поверхні джерела:

$$R = \frac{d\Phi}{d\sigma}. \quad (2.8)$$

Одиницею енергетичної світимості R є Вт/м².

Оскільки $d\Phi = B(\Theta) \cdot d\Omega \cdot d\sigma \cdot \cos \Theta$, то вираз для R можна визначити як інтеграл:

$$R = \int B(\Theta) \cos \Theta \cdot d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} B(\Theta) \cdot \cos \Theta \cdot \sin \Theta d\Theta.$$

Фотометричні величини. Всі світлові виміри, виконані за допомогою різних фотометрів, є відносними. Якщо у фотометричному вимірі бере участь око, то фотометрування зводиться до порівняння яскравостей двох фотометричних полів: стандартного і вимірюваного. При таких вимірюваннях основну роль відіграє тільки та частина енергії випромінювання, яка викликає світлові відчуття.

Через те, що найзручнішою для виміру одиницею є сила світла, то еталоною величиною буде вибрана саме вона. Одиницею сили світла є **кандела** (кд) (від лат. *candela* – свічка). Кандела – це сила світла, яке випромінюється з $\frac{1}{60}$ см² поверхні еталоного джерела у напрямку нормалі.

Практичною одиницею світлового потоку є такий потік, який випромінюється рівномірно джерелом світла, що має силу світла 1 кандела, у тілесному куті 1 стерadian ($\frac{1}{4\pi}$ частина сфери):

$$d\Phi_v = dI_v \cdot d\Omega.$$

Одиниця світлового потоку названа 1 люмен (лм).

Одиницею освітленості є люкс (лк), який дорівнює освітленості площі в 1 м², коли на неї падає потік світла 1 лм, або (це те саме) який являє собою освітленість нормально розміщеної площини, яка знаходиться на віддалі 1 м від малого джерела з силою світла 1 кд:

$$E_v = \frac{d\Phi_v}{d\sigma}. \quad (2.9)$$

Одиниця яскравості $1 \frac{\text{кд}}{\text{м}^2}$ – це яскравість такої світної поверхні, кожний квадратний метр проекції якої посилає в даному напрямку світло силою 1 кд.

Одиниця світимості 1 лм/м^2 – це світимість площини, яка випромінює з кожного квадратного метра поверхні світловий потік, рівний 1 люменіві (лм).

2.1. Розв'язання задач

2.1. За допомогою кривої видимості (рис. 2.1) знайти:

а) потік енергії, який визначає відповідний монохроматичний світловий потік у 1 лм з довжинами хвиль $\lambda_1 = 0,55 \text{ мкм}$ і $\lambda_2 = 0,65 \text{ мкм}$;

б) світловий потік в інтервалі довжин хвиль від 0,58 до 0,63 мкм, якщо відповідний потік енергії у цьому інтервалі дорівнює 4,5 мВт.

Розв'язок. а) Як впливає з рис. 2.1, функція видимості $V(\lambda)$ дорівнює одиниці при $\lambda_1 = 0,55 \text{ мкм}$. Для інших довжин хвиль функція $V(\lambda)$ є меншою. Це означає, що та сама потужність випромінювання викликає відчуття світла у випадку меншої яскравості джерела. Світловий потік дорівнює:

$$\Phi_{CB} = V(\lambda) \cdot \Phi_{EH},$$

де Φ_{EH} – потік випромінювання у енергетичних одиницях.

Потік енергії дорівнює:

$$\Phi_{EH} = \frac{\Phi_{CB}}{V(\lambda)}.$$

Для одержання відповіді у системі СІ одержаний результат треба помножити на коефіцієнт $A = 1,6 \frac{\text{мВт}}{\text{лм}}$ (механічний еквівалент світла – потужність випромінювання, яка відповідає світловому потоку в 1 лм при $\lambda = 0,555 \text{ мкм}$).

б) Для обчислення світлового потоку в інтервалі довжин хвиль від λ_1 до λ_2 скористаємось співвідношенням

$$\Phi_{CB} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} V(\lambda) \cdot \varphi(\lambda) \cdot d\lambda,$$

де $\varphi(\lambda) = \frac{d\Phi_{EH}}{d\lambda}$ – функція розподілу енергії за довжинами хвиль.

Оскільки ця величина за умовою задачі є постійною, то

$$\Phi_{CB} = \varphi(\lambda) \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} V(\lambda) \cdot d\lambda.$$

Інтеграл можна визначити як площу трапеції зі сторонами $V(\lambda_1)$ і $V(\lambda_2)$ і висотою $(\lambda_2 - \lambda_1)$:

$$\Phi_{CB} = \varphi(\lambda) \frac{V(\lambda_1) - V(\lambda_2)}{2} (\lambda_2 - \lambda_1) = \Phi_{EH} \frac{V(\lambda_1) - V(\lambda_2)}{2},$$

оскільки $\varphi(\lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) = \Phi_{EH}$.

Для одержання результату у люменах необхідно одержаний результат поділити на коефіцієнт A .

2.2. У центрі квадратної кімнати, площа якої S , висить електрична лампочка. На якій висоті h від підлоги повинна висіти лампочка, яка дає максимальну освітленість у кутах кімнати?

Розв'язок. Енергетична освітленість E поверхні характеризується відношенням потоку випромінювання до площі цієї ділянки:

$$E = \frac{d\Phi}{d\sigma}.$$

Сила світла I характеризує випромінювання джерела у даному напрямку. Тому можна записати (рис. 2.3) вираз для освітленості наступним чином:

$$E = \frac{I}{r^2} \cdot \cos \Theta.$$

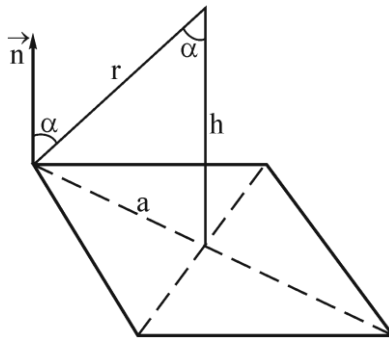


Рис. 2.3. Освітленість кімнати (до задачі 2.2)

Із геометрії задачі випливає, що $\cos \alpha = \frac{h}{r}$, $r^2 = h^2 + a^2$, тому вираз для E матиме вигляд:

$$E = \frac{I}{r^2} = \frac{I h}{(h^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Одержаний вираз треба дослідити на екстремум:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dh} &= I \frac{(h^2 + a^2)^{3/2} - h \cdot \frac{3}{2} \cdot (h^2 + a^2)^{1/2} \cdot 2h}{(h^2 + a^2)^3} = \\ &= I(h^2 + a^2)^{1/2} = 0. \end{aligned}$$

Звідки $h^2 + a^2 - 3h^2, 2h^2 = a^2 = \frac{S}{2}$, де S – площа. Висота h дорівнює $h = \frac{\sqrt{S}}{2}$.

2.3. Джерелом світла є диск, радіус якого дорівнює a і яскравість L не залежать від напрямку випромінювання. Чому дорівнює освітленість E у точці на відстані h від центра диска у напрямку нормалі до площини диска? Якою буде похибка при визначенні освітленості, якщо диск прийняти за точкове джерело світла з силою світла $I = \pi L a^2$?

Розв'язок. а) Розіб'ємо подумки диск на вузькі кільцеві концентричні зони радіусом r і завширшки dr ($dr \ll r$). Площа такої зони $d\sigma = 2\pi r dr$, і вона випромінює під кутом α у напрямку до нормалі диска з силою світла

$$dI = L \cdot d\sigma \cdot \cos \alpha.$$

Світловий потік, який падає на площадку ΔS із кільцевої зони, дорівнює (рис. 2.4)

$$d\Phi = \frac{L \cdot d\sigma \cdot \cos \alpha \cdot \Delta S \cdot \cos \alpha}{R^2} = \frac{L \cdot d\sigma \cdot \cos^2 \alpha}{R^2} \cdot \Delta S.$$

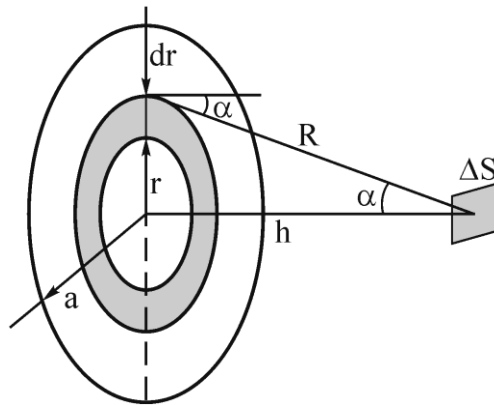


Рис. 2.4. До задачі 2.3

Освітленість площадки ΔS дорівнює:

$$dE = \frac{L \cdot d\sigma \cdot \cos^2 \alpha}{R^2}.$$

Із геометрії задачі випливає, що

$$R = \frac{h}{\cos \alpha}, \quad r = h \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad dr = \frac{h}{\cos^2 \alpha} \cdot d\alpha.$$

Таким чином, освітленість дорівнює:

$$dE = 2\pi L \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha.$$

Повну освітленість визначимо інтегруванням останнього виразу у межах кутів від 0 до α_0 :

$$E = \int dE = \int_0^{\alpha_0} 2\pi L \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = \pi L \sin^2 \alpha_0 = \pi L \frac{a^2}{a^2 + h^2}.$$

б) Якщо диск прийняти за точкове джерело світла, то освітленість дорівнює:

$$E_1 = \frac{\pi L a^2}{h^2}.$$

Відносна похибка дорівнює:

$$\delta = \frac{E_1 - E}{E}.$$

2.5. Точкове джерело світла з силою світла I знаходиться на відстані h від круглої площадки з радіусом a . Чому дорівнює світловий потік на цю площадку?

Подумки розіб'ємо диск на кільцеві зони з радіусом від r до $(r + dr)$ (рис. 2.5).

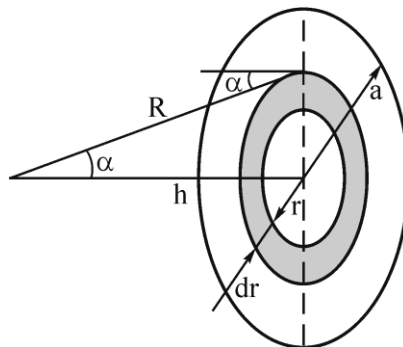


Рис. 2.5. До задачі 2.5

Площа кільцевої зони дорівнює:

$$d\sigma = 2\pi r dr.$$

Світловий потік, який падає на це кільце, дорівнює:

$$d\Phi = \frac{I \cdot 2\pi r dr \cdot \cos \alpha}{r^2 + h^2}.$$

Із геометрії задачі випливає, що $\cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}$, і повний світловий потік на диск дорівнює:

$$\Phi = \int d\Phi = \alpha \pi \cdot I \int_0^a \frac{h r dr}{(r^2 + h^2)^{3/2}} = 2\pi \cdot I (1 - h) \cdot (a^2 + h^2)^{-1/2}.$$

2.6. Крізь круглий отвір проходить променистий потік від точкового джерела світла. Джерело знаходиться на відстані $h = 40$ см від круглого отвору, діаметр отвору $a = 60$ см. Променистий потік дорівнює $\Phi = 12,5$ Вт. Знайти енергетичну силу світла джерела.

Розв'язок. Скористаємося рис. 2.5, але в цьому випадку a – діаметр отвору. Розіб'ємо подумки відкриту поверхню отвору на кільцеві зони з радіусами від r до $(r + dr)$. Площа такої кільцевої зони дорівнює $d\sigma = 2\pi r dr$, а світловий потік крізь таку зону дорівнює:

$$d\Phi = \frac{I \cdot 2\pi r dr \cdot \cos \alpha}{R^2}.$$

Із геометрії задачі випливає, що

$$r = h \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad dr = \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha, \quad \cos \alpha = \frac{h}{R} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}}.$$

Світловий потік крізь отвір дорівнює:

$$\Phi = \int d\Phi = \alpha \pi I \int_0^a \sin \alpha d\alpha = 2\pi I \left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right),$$

а енергетична сила I :

$$I = \frac{\Phi}{2\pi \left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right)}.$$

Контрольні питання до розділу 2

1. Яке джерело світла називається точковим?
2. Яке джерело світла називається ізотропним?
3. Закон Ламберта.
4. Що таке абсолютно чорне тіло?
5. Дайте визначення сили світла. Одиниця вимірювання сили світла у системі СІ.
6. Дайте визначення світлового потоку. Одиниця вимірювання світлового потоку у системі СІ.
7. Дайте визначення освітленості. Одиниця вимірювання освітленості у системі СІ.
8. Дайте визначення світимості. Одиниця вимірювання світимості у системі СІ.
9. Яскравість світної поверхні. Одиниця вимірювання яскравості у системі СІ.
10. Перехід від енергетичних величин до фотометричних. Що показує крива видимості?
11. Яке джерело світла є еталоном для визначення одиниці сили світла – кандели?
12. Яка довжина хвилі світлового випромінювання відповідає найбільшій чутливості ока людини?

РОЗДІЛ 3. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

Поле, яке оточує заряди, що прискорено рухаються, являє собою поєднання електричного і магнітного полів. Таке поле називають електромагнітним полем. Випромінювання електромагнітних хвиль викликається прискореним рухом електричних зарядів. Для генерування електромагнітних хвиль користуються періодичним коливним рухом зарядів.

Відкриття Максвеллом (1864 р.) струму зміщення $\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$ дозволило йому створити єдину теорію електромагнітного поля. Теорія Максвелла не тільки об'єднала з єдиної точки зору електричні і магнітні явища, але й дала можливість теоретично показати існування електромагнітних хвиль (Максвелл, 1865 р.).

Розглянемо систему рівнянь Максвелла:

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} d\vec{l} &= -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, & \oint \vec{D} d\vec{S} &= \int \rho dv, \\ \oint \vec{H} d\vec{l} &= \int \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}, & \oint \vec{B} d\vec{S} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Систему рівнянь Максвелла необхідно доповнити матеріальними рівняннями:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}^*), \quad (3.2)$$

де \vec{E}^* – напруженість поля сторонніх сил.

Із системи рівнянь Максвелла шляхом алгебраїчних перетворень можна одержати такі рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Рівняння такого типу мають назву «хвильових». Рішенням таких рівнянь є гармонічна функція, яка описує плоску хвилю:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha), \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha),\end{aligned}\quad (3.4)$$

де \vec{E}_0, \vec{H}_0 – амплітуди напруженості електричної і магнітної складової хвилі; ω – циклічна або кругова частота ($\omega = 2\pi\nu$); α – початкова фаза.

Рівняння поверхні постійної фази (або хвильової поверхні) має вигляд: $(\omega t - \vec{k} \vec{r}) = \text{const}$. Це рівняння визначає у просторі площину, яка перпендикулярна до хвильового вектора \vec{k} . Ця площина переміщується у просторі вздовж напрямку вектора \vec{k} зі швидкістю $V = \frac{\omega}{k}$, де k – модуль хвильового вектора (або хвильове число). Таким чином рівняння (3.4) описують плоску хвилю. За типом хвильової поверхні електромагнітні хвилі поділяють на плоскі, сферичні, циліндричні. Вектор \vec{k} , який перпендикулярний до хвильової поверхні і показує напрямок поширення хвилі, називається **хвильовим вектором**. Його модуль $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ називається **хвильовим числом**.

Відстань, яку долає хвиля за один період, називається **довжиною хвилі** або просторовим періодом. Вона пов'язана з частотою хвилі співвідношенням:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega},$$

якщо хвиля поширюється в вакуумі.

Швидкість поширення електромагнітних хвиль у вакуумі дорівнює:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Якщо хвиля поширюється у середовищі, то швидкість поширення (фазова швидкість) визначається співвідношенням:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}},$$

де ϵ – діелектрична проникність середовища; μ – магнітна проникність.

Вектори $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$ взаємно перпендикулярні і утворюють правогвинтову систему (рис. 3.1).

Таке правоґвинтове співвідношення є внутрішньою властивістю електромагнітної хвилі і витікає з рівнянь Максвелла.

У електромагнітній хвилі фази коливань векторів \vec{E} і \vec{B} збігаються. Миттєва «фотографія» хвилі показана на рис. 3.2.

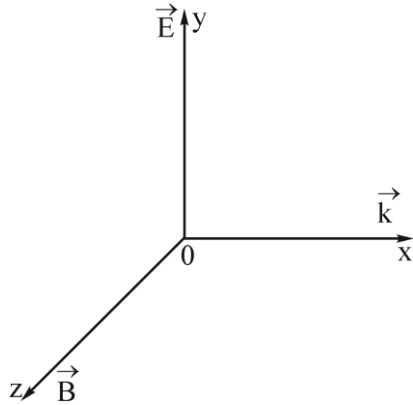


Рис. 3.1. Взаємна орієнтація векторів \vec{E} , \vec{B} , \vec{k} у електромагнітній хвилі

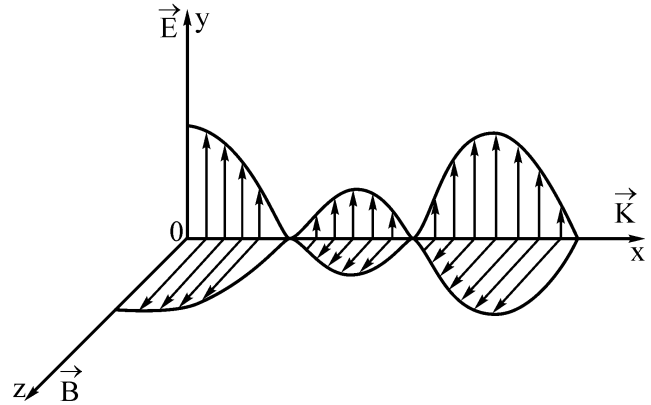


Рис. 3.2. Миттєва «фотографія» електромагнітної хвилі

Миттєві значення E і B у будь-якій точці пов'язані співвідношенням:

$$E = vB \quad (3.5)$$

або

$$\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} E = \sqrt{\mu \mu_0} H. \quad (3.6)$$

Якщо хвиля поширюється у вакуумі, то $E = cB$.

Густина енергії електромагнітного поля визначається співвідношенням:

$$w = \frac{\vec{E} \vec{D}}{2} + \frac{\vec{B} \vec{H}}{2}. \quad (3.7)$$

Для електромагнітної хвилі, що поширюється в вакуумі, $\omega_E = \omega_M$. Тому можна записати:

$$w = 2 \omega_E = \varepsilon_0 E^2. \quad (3.8)$$

Або з урахуванням того, що $E \sqrt{\varepsilon_0} = H \sqrt{\mu_0}$, вираз (3.8) можна переписати у вигляді:

$$w = \frac{1}{c} EH. \quad (3.9)$$

За означенням густиною потоку енергії є добуток швидкості світла c (для хвилі в вакуумі) на густину енергії ω :

$$S = c\omega = EH. \quad (3.10)$$

Вектори \vec{E} і \vec{H} у плоскій хвилі взаємно ортогональні і утворюють з напрямком поширення хвилі правогвинтову систему координат. Тому напрямок вектора $(\vec{E} \times \vec{H})$ співпадає з напрямком переносу енергії, а модуль вектора дорівнює EH . Вектор густини потоку електромагнітної енергії \vec{S} називається **вектором Пойнтінга** (Пойнтінг Джон Генрі – англійський фізик):

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (3.11)$$

Потік вектора Пойнтінга крізь довільну поверхню дорівнює:

$$\Phi = \int_F \vec{S} d\vec{F}. \quad (3.12)$$

При поглинанні в тілах електромагнітна хвиля надає їм деякий імпульс, тобто утворює тиск на поверхню. Якщо електромагнітна хвиля переносить енергію W , то імпульс електромагнітної хвилі дорівнює:

$$K = \frac{1}{c}W, \quad (3.13)$$

де c – швидкість світла в вакуумі.

Густина імпульсу (тобто імпульс одиниці об'єму) дорівнює

$$K_{од.об.} = \frac{1}{c}\omega, \quad (3.14)$$

де ω – густина електромагнітної енергії.

Оскільки $S = \omega \cdot c$ і напрямки векторів \vec{K} і \vec{S} збігаються, то

$$\vec{K}_{од.об.} = \frac{1}{c^2}\vec{S} = \frac{1}{c^2}(\vec{E} \times \vec{H}). \quad (3.15)$$

3.1. Розв'язання задач

3.1. Електромагнітна хвиля з частотою $\nu = 3,0 \text{ МГц}$ переходить із вакууму в немагнітне середовище, діелектрична проникність якого $\varepsilon = 4$. Чому дорівнює зміна довжини хвилі?

Розв'язок. Довжина хвилі у вакуумі дорівнює $\lambda_0 = \frac{c}{\nu}$, а у середовищі $\lambda = \frac{v}{\nu}$.

Оскільки $v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$, то зміна довжини хвилі дорівнює:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}\nu} - \frac{c}{\nu} = -\frac{c}{2\nu} = -50 \text{ (м)}.$$

Зміна довжини хвилі від'ємна, оскільки довжина хвилі максимальна у вакуумі.

3.2. Плоска електромагнітна хвиля падає нормально на поверхню плоскопаралельного шару завтовшки l із немагнітної речовини, діелектрична проникність якого експоненціально спадає від ϵ_1 на передній поверхні до ϵ_2 на задній (рис. 3.3). Чому дорівнює час поширення хвилі крізь шар?

Розв'язок. Згідно з умовою задачі (рис. 3.3) $\epsilon = \epsilon(x) = \epsilon_1 (\exp(-\alpha x))$, де α – стала.

За означенням $v = \frac{dx}{dt}$, $dt = \frac{dx}{v} = \frac{dx}{\frac{c}{n}} = \frac{ndx}{c}$. Оскільки $n = \sqrt{\epsilon(x)}$, то

$$dt = \frac{\sqrt{\epsilon(x)}}{c} dx.$$

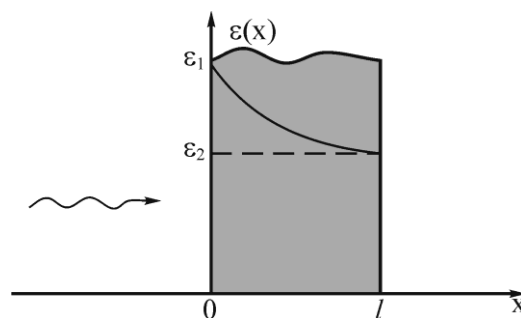


Рис. 3.3. Поширення хвилі крізь шар речовини

Проінтегруємо цей вираз за товщиною шару:

$$t = \int_0^l \frac{\sqrt{\epsilon(x)}}{c} dx.$$

Визначимо залежність $\varepsilon(x)$ і сталу α із граничних умов:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1 e^{-\alpha x}.$$

При $x=0$, $\varepsilon = \varepsilon_1$, а при $x=l$ $\varepsilon = \varepsilon_2 = \varepsilon_1 e^{-\alpha l}$, або $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = e^{\alpha l}$, звідки

$$\alpha l = \ln\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right), \text{ а } \alpha = \frac{1}{l} \ln\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right).$$

Час поширення хвилі крізь шар речовини дорівнює:

$$t = \int_0^l \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cdot l^{-\frac{\alpha x}{2}} \cdot dx}{c} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\alpha c} \left(1 - l^{-\frac{\alpha l}{2}}\right),$$

де $\alpha = \frac{1}{l} \ln\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)$.

3.3. Плоска електромагнітна хвиля з частотою $\nu = 10 \text{ МГц}$ поширюється в слабко провідному середовищі, питома провідність якого дорівнює $\sigma = 10 \text{ мСм/м}$, а діелектрична проникність $\varepsilon = 9$. Чому дорівнює відношення амплітуди густини струмів провідності і зміщення?

Розв'язок. Запишемо рівняння плоскої хвилі:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r}).$$

Згідно із законом Ома густина струму провідності дорівнює

$$\vec{j}_{np} = \sigma \vec{E} = \sigma \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r}).$$

За означенням густина струму зміщення дорівнює

$$\vec{j}_{\text{зі}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}) = -\varepsilon \varepsilon_0 E_0 \omega \sin(\omega t - \vec{k} \vec{r}),$$

оскільки $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$.

Шукане відношення амплітуди дорівнює:

$$\frac{j_{np.}}{j_{зм.}} = \frac{\sigma E_0}{2\pi \nu \varepsilon_0 \varepsilon E} = 2.$$

3.4. Плоска електромагнітна хвиля поширюється в вакуумі. Якщо вектори \vec{E}_0 і \vec{k} задані, знайти вектор \vec{H} як функцію часу і радіуса-вектора.

Розв'язок. Запишемо друге рівняння Максвелла:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \mu \vec{H}) = -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

або

$$d\vec{H} = -\frac{1}{\mu_0 \mu} (\nabla \times \vec{E}) dt. \quad (1)$$

Знайдемо $\text{rot } \vec{E} = (\nabla \times \vec{E})$. За означенням:

$$(\nabla \times \vec{E}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right). \quad (2)$$

Обчислимо перший вираз у правій частині рівняння (2):

$$\begin{aligned} \vec{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) &= \vec{i} \left[k_y E_{0z} \sin(\omega t - \vec{k} \vec{r}) - k_z E_{0y} \sin(\omega t - \vec{k} \vec{r}) \right] = \\ &= \vec{i} \sin(\omega t - \vec{k} \vec{r}) \cdot (k_y E_{0z} - k_z E_{0y}), \end{aligned}$$

оскільки $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k_x x - \vec{k}_y y - k_z z)$,

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = (\vec{i} E_{0x} + \vec{j} E_{0y} + \vec{k} E_{0z}) \cdot \cos(\omega t - k_x x - \vec{k}_y y - k_z z)$$

Аналогічно знайдемо інші похідні в рівнянні (2). Тоді вираз для $(\nabla \times \vec{E})$ набуває вигляду:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{E}) &= \sin(\omega t - \vec{k} \vec{r}) \left[\vec{i} (k_y E_{0z} - k_z E_{0y}) - \vec{j} (k_x E_{0z} - k_z E_{0x}) + \vec{k} (k_x E_{0y} - k_y E_{0x}) \right] = \\ &= \sin(\omega t - \vec{k} \vec{r}) \cdot (\vec{k} \times \vec{E}_0) \end{aligned}$$

Підставимо одержаний вираз у рівняння (1) і одержимо $\vec{H}(\vec{r}, t)$:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\omega \mu_0} (\vec{k} \times \vec{E}_0) \int \sin(\omega t - \vec{k} \vec{r}) dt = \frac{1}{\mu_0 \omega} (\vec{k} \times \vec{E}_0).$$

3.5. Плоска електромагнітна хвиля поширюється у вакуумі. Знайти усереднений за часом (періодом гармонічної функції) вектор Пойнтінга.

Розв'язок. Рівняння плоскої електромагнітної хвилі має вигляд:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r})$$

Вектор Пойнтінга за означенням є

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}.$$

Із задачі (3.4) магнітний вектор \vec{H} пов'язаний із електричним вектором \vec{E} співвідношенням:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \omega} (\vec{k} \times \vec{E})$$

Обчислимо вектор Пойнтінга:

$$\vec{S} = (\vec{E} \times (\vec{k} \times \vec{E})) \frac{1}{\mu_0 \omega} = \frac{1}{\mu_0 \omega} \cdot \vec{k} E^2,$$

оскільки $\vec{E}(\vec{E} \cdot \vec{k}) = 0$.

Після підстановки у вираз для вектора Пойнтінга рівняння плоскої хвилі одержимо:

$$\vec{S} = \frac{\vec{k}}{\mu_0 \omega} E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \vec{r})$$

Середній вектор Пойнтінга у плоскої електромагнітної хвилі

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\vec{k}}{\mu_0 \omega} E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \vec{r}) \rangle = \frac{\vec{k} E_0^2}{2 \mu_0 \omega},$$

оскільки $\langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \vec{r}) \rangle = \frac{1}{2}$.

3.6. У вакуумі поширюється плоска електромагнітна хвиля з частотою $\nu = 100 \text{ МГц}$ і амплітудою $E_0 = 50 \text{ мВ/м}$. Знайти середні за період коливань значення:

- модуля густини струму зміщення;
- густини потоку енергії.

Розв'язок. а) За означенням

$$\vec{j}_{зм} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Врахуємо, що $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon E$, а для плоскої електромагнітної хвилі $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r})$. Тоді густина струму зміщення дорівнює

$$j_{зм} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r})) = -\varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}_0 \omega \sin(\omega t - \vec{k} \vec{r})$$

Модуль цього виразу дорівнює

$$|\vec{j}_{зм}| = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}_0 \omega |\sin(\omega t - \vec{k} \vec{r})|,$$

а його середнє значення

$$\langle |\vec{j}_{зм}| \rangle = \varepsilon_0 \varepsilon E_0 \cdot 2\pi \nu \langle |\sin(\omega t - \vec{k} \vec{r})| \rangle = 4 \varepsilon_0 \nu E_0 = 0,18 \left(\frac{MA}{M^2} \right).$$

При обчисленні цього виразу зручно користуватися формулою

$$\langle f(x) \rangle = \frac{\int_a^b f(x) dx}{(b-a)}.$$

У нашому випадку

$$\frac{\int_0^\pi |\sin \alpha| d\alpha}{\pi} = -\cos \alpha \Big|_0^\pi \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

б) Із задачі (3.5) середній вектор Пойнтінга дорівнює:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\vec{k} E_0^2}{2 \mu_0 \omega}.$$

Модуль вектора Пойнтінга:

$$S = \frac{k E_0^2}{2 \mu_0 \omega} = \frac{k E_0^2}{4 \pi \nu \mu_0},$$

оскільки вектори \vec{S} і \vec{k} колінеарні: $\vec{S} \uparrow \uparrow \vec{k}$.

Середнє значення модуля вектора Пойнтінга дорівнює:

$$\langle S \rangle = \frac{k E_0^2}{2 \mu_0 \omega} = \frac{k E_0^2}{2 \mu_0 c^2} = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2} = 3,3 \left(\frac{\text{мкВт}}{\text{м}^2} \right),$$

оскільки $\omega = kc$.

3.7. У вакуумі поширюється плоска електромагнітна хвиля, середнє значення густини потоку енергії дорівнює $\langle S \rangle$. Частота хвилі ω . Чому дорівнює амплітудне значення струму зміщення у хвилі?

Розв'язок. Згідно з означенням густина струму зміщення дорівнює:

$$\vec{j}_{\text{зм}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}_0 \omega \sin(\omega t - \vec{k} \vec{r}),$$

оскільки для плоскої електромагнітної хвилі

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r}).$$

Максимальне значення струму зміщення дорівнює

$$j_{\text{зм.макс}} = \varepsilon_0 E_0 \omega.$$

Будемо шукати амплітуду плоскої хвилі E_0 . Із задачі (3.6):

$$\langle S \rangle = \frac{k E_0^2}{2 \mu_0 \omega},$$

звідки

$$E_0 = \sqrt{\frac{2 \omega \mu_0 \langle S \rangle}{k}}.$$

Амплітудне значення струму зміщення у хвилі дорівнює:

$$j_{\text{зм.макс}} = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_0^2 2 k c \mu_0 \langle S \rangle}{k}} = \omega \sqrt{\frac{2 \varepsilon_0 \langle S \rangle}{c}},$$

оскільки для хвилі у вакуумі $\omega = kc$ і $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$.

3.8. У вакуумі вздовж осі X поширюються дві плоскі електромагнітні хвилі з однаковою поляризацією. Електричні вектори цих хвиль змінюються за законом

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_0 \cos(\omega t - k x), \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_0 \cos(\omega t - k x + \varphi),\end{aligned}$$

де φ – стала різниця фаз.

Чому дорівнює середня густина потоку енергії $\langle S \rangle$?

Розв'язок. Згідно з принципом суперпозиції хвиль результуючий електричний вектор дорівнює

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_0 [\cos(\omega t - k x) + \cos(\omega t - k x + \varphi)] = \\ &= 2 \vec{E}_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t - k x + \frac{\varphi}{2}\right).\end{aligned}$$

Із задачі (3.6) модуль вектора Пойнтінга дорівнює

$$S = \frac{k E^2}{2 \mu_0 \omega} = \frac{k}{2 \mu_0 \omega} \left[2 E_0 \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t - k x + \frac{\varphi}{2}\right) \right]^2.$$

Середнє значення модуля Пойнтінга дорівнює

$$\langle S \rangle = \frac{k E_0^2}{2 \mu_0 \omega} \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{k}{2 \mu_0 \omega} E_0^2 (1 + \cos \varphi),$$

оскільки $\langle \cos^2\left(\omega t - k x + \frac{\varphi}{2}\right) \rangle = \frac{1}{2}$.

3.9. Куля радіуса R розташована у немагнітному середовищі ($\mu = 1$) з діелектричною проникністю $\varepsilon = 4$. У середовищі поширюється плоска електромагнітна хвиля з довжиною хвилі λ , яка значно менша за радіус кулі $\lambda \ll R$. Амплітуда електричного вектора дорівнює E_0 . Яка енергія падає на кулю за час t ?

Розв'язок. Подумки виділимо на поверхні кулі сферичну смугу радіуса r і завширшки dh . Площа такої смуги $d\sigma$ дорівнює:

$$d\sigma = 2\pi r \cdot dh = 2\pi R \cdot \sin \Theta \cdot R d\Theta,$$

оскільки $r = R \cdot \sin \Theta$, $dh = R \cdot d\Theta$.

Потік енергії, що падає на кулю, дорівнює

$$d\Phi = \vec{S} d\vec{\sigma} = S \cdot d\sigma \cdot \cos \Theta.$$

Повний потік енергії дорівнює:

$$\Phi = \int \langle S \rangle d\sigma = \int_0^{\pi/2} \langle S \rangle \cdot 2\pi R^2 \cdot \sin \Theta \cdot \cos \Theta d\Theta = \langle S \rangle \pi R^2 \sin^2 \Theta \Big|_0^{\pi/2} = \langle S \rangle \cdot \pi R^2,$$

оскільки $(\sin^2 \Theta)' = 2 \sin \Theta \cdot \cos \Theta \cdot d\Theta$.

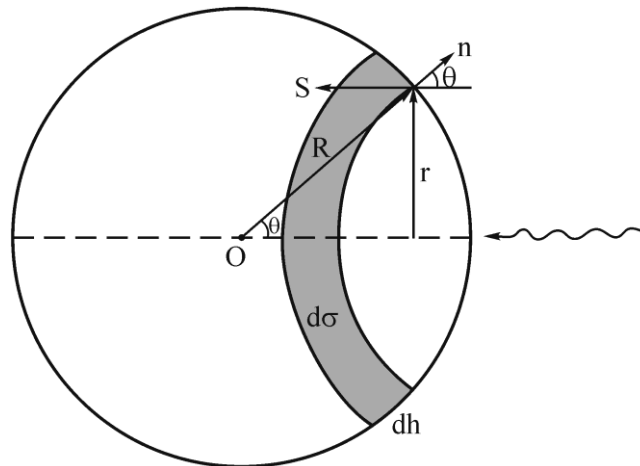


Рис. 3.4. Падіння плоскої електромагнітної хвилі на кулю

Для плоскої хвилі густина електромагнітної хвилі дорівнює

$$\omega_{em} = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} + \frac{\vec{B}\vec{H}}{2}.$$

Модулі електричного \vec{E} і магнітного \vec{H} векторів у плоскій хвилі пов'язані співвідношенням

$$\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} E = \sqrt{\mu \mu_0} H,$$

і для густини електромагнітної енергії запишемо вираз:

$$\omega = \varepsilon_0 \varepsilon E^2.$$

Модуль вектора Пойнтінга S дорівнює

$$S = \omega \cdot v = \omega \cdot \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2 c}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}} = E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \vec{r}) \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu_0}},$$

оскільки $\mu = 1$, $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$.

Середнє значення модуля вектора Пойнтінга дорівнює

$$\langle S \rangle = E_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu_0}} \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \vec{r}) \rangle = \frac{E_0^2}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu_0}},$$

оскільки $\langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \vec{r}) \rangle = \frac{1}{2}$.

Енергія, яка падає на кулю за час t , дорівнює

$$W = \Phi \cdot t = \frac{E_0^2}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \pi R^2 t.$$

3.10. У вакуумі вздовж осі X утворилася стояча електромагнітна хвиля:

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos kx \cdot \cos \omega t.$$

Знайти X -проекцію вектора Пойнтінга $S_x(x, t)$ і її середнє за період коливань значення.

Розв'язок. За означенням вектор Пойнтінга дорівнює:

$$\begin{aligned} \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \vec{i} (E_y H_z - H_y E_z) - \vec{j} (E_x H_z - E_z H_x) + \\ &+ \vec{k} (E_x H_y - E_y H_x) = \vec{i} S_x + \vec{j} S_y + \vec{k} S_z. \end{aligned}$$

Проекція вектора Пойнтінга на вісь X дорівнює:

$$S_x = E_y H_z - E_z H_y = E_y H_z = E H,$$

оскільки $E_z = 0$, $H_y = 0$.

Знайдемо магнітний вектор \vec{B} стоячої хвилі. Стояча хвиля є суперпозицією хвиль, що поширюються вздовж осі X у протилежних напрямках:

$$\begin{aligned} \vec{H}_1 &= \vec{H}_0 \cos(\omega t - kx), \quad \vec{H}_2 = \vec{H}_0 \cos(\omega t + kx), \\ \vec{H} &= \vec{H}_1 - \vec{H}_2 = 2\vec{H}_0 \sin kx \cdot \sin \omega t. \end{aligned}$$

Оскільки $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, то

$$\vec{B} = \vec{B}_m \sin kx \cdot \sin \omega t,$$

де враховано, що $\vec{E} \perp \vec{B}$, $E_m = c B_m$.

Проекція вектора Пойнтінга на вісь X S_x дорівнює:

$$S_x = E_m \cdot \cos kx \cdot \cos \omega t \cdot \frac{B_m}{\mu_0} \sin kx \cdot \sin \omega t = \frac{c E_m^2}{4 \mu_0} \sin 2x \cdot \sin 2\omega t.$$

Середнє значення проекції вектора Пойнтінга на вісь X S_x за період коливань дорівнює

$$\langle S_{>x} \rangle = \frac{c E_m^2}{4 \mu_0} \sin 2kx \cdot \langle \sin 2\omega t \rangle = 0,$$

оскільки $\langle \sin 2\omega t \rangle = 0$.

3.11. Плоский конденсатор має форму дисків радіуса $R = 6 \text{ см}$ і повітряний діелектрик ($\varepsilon = 1$). Конденсатор підключили до джерела змінної синусоїдальної напруги з частотою $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$. Визначити відношення амплітудних значень магнітної і електричної енергії в середині конденсатора.

Розв'язок. Плоский конденсатор показаний на рис. 3.5.

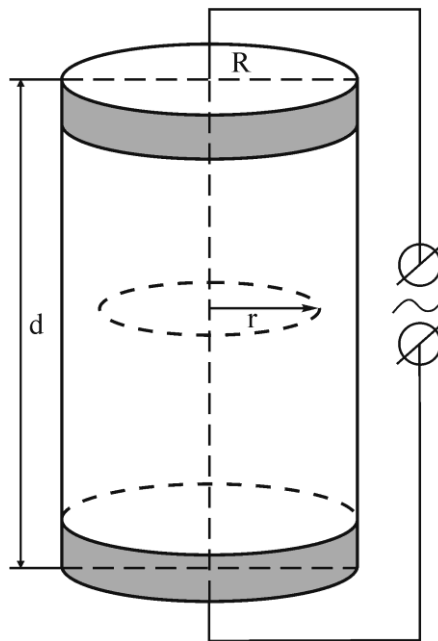


Рис. 3.5. Плоский конденсатор з повітряним діелектриком

Густина енергії електричного поля дорівнює:

$$\omega_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{U_m \cos \omega t}{d} \right)^2 = \frac{\varepsilon_0 U_m^2 \cos^2 \omega t}{2d^2},$$

а повна енергія електричного поля

$$W_E = \omega_E \cdot \pi R^2 \cdot d = \frac{\varepsilon_0 U_m^2 \cos^2 \omega t}{2d^2} \cdot \pi R^2 \cdot d.$$

Густина магнітної енергії дорівнює

$$\omega_M = \frac{\vec{B} \vec{H}}{2} = \frac{\mu_0}{2} H^2.$$

Електричне поле в середині конденсатора однорідне. Магнітне поле в середині конденсатора знайдемо згідно з теоремою про циркуляцію вектора \vec{H} :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j}_{зм} \cdot d\vec{S},$$

де $\vec{j}_{зм} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ – густина струму зміщення. Контур інтегрування – коло радіуса r :

$$2\pi r \cdot H = \pi r^2 \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \pi r^2 \cdot \frac{U_m \cdot \omega \cdot \varepsilon_0}{d} \cdot (-\sin \omega t),$$

або

$$H(r) = \frac{\varepsilon_0 U_m \cdot \omega \cdot (-\sin \omega t)}{2d}.$$

Магнітна енергія в середині конденсатора дорівнює

$$\begin{aligned} W_M &= \int \omega_M dV = \int_0^R \frac{\mu_0 U_m^2 \omega^2 \sin^2 \omega t \cdot r^2 \varepsilon_0^2}{8d^2} \cdot 2\pi r dr \cdot d = \\ &= \frac{\mu_0 U_m^2 \omega^2 \cdot \sin^2 \omega t \cdot R^4 \cdot \pi \varepsilon_0^2}{16d}, \end{aligned}$$

оскільки $dV = dS \cdot d = 2\pi r \cdot dr \cdot d$.

Відношення амплітудних значень магнітної і електричної енергії в середині конденсатора дорівнює

$$\frac{W_M}{W_E} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \omega^2 \cdot R^2}{8} = 5 \cdot 10^{-15}.$$

3.12. Плоский конденсатор з круглими пластинами радіуса a повільно заряджають. Показати, що потік вектора Пойнтінга крізь бокову поверхню конденсатора дорівнює приросту енергії конденсатора за одиницю часу.

Розв'язок. Вектори $\vec{E}, \vec{H}, \vec{S}$ утворюють праву трійку векторів (рис. 3.6).

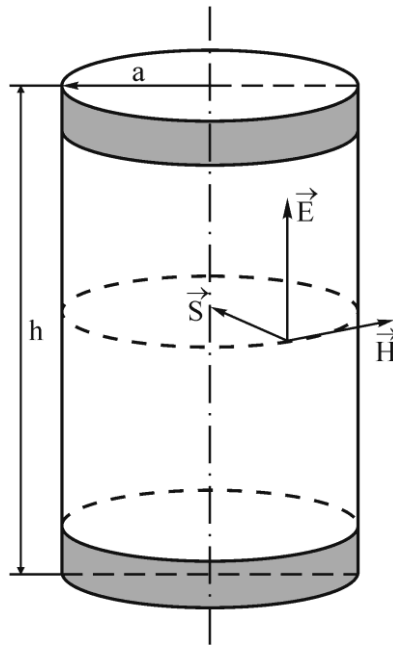


Рис. 3.6. Орієнтація векторів $\vec{E}, \vec{H}, \vec{S}$ у плоскому конденсаторі

Згідно з теоремою про циркуляцію вектора \vec{H} :

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}.$$

У нашому випадку струми провідності відсутні ($\vec{j}=0$), і теорему про циркуляцію вектора \vec{H} запишемо так:

$$H \cdot 2\pi a = \frac{\partial D}{\partial t} \cdot \pi a^2,$$

звідки $H = \frac{1}{2} a \cdot \frac{\partial D}{\partial t}.$

Потік вектора Пойнтінга крізь бокову поверхню дорівнює

$$\Phi_S = E H \cdot 2\pi a h = E \cdot \frac{1}{2} a \cdot 2\pi a h \cdot \frac{\partial D}{\partial t} = E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} \cdot V,$$

де $V = \pi a^2 \cdot h$ – об'єм конденсатора.

Будемо вважати, що цей потік цілком йде на збільшення енергії конденсатора. Тоді приріст енергії конденсатора за час dt дорівнює

$$dW = E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} \cdot V dt = E dD \cdot V = d \left(\frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} V \right) = d \left(\frac{\vec{E} \vec{D}}{2} V \right).$$

3.13. Показати, що на границі розподілу двох середовищ нормальна складова вектора Пойнтінга неперервна, тобто $S_{n1} = S_{n2}$.

Розв'язок. За означенням вектор Пойнтінга $\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{H})$, або

$$\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \vec{i} (E_y H_z - E_z H_y) - \vec{j} (E_x H_z - E_z H_x) + \\ + \vec{k} (E_x H_y - E_y H_x) = S_x \vec{i} + S_y \vec{j} + S_z \vec{k}.$$

Вектори $\vec{E}, \vec{H}, \vec{S}$ утворюють праву трійку векторів.

$$S_{z1} = E_{x1} H_{y1} - E_{y1} H_{x1} = E_{\tau 1} H_{\tau 1} = S_{n1},$$

$$S_{z2} = E_{x2} H_{y2} - E_{y2} H_{x2} = E_{\tau 2} H_{\tau 2} = S_{n2}.$$

Оскільки на границі розподілу двох середовищ тангенціальні складові векторів \vec{E} і \vec{H} зберігаються ($E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, H_{\tau 1} = H_{\tau 2}$), то з цих умов випливає, що нормальні складові вектора Пойнтінга не мають розриву.

3.14. Електромагнітна хвиля поширюється у вакуумі вздовж осі X. Показати, що з рівнянь Максвелла випливають співвідношення:

$$-\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial B_z}{\partial x}.$$

Розв'язок. Система рівнянь Максвелла для вакууму ($\vec{j} = 0, \rho = 0, \varepsilon = 1, \mu = 1$) має вигляд:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \cdot \vec{D} &= 0, \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H}, & \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E}.\end{aligned}$$

Вектори \vec{E} і \vec{H} та їх компоненти не залежать від координат y і z , і система рівнянь Максвелла набуває вигляду:

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \frac{\partial B_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ або } \left\{ \begin{aligned} 0 &= \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \\ \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Аналогічно одержимо:

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial D_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -\frac{\partial D_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} &= -\frac{\partial D_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial D_x}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ або } \left\{ \begin{aligned} 0 &= \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, \\ \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

У відсутність зовнішніх полів $E_x = H_x = 0$ із двох останніх систем рівнянь одержимо

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

3.15. Куля радіуса $R=50$ см знаходиться у немагнітному середовищі з діелектричною проникністю $\varepsilon=4$. У середовищі поширюється плоска електромагнітна хвиля, довжина хвилі якої $\lambda \ll R$. Амплітуда електричної

складової $E_0 = 200 \text{ В/м}$. Обчислити енергію, яка падає на кулю за час $t = 60 \text{ с}$.

Розв'язок. За означенням елементарний потік енергії, що падає на кулю, дорівнює:

$$d\Phi = \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} = S \cdot d\sigma \cdot \cos \Theta.$$

Елемент поверхні кулі $d\sigma$ дорівнює:

$$d\sigma = 2\pi r \cdot dh,$$

або $d\sigma = 2\pi r \cdot \sin \Theta \cdot R d\Theta$.

Повний потік енергії дорівнює

$$\Phi = \int \langle S \rangle d\sigma = \int_0^{\pi/2} \langle S \rangle \cdot 2\pi R^2 \cdot \sin \Theta \cdot \cos \Theta d\Theta = \langle S \rangle \pi R^2 \sin^2 \Theta \Big|_0^{\pi/2} = \langle S \rangle \cdot \pi R^2,$$

оскільки $(\sin^2 \Theta)' = 2 \sin \Theta \cdot \cos \Theta \cdot d\Theta$.

Густина електромагнітної енергії для плоскої хвилі визначається співвідношенням

$$\omega = \varepsilon_0 \varepsilon E^2.$$

Для плоскої електромагнітної хвилі електрична і магнітна компоненти пов'язані співвідношенням:

$$\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} E = \sqrt{\mu \mu_0} H.$$

Модуль вектора Пойнтінга дорівнює

$$S = \omega \cdot v = \omega \cdot \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2 c}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}} = E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \vec{r}) \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu_0}},$$

оскільки $\mu = 1$, $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$.

Середнє значення модуля вектора Пойнтінга дорівнює

$$\langle S \rangle = E_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu_0}} \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \vec{r}) \rangle = \frac{E_0^2}{2} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu_0}},$$

оскільки $\langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \vec{r}) \rangle = \frac{1}{2}$.

Повна енергія, що падає на кулю за час t , дорівнює

$$W = \Phi \cdot t = \frac{E_0^2}{2} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \pi R^2 t.$$

3.16. У вакуумі уздовж осі X утворилась стояча хвиля. Визначити електричну складову $\vec{E}(x, t)$ і магнітну складову $\vec{B}(x, t)$ для такої стоячої хвилі.

Розв'язок. Стояча хвиля є результатом суперпозиції двох електромагнітних хвиль, що поширюються назустріч одна одній. Амплітуди хвиль будемо вважати рівними. Запишемо рівняння плоских електромагнітних хвиль, що поширюються назустріч одна одній:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_0 \cos(\omega t - k x), \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_0 \cos(\omega t + k x).\end{aligned}$$

Згідно з принципом суперпозиції

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_m \cos k x \cdot \cos \omega t.$$

Аналогічно застосуємо принцип суперпозиції для магнітної складової:

$$\begin{aligned}\vec{H}_1 &= \vec{H}_0 \cos(\omega t - k x), \\ \vec{H}_2 &= \vec{H}_0 \cos(\omega t + k x), \\ \vec{H} &= \vec{H}_1 - \vec{H}_2 = 2 \vec{H}_0 \sin k x \cdot \sin \omega t,\end{aligned}$$

оскільки магнітні вектори у цих хвиль спрямовані антиколінеарно: $\vec{H}_1 \uparrow \downarrow \vec{H}_2$.

Вектор магнітної індукції стоячої хвилі дорівнює:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \vec{B}_m \sin k x \cdot \sin \omega t.$$

3.17. По прямому круглому провіднику тече постійний струм I . Чому дорівнює потік вектора Пойнтінга крізь бокову поверхню ділянки даного провідника, опір якого дорівнює R ?

Розв'язок. Напрямок векторів $\vec{E}, \vec{H}, \vec{S}$ показаний на рис. 3.7. Розглянемо елемент провідника завдовжки h . Згідно з теоремою про

циркуляцію вектора \vec{H} , якщо контур вибрати поблизу поверхні провідника, можна записати:

$$2\pi a \cdot h = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi a}.$$

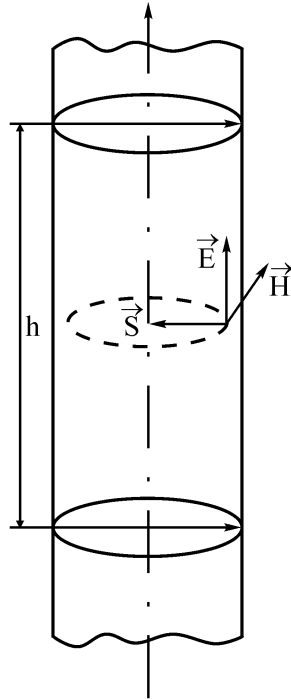


Рис. 3.7. Напрямок векторів \vec{E} , \vec{H} , \vec{S}

Потік вектора Пойнтінга крізь бокову поверхню дорівнює:

$$E_s = \int_{\sigma} \vec{S} d\vec{\sigma},$$

або

$$\Phi_s = E \cdot H \cdot 2\pi a l = 2\pi a \cdot H \cdot E \cdot l = I \cdot U = I^2 R.$$

3.18. На рис. 3.8 (а) показана ділянка двохпровідної лінії передачі постійного струму, напрямок якого показаний на рисунку. Потенціал $\varphi_2 > \varphi_1$. Визначити за допомогою вектора Пойнтінга положення генератора струму (ліворуч або праворуч).

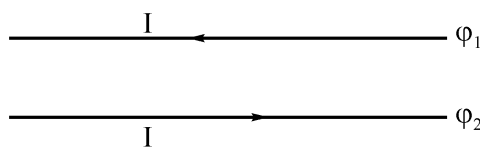


Рис. 3.8 (а). Ділянка двохпровідної лінії передачі постійного струму, напрямок якого показаний на рисунку

Розв'язок. Фізичний зміст вектора Пойнтінга – густина потоку енергії. Напруженість електричного поля і потенціал пов'язані співвідношенням:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi.$$

Напрямок векторів \vec{E} і $\nabla\varphi$ можна визначити з рис. 3.8 б. Оскільки $\varphi_2 > \varphi_1$, то праворуч від резистора R вектор $\nabla\varphi$ спрямований вниз, а вектор \vec{E} вгору. Вектори $\vec{E}, \vec{H}, \vec{S}$ утворюють праву трійку векторів. Таким чином, положення генератора постійного струму – ліворуч від ділянки двохпровідної лінії (рис. 3.8 б), оскільки $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$.

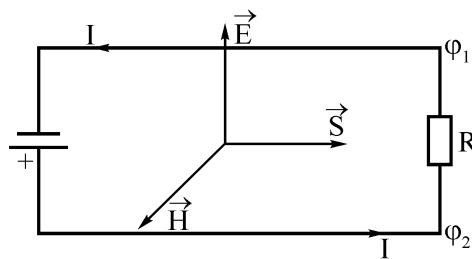


Рис. 3.8 (б). Напрямок векторів $\vec{E}, \vec{H}, \vec{S}$

3.19. Енергія від джерела постійної напруги U передається споживачу за допомогою довгого прямого коаксіального проводу, активним опором якого можна нехтувати. Струм, який споживається, дорівнює I . Визначити потік енергії крізь поперечний переріз коаксіального проводу. Зовнішня електропровідна оболонка кабелю є тонкостінною.

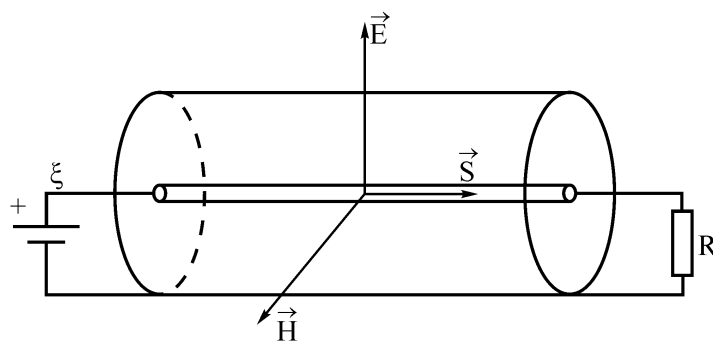


Рис. 3.9. Ділянка коаксіального кабелю

Розв'язок. На рис. 3.9 показана ділянка коаксіального кабелю, положення джерела постійної напруги і напрямки векторів $\vec{E}, \vec{H}, \vec{S}$. Напруженість електричного поля і потенціал пов'язані співвідношенням:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

За допомогою теореми Гаусса для вектора \vec{E} визначимо модуль вектора \vec{E} :

$$2\pi r \cdot E = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 r},$$

де q – заряд проводу на одиницю довжини.

За допомогою теореми про циркуляцію вектора \vec{H} визначимо модуль вектора \vec{H} :

$$2\pi r \cdot H = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Потік енергії крізь поперечний переріз кабелю дорівнює:

$$\Phi = \int_{\sigma} \vec{S} d\vec{\sigma} = \int_a^b S \cdot 2\pi r dr = \frac{I}{2\pi \varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = U \cdot I,$$

оскільки $d\sigma = 2\pi r de$, $U = \int_a^b E dr = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

3.20. За допомогою рівнянь Максвелла показати, що електромагнітна хвиля у вакуумі $\vec{E} = \vec{E}_m \exp(i(\omega t - \vec{k} \vec{r}))$ є поперечною.

3.21. Електромагнітна хвиля типу $\vec{E} = \vec{E}_m \exp(i(\omega t - \vec{k} \vec{r}))$ може існувати у реальних середовищах?

3.22. Електромагнітна хвиля, яку випромінює елементарний диполь, поширюється у вакуумі. У хвильовій зоні на промені, який перпендикулярний до осі диполя, на відстані r від нього, середнє значення густини потоку енергії дорівнює S_0 . Визначити середню потужність випромінювання диполя.

3.23. Визначити середню потужність випромінювання електрона, який гармонічно коливається з амплітудою $a = 0,1$ нм і частотою $\omega = 6,5 \cdot 10^{14} \text{ c}^{-1}$.

Контрольні питання до розділу 3

1. Хвильове рівняння для векторів \vec{E} і \vec{H} .
2. Рівняння плоскої електромагнітної хвилі, її характеристики.
3. Стоячі електромагнітні хвилі.
4. Енергія електромагнітних хвиль. Вектор Пойнтінга, його фізичний зміст.

5. Хвильовий вектор, хвильова поверхня, швидкість поширення електромагнітних хвиль.

6. Поширення електромагнітних хвиль у ізотропному середовищі.

7. Падіння електромагнітної хвилі на границю розподілу двох діелектриків. Граничні умови для векторів $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$.

8. Падіння електромагнітної хвилі на границю розподілу вакуум – діелектрик. Що при цьому відбувається з довжиною хвилі, її частотою?

9. Дайте визначення циклічної або кругової частоти.

РОЗДІЛ 4. ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ СВІТЛА

Плоска електромагнітна хвиля, рівняння якої

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha), \quad (4.1)$$

є одним наближенням у більш загальному класі гармонійних хвиль

$$\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r}) \cos(\omega t - \vec{g}(\vec{r}) \cdot \vec{r} + \alpha(\vec{r})). \quad (4.2)$$

Плоска хвиля є математичною ідеалізацією, таких хвиль в природі не існує. Тому у кожному окремому випадку слід розв'язувати питання про те, наскільки наближення плоскої хвилі можна застосовувати для опису оптичних явищ.

Електромагнітне поле світлових коливань з часом надзвичайно швидко змінюється, приблизно 10^{15} разів на секунду. Зорове враження зумовлюється середнім значенням електричного вектора хвилі за порівняно великий проміжок часу, а не значенням його у кожний момент. Це відіграє велику роль у випадку додавання світлових коливань. Якщо в одну точку сходяться два світлові коливання, то в результаті їх додавання вони або підсилюють одне одного, або ослаблюють: відбувається явище їх інтерференції. Повне гасіння (умова мінімуму) відбувається у випадку, коли оптична різниця ходу дорівнює напівцілому числу довжин хвиль:

$$\Delta = \pm(m + \frac{1}{2})\lambda, \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots). \text{ Різниця фаз при цьому дорівнює } \pi.$$

Максимальне підсилення (умова максимуму) відбувається при оптичній різниці ходу, яка дорівнює парному числу довжин напівхвиль:

$$\Delta = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \text{ при цьому різниця фаз кратна } 2\pi. \text{ Око побачить}$$

підсилення або гасіння світла лише за умов, що цей ефект буде тривати протягом багатьох коливань, коли різниця фаз між інтерферуючими коливаннями буде залишатися сталою.

Таким чином, для одержання інтерференції у будь-якій точці простору необхідна сталість різниці фаз між світловими коливаннями, які приходять у цю точку. Такі коливання називають **когерентними**.

Когерентністю називається узгоджене протікання хвильових або коливальних процесів.

Дві плоскі хвилі будемо вважати когерентними, якщо вони монохроматичні (мають однакову частоту або довжину хвилі) і різниця фаз між ними є сталою.

Розглянемо суперпозицію двох когерентних хвиль, які мають лінійну поляризацію і коливання електричного вектора відбуваються в одній площині:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_{10} \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r}), \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_{20} \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \delta),\end{aligned}$$

і згідно з принципом суперпозиції хвиль

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

або

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2(\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2). \quad (4.3)$$

Оскільки інтенсивністю світла називається середнє значення модуля вектора Пойнтінга

$$I = \langle S \rangle,$$

а модуль вектора Пойнтінга $S = E H \approx E^2$, то виразу (4.3) можна надати вигляду:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos \delta. \quad (4.4)$$

Вираз $2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos \delta$ називається **інтерференційним членом**. Якщо δ випадково змінюється з часом, то

$$\langle \cos \delta \rangle = 0$$

і інтерференція не спостерігається.

Оптичною довжиною шляху є добуток показника заломлення n на пройдений світлом шлях:

$$L = n \cdot S. \quad (4.5)$$

Різниця між двома оптичними шляхами, яке пройшло світло, називається **оптичною різницею ходу**, або просто різницею ходу.

Таким чином, можна записати умови для максимумів і мінімумів інтерференції.

Максимум інтерференції світла спостерігається у випадку, коли різниця ходу дорівнює

$$\Delta = \pm m \lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.6)$$

а різниця фаз

$$\delta = k \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = 2m\pi, \quad (4.7)$$

тобто кратна 2π .

Аналогічно можна записати умови для мінімуму інтерференції:

$$\Delta = (2m+1) \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad m=0,1,2,\dots, \quad (4.8)$$

$$\delta = k \cdot \Delta = (2m+1) \cdot \pi. \quad (4.9)$$

Будь-яке світлове тіло складається з дуже багатьох джерел коливань, тому що світлові хвилі утворюються окремими атомами речовини. Ми завжди спостерігаємо сумарну дію багатьох атомів. Щоб дістати інтерференцію від двох джерел світла, необхідно, щоб у місці спостереження хвилі, випромінюванні всіма атомами одного джерела, відрізнялись щодо фази на одну й ту ж величину від хвиль другого джерела. Такий збіг неймовірний, тому між променями двох різних джерел світла не можна дістати явища інтерференції світла. Інтерференція спостерігається тільки в тому випадку, коли світлові промені одного джерела яким-небудь способом (відбиванням, заломленням) були «роздвоєнні» і потім знову зведені.

Це можна зробити принципово двома методами. Перший метод для спостереження двохпроменевої інтерференції полягає у поділенні хвильового фронту (дослід Юнга, бідзеркала Френеля, біпризма Френеля, дзеркало Ллойда та ін.). Другий метод заснований на поділенні амплітуди хвилі (інтерференція в тонких плівках).

Дослід Юнга. Першим вченим, який пояснив явище інтерференції світла у 1801 р., був англійський фізик Томас Юнг. Т. Юнг також першим назвав явище суперпозиції когерентних хвиль інтерференцією світла. Він виконав перший демонстраційний експеримент зі спостереження інтерференції світла, одержав два когерентні джерела світла.

На рис. 4.1 показана схема досліду Юнга за спостереженням двохпроменевої інтерференції.

Цей дослід можна розглядати як приклад оптичної системи, яка дозволяє роздвоїти світлові промені. У своєму досліді Юнг на шляху світла розташував діафрагму з отвором малого діаметру, який відіграв роль точкового джерела. Для роздвоєння світлового променя Юнг використав діафрагму з двома отворами малого діаметра. Ці отвори були джерелом когерентних хвиль. На екрані, який був розташований від лінії джерел на відстані l , спостерігалася інтерференційна картина у вигляді

темних і світлих смуг. Відстань між двома отворами дорівнює d , причому $d \ll l$.

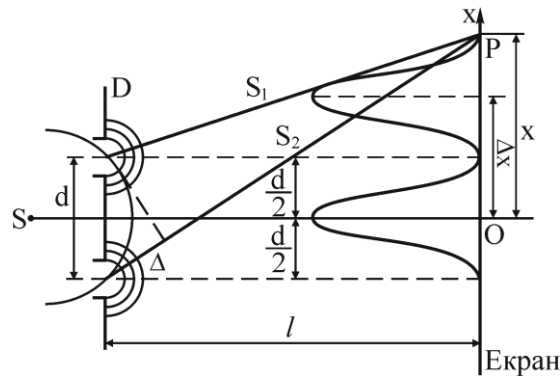


Рис. 4.1. Схема досліду Юнга

Оптичні шляхи від джерел світла (отвори у діафрагмі) позначимо \vec{S}_1 і \vec{S}_2 . Тоді з двох прямокутних трикутників можна записати вирази для оптичних шляхів:

$$S_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2,$$

$$S_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2.$$

З цих двох рівнянь одержимо вираз:

$$S_2^2 - S_1^2 = (S_2 - S_1) \cdot (S_2 + S_1) = 2xd,$$

або

$$\Delta = S_2 - S_1 = \frac{xd}{l}, \quad (4.10)$$

оскільки при $d \ll l$, $(S_2 + S_1) \approx 2l$, $(S_2 - S_1) = \Delta$ – оптична різниця ходу.

Якщо точка P на рис. 4.1 є точкою максимуму інтерференції, то можна вираз (4.10) переписати у вигляді:

$$\Delta = \pm m \lambda = \frac{x_{\max}}{l} d, \quad (4.11)$$

$$x_{\max} = \pm m \frac{l}{d} \lambda.$$

Відстань між двома максимумами інтерференції **називається шириною інтерференційної смуги**.

Таким чином, ширина інтерференційної смуги у досліді Юнга визначається формулою

$$\Delta x = x_{\max}^{(m+1)} - x_{\max}^m = \frac{l}{d} \lambda. \quad (4.12)$$

Методика розв'язку задач з інтерференції світла полягає в тому, що при використанні конкретного пристрою для роздвоєння світла ми одержимо зображення двох джерел світла (уявних чи реальних) і, таким чином, прийдемо до задачі «дослід Юнга», розв'язання якої нам відомо (4.12).

4.1. Розв'язання задач

4.1. Показати, що при додаванні двох гармонічних коливань середня за часом енергія результуючого коливання дорівнює сумі енергій кожного коливання. Розглянути два випадки: а) коливання одного напрямку і некогерентні, а значення різниці їх фаз рівномірні; б) коливання взаємно перпендикулярні, однієї частоти та мають довільну різницю фаз.

Розв'язок. Запишемо рівняння гармонічних коливань у векторній формі:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \cos(\omega t + \varphi_1), \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \cos(\omega t + \varphi_2),$$

де φ_1, φ_2 – фази коливань. Енергія коливання пропорційна квадрату амплітуди.

Метод векторних коливань полягає в тому, що у кожен момент часу вектори амплітуд коливань \vec{E}_{01} і \vec{E}_{02} обертаються навколо точки O і результуючий вектор \vec{E} дорівнює:

$$\vec{E} = \vec{E}_{01} + \vec{E}_{02}.$$

Вектори $\vec{E}_{01}, \vec{E}_{02}, \vec{E}$ обертаються з кутовою швидкістю ω . Векторна діаграма показана на рис. 4.2 в момент часу $t=0$.

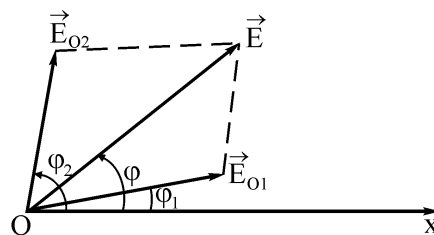


Рис. 4.2. Векторна діаграма

Із рис. 4.2 випливає, що

$$E^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2 E_{01} \cdot E_{02} \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

або $E^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2 \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}$.

а) Розглянемо перший випадок:

$$\langle E^2 \rangle = \langle E_{01}^2 \rangle + \langle E_{02}^2 \rangle + \langle 2 E_{01} \cdot E_{02} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle,$$

$$E^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2 E_{01} \cdot E_{02} \cdot \langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle \Rightarrow$$

$$E^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2,$$

оскільки різниця фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ є випадковою величиною, а середнє значення випадкової величини дорівнює нулю.

б) У другому випадку одержимо наступний вираз:

$$E^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2 \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} = E_{01}^2 + E_{02}^2,$$

оскільки скалярний добуток взаємно перпендикулярних векторів дорівнює нулю.

4.2. Дослід Ллойда. У своєму досліді ірландський фізик Ллойд застосував дзеркало для спостереження двохпроменевої інтерференції (рис. 4.3).

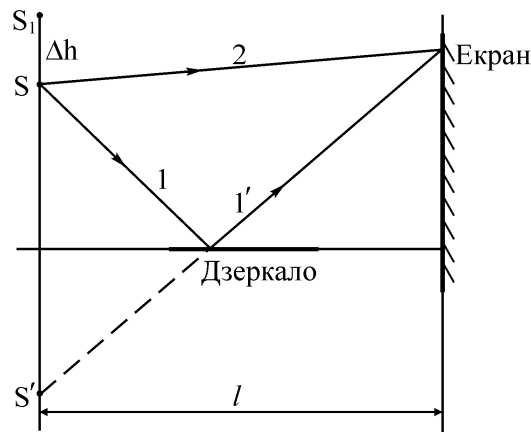


Рис. 4.3. Дзеркало Ллойда

Промінь 1 від джерела світла падає на дзеркало і далі на екран (промінь 1'). Промінь 2 падає на екран безпосередньо від джерела S . В результаті інтерференції хвиль на екрані спостерігається система інтерференційних смуг завширшки $\Delta x = 0,25$ мм. Відстань від джерела світла S до екрана дорівнює $l = 1$ м. Далі джерело S перемістили на

$\Delta h = 0,6$ мм у положення S_1 по нормалі до площини дзеркала, і ширина смуг зменшилась у $\eta = 1,5$ рази. Чому дорівнює довжина світлової хвилі?

Розв'язок. Знайдемо положення уявного джерела світла S' . Для цього подовжимо промінь l' за дзеркало, і точка перетину цього променя з перпендикуляром, на якому лежить джерело S , визначить положення уявного джерела світла S' . Таким чином ми одержали класичний дослід Юнга, розв'язання якого ми знаємо:

$$\Delta x_1 = \frac{l}{d} \lambda,$$

де d – відстань між двома джерелами.

Після того, як джерело S перемістили у положення S_1 , ширина смуг зменшилась ($\Delta x_2 = \Delta x_1 / \eta$) і розв'язання задачі Юнга має вигляд:

$$\Delta x_2 = \frac{l}{d + 2\Delta h} \lambda,$$

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \eta.$$

Із цих трьох рівнянь визначимо:

$$d = \frac{2\Delta h}{(\eta - 1)}, \quad \lambda = \frac{\Delta x \cdot d}{l} = 2 \frac{2 \cdot \Delta x \cdot \Delta h}{l(\eta - 1)} = 0,6 \text{ (мкм)}.$$

4.3. Дві плоскі когерентні світлові хвилі падають майже нормально на екран. Кут між напрямками їх поширення малий ($\varphi \ll 1$, рис. 4.4). Показати, що відстань між сусідніми максимумами на екрані дорівнює

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\varphi}.$$

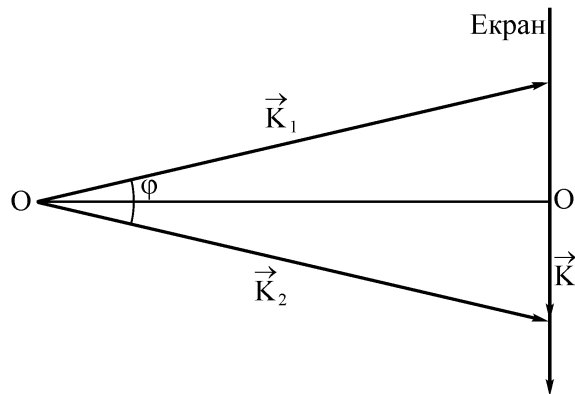


Рис. 4.4. Падіння двох плоских світлових хвиль на екран

Розв'язок. Запишемо рівняння першої і другої світлових хвиль:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_{01} \cos(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r} + \delta_1), \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_{02} \cos(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r} + \delta_2),\end{aligned}$$

де δ_1, δ_2 – початкові фази. Оскільки хвилі когерентні, то $\delta_1 = const, \delta_2 = const$.

Різниця фаз між хвилями дорівнює:

$$\vec{k} \vec{r} + (\delta_2 - \delta_1),$$

де вектор $\vec{k} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$.

Рівняння, яке описує хвильові поверхні, має наступний вигляд:

$$\vec{k} \vec{r} = const.$$

Це рівняння для низки площин, які перпендикулярні до вектора \vec{k} . Інтенсивність результуючого коливання уздовж кожної з цих площин буде сталою. Перетин площини екрана з цими хвильовими поверхнями дає інтерференційну картину у вигляді смуг. Якщо різниця фаз дорівнює

$$2\pi n, \text{ де } n = 0, 1, 2, \dots,$$

то інтерференційні смуги будуть світлими.

Оскільки різниця фаз між коливаннями двох сусідніх максимумів дорівнює 2π , то можна записати:

$$k \cdot \Delta x = 2\pi,$$

де Δx – ширина інтерференційної смуги.

Оскільки хвилі монохроматичні, то

$$k_1 = k_2 = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Як впливає з рис. 4.4,

$$k = 2k_1 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Ширина інтерференційної смуги дорівнює

$$\Delta x = \frac{2\pi}{k} = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2}} \approx \frac{\lambda}{\varphi},$$

оскільки для малих кутів ($\varphi \ll 1$) $\sin \frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$.

4.4. Як приклад оптичної системи, яка дозволяє роздвоїти світлові промені, є дзеркала Френеля (рис. 4.5).

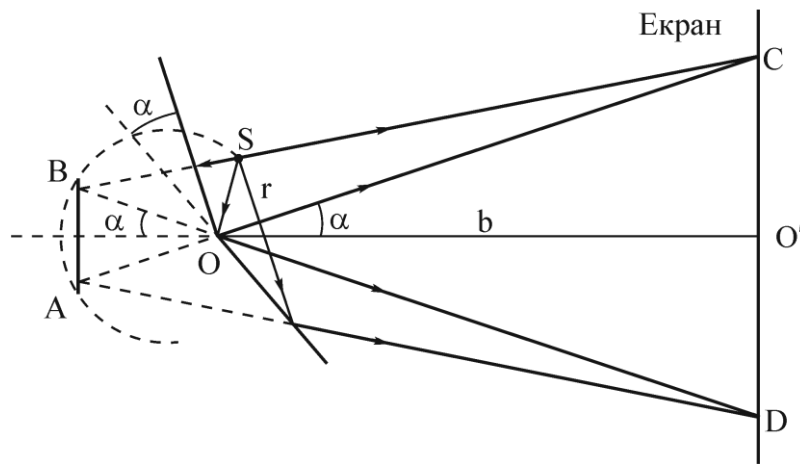


Рис. 4.5. Дзеркала Френеля

Два дзеркала встановлені під кутом, близьким до 180^0 (кут $\alpha \ll 1$). Відстані від точки O до джерела S і екрана дорівнюють відповідно $r = 0,1$ м і $b = 1,3$ м. Довжина світлової хвилі $\lambda = 0,55$ мкм.

Визначити:

а) ширину інтерференційної смуги Δx на екрані і кількість інтерференційних максимумів;

б) зсув інтерференційної картини на екрані, якщо джерело світла S перемістити на $\delta l = 1,0$ мм вздовж дуги радіуса r із центром в точці O ;

в) визначити максимальну ширину джерела світла h_{\max} (якщо джерело не точкове, а лінійне), при якій інтерференційна картина на екрані буде ще спостерігатися чітко.

Розв'язок. а) Розглянемо два світлові промені, які від джерела світла (точкового) падають на дзеркала окіл точки O . Ці промені відбиваються на екран, а їх продовження за дзеркала до перетину з колом радіуса r дають точки A і B . Промені, які падають на периферію дзеркал, відбиваються на екран, а їх продовження за дзеркала дає точки перетину A і B . Таким чином, картина, яка виникне на екрані, буде такою ж, якби замість

джерела S і бідзеркал були взяті два джерела A і B , що є зображеннями S у бідзеркалах, з тією лише різницею, що в установці Френеля промені від джерел світла A і B когерентні (здатні до інтерференції).

а) Якщо здійснити дослід з дзеркалами Френеля, то на екрані в центрі ми дістанемо світлу точку; в це місце промені приходять в однаковій фазі й взаємно підсилюють один одного. По мірі віддалення від точки O' (центр екрана) ми прийдемо в таке місце екрана на віддалі x_1 від центра, де різниця ходу стане рівною половині довжини хвилі $\frac{\lambda}{2}$.

Світлові коливання, які приходять у цю точку, знищують одне одного; тут ми дістанемо темну смугу (у випадку рівності амплітуд, тому що ця умова виконується в дзеркалах Френеля). При подальшому переміщенні по екрану ми прийдемо в таку точку, де різниця ходу дорівнює λ . Тут коливання знову будуть в одній фазі, і в цьому місці спостерігається світла смуга. Таким чином, віддаляючись від центра екрана, ми поперемінно будемо виявляти то світлі місця, то темні.

Інтерференція від двох когерентних джерел – це дослід Юнга, і згідно з формулою (4.12) ширина інтерференційної смуги дорівнює

$$\Delta x = \frac{l}{d} \lambda,$$

де l – відстань від лінії джерел до екрана; d – відстань між дзеркалами A і B . У нашому випадку

$$l = r \cdot \cos \alpha + b \approx (r+b),$$

оскільки при $\alpha \ll 1$ $\cos \alpha \approx 1$;

$$\frac{d}{2} = r \cdot \sin \alpha \approx r \cdot \alpha, \quad d \approx 2r \cdot \alpha.$$

Ширина інтерференційної смуги дорівнює

$$\Delta x = \frac{(r+b)}{2r\alpha} \lambda = 1,1 \text{ (мм)}.$$

На екрані (рис. 4.5) CD – область інтерференції. Число інтерференційних смуг дорівнює:

$$N = \frac{CD}{\Delta x} = \frac{2b\alpha \cdot 2r\alpha}{(r+b)\lambda} = \frac{4br\alpha^2}{(r+b)\lambda} = 9.$$

б) При зміщенні джерела світла в положення S вздовж дуги радіуса r на відстань δl кожна точка на екрані зміщується на відстань δx :

$$\delta x = b \cdot \operatorname{tg}(\delta \varphi) \approx b \cdot \delta \varphi,$$

оскільки $\delta \varphi \ll 1$.

Відстань δl пов'язана з кутом $\delta \varphi$ співвідношенням:

$$\delta l = r \cdot \delta \varphi,$$

звідки

$$\delta x = \frac{b \cdot \delta l}{r} = 13 \text{ (мм)}.$$

в) У цьому випадку джерелом світла є відрізок дуги δl , кожна точка якого є точкове джерело світла. Тому результуюча картина буде суперпозицією картин, що одержані від кожного джерела. Для аналізу картини треба розглянути суперпозицію від двох точкових джерел світла (кінцеві точки дуги) і скористатися критерієм Релея. Картина буде чіткою, якщо зміщення δx не перевищує половину ширини інтерференційної смуги (рис. 4.6):

$$\delta x \leq \frac{\Delta x}{2}.$$

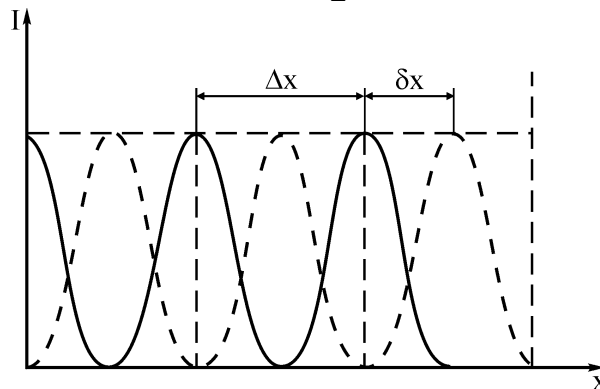


Рис. 4.6. Розподіл інтенсивності на екрані

Із пункту б) задачі випливає, що

$$\delta x = \frac{b \cdot \delta l}{r} = \frac{b \cdot h_{\max}}{r}.$$

Із пункту а) задачі випливає, що:

$$\Delta x = \frac{(r+b)}{2r\alpha} \lambda.$$

З цих двох рівнянь визначимо h_{\max} :

$$h_{\max} = \frac{(r+b)\lambda}{4b\alpha} = 43 \text{ (мкм)}.$$

4.5. Лінзу (двоопуклу) діаметром 5 см і фокусною відстанню $f = 25$ см розрізали навпіл і шар завтовшки $a = 1,0$ мм вирізали. Після цього обидві половинки з'єднали і у фокальній площині одержаної таким чином білінзи розташували джерело світла – щілину з довжиною хвилі $\lambda = 0,6$ мкм. За білінзою на відстані $b = 0,5$ м знаходиться екран. Визначити:

- ширину інтерференційної смуги на екрані і число максимумів;
- ширину щілини h_{\max} , при якій інтерференційна картина буде ще чіткою.

Розв'язок. Хід променів у білінзі показаний на рис. 4.7.

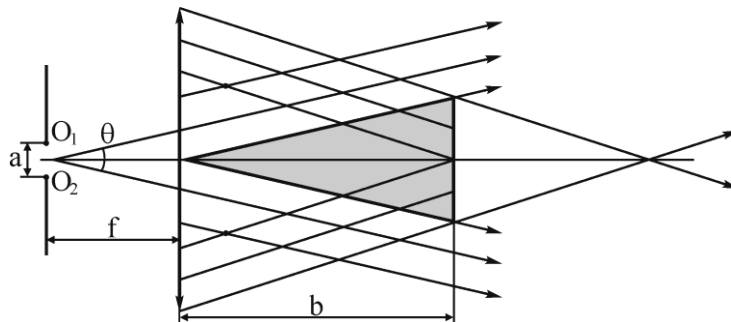


Рис. 4.7. Хід променів у білінзі

- Як впливає з рис. 4.7, білінза утворює два дійсні точкові джерела світла, які розташовані з іншого боку лінзи, і вони когерентні. Кут Θ малий:

$$\operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} = \frac{a}{2f}, \quad \Theta = \frac{a}{f} \ll 1.$$

Для хвиль, які поширюються під малим кутом Θ , ширина інтерференційної смуги дорівнює

$$\Delta x = \frac{x}{\Theta} = \frac{\lambda \cdot f}{a}.$$

Поле інтерференції на екрані дорівнює:

$$L = 2b \cdot \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} = 2b \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{f}.$$

Число інтерференційних смуг дорівнює

$$N = \frac{L}{\Delta x} = \frac{a^2 b}{\lambda \cdot f^2} \approx 13.$$

б) Згідно з критерієм Релея картина буде чіткою, якщо

$$\delta x \leq \frac{\Delta x}{2}.$$

$$\delta x = b \cdot \delta \varphi = \frac{b \cdot h_{\max}}{f},$$

оскільки $\delta \varphi = \frac{h_{\max}}{f}$,

$$h_{\max} = \frac{\lambda \cdot f^2}{2ab}.$$

4.6. Відстань від біпризми Френеля до вузької щілини і екрана дорівнює відповідно $a = 25$ см і $b = 100$ см. Біпризма виготовлена зі скла ($n=1,5$) з кутом заломлення $\theta = 20'$. Ширина інтерференційної смуги на екрані $\Delta x = 0,55$ мм. Визначити довжину хвилі світла.

Розв'язок. Хід променів у біпризмі Френеля показаний на рис. 4.8.

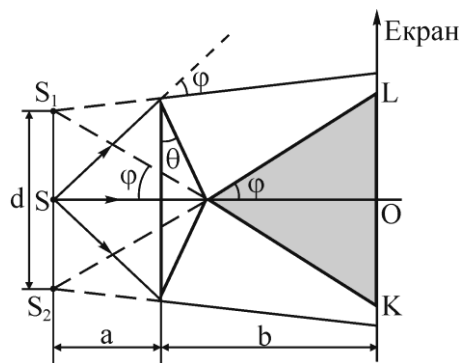


Рис. 4.8. Хід променів у біпризмі Френеля

Розташуємо у точці S джерело світла. В результаті заломлення променів призмою на екрані утворюється інтерференційна картина (система смуг) і область інтерференції на екрані – KL . Інтерференційна картина буде такою самою, як і у випадку суперпозиції хвиль від когерентних джерел, які розташовані у точках S_1 і S_2 . Тому ми маємо справу із задачею Юнга (дослід Юнга), розв'язок якої має вигляд:

$$\Delta x = \frac{l}{d} \lambda.$$

У нашому випадку $l = a + b$. Кут $\theta \ll 1$, тому і кут $\varphi \ll 1$. Згідно із дослідом Юнга $S_1 S_2 = d$:

$$\frac{d}{2} = a \cdot \operatorname{tg} \varphi \approx a \varphi,$$

звідки $d = 2a\varphi$.

Згідно з формулою лінзи

$$\frac{\sin\left(\frac{\varphi + \Theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)} = n.$$

Оскільки $\varphi \ll 1$, $\theta \ll 1$, то остання формула набуває вигляду:

$$\frac{\frac{\varphi + \Theta}{2}}{\frac{\Theta}{2}} = n,$$

звідки $\varphi = (n-1)\Theta$.

Формула для ширини інтерференційної смуги набуває вигляду:

$$\Delta x = \frac{(a+b)\lambda}{2a(n-1)\Theta},$$

звідки $\lambda = \frac{2a(n-1)\Theta \cdot \Delta x}{(a+b)}$. $\lambda = 0,6$ мкм.

4.7. Плоска світлова хвиля ($\lambda = 0,7$ мкм) падає нормально на біпризму Френеля ($n = 1,52$) з кутом заломлення $\theta = 5^\circ$. За біпризмою розташована плоско паралельна пластинка ($n = 1,52$), а простір між ними заповнений нітробензолом ($n' = 1,50$). На екрані за цією системою спостерігається інтерференційна картина. Визначити ширину інтерференційної смуги.

Розв'язок. На рис. 4.9 показана оптична система і хід променів.

Кут α , під яким призма заломлює промені, малий ($\alpha \ll 1$), оскільки кут $\Theta \ll 1$. Відповідно малі кути β ($\beta \ll 1$) і Ψ ($\Psi \ll 1$). На виході із системи інтерференційну картину утворюють промені, які падають на екран під

невеликим кутом між ними 2Ψ (задача 4.3). Ширина інтерференційної смуги у цьому випадку дорівнює:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\Psi}.$$

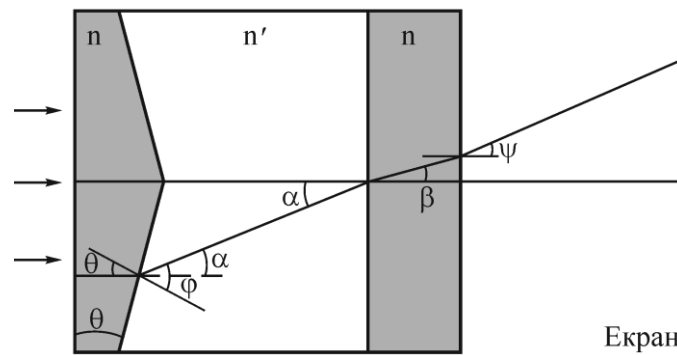


Рис. 4.9. Хід променів у оптичній системі

Визначимо кут Ψ . Згідно з законом Снелліуса:

$$n \cdot \sin \Theta = n' \sin \varphi \quad \text{або} \quad n \Theta = n' \varphi.$$

Звідки $\varphi = \frac{n}{n'} \Theta$, $\alpha = \varphi - \Theta = \frac{n}{n'} \Theta - \Theta = \Theta \left(\frac{n}{n'} - 1 \right)$.

Згідно з формулою призми

$$\frac{\sin \frac{\alpha + \Theta}{2}}{\sin \frac{\Theta}{2}} = \frac{n}{n'},$$

звідки $\frac{\alpha + \Theta}{\Theta} = \frac{n}{n'}$, $\alpha = \Theta \left(\frac{n}{n'} - 1 \right)$.

Згідно із законом Снелліуса:

$$n' \sin \alpha = n \sin \beta, \quad \text{або} \quad n' \alpha = n \beta.$$

Звідки

$$\beta = \frac{n'}{n} \alpha = \frac{n'}{n} \left(\frac{n}{n'} - 1 \right) \cdot \Theta, \quad n \sin \beta = \sin \Psi,$$

звідки $\Psi = n \cdot \beta$.

Таким чином, кут ψ дорівнює

$$\Psi = \frac{n'}{n} n \cdot \left(\frac{n}{n'} - 1 \right) \cdot \Theta = (n - n') \cdot \Theta.$$

Ширина інтерференційної смуги дорівнює

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\Psi} = \frac{\lambda}{2(n - n') \cdot \Theta} = 0,2 \text{ (мм)}.$$

4.8. На рис. 4.10 показаний пристрій для визначення показників заломлення прозорої речовини. Це інтерферометр Релея. Джерело світла ($\lambda = 589$ нм) розташовано у фокусі лінзи L . Діафрагма D виділяє два паралельні пучки світла, які проходять крізь однакові трубки ($l = 10$ см) і далі після другої діафрагми D потрапляють на екран, на якому спостерігається система інтерференційних смуг. Коли в обох трубках повітря ($n = 1,000277$), то картина симетрична відносно осі приладу. Коли повітря в одній трубці замінили аміаком, то інтерференційна картина змістилася вгору на $N = 17$ смуг. Визначити показник заломлення аміаку.

Розв'язок. Схема приладу наведена на рис. 4.10.

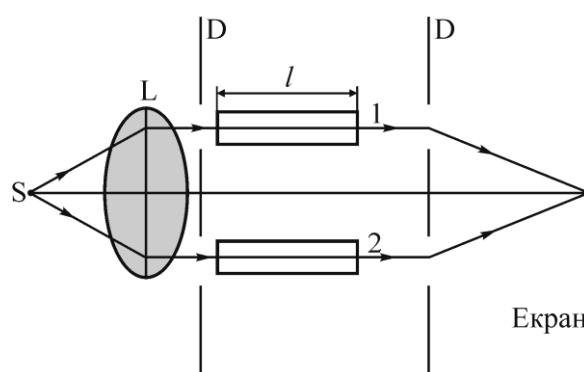


Рис. 4.10. Схема інтерферометра Релея

Умова максимуму інтерференції полягає в тому, що різниця ходу повинна дорівнювати

$$\Delta = \pm 2m \left(\frac{\lambda_0}{2} \right) = \pm m \lambda_0, \text{ або } \Delta = L_2 - L_1.$$

Після зміщення картини вгору нова різниця ходу дорівнює

$$\Delta' = n'l - nl,$$

або $\Delta' l - n l = \pm N \lambda_0$, звідки

$$n' = n + \frac{N \lambda_0}{l} = 0,00039.$$

4.9. На поверхні скла ($n_C = 1,5$) знаходиться шар води ($n_B = 1,33$). На цю систему падає світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,68$ мкм під кутом $\theta = 30^\circ$ до нормалі поверхні. Вода випаровується, і товщина шару зменшується. Інтенсивність відбитого світла змінюється, інтервал між двома послідовними максимумами дорівнює $\Delta t = 15$ хв. Визначити швидкість, з якою змінюється товщина плівки.

Розв'язок. Інтерференцію у відбитому світлі утворюють світлові промені, які відбиваються від верхньої і нижньої поверхонь шару води. Обидва промені на границі розподілу при відбитті змінюють фазу на π , тому результуючий зсув фаз дорівнює нулю. Умова максимуму інтерференції має вигляд

$$\Delta_1 = 2 h_1 \sqrt{n_B^2 - \sin^2 \Theta} = m \lambda,$$

де Δ_1 – різниця ходу між променями.

Наступний максимум інтерференції спостерігається за умови:

$$\Delta_2 = 2 h_2 \sqrt{n_B^2 - \sin^2 \Theta} = (m+1) \lambda.$$

З цих двох рівнянь одержимо

$$(\Delta_2 - \Delta_1) = 2 \Delta h \sqrt{n_B^2 - \sin^2 \Theta} = (m+1) \lambda - m \lambda.$$

Швидкість випаровування шару води дорівнює

$$v = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\lambda}{2 \Delta t \sqrt{n_B^2 - \sin^2 \Theta}} = 1,1 \left(\frac{\text{мкм}}{\text{год.}} \right).$$

4.10. На поверхню тонкої плівки падає світло під кутом $\theta = 30^\circ$. Показник заломлення плівки $n = 1,33$. При $\lambda_1 = 0,64$ мкм у відбитому світлі спостерігається максимум інтерференції, а при $\lambda_2 = 0,4$ мкм – мінімум. Визначити мінімальну товщину плівки, яка задовольняє цим умовам.

Розв'язок. При відбитті світла від плівки треба врахувати випадковий зсув фаз π , тобто у вираз для різниці ходу треба додати $\lambda/2$. Це обумовлено

тим, що світло відбивається від поверхні, оптична густина якої більша. Умова максимуму інтерференції має вигляд:

$$2h\sqrt{n^2 - \sin^2 \Theta} - \frac{\lambda_1}{2} = m\lambda_1,$$

де m – порядок максимуму.

Аналогічно маємо для мінімуму інтерференції вираз:

$$2h\sqrt{n^2 - \sin^2 \Theta} - \frac{\lambda_2}{2} = (2K + 1)\frac{\lambda_2}{2},$$

де K – порядок мінімуму.

Із цих двох рівнянь одержимо рівняння, яке містить параметри m і K :

$$3,2m = 2K + 0,4.$$

З урахуванням того, що числа m і K – цілі, методом підстановки одержимо: $m = 2$, $K = 3$.

Товщина плівки дорівнює

$$h_{min} = 0,65 \text{ мкм.}$$

4.11. Щоб зменшити втрати світлового потоку при відбитті від поверхні скла ($n_c = 1,5$), скло покривають тонким шаром плівки з показником заломлення $n_{пл} = \sqrt{n_c}$. При цьому амплітуди хвиль, що відбиваються від обох поверхонь плівки, будуть рівними. Відбиті світлові промені утворюють інтерференційний мінімум, який дорівнює нулю. Нанесення тонкої плівки на поверхню скла називається освітленням оптики. Визначити товщину плівки у напрямку нормалі для світла з довжиною хвилі λ .

Розв'язок. Хід променів показаний на рис. 4.11.

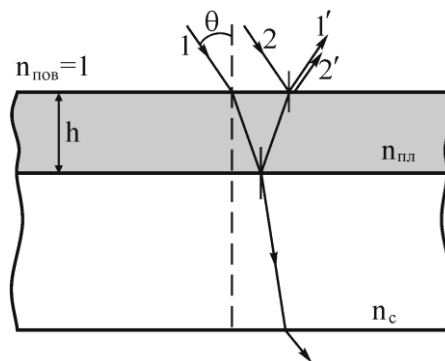


Рис. 4.11. Хід променів у системі скло – плівка під довільним кутом θ

Промені 1' і 2' інтерферують, і умова мінімуму має вигляд:

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}, \text{ де } m = 0, 1, 2, \dots$$

Різниця ходу дорівнює

$$\Delta = 2h\sqrt{n_{\text{пл}}^2 - \sin^2 \Theta} = 2hn_{\text{пл}} = 2h\sqrt{n_c},$$

оскільки при нормальному падінні світла кут $\theta = 0$.

Умова мінімуму інтерференції має вигляд

$$(2m+1) \cdot \frac{\lambda}{2} = 2h\sqrt{n_c}, \quad h = \frac{(2m+1)\lambda}{4\sqrt{n_c}},$$

де $m = 0, 1, 2, \dots$

4.12. Світлова хвиля з довжиною хвилі $\lambda = 0,55$ мкм падає нормально на поверхню клина, який виготовлений зі скла ($n = 1,5$). У відбитому світлі спостерігається система інтерференційних смуг. Відстань між сусідніми максимумами на поверхні клина $\Delta x = 0,21$ мм. Визначити: а) кут α між поверхнями клина; б) ступінь монохроматичності світла $\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)$, якщо інтерференційна картина спостерігається тільки на відстані $l \approx 1,5$ см від вершини клина.

Розв'язок. а) Переріз клина показаний на рис. 4.12. Клин повинен бути дуже пологим, товщина якого поступово зменшується від одного краю до другого (кут при вершині клина α дуже малий і $\alpha \ll 1$). Це впливає з того, щоб виконувалась умова часової когерентності. Фізика інтерференції на клині збігається з інтерференцією на плоско паралельній пластинці, і різниця ходу визначається за однаковими формулами.

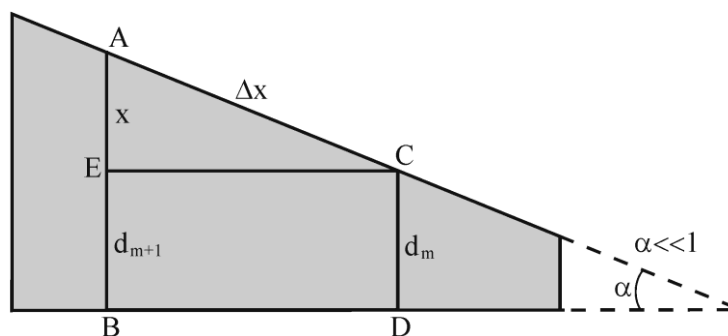


Рис. 4.12. Переріз клина

Умова максимуму інтерференції має вигляд

$$\Delta = 2d_m \sqrt{n^2 - \sin^2 \Theta} - \frac{\lambda}{2} = 2m \frac{\lambda}{2},$$

або

$$\Delta = 2d_m \cdot n - \frac{\lambda}{2} = m \lambda,$$

оскільки при нормальному падінні $\Theta = 0$, m – порядок інтерференції.

Товщина клина дорівнює відповідно

$$d_m = \frac{(2m+1) \cdot \frac{\lambda}{2}}{2n}, d_{m+1} = \frac{(2m+2) \cdot \frac{\lambda}{2}}{2n}.$$

Різниця між d_{m+1} і d_m дорівнює x :

$$x = AB - CD = d_{m+1} - d_m = \frac{\lambda}{2n}.$$

Із трикутника ACE:

$$\Delta x = \frac{x}{\sin \alpha} \approx \frac{x}{\alpha},$$

оскільки при $\alpha \ll 1$ $\sin \alpha \approx \alpha$.

З двох останніх виразів визначимо α :

$$\alpha = \frac{\lambda}{2n \cdot \Delta x} = 3'.$$

б) Розглянемо дві монохроматичні хвилі з довжинами хвиль λ і $\lambda' = \lambda + \Delta \lambda$.

Інтерференційна картина пропадає, якщо максимум для однієї довжини хвилі збігається з мінімумом для другої:

$$m(\lambda + \Delta \lambda) = (2m+1) \frac{\lambda}{2},$$

звідки $m = \frac{\lambda}{2\Delta \lambda}$.

Число смуг, що спостерігаються, дорівнює

$$m = \frac{l}{\Delta x}.$$

З двох останніх виразів одержимо

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\Delta x}{2l}.$$

4.13. Плоско-випукла лінза виготовлена зі скла ($n=1,5$) і має радіус кривизни $R = 40$ см. Лінза лежить на плоско-паралельній пластинці, яка теж виготовлена зі скла ($n=1,5$). Така оптична система із лінзи і пластинки має назву приладу для спостереження кілець Ньютона і показана на рис. 4.13.

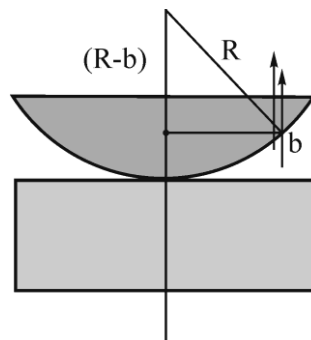


Рис. 4.13. Установка для спостереження кілець Ньютона

У відбитому світлі спостерігається кільце радіусом $r = 2,5$ мм. Далі повільно лінзу віддалили від пластинки на $h = 5$ мкм і продовжили спостерігати за кільцем радіуса r . Яким при цьому став радіус кільця?

Розв'язок. Класичний випадок спостереження інтерференційних смуг в клині (смуги рівної товщини) є кільця Ньютона. Вони виникають при накладанні слабко опуклої лінзи на плоску пластинку в клиноподібному повітряному шарі між ними. В цьому випадку вони мають вигляд кілець, розміщених все густіше і густіше при віддаленні від центра. З геометрії випливає, що товщина клина b дорівнює:

$$b = \frac{r^2}{2R},$$

при цьому членом b^2 ми нехтували ($b^2 = 0$), оскільки $b \ll r$.

Оптична різниця ходу між променями, відбитими у напрямку нормалі до лінзи від поверхонь клина, дорівнює:

$$\Delta = 2b + \frac{\lambda}{2} = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2}.$$

Тут врахована додаткова різниця фаз між променями π (до різниці ходу додали $\frac{\lambda}{2}$).

Після того, як лінзу повільно віддалили від пластинки, різниця ходу між променями змінилася на $2h$:

$$2h = \Delta - \Delta' = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2} - \frac{r'^2}{R} - \frac{\lambda}{2} = \frac{r^2}{R} - \frac{r'^2}{R},$$

де $\Delta' = \left(\frac{r'^2}{R} + \frac{\lambda}{2} \right)$ – нова різниця ходу між променями.

Новий радіус кільця r' дорівнює:

$$r' = \sqrt{r^2 - 2Rh} = 1,5 \text{ (мм)}.$$

4.14. На рис. 4.13 показаний прилад для спостереження кілець Ньютона. Радіус лінзи $R = 12,5$ см, лінза виготовлена зі скла ($n=1,5$). Діаметри десятого і п'ятнадцятого темних кілець Ньютона у відбитому світлі дорівнюють $d_1 = 1,0$ мм і $d_2 = 1,5$ мм. Визначити довжини хвилі світла.

Розв'язок. У попередній задачі була визначена різниця ходу Δ :

$$\Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2},$$

де r – радіус кільця.

Оскільки кільця темні, то треба застосувати умову мінімуму інтерференції:

$$\Delta = (2K + 1) \frac{\lambda}{2},$$

де K – номер темного кільця.

Із двох останніх виразів запишемо умову мінімуму:

$$\frac{r_T^2}{R} = 2K \frac{\lambda}{2},$$

або $r_T = \sqrt{2K \frac{R\lambda}{2}} = \sqrt{KR\lambda},$

де r_T – радіус темного кільця.

Запишемо цю умову для двох темних кілець:

$$d_1 = 2\sqrt{K_1 R \lambda}, \quad d_2 = 2\sqrt{K_2 R \lambda}.$$

З цих двох рівнянь визначимо довжину хвилі λ :

$$d_2^2 - d_1^2 = 4R\lambda(K_2 - K_1),$$

або

$$\lambda = \frac{d_2^2 - d_1^2}{4R(K_2 - K_1)} = 0,5 \text{ (мкм)},$$

де K_1 і K_2 – номери темних кілець.

4.15. При освітленні еталона Фабрі-Перо монохроматичним світлом з довжиною хвилі λ у фокальній площині лінзи виникає інтерференційна картина – система концентричних кілець. Товщина еталона $d = 2,5$ см, довжина світла $\lambda = 0,5$ мкм. Визначити: а) кутову напівширину смуг інтерференції; б) максимальний порядок інтерференції світла; в) дисперсійну область $\Delta\lambda$ (спектральний інтервал довжин хвиль, при якому немає перекриття з іншими порядками інтерференції).

Розв'язок. Схема еталона Фабрі-Перо наведена на рис. 4.14.

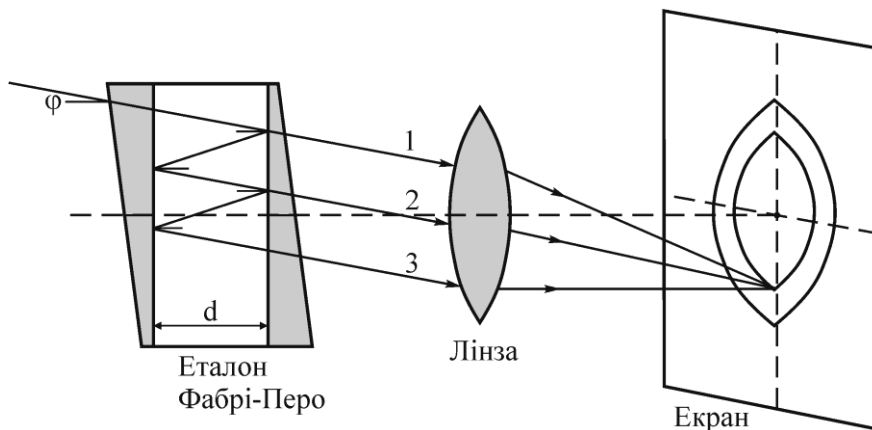


Рис. 4.14. Схема еталона Фабрі-Перо

а) Еталон складається з двох строго паралельних напівпрозорих дзеркал (внутрішня поверхня), відстань між якими дорівнює d . Зовнішні сторони дзеркал не є паралельними (щоб уникнути відбиття від зовнішніх поверхонь дзеркал). У цьому приладі реалізується принцип багатопроменевої інтерференції із затуханням (враховуються всі відбиті промені). Інтерференція відбувається на повітряному шарі, границею якого є напівпрозорі дзеркала. Перший промінь на правому дзеркалі розділяється: на промінь, який пройшов і на відбитий. Відбитий промінь відбивається від лівого дзеркала і на правому дзеркалі частково виходить, а частково відбивається і так далі.

Розглянемо перші три промені, що виходять з еталона паралельно один одному і падають на лінзу. Всі промені між собою мають однаковий зсув фаз δ , який дорівнює:

$$\delta = k \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2d \cdot \cos \varphi = \frac{4\pi d \cdot \cos \varphi}{\lambda},$$

де $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число; φ – кут падіння; $\Delta = 2d \cdot \cos \varphi$ – різниця ходу між сусідніми променями.

Оскільки промені не когерентні, то результуюча інтенсивність на виході системи визначається сумою інтенсивностей всіх хвиль на виході. Позначимо E_{na0} – напруженість поля падаючої хвилі; E_{np} – напруженість хвилі на виході з системи; δ – постійний зсув фаз між хвилями. Тоді для перших трьох хвиль можна записати:

$$E_{np1} = E_{na0} (1 - \rho),$$

де ρ – коефіцієнт відбиття $\left(\rho = \frac{I_{від.}}{I_{na0}} \right)$,

$$E_{np2} = E_{na0} (1 - \rho) \rho,$$

$$E_{np3} = E_{na0} (1 - \rho) \cdot \rho^2$$

і так далі. Тому напруженість всіх хвиль визначається так:

$$E_{np} = E_{na0} (1 - \rho) + E_{na0} (1 - \rho) \rho^{e^{i\delta}} + E_{na0} (1 - \rho) \rho^2 \cdot e^{-2i\delta} \dots + \dots,$$

де множник $e^{-i\delta}$ враховує різницю фаз між хвилями.

Тому попередній вираз можна переписати у вигляді:

$$E_{np} = E_{nad} (1 - \rho) [1 + \rho e^{-i\delta} + \rho^2 e^{-2i\delta} + \dots + \rho^N e^{-Ni\delta}],$$

де вираз у квадратних дужках є геометричною прогресією із загальним множником $\rho e^{-i\delta}$.

Таким чином,

$$E_{np} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho e^{-i\delta}} E_{nad}.$$

За означенням

$$I_{np} = E_{np} \cdot E_{np}^* = \langle \text{Re} E \cdot \text{Re} E^* \rangle,$$

де I_{np} – інтенсивність світла.

Після підстановки одержимо вираз:

$$I_{np} = \frac{(1 - \rho)^2 \cdot E_{nad}^2}{(1 - \rho)^2 + 4\rho \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)},$$

оскільки $\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \delta}{2}}$.

Умова максимуму інтерференції має вигляд

$$\delta = 2\pi m, \text{ де } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Таким чином,

$$I_{np, \max} = I_{nad}.$$

Уявимо окіл точки максимуму інтерференції у вигляді

$$\delta = 2\pi m + \varphi,$$

де φ – кут падіння світла.

Тоді вираз для інтенсивності світла запишемо так:

$$I_{np} = \frac{I_{np, \max}}{1 + \frac{4\rho}{(1 - \rho)^2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

З урахуванням того, що при $(1 - \rho) \ll 1$ і з ростом $|\varphi|$ інтенсивність I_{np} прямує до нуля, а також що при малих кутах φ $\sin \varphi \approx \varphi$, запишемо попередній вираз у спрощеному вигляді:

$$I_{np.} = \frac{I_{np.max}}{1 + \frac{4\rho}{(1-\rho)^2} \cdot \varphi^2}.$$

Оскільки 2φ – це напівширина, знайдемо:

$$I_{np.} = \frac{1}{2} I_{np.max},$$

звідки $\varphi = \frac{(1-\rho)}{\sqrt{\rho}},$

а напівширина дорівнює

$$2\varphi = 2 \frac{(1-\rho)}{\sqrt{\rho}}.$$

б) Умова максимуму інтерференції має вигляд:

$$\Delta = 2d \cos \varphi = m \lambda,$$

де Δ – різниця ходу між променями; m – порядок інтерференції (ціле число).

Максимальний порядок інтерференції буде при $\cos \varphi = 1$:

$$m_{max} = \frac{2d}{\lambda}.$$

в) Якщо світло немонохроматичне, то довжини хвиль лежать у діапазоні від λ_1 до λ_2 . Умова перекриття хвиль полягає у тому, що максимум інтерференції для хвилі з довжиною λ_1 збігається з мінімумом для хвилі λ_2 при $m = m_{max}$:

$$m \lambda_1 = (m-1) \lambda_2,$$

звідки

$$m_{max} = \frac{\lambda_2}{\Delta \lambda} = \frac{2d}{\lambda_1},$$

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda_2 \lambda_1}{2d} \approx \frac{\lambda^2}{2d},$$

де $\Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1$.

4.16. У досліді Юнга з двома щілинами довжина хвилі у вакуумі дорівнює λ_0 . Відстань між щілинами дорівнює d , відстань від джерел до екрана дорівнює l . Визначити: а) різницю ходу хвиль Δ як функцію координати x

точок на екрані; б) положення центрів світлих смуг. Показник заломлення середовища дорівнює n .

4.17. Оцінити радіус когерентності ρ сонячного світла поблизу поверхні Землі. Середній радіус Сонця (м) – $6,96 \cdot 10^8$, середня відстань від Сонця до Землі (м) – $1,496 \cdot 10^{11}$.

4.18. На тонку плівку з показником заломлення n падає пучок білого світла під кутом θ до нормалі. При якій мінімальній товщині і який колір матиме плівка у відбитому світлі?

Контрольні питання до розділу 4

1. Що таке інтерференція світла?
2. Які хвилі називаються когерентними?
3. Що таке часова когерентність?
4. Що таке просторова когерентність?
5. Як визначається ширина інтерференційної смуги в досліді Юнга?
6. Поясніть утворення інтерференційної картини в досліді Френеля з бідзеркалами, біпризмою.
7. Інтерференція у тонких плівках.
8. Сформулюйте умови максимумів і мінімумів інтерференції.
9. Що називається оптичною різницею ходу променів?
10. У чому полягає «просвітлення оптики»?
11. Принцип дії інтерферометра Фабрі-Перо.
12. У яких випадках до різниці ходу додається напівдовжина хвилі?
13. Умова чіткого зображення інтерференційної картини (критерій Релея).

РОЗДІЛ 5. ДИФРАКЦІЯ СВІТЛА

В геометричній оптиці приймається як основна передумова прямолінійність поширення світла. Тому при побудові зображень в оптичних системах шлях світла в однорідному середовищі уявляють у вигляді прямолінійних променів, і при цьому виконуються закони заломлення і відбивання. Проте досліди показують, що в ряді випадків такого простого уявлення недостатньо. Розглянемо, наприклад, випадок, коли світло падає на діафрагму з вузькою щілиною K (рис. 5.1).

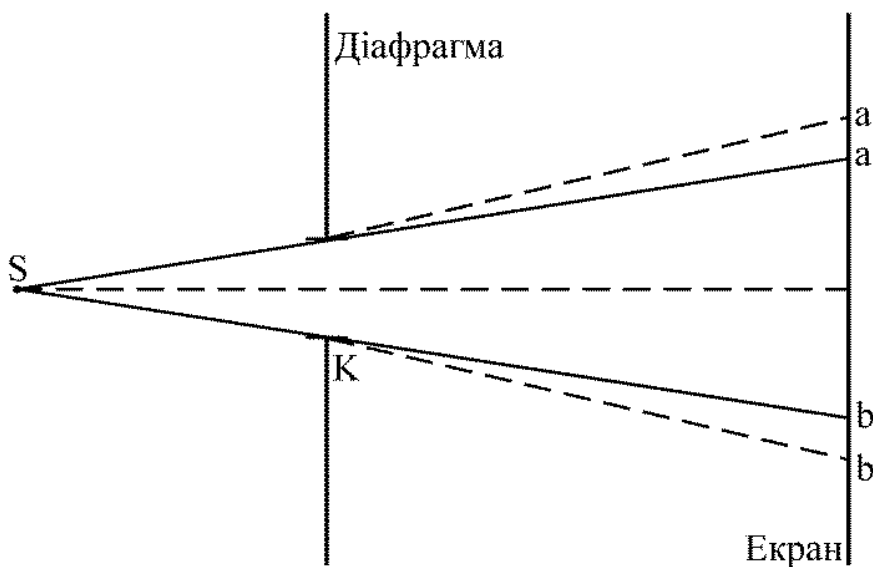


Рис. 5.1. Падіння пучка світлових променів на діафрагму

Дослід показує, що в даному випадку замість різкого сліду ab дістаємо розмиту смугу або, точніше, ряд смуг, які заповнюють область $a'b'$. Ця область є значно ширшою, ніж це впливає з геометричних міркувань. Описане явище зветься дифракцією. Тому можна дати наступне, більш повне визначення дифракції: **дифракцією називають сукупність явищ, які спостерігаються при поширенні світла в середовищі з різкими неоднорідностями**. Воно полягає в тому, що хвилі світла відхиляються від прямолінійного шляху. Цю властивість мають усі хвилі незалежно від їх природи.

Принцип Гюйгенса–Френеля. Вперше природу явища дифракції світла розглянув голландський фізик Гюйгенс (Христіан Гюйгенс, 1629–1695 рр.) на основі хвильових уявлень про природу світла. Він розглянув поширення хвиль світла як послідовне збурення точок простору, в якому поширюється світло. Кожна точка хвильової поверхні (поверхні з однаковою фазою коливань) є джерелом вторинних хвиль, які

поширюються зі швидкістю світла. Поширення хвилі є результатом інтерференції коливань, які випромінюють вторинні джерела. Французький фізик Френель (Френель Огюстен Жан, 1788–1827 рр.) доповнив Гюйгенса в тому, що ці вторинні джерела є когерентними. Таким чином, дифракція – це сукупність явищ, пов'язаних з поширенням хвиль світла у середовищі з різкими неоднорідностями.

Розглянемо процес поширення світла в ізотропному середовищі. Джерело світла точкове і випромінює сферичну хвилю. У деякий час хвильова поверхня була в положенні A (рис. 5.2).

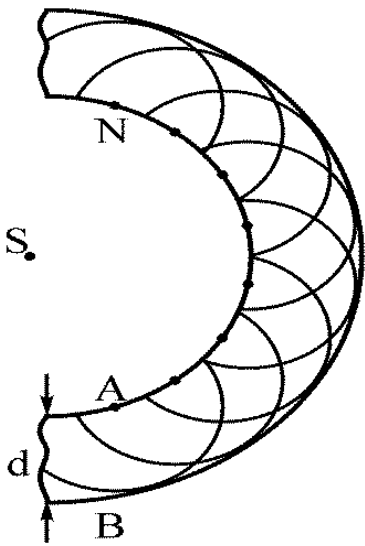


Рис. 5.2. Утворення хвильового фронту

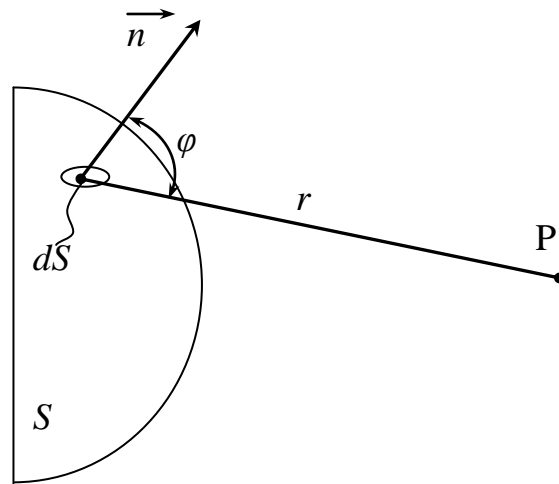


Рис. 5.3. Принцип Гюйгенса–Френеля

Всі точки хвильової поверхні A починають одночасно випромінювати вторинні хвилі зі швидкістю світла c . В результаті через час t коливання поширюються на відстань $d = t \cdot c$, що відповідає переміщенню фронту в положення B . Фронт хвилі B за означенням повинен проходити через усі точки простору в одній фазі. Отже, він дотикається до всіх сфер радіуса d , які являють собою вторинні хвильові поверхні через час t . Таким чином, хвильовий фронт є поверхнею, яка огинає поверхні вторинних хвиль.

В ізотропному середовищі промені світла є нормаллями до хвильової поверхні.

У принципі Гюйгенса–Френеля постулюється, що випромінювання вторинних хвиль у зворотному напрямку (до джерела світла) відсутнє. Як показав Кірхгоф, інтенсивність вторинних хвиль буде найбільшою в напрямі нормалі до хвильової поверхні, тобто в напрямку поширення хвилі, і має різко спрямований характер.

Таким чином, принципової різниці між явищами інтерференції і дифракції немає. Обидва явища пов'язані з суперпозицією когерентних хвиль, і результатом є перерозподіл потоку світла.

Математична інтерпретація принципу Гюйгенса–Френеля

Розглянемо елемент dS хвильової поверхні S (рис. 5.3). Елемент dS є джерелом вторинної хвилі, амплітуда якої пропорційна dS . Амплітуда вторинної хвилі загасає згідно із законом $1/r$, де r – відстань до джерела світла. У точку P від кожної ділянки dS хвильової поверхні приходять коливання:

$$dE = K(\varphi) \frac{a_0 dS}{r} \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha_0), \quad (5.1)$$

де a_0 – амплітуда вторинної хвилі; \vec{k} – хвильовий вектор; α_0 – початкова фаза.

Результуюче коливання в точці P є результат суперпозиції коливань (5.1), тобто інтеграл по поверхні S :

$$E = \int K(\varphi) \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha_0) dS. \quad (5.2)$$

Формула (5.2) є аналітичним виразом принципу Гюйгенса–Френеля. Коефіцієнт $K(\varphi)$ дорівнює одиниці при $\varphi=0$ і дорівнює нулю при $\varphi=\pi/2$.

Принципово явище дифракції можна поділити на два типи. Якщо джерело S і точка спостереження P розташовані від перешкоди настільки далеко, що промені, які падають на перешкоду, і промені, які йдуть в точку P , утворюють паралельні пучки, то це дифракція Фраунгофера (або дифракція в паралельних променях). В іншому випадку – це дифракція Френеля. Практично дифракцію Фраунгофера можна спостерігати за схемою, поданою на рис. 5.4.

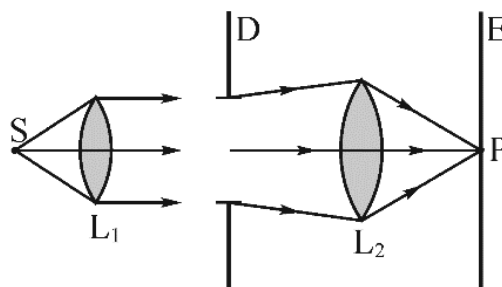


Рис. 5.4. Дифракція Фраунгофера (S – джерело світла; L_1, L_2 – лінзи; D – діафрагма; E – екран)

Метод зон Френеля

Оскільки точок хвильового фронту, які є когерентними джерелами нових хвиль, нескінченна кількість, то розрахунок дифракції за формулою (5.2) є дуже складним. Французький фізик Френель запропонував графічний метод розподілу фронту хвилі на зони, які одержали назву зон Френеля.

Розглянемо випромінювання джерелом S монохроматичного світла в однорідному середовищі. Згідно з принципом Гюйгенса–Френеля джерело S випромінює сферичну хвилю. Нехай відстань точки спостереження P від хвильового фронту S буде b (рис. 5.5).

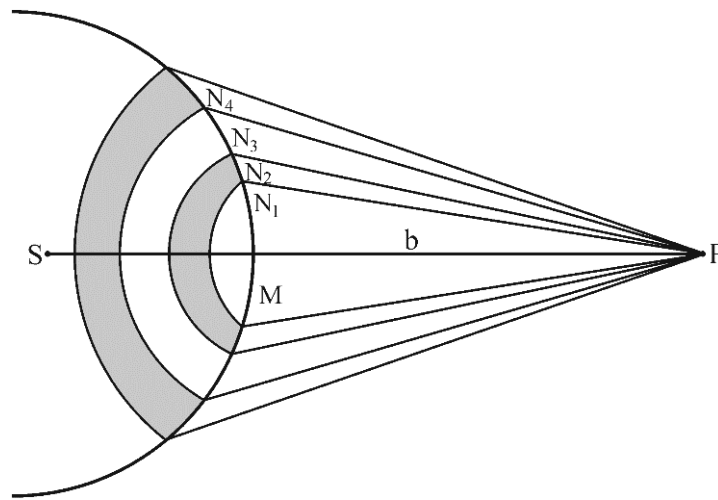


Рис. 5.5. Зони Френеля

Для розгляду інтерференційної картини зробимо таку побудову. З точки спостереження P проведемо ряд радіусів:

$$\begin{aligned}
 PN_1 &= b + \frac{\lambda}{2}, \\
 PN_2 &= b + 2\frac{\lambda}{2}, \\
 PN_3 &= b + 3\frac{\lambda}{2}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 PN_n &= b + m\frac{\lambda}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

На поверхні хвильового фронту S ці радіуси виріжуть ряд кілець, які називають зонами Френеля. Кожна наступна зона розміщена від точки P на півхвилі далі, ніж попередня. Отже, в точку P коливання приходять від двох сусідніх зон Френеля у протилежній фазі і при додаванні частково знищують одне одного. Площі всіх зон Френеля приблизно однакові: $S_m = \pi b \lambda$. Позначимо амплітуди хвиль, які приходять у точку P від кожної зони $A_0, A_1, A_2, A_3 \dots$

Завдяки різниці у відстані від зони до точки спостереження та кутам, під якими ці зони спостерігаються із точки P (коефіцієнт $K(\varphi)$ у рівнянні (5.2)), можна записати монотонне загасання амплітуд у вигляді:

$$A_0 > A_1 > A_2 > A_3 \dots$$

Як припущення можна вважати, що амплітуда коливання від k -ї зони Френеля A_k дорівнює:

$$A_k = \frac{A_{k-1} + A_{k+1}}{2}. \quad (5.4)$$

Результуюча амплітуда хвилі, яка приходить у точку P , є додатком амплітуд від кожної окремої зони. З урахуванням того, що амплітуди сусідніх зон відрізняються знаком, можна записати вираз для результуючої амплітуди:

$$A = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + A_4 + \dots \quad (5.5)$$

або

$$A = \frac{A_0}{2} + \left(\frac{A_0}{2} - A_1 + \frac{A_2}{2} \right) + \left(\frac{A_2}{2} - A_3 + \frac{A_4}{2} \right) + \dots \approx \frac{A_0}{2}, \quad (5.6)$$

оскільки вирази у дужках дорівнюють нулю.

Таким чином, результуюча амплітуда від дії усього фронту в точці спостереження P дорівнює $A = \frac{A_0}{2}$, тобто еквівалентна половині дії нульової зони Френеля. Радіус зовнішньої границі m -ї зони дорівнює

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m \lambda, \quad (5.7)$$

де $a \equiv SM$ (відстань від джерела світла до точки M).

У результаті розв'язку задачі про поширення світла від джерела до точки P методом графічного додавання амплітуд одержимо векторну діаграму (рис. 5.6), що має вигляд спіралі, яка закручується до точки C .

Ділянка спіралі 0-1 відповідає першій зоні Френеля. Вектор, який провели з точки O в точку 1 , є амплітудним вектором першої зони.

При розв'язанні задач спіраль можна замінити колом (рис. 5.7). Тоді коливання, що збуджується в точці P всією хвильовою поверхнею, зображено вектором $\overline{OC} = \vec{a}_0$. Амплітудний вектор 1-ї зони дорівнює $2\vec{a}_0$, амплітудний вектор перших 1,5 зон – це вектор, який дорівнює за модулем $a_0\sqrt{2}$.

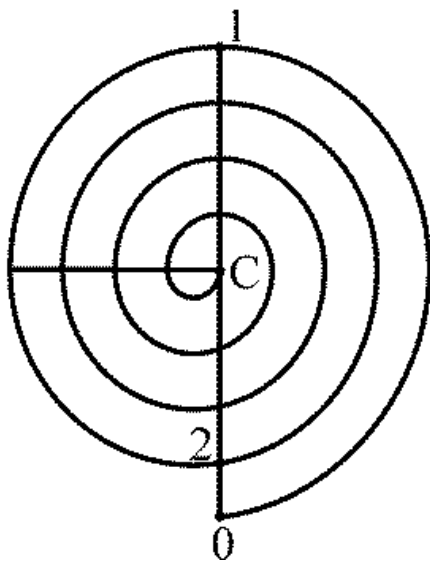


Рис. 5.6. Векторна діаграма

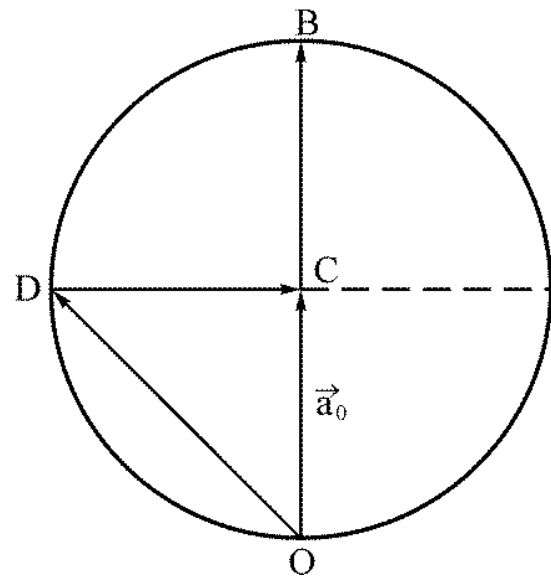


Рис. 5.7. Векторна діаграма Френеля

Дифракція від прямолінійного краю на півплощини

Розглянемо падіння плоскої хвилі на непрозору напівплощину з прямолінійним краєм. Нехай ця напівширина збігається з однією з хвильових поверхонь. Відстань від цієї напівплощини дорівнює b (рис. 5.6). Розіб'ємо відкриту частину хвильового фронту на зони, які мають вигляд дуже вузьких прямолінійних смужок, які паралельні до краю напівплощини. Ширина зони є такою, що відстань від точки спостереження P до краю сусідньої зони була однаковою Δ для всіх зон. Оскільки площа кожної зони пропорційна її ширині d , то треба підрахувати відношення $d_1 : d_2 : d_3 \dots$. У цьому випадку площі зон не однакові, як показує розрахунок,

$$d_1 : d_2 : d_3 \dots = 1 : 0,41 : 0,32 \dots \quad (5.8)$$

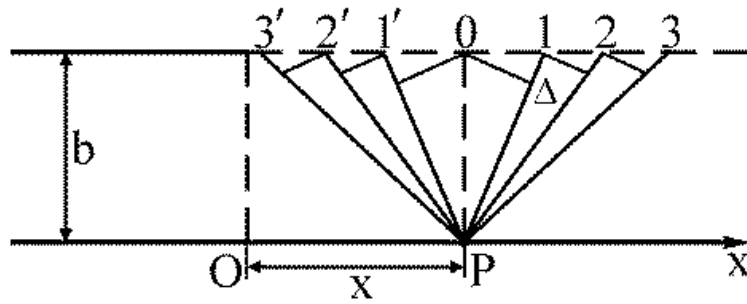


Рис. 5.8. Зони Шустера

При побудові діаграми вектори зон будуть симетричними щодо початку координат 0. Якщо ширину зон спрямувати до нуля, то векторна діаграма буде мати вигляд, який показаний на рис. 5.9, і називається спіраллю Корню.

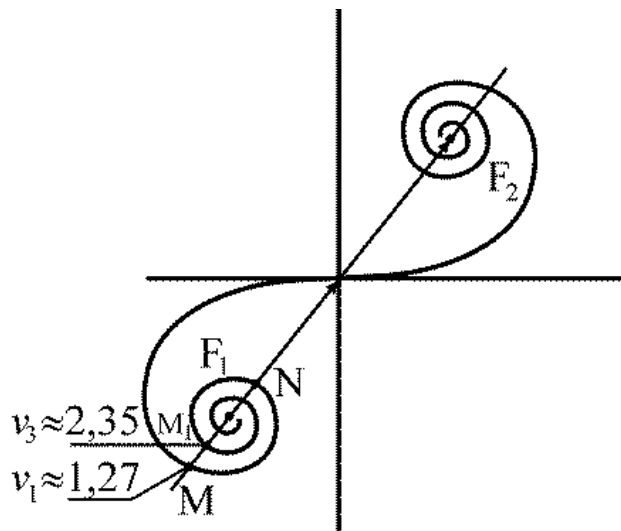


Рис. 5.9. Спіраль Корню

Рівняння спіралі Корню в параметричній формі:

$$\zeta = \int_0^v \cos \frac{\pi u^2}{2} du, \eta = \int_0^v \sin \frac{\pi u^2}{2} du. \tag{5.9}$$

Ці інтеграли є інтегралами Френеля. Точки F_1 і F_2 на рис. 5.9 – фокуси або полюси спіралі Корню. Числа на спіралі Корню визначають параметр v . Для плоскої хвилі параметр v пов'язаний з довжиною хвилі співвідношенням:

$$\frac{K x^2}{2b} = \frac{\pi v^2}{2}, \tag{5.10}$$

де $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число; b – відстань від фронту хвилі до точки спостереження P на екрані (рис. 5.10).

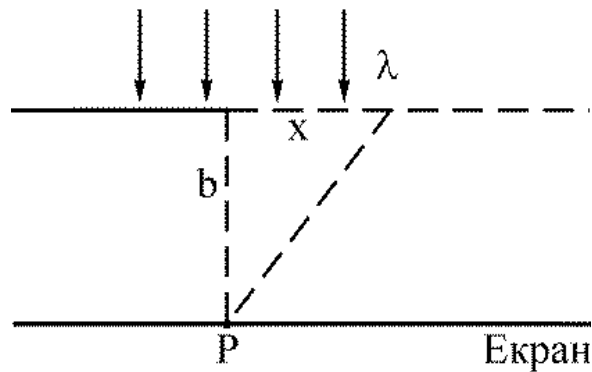


Рис. 5.10. Падіння плоскої хвилі на півплощину

Дифракція Фраунгофера від вузької щілини

Розглянемо падіння на щілину плоскої хвилі світла (рис. 5.11).

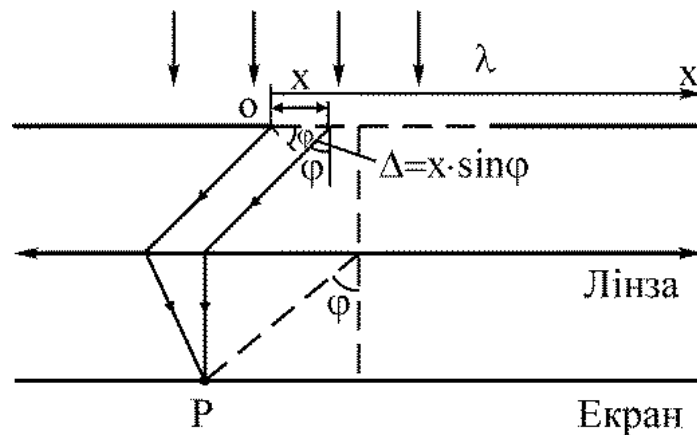


Рис. 5.11. Падіння хвилі світла на вузьку щілину

Розташуємо за щілиною збиральну лінзу L , а у фокальній площині лінзи – екран. Хвильова поверхня падаючої хвилі, площина і екран паралельні один одному. Як впливає з розрахунку інтенсивності, на екрані інтенсивність визначається виразом:

$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2(\pi b \sin \varphi / \lambda)}{(\pi b \sin \varphi / \lambda)^2}, \quad (5.11)$$

де I_0 – інтенсивність в середині дифракційної картини ($\varphi=0$); I_{φ} – інтенсивність у точці, положення якої визначається кутом φ .

Розподіл інтенсивності за формулою (5.11) показаний на рис. 5.12.

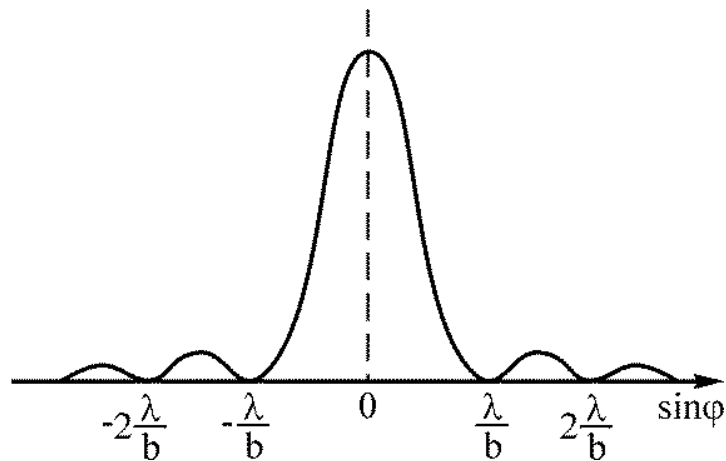


Рис. 5.12. Розподіл інтенсивності на екрані

Положення мінімумів інтенсивності на екрані визначається виразом:

$$b \sin \varphi = \pm K \lambda, \quad (K=1, 2, 3, \dots). \quad (5.12)$$

Критерій, за яким визначають тип дифракції

Знайдемо критерій, за яким визначають тип дифракції в кожному конкретному випадку (в залежності від ширини щілини, відстані до екрана і довжини хвилі λ). Падіння плоскої хвилі на щілину показує рис. 5.13.

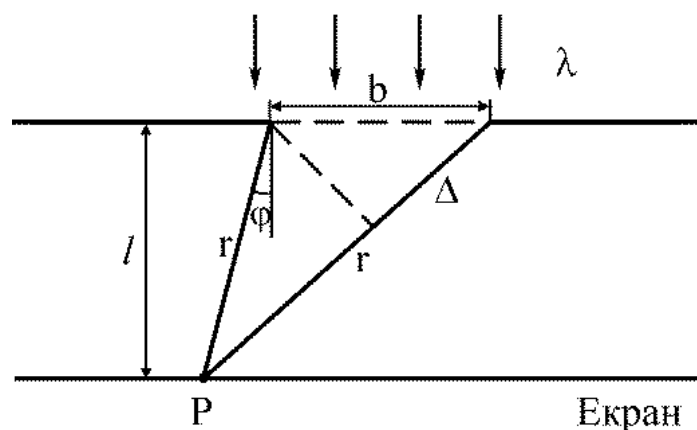


Рис. 5.13. Падіння плоскої хвилі на щілину

Як впливає з розрахунків, характер дифракції залежить від параметра

$$\frac{b^2}{\lambda l}. \quad (5.13)$$

Якщо цей параметр $\frac{b^2}{\lambda l} \ll 1$, то спостерігається дифракція Фраунгофера, якщо $\frac{b^2}{\lambda l} \approx 1$ – дифракція Френеля, якщо $\frac{b^2}{\lambda l} \gg 1$, то це відповідає наближенню геометричної оптики.

Дифракційні решітки

Дифракційні решітки – це сукупність великої кількості однакових щілин, які розташовані на однаковій відстані одна від одної. Дифракційні решітки виготовляють на склі або металі (в останньому випадку з ними працюють у відбитому світлі). Відстань між центрами сусідніх щілин називається періодом решітки d (рис. 5.14). Будемо припускати, що радіус когерентності падаючої хвилі значно перевищує довжину решітки і хвиля падає нормально до решітки. Тоді коливання від усіх щілин можна вважати когерентними один щодо одного. У цьому випадку результуюче коливання у точці P , положення якої визначається кутом φ , є сумою N коливань з однаковою амплітудою A_φ , між якими існує зсув фаз δ .

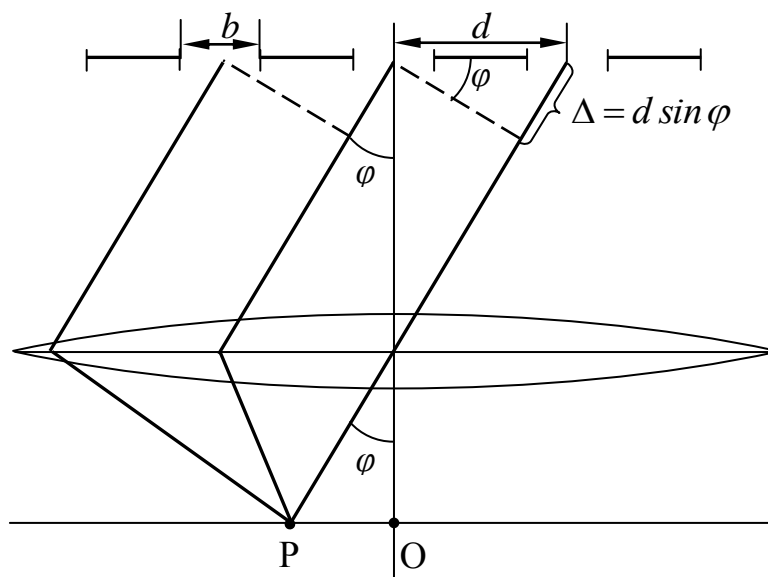


Рис. 5.14. Дифракційна решітка

З урахуванням формули для багатопроменевої інтерференції одержимо вираз для інтенсивності решітки:

$$I_P = I_\phi \frac{\sin^2(N \cdot \delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}. \quad (5.14)$$

Різниця ходу від сусідніх щілин дорівнює $\Delta = d \cdot \sin \varphi$. Таким чином, різниця фаз:

$$\delta = k \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \cdot \sin \varphi. \quad (5.15)$$

З урахуванням формули (5.15) інтенсивність дорівнює

$$I_p = I_0 \frac{\sin^2(\pi b \cdot \sin(\varphi/\lambda))}{(\pi b \cdot \sin(\varphi/\lambda))^2} \cdot \frac{\sin^2(N \pi d \cdot \sin(\varphi/\lambda))}{\sin^2(\pi d \cdot \sin(\varphi/\lambda))}, \quad (5.16)$$

де I_0 – інтенсивність від однієї щілини при $\varphi = 0$.

Перший множник у формулі (5.16) перетворюється в нуль у точках, для яких виконується умова:

$$b \cdot \sin \varphi = \pm K \lambda, \quad K = 1, 2, 3, \dots \quad (5.17)$$

У цих точках інтенсивність, яку утворює кожна щілина окремо, дорівнює нулю.

Другий множник у формулі (5.16) дорівнює N^2 у точках, для яких виконується умова:

$$d \cdot \sin \varphi = \pm m \lambda, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (5.18)$$

де d – стала дифракційної решітки або її період.

Для напрямків, які визначені цією умовою, коливання від окремих щілин взаємно підсилюють один одного і амплітуда у відповідній точці екрана дорівнює:

$$A_{\max} = N A_\varphi, \quad (5.19)$$

де A_φ – амплітуда коливання, яка випромінюється однією щілиною під кутом φ .

Умова (5.18) визначає положення максимумів інтенсивності, які називаються **головними**. Число m визначає порядок головного максимуму. Максимум нульового порядку тільки один, максимумів вищих порядків – по два (вони на екрані симетричні відносно нульового максимуму).

Інтенсивність головних максимумів I_{\max} у N^2 більше за інтенсивність I_φ (від однієї щілини):

$$I_{\max} = N^2 I_\varphi. \quad (5.20)$$

Окрім мінімумів, які визначаються формулою (5.17), між сусідніми головними максимумами є ще по $(N-1)$ -му додатковому мінімуму. Ці мінімуми визначаються формулою:

$$d \sin \varphi = \pm \frac{K'}{N} \lambda, \quad (5.21)$$

де $K' = 1, 2, \dots, (N-1), (N+1), \dots, (2N-1), (2N+1), \dots$

Положення головних максимумів залежить від довжини світла λ . Тому при проходженні світла крізь решітку білого світла всі максимуми, окрім центрального, будуть розкладені в спектр. Фіолетова частина спектра спрямована до центра картини, а червона – у протилежний бік.

Таким чином, дифракційна решітка є спектральним приладом.

Відбивні дифракційні решітки

Якщо решітки нанесені на дзеркало, то дифракційні спектри спостерігають у відбитому світлі. Коли світло падає під кутом α до поверхні решітки (рис. 5.15), нульову смугу дістають у напрямку дзеркального відбиття. Всі решітки діють при цьому як прозорі решітки $M'N'$, що є проекцією MN на фронт хвилі. Як бачимо, стала решіток $M'N'$ дорівнює $d \cdot \cos \alpha$, де d – стала решіток MN . Отже, при падінні світла під кутом α до поверхні решітки працюють так, начебто їх штрихи були ближчі один до одного. Це дозволило дістати дифракційні спектри рентгенівського проміння при ковзному відбиванні від звичайних дифракційних решіток. Через малість довжини хвиль рентгенівського проміння для них потрібні решітки зі значно меншою сталою, ніж для видимого світла. Зробити такі решітки неможливо. Мале значення косинуса ковзного кута падіння ($\alpha \approx 90^\circ$) примушує решітки з великою сталою працювати так, неначе їх стала була мала. Користуючись тією ж обставиною, можна дістати спектр, наприклад, від грамофонної пластинки, яка має всього 3–5 штрихів на 1 мм, якщо дивитись на відбиток в ній маленької лампи при ковзному падінні світла.

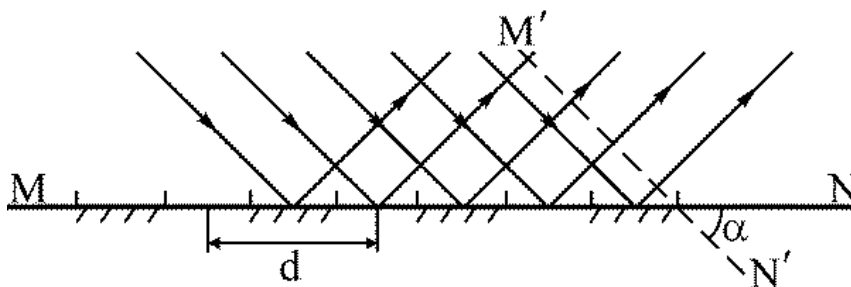


Рис. 5.15. Відбивна дифракційна решітка

5.1. Розв'язання задач

5.1. Ліворуч від діафрагми з круглим отвором $r = 1,0$ мм на відстані $a = 100$ см розташовано точкове джерело світла, яке випромінює світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,50$ мкм. Число зон Френеля, яке відкриває діафрагма, дорівнює $K = 3$. Чому дорівнює відстань b від діафрагми до точки спостереження?

Розв'язок. Згідно з формулою Френеля радіус діафрагми пов'язаний з числом зон Френеля співвідношенням:

$$r_K = \sqrt{\frac{ab}{a+b} K \lambda}.$$

Розв'язок цього співвідношення визначає b :

$$b = \frac{r_K^2 \cdot a}{K \cdot a \cdot \lambda - r_K^2} = 2 \text{ (м)}.$$

5.2. Між точковим джерелом світла і екраном розташована діафрагма з круглим отвором, радіус якого можна змінювати. Відстані від діафрагми до джерела світла і екрана дорівнюють відповідно $a = 100$ см і $b = 125$ см. Визначити довжину хвилі світла, якщо максимум освітленості в центрі дифракційної картини спостерігається при радіусі діафрагми $r_1 = 1,0$ мм, а наступний максимум – при $r_2 = 1,29$ мм.

Розв'язок. Згідно з формулою Френеля

$$r_K = \sqrt{\frac{ab}{a+b} K \lambda}.$$

Тому для першого радіуса діафрагми можна записати:

$$r_1^2 = \frac{ab}{a+b} K \lambda,$$

а для другого радіуса

$$r_2^2 = \frac{ab}{(a+b)} (K+1) \lambda.$$

З цих двох рівнянь визначимо довжину хвилі світла:

$$\lambda = \frac{(r_2^2 - r_1^2) \cdot (a+b)}{2ab} = 0,6 \text{ (мкм)}.$$

5.3. Плоска хвиля світла з $\lambda = 640 \text{ нм}$ й інтенсивністю I_0 падає нормально на круглий отвір радіуса $r = 1,2 \text{ мм}$. Чому дорівнює інтенсивність в центрі дифракційної картини на екрані за отвором на відстані $b = 1,5 \text{ м}$?

Розв'язок. Згідно з формулою Френеля радіус отвору і число зон Френеля пов'язані співвідношенням:

$$r_K = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} K \lambda.$$

Оскільки хвиля є плоскою, це означає, що джерело світла лежить на нескінченності, тобто $a \rightarrow \infty$. Тому формулі Френеля можна надати такий вигляд:

$$r_K = \sqrt{\frac{ab}{a \left(1 + \frac{b}{a}\right)}} K \lambda = \sqrt{K \cdot b \cdot \lambda},$$

оскільки $\frac{b}{a} = 0$.

З цього співвідношення визначимо число зон Френеля, які відкриває отвір:

$$K = \frac{r_K^2}{b \lambda} = 1,5.$$

На спіралі Френеля (рис. 5.16) числу зон Френеля $K = 1,5$ відповідає амплітудний вектор \overrightarrow{AC} . Оскільки інтенсивність падаючої хвилі відома, то і відомий вектор $\overrightarrow{a_0} = \overrightarrow{AO}$. За означенням $I_0 \approx a_0^2$. За модулем амплітудний вектор \overrightarrow{AC} дорівнює $AC = a_0 \sqrt{2}$. Тому інтенсивність в центрі дифракційної картини на екрані дорівнює

$$I \approx AC^2 = 2a_0^2 = 2I_0.$$

5.4. Плоска монохроматична хвиля світла інтенсивністю I_0 падає нормально на непрозорий екран із круглим отвором. Чому дорівнює інтенсивність I за екраном у точці, для якої отвір: а) дорівнює першій зоні

Френеля; внутрішній половині першої зони; б) дорівнює першій зоні Френеля, а потім отвір перекрили навпіл (за діаметром)?

Розв'язок. За означенням інтенсивність I визначається як квадрат амплітуди: $I \approx A^2$.

а) Амплітудний вектор \vec{A} знайдемо за допомогою спіралі Френеля. У випадку, коли отвір дорівнює першій зоні Френеля, амплітудний вектор є $\vec{A} = \vec{AB}$ (рис. 5.17). Інтенсивність світла у цьому випадку дорівнює:

$$I \approx A^2 = 4a_0^2 = 4I_0.$$

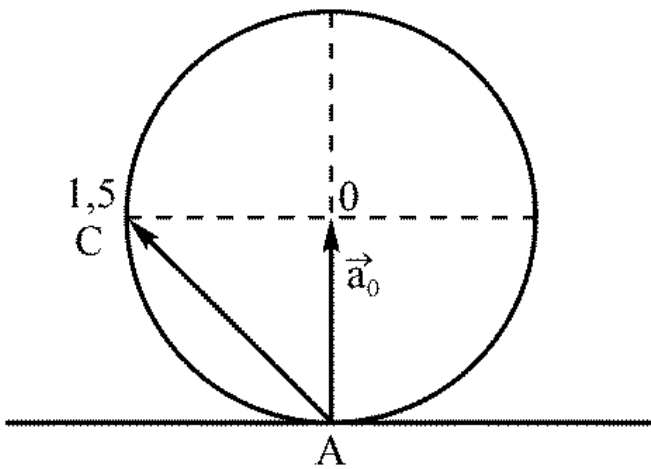


Рис. 5.16. До задачі 5.3

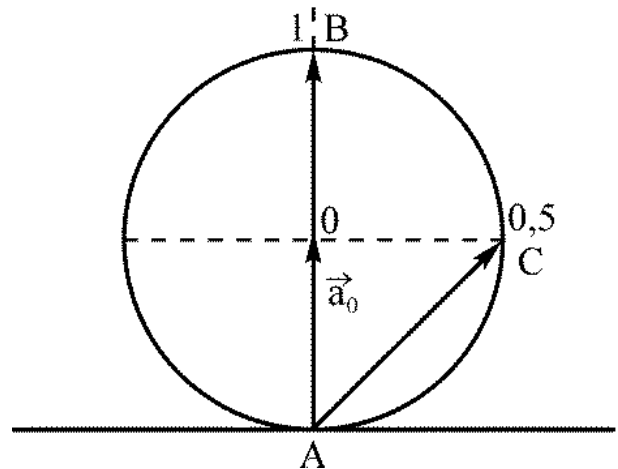


Рис. 5.17. До задачі 5.4

У випадку, коли отвір відповідає внутрішній половині першої зони Френеля, амплітудний вектор є $\vec{A} = \vec{AC}$. На рис. 5.17 $A = a_0 \sqrt{2}$, а інтенсивність

$$I \approx A^2 = 2a_0^2 = 2I_0.$$

б) Коли отвір дорівнює першій зоні Френеля, амплітудний вектор є $\vec{A} = \vec{AB} = 2\vec{a}_0$. Коли отвір закрили навпіл (за діаметром), його площа зменшилась у двічі. Згідно з принципом Гюйгенса–Френеля:

$$dE = \frac{a_0}{r} K(\varphi) \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r}) dS.$$

Таким чином, зменшення площі вдвічі приведе до зменшення амплітуди також вдвічі:

$$A = \frac{2a_0}{2} = a_0.$$

Інтенсивність світла у цьому випадку $I = A^2 = a_0^2 = I_0$.

5.5. Плоска хвиля світла з $\lambda = 0,6$ мкм падає нормально на достатньо велику пластину, виготовлену зі скла ($n = 1,5$). Профіль пластини показаний на рис. 5.18.

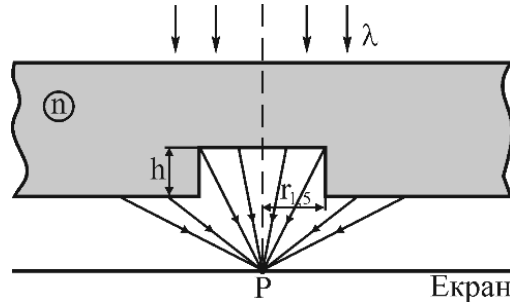


Рис. 5.18. Профіль пластинки

Радіус круглої виїмки дорівнює півтори зони Френеля для точки P на екрані. Визначити глибину h виїмки, при якій інтенсивність світла в точці P буде:

- максимальною;
- мінімальною;
- такою, що дорівнює інтенсивності падаючого світла.

Розв'язок. Згідно з принципом Гюйгенса–Френеля кожна точка протилежної сторони пластинки є джерелом вторинних хвиль. Хвилі, які йдуть до точки P з круглої виїмки, випереджають по фазі хвилі, які йдуть до точки P крізь пластинку. Різниця ходу між цими хвилями дорівнює різниці оптичних шляхів променів:

$$\Delta = L_1 - L_2 = nh - n = h(n-1),$$

а відповідна різниця фаз дорівнює

$$\delta = k \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot h(n-1).$$

Останній вираз показує, що глибина виїмки h впливає на різницю фаз між хвилями. Тому змінюючи h можна регулювати різницю фаз і підбирати умову максимуму або мінімуму в точці P .

Таким чином, дифракційна картина в точці P обумовлена взаємним положенням векторів \vec{AC} (амплітудний вектор хвиль, які проходять крізь виїмку) і \vec{CO} (амплітудний вектор хвиль, які проходять крізь пластинку). Умовою максимуму інтенсивності в точці P є колінеарність векторів \vec{AC}

і \vec{CO} ; $\vec{AC} \uparrow \vec{CO}$. Умовою мінімуму інтенсивності в точці P є антиколінеарність векторів \vec{AC} і \vec{CO} ; $\vec{AC} \updownarrow \vec{CO}$.

а) Для того, щоб вектори \vec{AC} і \vec{CO} були колінеарні або антиколінеарні, треба дотримуватися такого правила: вектор, який випереджує по фазі, треба обернути за годинниковою стрілкою до потрібного положення. Для колінеарності векторів \vec{AC} і \vec{CO} (умова максимуму) вектор \vec{AC} треба повернути на кут $\delta_1 = \frac{3}{4}\pi$ (рис. 5.19). Таке положення буде повторюватися через оборот, тобто $\delta_1 = \frac{3}{4}\pi + 2\pi m$, де $m=0,1,2,\dots$ З іншого боку, $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} h(n-1)$. З цих виразів визначимо h :

$$\frac{3}{4}\pi + 2\pi m = \frac{2\pi}{\lambda} h(n-1),$$

$$h = \frac{\left(m + \frac{3}{8}\right)\lambda}{(n-1)}.$$

б) Умовою мінімуму інтенсивності є: $\vec{AC} \updownarrow \vec{CO}$. Для цього вектор \vec{AC} треба повернути на кут $\frac{7}{4}\pi$ (рис. 5.19). Тобто $\delta_2 = \frac{7}{4}\pi + 2\pi m$.

$$\frac{7}{4}\pi + 2\pi m = \frac{2\pi}{\lambda} h(n-1),$$

$$h = \frac{\left(m + \frac{7}{8}\right)\lambda}{(n-1)}.$$

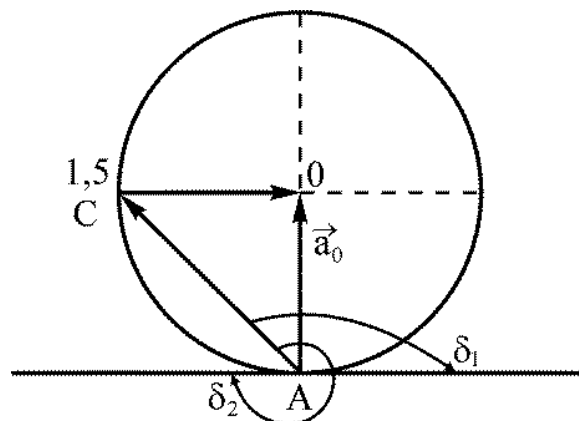


Рис. 5.19. До задачі 5.5

в) Як показує рис. 5.19, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CO} = a_0$, а інтенсивність падаючого світла дорівнює $I_0 \approx a_0^2$. Таким чином,

$$\begin{aligned}\delta_3 &= 2\pi m, \\ 2\pi m &= \frac{2\pi}{\lambda} h(n-1), \\ h_3 &= \frac{m\lambda}{(n-1)}.\end{aligned}$$

5.6. На велику пластинку, виготовлену зі скла ($n = 1,5$), падає нормально світлова хвиля, інтенсивність якої дорівнює I_0 і довжина хвилі λ . Протилежний бік пластинки є непрозорий екран з круглим отвором, рівним першій зоні Френеля для точки спостереження P . В середині отвору є кругла виїмка, що дорівнює половині зони Френеля (рис. 5.20). За якої глибини h цієї виїмки інтенсивність світла в точці P буде максимальною? Чому вона дорівнює?

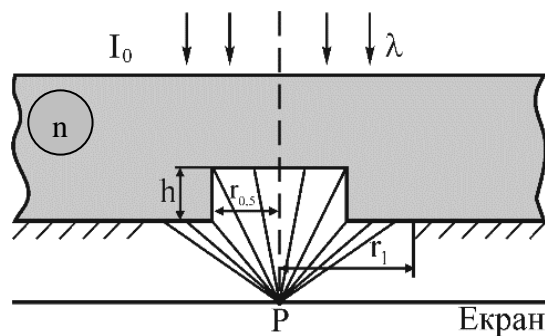


Рис. 5.20. Профіль пластинки

Розв'язок. а) Дифракційна картина в точці P буде суперпозицією хвиль, що приходять в точку P крізь отвір (який відповідає половині першої зони Френеля), і хвиль, що проходять крізь пластинку в точку P (це кільце радіусом від $r_{0,5}$ до r_1 зон Френеля). Відповідні амплітудні вектори цих зон \overrightarrow{AC} і \overrightarrow{CB} (рис. 5.21). Умовою дифракційного максимуму в точці P є колінеарність векторів \overrightarrow{AC} і \overrightarrow{CB} :

$$\overrightarrow{AC} \uparrow \overrightarrow{CB}.$$

Оскільки вектор \overrightarrow{AC} випереджає по фазі коливань в точці P вектор \overrightarrow{CB} , то згідно з векторною діаграмою Френеля (рис. 5.21) його треба

повернути за годинниковою стрілкою на кут $\delta = \frac{3}{2}\pi$. Така ситуація буде повторюватись, коли $\delta = \frac{3}{2}\pi + 2\pi m$, де $m=0,1,2,\dots$. Різниця ходу між променями світла, які приходять в точку P з отвору, що дорівнює половині зони Френеля і кільцевої зони від половини зони Френеля до першої зони Френеля, дорівнює:

$$\Delta = nh - h = h(n-1),$$

а відповідна різниця фаз:

$$\delta = K \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} h(n-1).$$

З іншого боку,

$$\delta = \frac{3}{2}\pi + 2\pi m.$$

З цих двох рівнянь визначимо h :

$$\delta = \frac{3}{2}\pi + 2\pi m = \frac{2\pi}{\lambda} h(n-1),$$

$$h = \frac{\left(m + \frac{3}{4}\right)\lambda}{(n-1)}, \text{ де } m=0,1,2, \dots$$

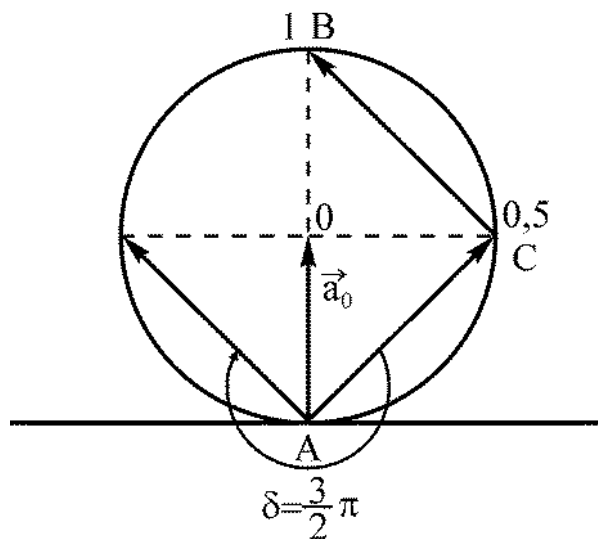


Рис. 5.21. До задачі 5.6

б) За означенням максимальна інтенсивність в точці P дорівнює

$$I_P \approx A_P^2,$$

де $A_P = 2CB = 2 \cdot a_0 \sqrt{2}$ – модуль результуючого амплітудного вектора.

Таким чином,

$$I_P \approx A_P^2 = 8a_0^2 = 8I_0.$$

5.7. Світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,6$ мкм падає на поверхню диска, виготовленого зі скла ($n = 1,5$). Диск перекриває півтори зони Френеля для точки спостереження P . За якою товщиною h цього диска інтенсивність світла в точці P буде максимальною?

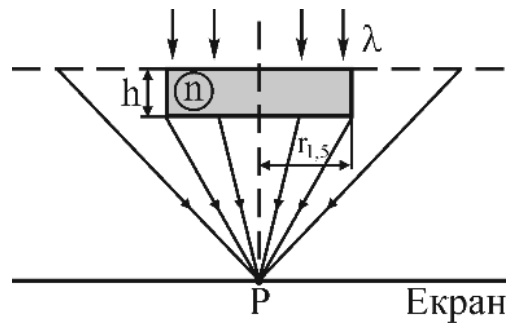


Рис. 5.22. До задачі 5.7

Розв'язок. Падіння світла на диск показує рис. 5.22. Дифракційна картина в точці P буде суперпозицією хвиль, які йдуть крізь диск, і всього хвильового фронту (без диска). Різниця ходу між цими хвилями дорівнює:

$$\Delta = nh - h = h(n - 1),$$

а відповідна різниця фаз

$$\delta = K \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} h(n - 1).$$

Амплітудним вектором хвиль, що йдуть крізь диск, є вектор \overline{AC} , а вектором всього хвильового фронту за винятком 1,5 зон Френеля є вектор \overline{CO} (рис. 5.23). Умовою дифракційного максимуму є колінеарність векторів \overline{AC} і \overline{CO} : $\overline{AC} \uparrow \overline{CO}$. Різниця фаз між цими векторами однозначно пов'язана з товщиною диска h . Вектор \overline{CO} випереджає по фазі

вектор \overrightarrow{AC} , тому для того, щоб ці вектори були колінеарні, треба вектор \overrightarrow{CO} повернути за годинниковою стрілкою на кут $\delta = \frac{5}{4}\pi$. Така ситуація буде повторюватися при:

$$\delta = \frac{5}{4}\pi + 2\pi m, \text{ де } m=0,1,2,\dots$$

З іншого боку, $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} h(n-1)$.

З цих двох рівнянь визначимо h :

$$h = \frac{\left(m + \frac{5}{8}\right)\lambda}{(n-1)}, \text{ } m=0,1,2, \dots$$

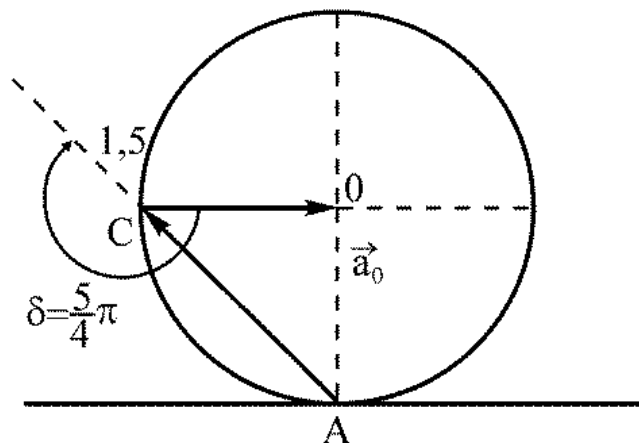


Рис. 23. До задачі 5.7

5.8. Плоска монохроматична хвиля падає нормально на круглий отвір. За діафрагмою з круглим отвором на відстані $b = 9$ м знаходиться екран, на якому спостерігають дифракційну картину. Далі діаметр отвору зменшили в $\eta = 3$ рази. Знайти нову відстань b' до екрана, щоб на ньому спостерігати подібну картину, але зменшену в η разів.

Розв'язок. За формулою Френеля радіус зони Френеля і номер зони пов'язані співвідношенням:

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m \lambda},$$

де m – номер зони.

Для плоскої хвилі $a \rightarrow \infty$, тому попередній вираз набуває вигляду:

$$r_m = \sqrt{mb\lambda}.$$

У першому випадку

$$\frac{d_m}{2} = \sqrt{mb\lambda},$$

а у другому

$$\frac{d'_m}{2} = \sqrt{mb'\lambda}.$$

Термін «подібна картинка» означає, що число зон m і в першому, і в другому випадках однакове. За умовою задачі

$$\eta = \frac{d_m}{d'_m} = \sqrt{\frac{mb\lambda}{mb'\lambda}} = \sqrt{\frac{b}{b'}}$$

$$b' = \frac{b}{\eta^2} = 1,0(m).$$

5.9. Плоска хвиля світла з довжиною хвилі $\lambda = 0,6$ мкм й інтенсивністю I_0 падає на велику пластинку, яка виготовлена зі скла ($n = 1,5$). Профіль пластинки показаний на рис. 5.24. При якій висоті виступу h інтенсивність світла на екрані під ним буде:

- мінімальною;
- вдвічі меншою за I_0 (втратами при відбиванні нехтувати).

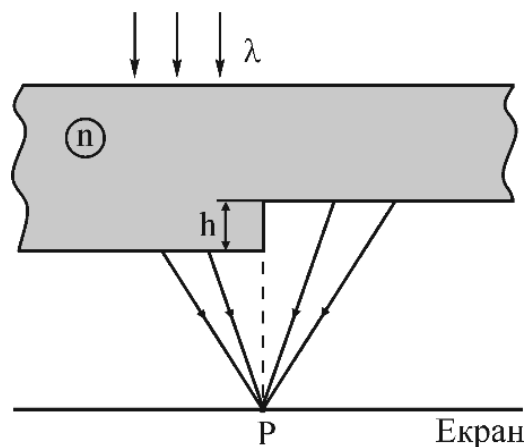


Рис. 5.24. Профіль пластинки

Розв'язок. а) Розв'язок задачі треба провести за допомогою спіралі Корню (рис. 5.25). Світлові хвилі йдуть у точку P від частин пластинки, які розташовані праворуч і ліворуч від точки P , відповідно. Хвилі, які йдуть з правої частини пластинки, частину шляху йдуть у повітрі, на відміну від хвиль, що йдуть з лівої частини пластинки. Оптична різниця шляху між цими хвилями дорівнює

$$\Delta = nh - h = h(n-1),$$

а відповідна різниця фаз

$$\delta = K \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} h(n-1).$$

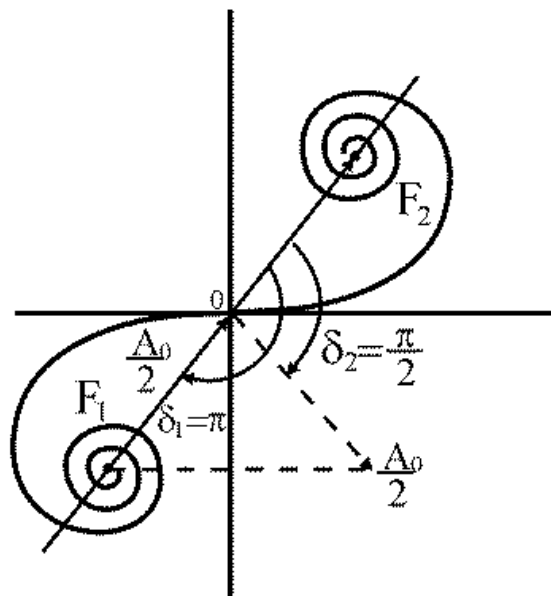


Рис. 5.25. Спіраль Корню

На спіралі Корню (рис. 5.25) внесок усіх правих зон (відносно точки P) характеризує вектор $\overrightarrow{OF_2}$, а внесок усіх лівих зон – вектор $\overrightarrow{F_1O}$. Для того, щоб інтенсивність в точці P була мінімальною, треба виконати умову антиколінеарності векторів $\overrightarrow{OF_1}$ і $\overrightarrow{F_2O}$:

$$\overrightarrow{OF} \uparrow \downarrow \overrightarrow{F_2O}.$$

Вектор правих зон $\overrightarrow{OF_1}$ випереджає за фазою вектор $\overrightarrow{F_2O}$. Тому треба дотримуватися правила: для того, щоб вектори були колінеарними або антиколінеарними, треба випереджаючий вектор обернути за годинниковою

стрілкою на відповідний кут δ . У нашому випадку цей кут дорівнює $\delta = \pi$ (рис. 5.25). Така ситуація повторюється при

$$\delta = \pi + 2\pi m, \text{ де } m=0,1,2,\dots$$

При цьому вектори $\overrightarrow{OF_1}$ і $\overrightarrow{F_2O}$ будуть антиколінерними, і це буде умова мінімуму. З іншого боку,

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} h(n-1).$$

З цих двох рівнянь визначимо h :

$$\pi + 2\pi m = \frac{2\pi}{\lambda} h(n-1), \quad h = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda}{n-1}, \text{ де } m=0,1,2,\dots$$

б) Знайдемо модуль амплітудного вектора, який визначає вдвічі меншу інтенсивність I_0 :

$$I_p = \frac{I_0}{2}, \text{ або } A_p^2 = \frac{a_0^2}{2}, \text{ звідки } A_p = \frac{a_0}{\sqrt{2}}.$$

На рис. 5.25 вектор \vec{a}_0 – це вектор $\overrightarrow{F_2F_1}$. Модуль вектора OF_1 дорівнює $\frac{a_0}{2}$. Отже, амплітудний вектор $\overrightarrow{OF_1}$ треба повертати за годинниковою стрілкою на кут $\delta = \frac{\pi}{2}$. При цьому модуль результуючого вектора A_p дорівнює:

$$A_p = \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_0}{2}\right)^2} = \frac{a_0}{\sqrt{2}},$$

а інтенсивність

$$I_p \approx A_p^2 = \frac{a_0^2}{2} = \frac{I_0}{2}.$$

5.10. Плоска монохроматична хвиля падає нормально на непрозору напівплощину. На відстані $b=100$ см за нею знаходиться екран. Знайти за допомогою спіралі Корню (рис. 5.26):

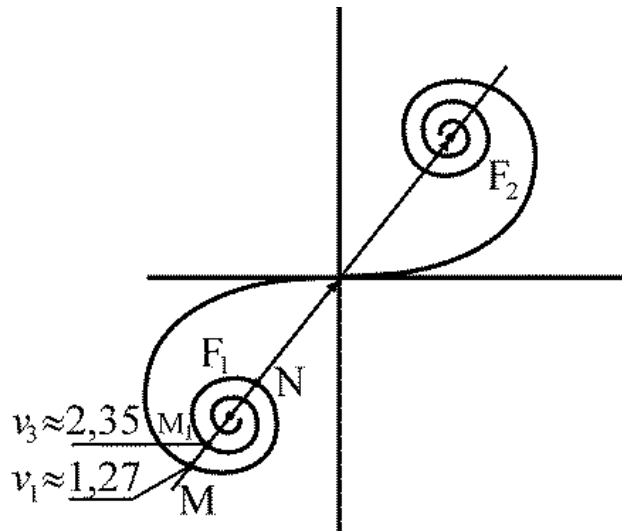


Рис. 5.26. Спіраль Корню

а) відношення інтенсивностей першого максимуму і сусіднього з ним мінімуму;

б) довжину хвилі світла, якщо відстань між двома першими максимумами $\Delta x = 0,63$ мм.

Розв'язок.

а) Падіння плоскої хвилі на напівплощину і розподіл інтенсивності на екрані показані на рис. 5.27. Нехай фронт плоскої хвилі збігається з напівплощиною. Для точки на екрані $P(x=0)$ відкриті усі зони Шустера, розташовані праворуч точки $x=0$. Амплітудний вектор цих зон – вектор $\overrightarrow{OF_2}$, який за модулем дорівнює $A_0/2$. Відповідно інтенсивність в точці $P(x=0)$ на екрані дорівнює:

$$I_P = 0 F^2 = \frac{A_0^2}{4} = \frac{I_0}{4},$$

де I_0 – інтенсивність падаючого світла.

Для точки P_1 на екрані додатково відкрита частина зон Шустера ліворуч точки P_1 . Внесок правих зон визначається вектором $\overrightarrow{OF_2}$, а лівих зон – вектором \overrightarrow{MO} (перший максимум).

Результуючий амплітудний вектор – вектор $\overrightarrow{MF_2}$.

Точка P_2 на екрані відповідає першому мінімуму. Внесок правих зон визначається вектором $\overrightarrow{OF_2}$, а лівих – вектором \overrightarrow{NO} . Результуючий амплітудний вектор у цьому випадку – вектор $\overrightarrow{NF_2}$. Відношення інтенсивностей дорівнює відношенню квадратів модулів відповідних векторів:

$$\frac{I_1^{\max}}{I_1^{\min}} \approx \frac{(M F_2)^2}{(N F_2)^2} \approx 1,7.$$

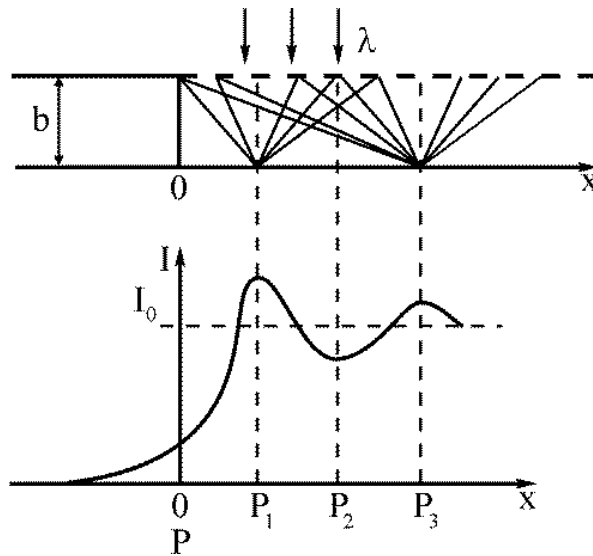


Рис. 5.27. Розподіл інтенсивності на екрані

Довжину векторів вимірюємо лінійкою на спіралі Корню.

б) Для плоскої хвилі $v = x\sqrt{2/b\lambda}$, де x і b – відстані, що характеризують положення елемента dS хвильової поверхні відносно точки спостереження P . Рівняння, яке поєднує відстані x і b з параметром v спіралі Корню, має вигляд:

$$\frac{K x^2}{2b} = \frac{\pi v_1^2}{2}, \quad (1)$$

де $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число.

Координата точки P_1 (перший максимум) – x_1 , координата точки P_3 – (другий максимум) – x_3 . За умовою задачі

$$\Delta x = x_3 - x_1. \quad (2)$$

Запишемо рівняння (1) для точок P_1 і P_3 :

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{x_1^2}{2b} = \frac{\pi m_1^2}{2}, \\ \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{x_3^2}{2b} = \frac{\pi v_3^2}{2}. \end{cases} \quad (3)$$

На спіралі Корню знаходимо параметр v для точок M і M_1 :
 $v_1 \approx 1,27, v_2 \approx 2,35$.

Із системи рівнянь (3) і рівняння (2) знаходимо:

$$x_1 = v_1 \sqrt{\frac{\lambda b}{2}}, \quad x_3 = v_3 \sqrt{\frac{\lambda b}{2}},$$

$$\Delta x = x_3 - x_1 = \sqrt{\frac{\lambda b}{2}} (v_3 - v_1),$$

звідки

$$\lambda = \frac{2(\Delta x)^2}{(v_2 - v_1)^2 \cdot b} = 0,7 \text{ (мкм)}.$$

5.11. Плоска монохроматична хвиля, інтенсивність якої I_0 , падає нормально на непрозорий екран, у якому прорізана довга щілина з напівкруглим вирізом (рис. 5.28). Край вирізу збігається з границею першої зони Френеля для точки спостереження P . Ширина щілини складає $0,9$ радіуса вирізу. Визначити за допомогою спіралі Корню (рис. 5.29) інтенсивність світла в точці P .

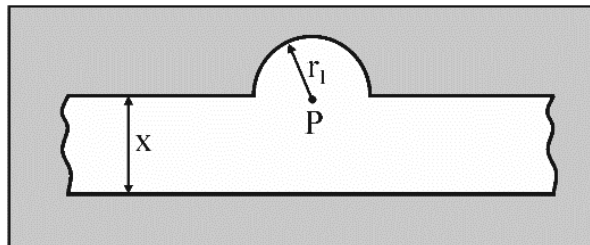


Рис. 5.28. До задачі 5.11

Розв'язок. За умовою задачі ширина x щілини дорівнює $x = 0,9 r_1$, де r_1 – радіус першої зони Френеля. Запишемо формулу Френеля для зон:

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m \lambda}.$$

Для плоскої хвилі $a \rightarrow \infty$, для першої зони Френеля $m=1$, і формула Френеля набуває такого вигляду:

$$r_1 = \sqrt{b \lambda}.$$

Ширина щілини x дорівнює

$$x = 0,9 \sqrt{b \lambda}.$$

З рівняння

$$\frac{K x^2}{2b} = \frac{\pi v^2}{2}$$

знайдемо параметр v : $v = 0,9 \sqrt{2} = 1,27$. Це точка M на спіралі Корню. Для половини (за діаметром) першої зони Френеля амплітудний вектор \vec{a}_0 спрямований під кутом $\pi/2$ до нульового напрямку. Як впливає з рис. 5.29, $OF_2 = a_0/2$, $\alpha = \pi/4$, $\varphi = \frac{3}{4}\pi$.

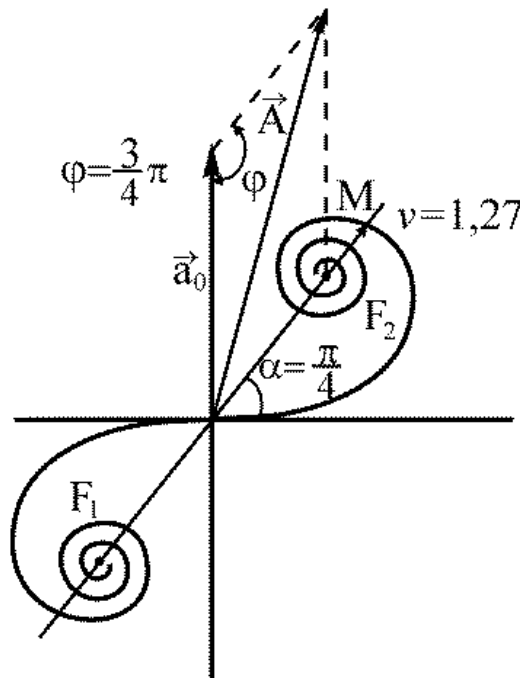


Рис. 5.29. До задачі 5.11

Інтенсивність дорівнює $I \approx A^2$. Амплітудний вектор \vec{A} (його модуль) можна визначити двома методами. Перший – згідно з теоремою косинусів:

$$A = \sqrt{a_0^2 + OM^2 + 2a_0 \cdot OM \cdot \cos \varphi},$$

або вимірявши довжину вектора OM : $OM = 1,34 \frac{a_0}{2}$, $A = 1,54 a_0$, інтенсивність світла в точці P дорівнює:

$$I \approx A^2 = 1,54^2 \cdot a_0^2 = 2,4 I_0.$$

5.12. Світло з довжиною хвилі λ падає нормально на довгу прямокутну щілину завширшки b . Знайти кутовий розподіл інтенсивності світла при дифракції Фраунгофера і кутове положення мінімумів.

Розв'язок. Падіння світла на щілину показує рис. 5.30. Для спостереження дифракції Фраунгофера (дифракції у паралельних променях) необхідна збираюча лінза.

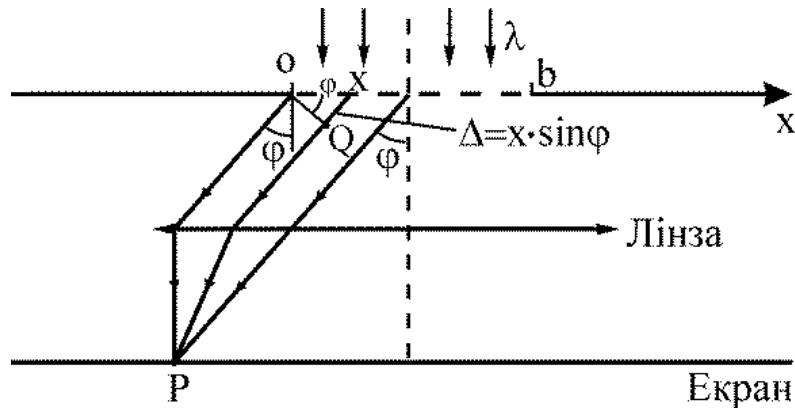


Рис. 5.30. Падіння світла на прямокутну щілину

Розсіяне світло містить промені, що падають на щілину під різними кутами. Промені, які падають на щілину під кутами φ , зійдуться на екрані у точці Р, під іншими кутами – у іншій точці.

Різниця ходу між променями, що падають на щілину в точках $x=0$ і x , дорівнює

$$\Delta = x \cdot \sin \varphi,$$

а різниця фаз дорівнює

$$\delta = k \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x \cdot \sin \varphi.$$

Згідно з принципом Гюйгенса–Френеля

$$dE = k \cdot a_0 \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha_0) dS,$$

де k – коефіцієнт.

Амплітуда dA , коливання dA , яке збуджує зона завширшки dx , дорівнює:

$$dA = C dx, \text{ де } C = \text{const.}$$

Якщо A_0 – алгебраїчна сума амплітуд, які збуджуються усіма зонами, то

$$A_0 = \int dA = \int_0^b C dx = Cb, \text{ звідки } C = \frac{A_0}{b}. \text{ Таким чином, } dA = \frac{A_0}{b} dx.$$

Оптичні шляхи OP і QP таутохронні. Тоді

$$\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \sin \varphi,$$

$$dE = \frac{A_0}{b} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \sin \varphi\right) dx$$

– згідно з принципом Гюйгенса–Френеля.

Після інтегрування по всій щілині одержимо:

$$E = \int \frac{A_0}{b} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \sin \varphi\right) dx = \left\{ A_0 \frac{\sin(\pi b \sin \varphi / \lambda)}{(\pi b \sin \varphi / \lambda)} \right\} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \sin \varphi\right).$$

Вираз у фігурних дужках визначає амплітуду коливання A_φ в залежності від кута падіння φ :

$$A_\varphi = A_0 \frac{\sin(\pi b \cdot \sin \varphi / \lambda)}{(\pi b \cdot \sin \varphi / \lambda)}.$$

При $\varphi=0$ $A_\varphi = A_0$.

Запишемо умову мінімуму ($A_\varphi = 0$):

$$\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi = \pm k \pi, \text{ де } k=1, 2, 3, \dots$$

Умова мінімуму набуває вигляду:

$$b \sin \varphi = k \lambda.$$

Інтенсивність світла пропорційна квадрату амплітуд: $I \propto A^2$. Тоді запишемо:

$$I_\varphi = I_0 \frac{\sin^2(\pi b \cdot \sin \varphi / \lambda)}{(\pi b \cdot \sin \varphi / \lambda)^2},$$

де I_0 – інтенсивність у центрі картини.

З умови мінімуму одержимо

$$\sin \varphi = \pm \frac{k \lambda}{b}.$$

Оскільки $\sin \varphi \leq 1$, $\frac{k \lambda}{b} \leq 1$, то $k \leq \frac{b}{\lambda}$.

Для центрального максимуму

$$b \sin \varphi = \pm \lambda,$$

звідки

$$\varphi = \pm \arcsin \left(\frac{\lambda}{b} \right).$$

Кутова ширина центрального максимуму

$$\delta \varphi = 2 \arcsin \left(\frac{\lambda}{b} \right).$$

Розподіл інтенсивності на екрані в залежності від кута φ показаний на рис. 5.31.

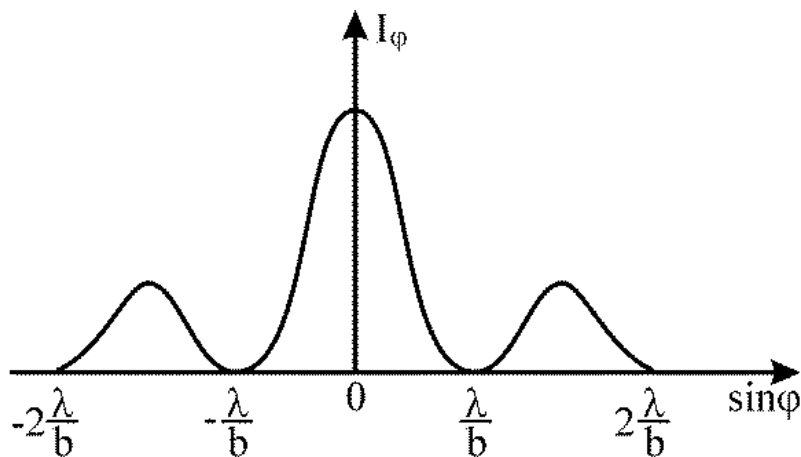


Рис. 5.31. Розподіл інтенсивності на екрані

5.13. Монохроматичне світло падає нормально на щілину завширшки $b = 11$ мкм. За щілиною розташована тонка лінза з фокусною відстанню $f = 150$ мм. У фокальній площині лінзи розташований екран. Визначити довжину хвилі світла, якщо відстань між симетричними мінімумами третього порядку на екрані дорівнює $x = 50$ мм.

Розв'язок. Падіння світла на щілину показує рис. 5.32.

Запишемо умову дифракційного мінімуму:

$$b \sin \varphi = k \lambda,$$

де $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

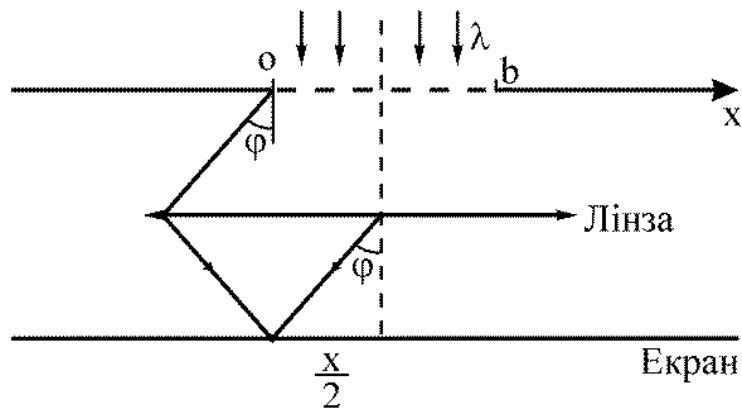


Рис. 5.32. Падіння світла на щілину

Як впливає з рис. 5.32,

$$\sin \varphi = \frac{x}{2 \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + f^2}}.$$

Після підстановки у перше рівняння одержимо:

$$b \cdot \frac{x}{2 \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + f^2}} = k \lambda,$$

звідки

$$\lambda = \frac{b}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \left(\frac{f}{x}\right)^2}} = 0,6 \text{ (мкм)}.$$

5.14. Світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,5$ мкм падає на щілину завширшки $b = 10$ мкм під кутом $\theta_0 = 30^\circ$ до нормалі. Знайти кутове положення перших мінімумів ліворуч і праворуч від центрального максимуму Фраунгофера.

Розв'язок. Падіння світла на щілину під кутом $\theta_0 = 30^\circ$ показує рис. 5.33.

Різниця ходу між променями, які падають на краї щілини, дорівнює

$$\Delta = b \cdot \sin \Theta_0.$$

Оскільки світло розсіяне, то промені, що падають під кутом φ до нормалі, зберуться у точці P .

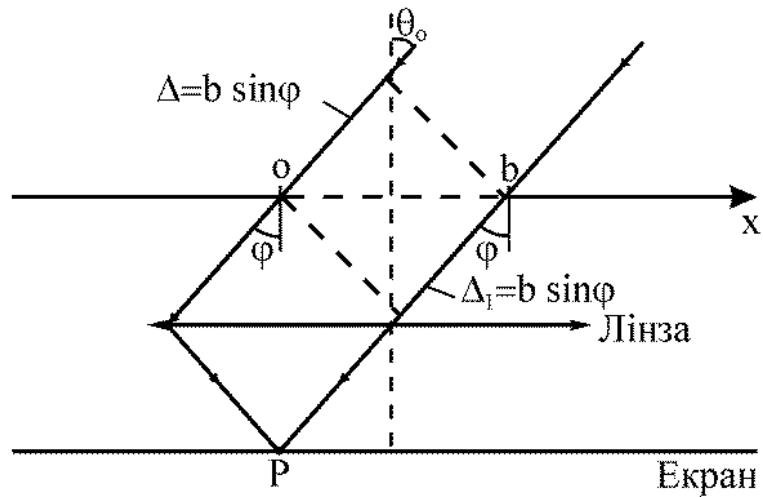


Рис. 5.33. Падіння світла на щілину під кутом

Для цих променів різниця ходу від країв щілини дорівнює

$$\Delta_1 = b \cdot \sin \varphi.$$

Результуюча різниця ходу дорівнює:

$$(\Delta_1 - \Delta) = b \sin \varphi - b \sin \Theta_0 = b(\sin \varphi - \sin \Theta_0).$$

Умова мінімуму

$$b(\sin \varphi - \sin \Theta_0) = k \lambda,$$

де $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

За умовою задачі $k = \pm 1$, і попередній вираз набуває вигляду

$$b(\sin \varphi - \sin \Theta_0) = \pm \lambda.$$

Кутове положення мінімумів

$$\sin \varphi = \frac{\lambda + b \sin \Theta_0}{b} \Rightarrow \varphi_+ = 33^\circ,$$

$$\sin \varphi = \frac{-\lambda + b \sin \Theta_0}{b} \Rightarrow \varphi_- = 27^\circ.$$

5.15. Монохроматичне світло падає на відбивну дифракційну решітку з періодом $d = 1 \text{ мм}$ під кутом ковзання $\alpha_0 = 1^\circ$. Під кутом ковзання $\alpha = 3^\circ$ спостерігається фраунгоферовий максимум другого порядку. Визначити довжину хвилі світла.

Розв'язок. Падіння монохроматичного світла на відбивну дифракційну решітку показує рис. 5.34.

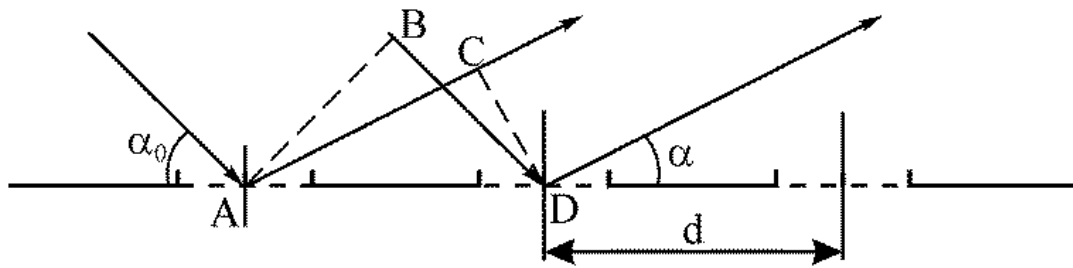


Рис. 5.34. Відбивна дифракційна решітка

Як випливає з рис. 5.34, різниця ходу між променями, які падають на середину щілини, дорівнює

$$\Delta = BD = d \cdot \cos \alpha_0.$$

Відповідна різниця ходу між відбитими променями дорівнює:

$$\Delta_1 = AC = d \cdot \cos \alpha.$$

Результуюча різниця ходу дорівнює

$$(\Delta - \Delta_1) = d (\cos \alpha_0 - \cos \alpha).$$

Умова дифракційного максимуму має вигляд:

$$d (\cos \alpha_0 - \cos \alpha) = m \lambda,$$

де $m=2$ за умовою задачі:

$$d \cdot 2 \sin \frac{\alpha + \alpha_0}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \alpha_0}{2} = m \lambda.$$

Оскільки кути α_0 і α малі, то

$$\sin \frac{\alpha + \alpha_0}{2} \approx \frac{\alpha + \alpha_0}{2}, \quad \sin \frac{\alpha - \alpha_0}{2} \approx \frac{\alpha - \alpha_0}{2}.$$

Довжина хвилі світла дорівнює

$$\lambda \approx \frac{(\alpha^2 - \alpha_0^2)d}{2m} = 0,6 \text{ (мкм)}.$$

5.16. Світло з довжиною хвилі $\lambda = 535 \text{ нм}$ падає нормально на дифракційну решітку. Визначити її період, якщо одному з фраунгоферових максимумів відповідає кут дифракції 35° і найбільший порядок спектра дорівнює п'яти.

Розв'язок. Умова дифракційного максимуму для дифракційної решітки має вигляд:

$$d \sin \varphi = m \lambda. \quad (1)$$

Ця умова для найбільшого порядку набуває вигляду:

$$d \cdot \sin \varphi_{\max} = m_{\max} \cdot \lambda, \quad (2)$$

де $\sin \varphi_{\max} = 1$.

Із виразу (2) знайдемо період решітки:

$$d = \frac{m_{\max} \cdot \lambda}{\sin \varphi_{\max}}$$

і підставимо у вираз (1) для визначення порядку максимуму m :

$$m = \frac{d \cdot \sin \varphi}{\lambda} = \frac{m_{\max} \cdot \lambda}{\sin \varphi_{\max}} \cdot \frac{\sin \varphi}{\lambda} = 2,8 \approx 3,$$

оскільки за означенням m – ціле число.

З виразу (1) знаходимо період решітки d :

$$d = \frac{m \lambda}{\sin \varphi} = 2,8 \text{ (мкм)}.$$

5.17. Плоска світлова хвиля завдовжки λ падає нормально на дифракційну решітку, профіль якої показано на рис. 5.35. Решітка виготовлена зі скла з показником заломлення n . Визначити глибину штрихів h , при якій інтенсивність центрального фраунгоферова максимуму дорівнює нулю. Який при цьому кут дифракції, що відповідає першому максимуму?

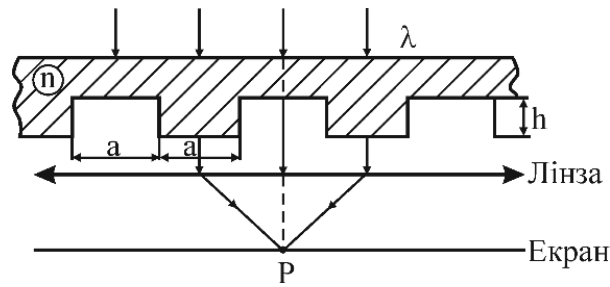


Рис. 5.35. Дифракційна решітка

Розв'язок. Хід променів у дифракційній решітці показаний на рис. 5.36.

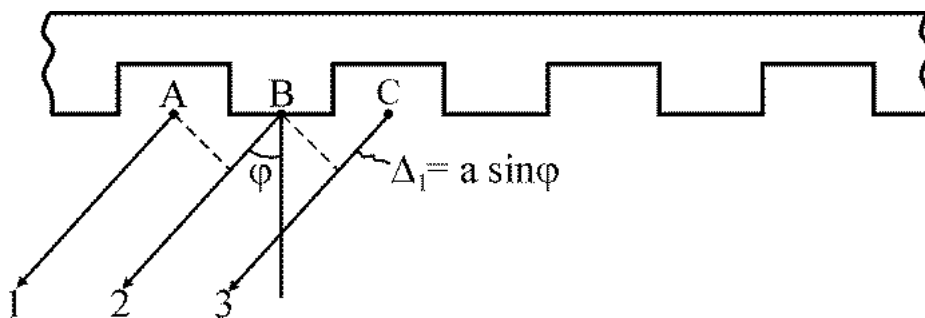


Рис. 5.36. Хід променів у дифракційній решітці

Оскільки дифракційна решітка освітлюється розсіяним світлом, розглянемо промені, які падають на решітку під кутом φ . Різниця ходу між хвилями, які йдуть крізь виступи та впадини (точки B і C на рис. 5.36), дорівнює

$$\Delta = hn - h = h(n-1),$$

а відповідна різниця фаз

$$\delta = k \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} h(n-1).$$

Джерело A випереджає по фазі джерело B на δ . Крім того, промінь 1 випереджає промінь 2 на різницю ходу

$$\Delta_1 = a \cdot \sin \varphi,$$

і результуюча різниця фаз між променями 1 і 2 дорівнює

$$\Delta\Phi_{12} = \delta + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta_1.$$

Коливання джерела В відстають по фазі від джерела С на δ . Крім того, промінь 2 випереджає промінь 3 (рис. 5.37) на різницю ходу Δ_1 . Результуюча різниця фаз між променями 2 і 3 дорівнює:

$$\Delta\Phi_{23} = -\delta + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta_1.$$

Дифракційні максимуми будуть спостерігатися, якщо одночасно виконуються умови:

$$\begin{cases} \Delta\Phi_{12} = 2\pi k, \\ \Delta\Phi_{23} = 2\pi m, \end{cases}$$

де k, m – цілі числа.

При визначених значеннях k, m умова дифракції дає кут дифракції φ . При цьому максимум спостерігається найбільш яскравий.

У центрі дифракційної картини буде мінімум, якщо різниця ходу Δ дорівнює

$$\Delta = h(n-1) = (2m-1) \cdot \frac{\lambda}{2},$$

де m – ціле число.

З цієї умови випливає вираз для глибини впадини h :

$$h = \frac{\lambda \left(m - \frac{1}{2} \right)}{(n-1)}.$$

Мінімальна глибина буде при $m = 1$:

$$h_{\min} = \frac{\lambda}{2(n-1)}.$$

Враховуючи, що $\Delta_1 = a \sin \varphi$ і $\Delta = h(n-1)$ умова, що визначає положення головних дифракційних максимумів, набуває наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda} [a \sin \varphi + h(n-1)] &= 2k\pi, \\ \frac{2\pi}{\lambda} [a \sin \varphi + h(n-1)] &= 2m\pi. \end{aligned}$$

З цих рівнянь випливає, що

$$2h(n-1) = \lambda(k-m),$$

$$k = m+1.$$

Перший головний максимум буде при $m = 0, k = 1$:

$$\sin \varphi_1 = \frac{\lambda}{2a}, \quad \varphi_1 = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2a}\right).$$

5.18. На рис. 5.37 наведена схема установки для спостереження дифракції світла на ультразвуку. Плоска світлова хвиля з $\lambda = 0,55$ мкм проходить крізь кювету К з водою, у якій збуджена стояча ультразвукова хвиля з частотою $\nu = 4,7$ МГц. В результаті дифракції світла на оптично неоднорідній періодичній структурі в фокальній площині об'єктива О з фокусною відстанню $f = 35$ см виникає дифракційний спектр. Відстань між сусідніми максимумами $\Delta x = 0,6$ мм. Визначити швидкість поширення ультразвукових хвиль у воді.

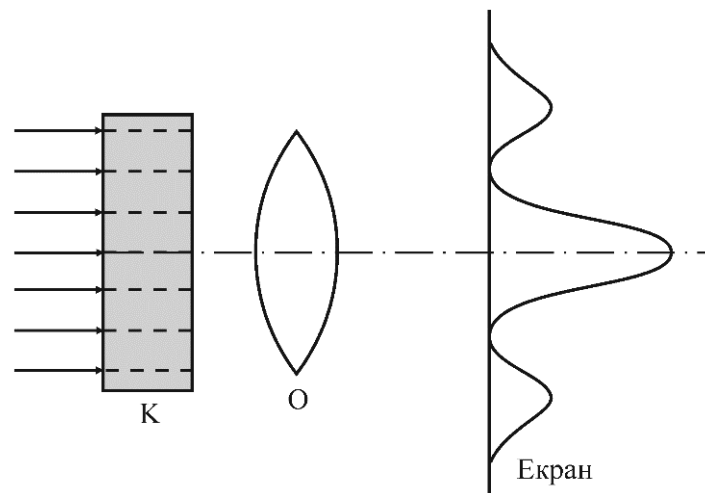


Рис. 5.37. Схема установки для спостереження дифракції світла на ультразвуку

Розв'язок. Розглянемо хід променів світла у приладі (рис. 5.38).

Пучок світла крізь діафрагму D падає на збираючу лінзу L (фокусна відстань лінзи D_f), і паралельні промені падають на кювету k з водою. За допомогою ультразвуку можна утворити просторову решітку, на якій можна спостерігати вище дифракції світлових хвиль. Наприклад, у кварці можна збуджувати механічні коливання з частотою до 10^8 Гц. Якщо такий кварц помістити у кювету, то там утворюється стояча ультразвукова

хвиля. Тобто це нерухома періодична структура змінної густини ρ , відповідно, змінного показника заломлення. Таким чином, для світла така структура являє собою фазову решітку. Фазова решітка має період, який дорівнює довжині ультразвукової хвилі:

$$d = \lambda = \frac{v}{\nu},$$

де v – швидкість поширення ультразвукової хвилі.

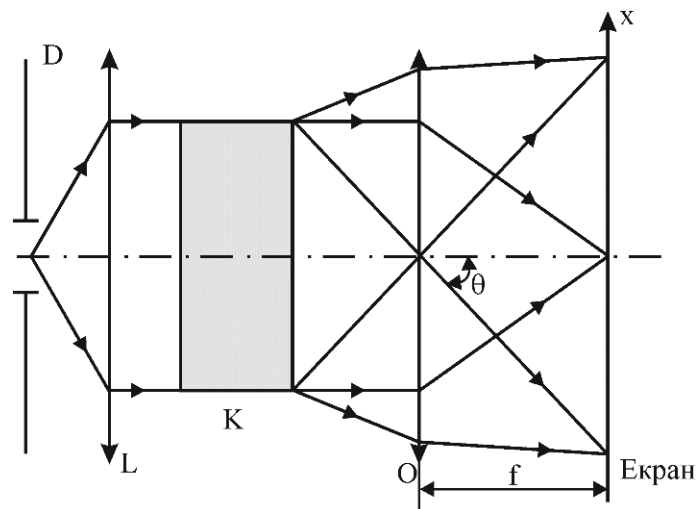


Рис. 5.38. Хід променів у приладі

При нормальному падінні світла на решітку умова максимуму має вигляд

$$d \cdot \sin \Theta = m \lambda,$$

де m – порядок максимуму.

Для малих кутів $\sin \Theta \approx \Theta$ і умова максимуму набуває вигляду:

$$d \cdot \Theta = m \lambda.$$

Кутова відстань між сусідніми максимумами:

$$\Delta \Theta = \frac{\lambda}{d},$$

а відстань між ними на екрані

$$\Delta x = f \cdot \Delta \Theta = \frac{f \cdot \lambda}{d},$$

$$\text{звідки } d = \frac{f \cdot \lambda}{\Delta x}.$$

Оскільки $d = \frac{v}{\nu}$, то

$$\nu = d \cdot \nu = \frac{f \cdot \lambda}{\Delta x} \cdot \nu = 1500 \left(\frac{m}{c} \right).$$

5.19. Для вимірювання методом Майкельсона кутової відстані Θ між компонентами подвійної зірки перед об'єктивом телескопа помістили діафрагму з двома вузькими паралельними щілинами, відстань d між якими можна змінювати. При зменшенні d зафіксували перше погіршення дифракційної картини у фокальній площині об'єктива при $d = 95$ см. Визначити кутову відстань Θ між компонентами подвійної зірки, якщо довжина хвилі світла $\lambda = 0,55$ мкм.

Розв'язок. Схема установки Майкельсона наведена на рис. 5.39.

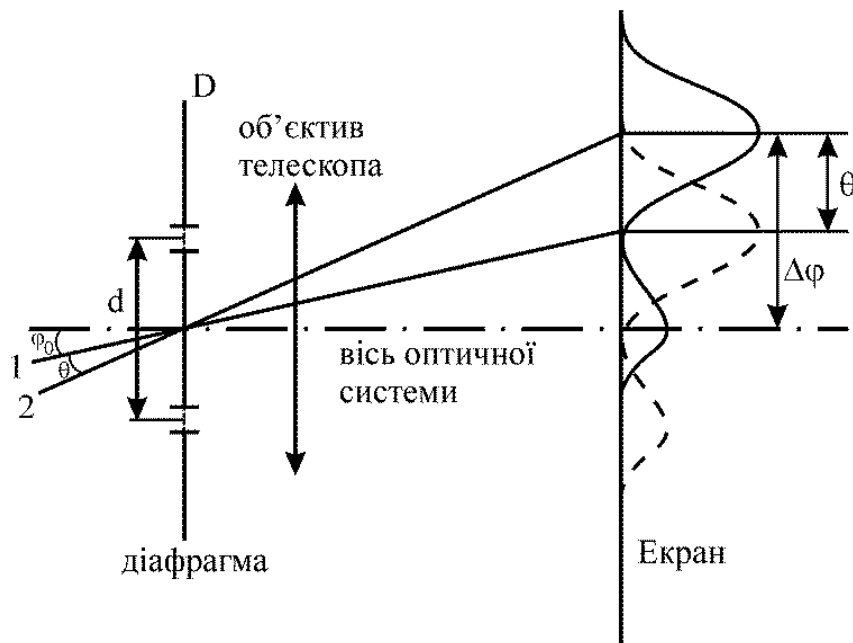


Рис. 5.39. Хід променів у інтерферометрі

Кожна зірка дає у фокальній площині об'єктива фраунгоферову дифракційну картину.

Світло падає на діафрагму від першої зірки під кутом φ_0 , від другої — під кутом $(\varphi_0 + \Theta)$. Умова дифракційних максимумів має вигляд:

$$\sin \varphi_1' - \sin \varphi_0 = m \lambda / d, \quad (1)$$

$$\sin \varphi_2' - \sin \varphi_0 = m \lambda / d. \quad (2)$$

Як впливає з виразів (1) і (2), кутова відстань між нульовими максимумами дорівнює

$$(\varphi_2' - \varphi_1') \approx \Theta$$

(для малих кутів) і не залежить від d .

Кутова відстань $\Delta\varphi$ між сусідніми максимумами у кожній дифракційній картині залежить від відстані d . Тому при зменшенні d кутова відстань між сусідніми максимумами у кожній дифракційній картині буде збільшуватися при незмінному Θ . Коли $\Delta\varphi$ буде дорівнювати 2Θ , буде спостерігатися перше погіршення видимості: максимуми однієї системи смуг співпадуть з мінімумами другої.

Умова мінімумів у першій картині:

$$\sin \varphi_1'' - \sin \varphi_0 = \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda}{d}. \quad (3)$$

Погіршення картини буде коли ці мінімуми співпадуть з максимумами у другій дифракційній картині, тобто при

$$\varphi_1'' = \varphi_1'. \quad (4)$$

З рівнянь (2) і (3) визначимо

$$\left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda}{d} - \sin \varphi_0 = m \frac{\lambda}{d} + \sin(\varphi_0 + \Theta).$$

Для малих кутів ($\sin \varphi \approx \varphi$):

$$\Theta = \frac{\lambda}{2d} = 0,06''.$$

5.20. Показати, що при нормальному падінні світла на дифракційну решітку максимальна величина її роздільної здатності не може перевищувати

l/λ , де l – ширина решітки, λ – довжина хвилі світла.

Розв'язок. Ширина решітки дорівнює

$$l = N \cdot d,$$

де N – число щілин.

Умова головних максимумів:

$$d \sin \varphi_m = \pm m \lambda, \quad (1)$$

де $m = 0, 1, 2, \dots$

Оскільки $|\sin \varphi_m| \leq 1$, то рівняння (1) набуває вигляду:

$$d \cdot |\sin \varphi_m|_{\max} = \pm m_{\max} \lambda,$$

звідки $m_{\max} = \frac{d}{\lambda}$, $m \leq \frac{d}{\lambda}$.

За визначенням роздільна сила R :

$$R = \frac{\lambda}{\delta \lambda},$$

де $\delta \lambda$ – відстань по довжині хвилі між сусідніми максимумами.

Згідно з критерієм Релея два максимуми розділяються решіткою, якщо середина одного максимуму збігається з краєм сусіднього мінімуму (рис. 5.40).

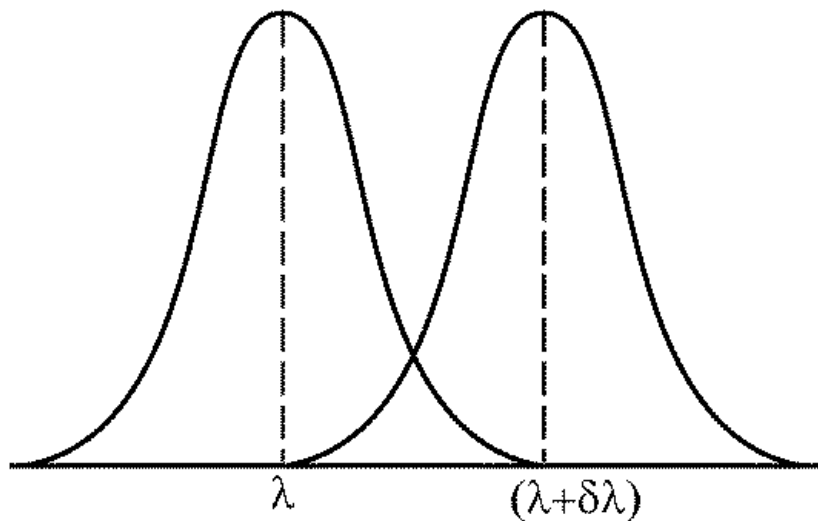


Рис. 5.40. Критерій Релея

Запишемо умову Релея:

$$d \sin \varphi_{\max} = m(\lambda + \delta \lambda), \quad (1)$$

де m – m -й максимум для хвилі $(\lambda + \delta \lambda)$.

Край m -го максимуму для хвилі λ буде умовою мінімуму:

$$d \sin \varphi_{\max} = \left(m \pm \frac{1}{N} \right) \lambda. \quad (2)$$

З рівнянь (1) і (2) випливає:

$$m(\lambda + \delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda,$$

$$m\lambda N + Nm\delta\lambda = Nm\lambda + \lambda,$$

або

$$Nm\delta\lambda = \lambda. \quad (3)$$

Оскільки $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nm$ (з рівняння (3)) і враховуючи, що

$$m_{\max} \leq \frac{d}{\lambda} \text{ і } Nd = l,$$

одержимо:

$$R \leq \frac{l}{d} \cdot \frac{d}{\lambda} \leq \frac{l}{\lambda}.$$

5.21. Пучок рентгенівських променів з довжиною хвилі $\lambda = 40$ нм падає нормально на плоску прямокутну решітку із центрів розсіювання і дає на плоскому екрані на відстані $l = 10$ см систему дифракційних максимумів (рис. 5.41). Визначити періоди решітки a і b відповідно вздовж осей x і y , якщо відстані між симетричними максимумами другого порядку дорівнюють $\Delta x = 60$ мм і $\Delta y = 40$ мм.

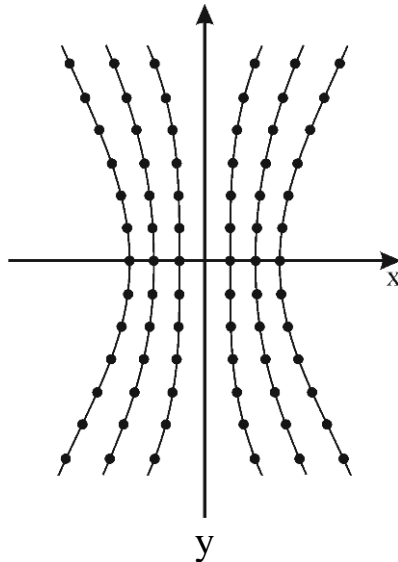


Рис. 5.41. Дифракційна картина на двовимірній структурі

Розв'язок. Розглянемо ланцюжок атомів уздовж осі x (рис. 5.42).

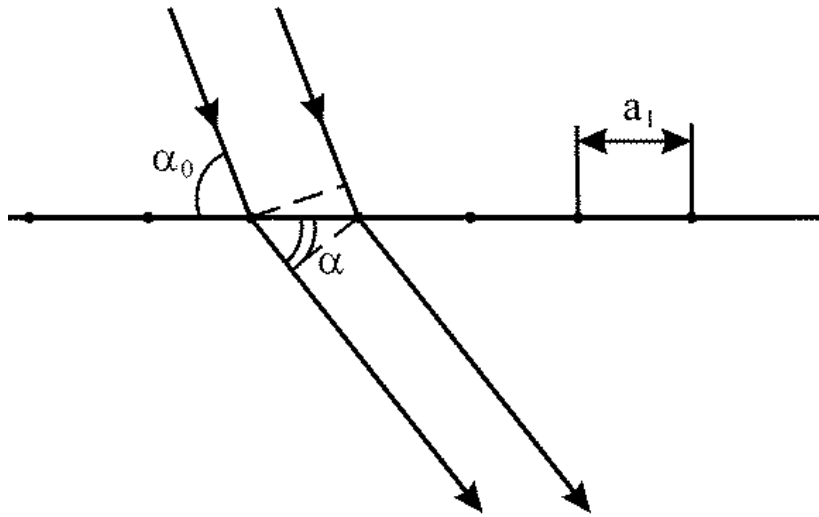


Рис. 5.42. Ланцюжок атомів уздовж осі X

Різниця ходу між пучками, що розсіюються сусідніми центрами, дорівнює:

$$\Delta = a_1 (\cos \alpha - \cos \alpha_0).$$

Умова дифракційного максимуму:

$$a_1 (\cos \alpha - \cos \alpha_0) = m_1 \lambda,$$

де $m_1 = 0, 1, 2, 3, \dots$

Аналогічний вираз запишемо для ланцюжка атомів уздовж осі Y:

$$a_2 (\cos \beta - \cos \beta_0) = m_2 \lambda,$$

де $m_2 = 0, 1, 2, 3, \dots$

Це рівняння описує сімейство конусів, осі яких паралельні осі Y. При розсіюванні на двовимірній решітці дифракційні максимуми з'являються тільки в тих напрямках, для яких одночасно виконуються умови максимумів вздовж осей X і Y, тобто пучки, які дифрагують, існують тільки в напрямках, по яких перетинаються поверхні конусів обох сімейств.

При нормальному падінні рентгенівських променів останні рівняння набувають вигляду:

$$\begin{cases} a_1 \cos \alpha = m_1 \lambda, \\ a_2 \cos \beta = m_2 \lambda. \end{cases}$$

Значенню $m_2 = 0$ відповідає ряд максимумів уздовж осі x, які утворені променями, що падають під кутами:

$$\pm \alpha_1 \text{ (при } m_1 = \pm 1),$$

$$\pm \alpha_2 \text{ (при } m_2 = \pm 2).$$

Якщо l – відстань до екрана, то відстань між симетричними максимумами другого порядку (рис. 5.43) дорівнює:

$$\Delta x = 2l \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = 2l \frac{\cos \alpha_2}{\sin \alpha_2}. \quad (4)$$

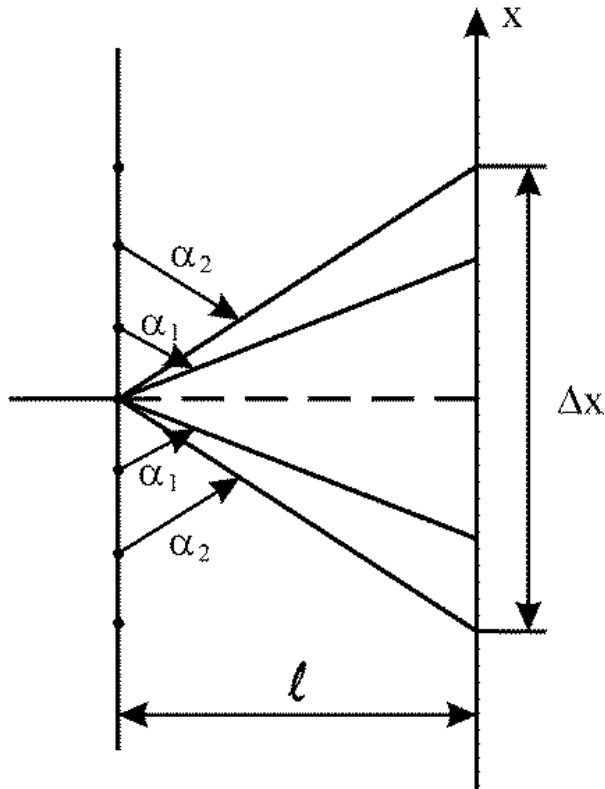


Рис. 5.43. До задачі 5.21

З рівняння (3) випливає, що $\cos \alpha_2 = \frac{2\lambda}{a_1}$, і після підстановки у вираз (4) одержимо:

$$a_1 = \frac{2\lambda}{\Delta x} \sqrt{4l^2 + (\Delta x)^2} = 2,54 \cdot 10^{-10} \text{ (м)}. \quad (5)$$

Значенню $m_1 = 0$ відповідає ряд максимумів уздовж осі Y . Тому аналогічно виразу (5) запишемо:

$$a_2 = \frac{2\lambda}{\Delta y} \sqrt{4l^2 + (\Delta y)^2} = 3,9 \cdot 10^{-10} \text{ (м)}.$$

5.22. Світло з довжиною хвилі λ падає нормально на дифракційну решітку. Визначити її кутову дисперсію в залежності від кута дифракції Θ .

5.23. На щілину завширшки $b = 3$ мкм нормально падає плоска хвиля світла з довжиною хвилі $\lambda = 0,5$ мкм. Визначити кількість N максимумів інтенсивності, які спостерігаються у фокальній площині лінзи.

5.24. Визначити кутовий розмір $\delta\varphi_m$ головного максимуму m -го порядку. Параметри решітки: N, d . Довжина хвилі λ .

5.25. Визначити порядки головних максимумів, які не можуть спостерігатися на дифракційній решітці з періодом $d = 9$ мкм і шириною щілини $b = 3$ мкм.

Контрольні питання до розділу 5

1. Принцип Гюйгенса–Френеля.
2. Природа дифракції.
3. Дифракція Френеля (фізичні основи).
4. Графічний метод додавання амплітуд коливань.
5. Зони Френеля.
6. Дифракція на прямокутному краю напівплощини. Зони Шустера.
7. Спіраль Корню.
8. Зміст параметра v спіралі Корню.
9. Дифракція Фраунгофера (фізичні основи)
10. Дифракція Фрунгофера на щілині.
11. Умови максимумів і мінімумів дифракції Фраунгофера на щілині.
12. Дифракційні решітки.
13. Умова головних дифракційних максимумів решітки.
14. Відбиваючі дифракційні решітки.
15. Критерій Релея.
16. Дифракція рентгенівських променів.
17. Формули Лауе.
18. Формула Вульфа–Бреггів.

РОЗДІЛ 6. ПОЛЯРИЗАЦІЯ СВІТЛА

Світло являє собою електромагнітні коливання. З цього уявлення про світло випливає, як цілком необхідний наслідок, поперечність світлових коливань. У випадку світла, яке випромінюється Сонцем або свічкою, ми маємо справу з коливаннями, площина яких змінюється з великою швидкістю і з повною хаотичністю. Причина хаотичності полягає в тому, що випромінювання світлого тіла складається з коливань, які випромінюються окремими атомами. Випромінювання кожного атома складається з коливань, які лежать в одній площині, але на зміну одному атомові приходить інший, що випромінює коливання, які лежать в зовсім іншій площині. Тому світловий вектор \vec{E} орієнтований хаотично. Таке світло має назву **природного** або **неполяризованого** світла.

Світло, коливання якого лежать в одній площині, називають **плоскополяризованим**. **Площиною поляризації** називають площину коливань електричного вектора \vec{E} .

Плоскополяризоване світло можна одержати з природного світла за допомогою приладів, які мають назву **поляризаторів**. Ці прилади вільно пропускають коливання, які паралельні площині поляризатора, і повністю або частково затримують коливання, які перпендикулярні до цієї площини. Якщо поляризатор слугує для виявлення поляризації світла, він називається **аналізатором**. Якщо поляризатор частково затримує перпендикулярні коливання, то на виході з нього світло буде **частково поляризоване**.

Ступінь поляризації визначає безрозмірний коефіцієнт P :

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (6.1)$$

Для плоскополяризованого світла $I_{\min} = 0$, $P = 1$. Для природного світла $I_{\min} = I_{\max}$, $P = 0$.

Види поляризації світла

1. Плоскополяризоване світло (коливання електричного вектора \vec{E} у світловій хвилі відбуваються у площині).

2. Еліптично поляризоване світло (кінець вектора \vec{E} описує при обертанні еліпс: якщо по відношенню до напрямку, протилежному напрямку світлового променя, вектор \vec{E} обертається за годинниковою стрілкою, поляризація називається **правою**, у протилежному випадку – **лівою**).

3. Світло поляризоване по колу або циркулярно поляризоване світло (кінець вектора \vec{E} описує при обертанні коло). Як і у випадку еліптично поляризованого світла, поляризація по колу розподіляється на праву і ліву.

Закон Малюса. Розглянемо поляризатор, на який падає плоскополяризоване світло з амплітудою A_0 інтенсивності I_0 (рис. 6.1).

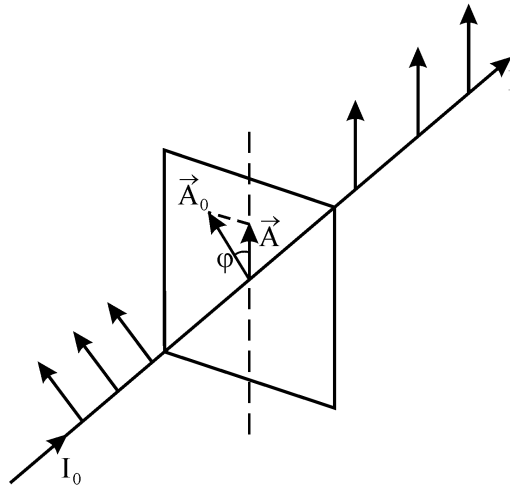


Рис. 6.1. Падіння плоскополяризованого світла на поляризатор

Крізь прилад пройде складова коливання з амплітудою $A = A_0 \cdot \cos \varphi$, де φ – кут між площиною коливань падаючого світла і площиною поляризатора. Оскільки інтенсивність пропорційна квадрату амплітуди, то інтенсивність світла на виході з поляризатора визначається виразом:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi. \quad (6.2)$$

Вираз (2) має назву **закон Малюса**.

Проходження світла крізь два поляризатори

Розглянемо проходження світла крізь два поляризатори, кут між площинами яких φ . Якщо на перший поляризатор падає природне світло, то з першого поляризатора вийде плоскополяризоване світло, інтенсивність якого

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0, \quad (6.3)$$

де I_0 – інтенсивність падаючого світла.

Згідно із законом Малюса з другого поляризатора вийде світло інтенсивністю

$$I_2 = I_1 \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} I_0 \cdot \cos^2 \varphi. \quad (6.4)$$

Максимальна інтенсивність $\frac{1}{2} I_0$ буде при $\varphi=0$ (поляризатори паралельні). При $\varphi=\frac{\pi}{2}$ інтенсивність дорівнює нулю (поляризатори перпендикулярні).

Поляризація при відбитті і заломленні світла

Розглянемо падіння світла на границю розподілу двох діелектриків. Світловий вектор \vec{E} можна розкласти на дві компоненти: паралельну E_{\parallel} , яка лежить у площині рисунка, і перпендикулярну E_{\perp} , яка перпендикулярна до цієї площини (рис. 6.2).

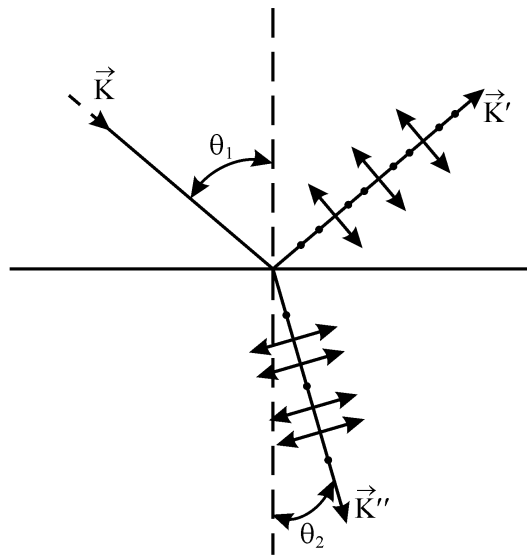


Рис. 6.2. Падіння світла на границю розподілу двох діелектриків

У відбитому промені більшість складають коливання, перпендикулярні площині падіння (рис. 6.2). Ці коливання позначені точками. У заломленому промені навпаки, більшість складають коливання, паралельні площині падіння (на рис. 6.2 показані стрілками). Ступінь поляризації залежить від кута падіння. Якщо кут падіння Θ_1 дорівнює куту Брюстера $\Theta_1 = \Theta_{Br}$ і кут Брюстера задовольняє умові

$$\text{tg } \Theta_{Br} = n_{12}, \quad (6.5)$$

де n_{12} – показник заломлення другого середовища відносно першого, то відбитий промінь повністю поляризований (коливання в ньому перпендикулярні до площини падіння). Ступінь поляризації заломленого променя при цьому досягає максимального значення, але він залишається поляризованим тільки частково.

Згідно із граничними умовами для векторів $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ і законом збереження енергії можна одержати співвідношення між компонентами електричного вектора для падаючої, відбитої і заломленої хвиль. Якщо E – амплітуда падаючої хвилі, а E' і E'' , відповідно, амплітуди відбитої і заломленої хвиль за перпендикулярного падіння, то співвідношення між ними мають вигляд:

$$E' = E \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad (6.6)$$

$$E'' = E \frac{2n_1}{n_1 + n_2}, \quad (6.7)$$

де n_1, n_2 – показники заломлення першого і другого середовищ.

Як випливає із (6.7), при будь-якому співвідношенні між n_1 і n_2 знак E'' завжди збігається зі знаком E . Це означає, що падаюча і заломлена хвилі мають однакову фазу. А для відбитої хвилі знак E' залежить від співвідношення величин n_1 і n_2 . У разі, якщо $n_2 > n_1$, то з виразу (6.6) випливає, що знаки E'' і E протилежні. Це означає, що фаза відбитої хвилі стрибком змінюється на π . Це треба завжди враховувати при падінні світла на діелектрик, оптична густина якого (тобто показник заломлення) більша.

Формули Френеля. Ступінь поляризації відбитого і заломленого променів можна одержати за допомогою формул Френеля. Ці формули впливають з умов, які накладаються на електромагнітне поле на межі розділу двох діелектриків. До таких умов належать:

$$\begin{cases} E_{1\tau} = E_{2\tau}, & H_{1\tau} = H_{2\tau}, \\ D_{1n} = D_{2n}, & B_{1n} = B_{2n}, \end{cases} \quad (6.8)$$

де E_τ, H_τ – тангенціальні складові; D_n, B_n – нормальні складові полів.

Формули Френеля встановлюють співвідношення між комплексними амплітудами падаючої, відбитої і заломленої хвиль.

Уявимо падаючу хвилю у вигляді суперпозиції двох некогерентних хвиль. В одній хвилі коливання вектора \vec{E} відбуваються в площині

падіння, в іншій – перпендикулярно до цієї площини. Зробимо позначення:

\hat{E}_{\parallel} , \hat{E}_{\perp} – амплітуди падаючих хвиль,

\hat{E}'_{\parallel} , \hat{E}''_{\perp} – амплітуди відбитих хвиль,

\hat{E}''_{\parallel} , \hat{E}'_{\perp} – амплітуди заломлених хвиль.

Формули Френеля мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}\hat{E}''_{\parallel} &= 2 \hat{E}_{\parallel} \frac{\cos \Theta \cdot \sin \Theta''}{\sin(\Theta + \Theta'') \cdot \cos(\Theta - \Theta'')}, \\ \hat{E}'_{\parallel} &= \hat{E}_{\parallel} \frac{\cos(\Theta + \Theta'') \cdot \sin(\Theta - \Theta'')}{\sin(\Theta + \Theta'') \cdot \cos(\Theta - \Theta'')}, \\ \hat{E}''_{\perp} &= 2 \hat{E}_{\perp} \frac{\sin \Theta'' \cdot \cos \Theta}{\sin(\Theta + \Theta'')}, \\ \hat{E}'_{\perp} &= -\hat{E}_{\perp} \frac{\sin(\Theta - \Theta'')}{\sin(\Theta + \Theta'')},\end{aligned}\tag{6.9}$$

де Θ – кут падіння; Θ'' – кут заломлення.

Суперпозиція лінійно поляризованих хвиль

Якщо при поширенні хвиль їх електричний вектор \vec{E} лежить в одній площині, то такі хвилі називаються лінійно поляризованими.

Розглянемо суперпозицію двох лінійно поляризованих хвиль, які поширюються вздовж осі Z . Рівняння для таких хвиль мають вигляд:

$$\begin{aligned}E_{1x}(z, t) &= E_{10} \sin(\omega t - k z), \\ E_{1y} &= E_{1z} = 0, \\ E_{2y}(z, t) &= E_{20} \sin(\omega t - k z + \delta), \\ E_{2x} &= E_{2z} = 0,\end{aligned}\tag{6.10}$$

де δ – зсув фаз між хвилями.

Коливання вектора \vec{E} першої хвилі лежать в площині XZ , а другої – в площині YZ .

Згідно з принципом суперпозиції хвиль

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

напруженість електричного поля сумарної хвилі в площині, яка перпендикулярна напрямку поширення хвиль при фіксованому Z .

З часом кінець вектора \vec{E} описує в площині XU замкнену криву. Рівняння цієї кривої

$$\frac{E_x^2}{E_{10}^2} + \frac{E_y^2}{E_{20}^2} - 2 \frac{E_x}{E_{10}} \cdot \frac{E_y}{E_{20}} \cos \delta = \sin^2 \delta. \quad (6.11)$$

Рівняння (6.11) описує еліпс, осі якого не збігаються з осями координат (рис 6.3).

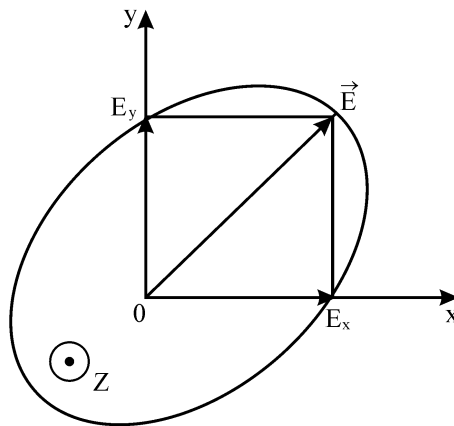


Рис. 6.3. Еліптично поляризована хвиля

Розглянемо рівняння (6.11). Якщо $\cos \delta = 0$, $\sin \delta = \pm 1$, рівняння має вигляд:

$$\frac{E_x^2}{E_{10}^2} + \frac{E_y^2}{E_{20}^2} = 1. \quad (6.12)$$

При $E_{10} \neq E_{20}$ це рівняння еліпса з центром на початку координат і осі спрямовані вздовж осей системи координат (рис. 6.4).

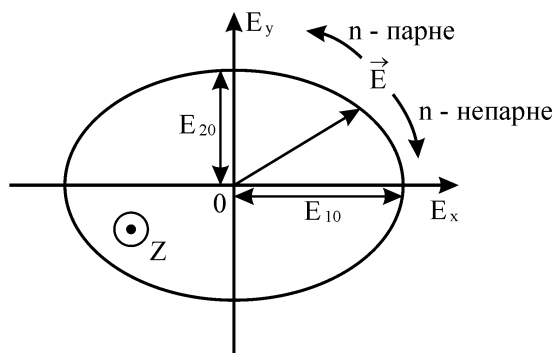


Рис. 6.4. Рівняння еліпса з центром на початку координат, осі спрямовані вздовж осей системи координат

Умова $\cos \delta = 0$ виконується при

$$\delta = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad (6.13)$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

Компоненти хвилі мають вигляд:

$$\begin{aligned} E_{10} &= E_{10} \sin \omega t, \\ E_y &= E_{20} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} + n\pi \right) = (-1)^{n+1} \cdot E_{20} \cos \omega t. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Кінець вектора \vec{E} обертається за годинниковою стрілкою при непарному n і проти годинникової стрілки при парному значенні n . У першому випадку хвиля буде право поляризованою еліптично, а у другому – ліво поляризованою еліптично (вісь z спрямована «на нас»).

Якщо півосі еліпса дорівнюють $E_{10} = E_{20}$, то хвиля стає поляризованою по колу або циркулярно поляризованою хвилею (з правою і лівою поляризаціями, відповідно).

Якщо в рівнянні (6.11) $\sin \delta = 0, \cos \delta = \pm 1$, то рівнянню (6.11) відповідають два рівняння:

$$\frac{E_x}{E_{10}} - \frac{E_y}{E_{20}} = 0, \quad \frac{E_x}{E_{10}} + \frac{E_y}{E_{20}} = 0. \quad (6.15)$$

Ці рівняння описують прямі лінії, вздовж яких рухається кінець вектора \vec{E} і хвиля стає лінійно поляризованою.

6.1. Розв'язання задач

6.1. При падінні природного світла на поляризатор крізь нього проходить $\eta_1 = 30\%$ потоку світла, а крізь два такі поляризатори – $\eta_2 = 13,5\%$. Знайти кут φ між площинами пропускання поляризаторів.

Розв'язок. Нехай поляризатор має коефіцієнт пропускання τ . Тоді інтенсивність світла на виході першого поляризатора дорівнює:

$$I_1 = I_0 \cdot \frac{1}{2} \tau,$$

де I_0 – інтенсивність падаючого природного світла.

Це світло буде лінійно поляризованим. На другий поляризатор падає лінійно поляризоване світло, і згідно із законом Малюса інтенсивність світла на виході другого поляризатора дорівнює

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 \tau \cdot \cos^2 \varphi \cdot \tau,$$

де φ – кут між площинами пропускання поляризаторів.

За умовою задачі

$$\eta_1 = \frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{2} \tau,$$

звідки $\tau = 2\eta_1$.

Аналогічно для другого поляризатора:

$$\eta_2 = \frac{I_2}{I_0} = \frac{1}{2} \tau^2 \cdot \cos^2 \varphi,$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{2\eta_2}{\tau^2} = \frac{2\eta_2}{4\eta_1^2} = \frac{2\tau}{2\eta_1^2},$$

звідки $\cos \varphi = \frac{1}{\eta_1} \sqrt{\frac{\eta_2}{2}}$, $\varphi = \arccos \left\{ \frac{1}{\eta_1} \sqrt{\frac{\eta_2}{2}} \right\} = 30^\circ$.

6.2. Пучок природного світла падає на систему з $N=6$ поляризаторів, площина пропускання кожного повернута на кут $\varphi=30^\circ$ відносно площини пропускання попереднього поляризатора. Яка частина потоку світла проходить крізь таку систему?

Розв'язок. Запишемо вирази для інтенсивності світла, яке пройшло, наприклад, три поляризатори:

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0,$$

де I_0 – інтенсивність падаючого природного світла.

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 \cdot \cos^2 \varphi,$$

$$I_3 = \left(\frac{1}{2} I_0 \cos^2 \varphi \right) \cdot \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} I_0 \cos^4 \varphi.$$

Інтенсивність світла, яке пройшло N поляризаторів:

$$I_N = \frac{1}{2} I_0 (\cos \varphi)^{2(N-1)}.$$

Крізь систему з N поляризаторів пройде частина світла

$$\eta = \frac{I_N}{I_0} = \frac{1}{2} (\cos \varphi)^{2(N-1)}.$$

6.3. Природне світло падає на систему з трьох послідовних поляризаторів. Площина пропускання середнього поляризатора складає кут $\varphi = 60^\circ$ з площинами пропускання двох інших поляризаторів. Кожний поляризатор поглинає світло так, що при падінні на нього лінійно поляризованого світла максимальний коефіцієнт пропускання дорівнює $\tau = 0,81$. У скільки разів зменшиться інтенсивність світла після проходження такої системи?

Розв'язок. Запишемо вирази для інтенсивності світла після проходження кожного поляризатора

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 \tau,$$

$$I_2 = \left(\frac{1}{2} I_0 \tau \right) \cdot \cos^2 \varphi \tau,$$

$$I_3 = \left(\frac{1}{2} I_0 \cos^2 \varphi \cdot \tau^2 \right) \cos^2 \varphi \tau.$$

$$\frac{I_0}{I_3} = \frac{2}{\tau^3 \cos^4 \varphi} \approx 60.$$

6.4. Ступінь поляризації частково поляризованого світла $P = 0,25$. Знайти відношення інтенсивності поляризованої складової світла до інтенсивності природної складової.

Розв'язок. За означенням ступінь поляризації

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

Максимальна і мінімальна інтенсивності світла дорівнюють відповідно:

$$I_{\max} = \frac{1}{2} I_{np} + I_p,$$

$$I_{\min} = \frac{1}{2} I_{np},$$

де I_{np} – інтенсивність природної складової; I_p – інтенсивність поляризованої складової світла.

$$P = \frac{I_{\max}/I_{\min} - 1}{I_{\max}/I_{\min} + 1},$$

звідки

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}}(P-1) = -(1+P),$$

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1+P}{1-P}.$$

З урахуванням виразів для I_{\max} і I_{\min} рівняння набуває вигляду:

$$\frac{\frac{1}{2}I_{np} + I_p}{\frac{1}{2}I_{np}} = \frac{1+P}{1-P},$$

звідки

$$\frac{I_p}{I_{np}} = \frac{P}{1-P} = \frac{1}{3}.$$

6.5. Частково поляризоване світло проходить крізь поляризатор. При повороті поляризатора на кут $\varphi = 60^\circ$ із положення, яке відповідає максимуму пропускання, інтенсивність світла на виході зменшилась у $\eta = 3$. Чому дорівнює ступінь поляризації падаючого світла?

Розв'язок. Інтенсивність частково поляризованого світла дорівнює

$$I = I_{np} + I_{пол},$$

де I_{np} – інтенсивність природної компоненти; $I_{пол}$ – інтенсивність поляризованої компоненти.

Інтенсивність змінюється від I_{\max} до I_{\min} при повороті поляризатора на кут $\pi/2$. Максимальна інтенсивність дорівнює:

$$I_{\max} = \frac{1}{2}I_{np} + I_{пол},$$

а мінімальна інтенсивність

$$I_{\min} = \frac{I_{np}}{2}.$$

При повороті поляризатора на кут φ інтенсивність світла на виході дорівнює:

$$I = \frac{I_{np}}{2} + I_{нол} \cdot \cos^2 \varphi,$$

оскільки поляризована складова підпорядковується закону Малюса. При цьому інтенсивність зменшиться в η разів відносно I_{\max} . Таким чином,

$$\eta \left(\frac{I_{np}}{2} + I_{нол} \cdot \cos^2 \varphi \right) = \frac{I_{np}}{2} + I_{нол},$$

$$\eta \left(\frac{1}{2} + \frac{I_{нол}}{I_{np}} \cos^2 \varphi \right) = \frac{1}{2} + \frac{I_{нол}}{I_{np}}.$$

Із задачі 6.4 випливає, що $\frac{I_{нол}}{I_{np}} = \frac{P}{1-P}$. Тому попередній вираз набуває

вигляду:

$$\frac{\eta}{2} + \frac{\eta P}{1-P} \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} + \frac{P}{1-P}, \text{ або}$$

$$\eta^{-1} = \eta P (1 - 2 \cos^2 \varphi) + P,$$

$$\eta^{-1} = \eta P (1 - 1 - \cos 2\alpha) + P,$$

$$P = \frac{\eta^{-1}}{1 - \eta + \cos 2\alpha} = 0,8.$$

6.6. Пучок природного світла проходить крізь два неідеальні поляризатори (на виході такого поляризатора світло частково поляризоване). При паралельних площинах пропускання поляризаторів ця система пропускає в $\eta=10$ разів більше світла, ніж у випадку, коли площини пропускання поляризаторів перпендикулярні. Чому дорівнює ступінь поляризації світла, яку створює:

а) кожен поляризатор окремо;

б) система поляризаторів при паралельних площинах пропускання поляризаторів?

Розв'язок.

а) Уявимо природне світло у вигляді двох взаємно перпендикулярних складових з інтенсивністю I_0 . Нехай кожен поляризатор пропускає у своїй площині долю α_1 світла, з площиною коливань, яка паралельна площині поляризатора, і α_2 у перпендикулярній площині. Тоді при паралельних і перпендикулярних площинах поляризаторів інтенсивність на виході дорівнює:

$$I_{\parallel} = \alpha_1^2 I_0 + \alpha_2^2 I_0,$$

$$I_{\perp} = \alpha_1 \alpha_2 I_0 + \alpha_2 \alpha_1 I_0,$$

де I_0 – інтенсивність природного світла.

За умовою задачі

$$\frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} = \eta, \text{ або } \eta = \frac{I_0 \alpha_1^2 + I_0 \alpha_2^2}{I_0 \alpha_1 \alpha_2 + I_0 \alpha_2 \alpha_1}. \quad (1)$$

Кожен поляризатор поляризує світло, ступінь поляризації якого дорівнює

$$P_0 = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{I_0 \alpha_1 - I_0 \alpha_2}{I_0 \alpha_1 + I_0 \alpha_2} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (2)$$

З рівнянь (1) і (2) визначимо P_0 :

$$\alpha_1 P_0 + \alpha_2 P_0 = \alpha_1 - \alpha_2,$$

$$\alpha_1 (P_0 - 1) = -\alpha_2 (P_0 + 1), \text{ звідки } \alpha_1 = \alpha_2 \frac{P_0 + 1}{P_0 - 1}.$$

$$\eta = \frac{\alpha_2^2 \left(\frac{P_0 + 1}{P_0 - 1} \right)^2 + \alpha_2^2}{-\alpha_2^2 \frac{P_0 + 1}{P_0 - 1} + \left(-\alpha_2^2 \frac{P_0 + 1}{P_0 - 1} \right)} = \frac{\left(\frac{P_0 + 1}{P_0 - 1} \right)^2 + 1}{-2 \frac{P_0 + 1}{P_0 - 1}},$$

$$P_0^2 (1 + \eta) = \eta - 1, \text{ звідки } P_0 = \sqrt{\frac{\eta - 1}{\eta + 1}} = 0,9.$$

б) За визначенням

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{\alpha_1^2 I_0 - \alpha_2^2 I_0}{\alpha_1^2 I_0 + \alpha_2^2 I_0} = \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} =$$

$$= \frac{\alpha_2^2 \left(\frac{P_0 + 1}{P_0 - 1} \right)^2 - \alpha_2^2}{\alpha_2^2 \left(\frac{P_0 + 1}{P_0 - 1} \right)^2 + \alpha_2^2} = \frac{2 P_0}{P_0^2 + 1} = \frac{\sqrt{\eta^2 - 1}}{\eta} = 0,99.$$

6.7. Природне світло падає під кутом Брюстера на поверхню скла ($n = 1,5$). Визначити за допомогою формул Френеля:

- а) коефіцієнт відбиття;
б) ступінь поляризації заломленого світла.

Розв'язок. а) За визначенням коефіцієнт відбиття дорівнює:

$$R = \frac{I_{\text{від}}}{I_{\text{над}}} = \frac{I'}{I_0}.$$

В обох променях, як у відбитому, так і у падаючому, присутні паралельні і перпендикулярні складові вектора \vec{E} . Тому представимо інтенсивності у вигляді:

$$I_0 = I_{\parallel} + I_{\perp}, \quad I' = I'_{\parallel} + I'_{\perp}.$$

Згідно з формулами Френеля співвідношення між компонентами електричного вектора мають вигляд:

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel} \frac{\operatorname{tg}(\Theta_1 - \Theta_2)}{\operatorname{tg}(\Theta_1 + \Theta_2)}, \quad E'_{\perp} = -E_{\perp} \frac{\sin(\Theta_1 - \Theta_2)}{\sin(\Theta_1 + \Theta_2)}$$

для відбитої хвилі і

$$E''_{\parallel} = E_{\parallel} \frac{2 \sin \Theta_2 \cdot \cos \Theta_1}{\sin(\Theta_1 + \Theta_2) \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_2)}, \quad E''_{\perp} = -E_{\perp} \frac{2 \sin \Theta_2 \cdot \cos \Theta_1}{\sin(\Theta_1 + \Theta_2)}$$

для заломленої хвилі.

За умовою задачі $\Theta_1 = \Theta_{\text{Бр}}$. У цьому випадку відбита хвиля повністю поляризована ($E'_{\parallel} = 0$), і кут між відбитою і заломленою хвилями дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

Цей висновок випливає з формул Френеля.

У відбитому світлі $I'_{\perp} = 0$ і коефіцієнт відбиття дорівнює:

$$R = \frac{I'_{\perp}}{I_{\parallel} + I_{\perp}}.$$

Для природного світла $I_{\parallel} = I_{\perp}$, оскільки $E_{\parallel} = E_{\perp}$. Коефіцієнт відбиття набуває вигляду:

$$R = \frac{E_{\perp}^2 \frac{\sin^2(\Theta_1 - \Theta_2)}{\sin^2(\Theta_1 + \Theta_2)}}{E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2} = \frac{\sin^2(\Theta_1 - \Theta_2)}{2} = \frac{\sin^2 \left[\Theta_{Бр} - \left(\pi - \frac{\pi}{2} - \Theta_{Бр} \right) \right]}{2} =$$

$$= \frac{\sin^2 \left(2\Theta_{Бр} - \frac{\pi}{2} \right)}{2} = \frac{\cos^2(2\Theta_{Бр})}{2} = \frac{(\cos^2 \Theta_{Бр} - \sin^2 \Theta_{Бр})^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \Theta_{Бр}}{1 + \operatorname{tg}^2 \Theta_{Бр}} \right),$$

де враховано, що

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

Коефіцієнт відбиття набуває вигляду:

$$R = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - n^2}{1 + n^2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{(n^2 - 1)^2}{(n^2 + 1)^2} = 0,07.$$

б) За визначенням ступінь поляризації світла

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{E_{\parallel}^2 \frac{4 \sin^2 \Theta_2 \cos^2 \Theta_1}{\sin^2(\Theta_1 + \Theta_2) \cos^2(\Theta_1 - \Theta_2)} - E_{\perp}^2 \frac{4 \sin^2 \Theta_2 \cos^2 \Theta_1}{\sin^2(\Theta_1 + \Theta_2)}}{E_{\parallel}^2 \frac{4 \sin^2 \Theta_2 \cos^2 \Theta_1}{\sin^2(\Theta_1 + \Theta_2) \cos^2(\Theta_1 - \Theta_2)} + E_{\perp}^2 \frac{4 \sin^2 \Theta_2 \cos^2 \Theta_1}{\sin^2(\Theta_1 + \Theta_2)}}.$$

Оскільки $E_{\parallel} = E_{\perp}$ і $\sin(\Theta_1 + \Theta_2) = 1$, то ступінь поляризації світла набуває вигляду:

$$P = \frac{1 - \cos^2(\Theta_1 - \Theta_2)}{1 + \cos^2(\Theta_1 - \Theta_2)} = \frac{1 = \cos^2 \left[\Theta_{Бр} - \left(\frac{\pi}{2} - \Theta_{Бр} \right) \right]}{1 + \cos^2 \left(2\Theta_{Бр} - \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{1 - \sin^2 \Theta_{Бр} \cdot \cos^2 \Theta_{Бр}}{1 + 4 \sin^2 \Theta_{Бр} \cdot \cos^2 \Theta_{Бр}}.$$

Оскільки $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$ і $\cos^2 \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$, ступінь поляризації

набуває вигляду:

$$P = \frac{(n^2 + 1)^2 - 4n^2}{(n^2 + 1)^2 + 4n^2} = 0,08,$$

де n – відносний показник заломлення скла ($n = 1,5$).

6.8. Плоский пучок природного світла з інтенсивністю I_0 падає під кутом Брюстера на поверхню води ($n = 1,33$). Коефіцієнт відбиття дорівнює $\rho = 0,039$. Визначити інтенсивність заломленого пучка.

Розв'язок. За означенням

$$\operatorname{tg} \Theta_{\text{Бр}} = n.$$

Коефіцієнт пропускання τ пов'язаний з коефіцієнтом відбиття співвідношенням:

$$\tau + \rho = 1, \text{ або } \tau = (1 - \rho) = \frac{I''}{I_0} = \frac{E_{\parallel}''^2 + E_{\perp}''^2}{E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2}.$$

З урахуванням формул Френеля і співвідношень $E_{\parallel} = E_{\perp}$, $\sin(\Theta_1 + \Theta_2) = 1$ останній вираз набуває вигляду:

$$\tau = \frac{2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \Theta_{\text{Бр}} \right) \cos^2 \Theta_{\text{Бр}}}{\cos^2 \left[\Theta_{\text{Бр}} - \left(\frac{\pi}{2} - \Theta_{\text{Бр}} \right) \right]} + 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \Theta_{\text{Бр}} \right) \cos \Theta_{\text{Бр}} = \frac{(1+n^2)^2 + 4n^2}{(1+n^2)^2 \cdot 2n^2} = \frac{I''}{I_0},$$

і інтенсивність заломленого світла дорівнює

$$I'' = I_0 \frac{(1+n^2)^2 + 4n^2}{(1+n^2)^2 \cdot 2n^2} = 0,54 I_0.$$

6.9. На поверхню води ($n = 1,33$) під кутом Брюстера падає пучок плоскополяризованого світла. Площина коливань світлового вектора складає кут $\varphi = 45^\circ$ з площиною падіння. Визначити коефіцієнт відбиття.

Розв'язок. За означенням коефіцієнт відбиття ρ дорівнює:

$$\rho = \frac{I'}{I} = \frac{E_{\perp}'^2}{E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2},$$

де $E_{\perp} = E \cdot \sin \varphi$.

Коефіцієнт відбиття набуває вигляду

$$\rho = \frac{E_{\perp}^2 \frac{\sin^2(\Theta_1 - \Theta_2)}{\sin^2(\Theta_1 + \Theta_2)}}{E^2} = \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \left[\Theta_{\text{Бр}} - \left(\frac{\pi}{2} - \Theta_{\text{Бр}} \right) \right].$$

З урахуванням виразу $\sin^2(\Theta_1 + \Theta_2) = 1$ коефіцієнт відбиття ρ дорівнює:

$$\rho = \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \left(2\Theta_{\text{Бр}} - \frac{\pi}{2} \right) = \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 (2\Theta_{\text{Бр}}) = \sin^2 \varphi \left[\frac{(n^2 - 1)}{(n^2 + 1)} \right]^2.$$

6.10. На поверхню скла ($n = 1,5$) падає пучок природного світла (рис. 6.5). Кут падіння дорівнює 45° . Визначити за допомогою формул Френеля ступінь поляризації:

- відбитого світла;
- заломленого світла.

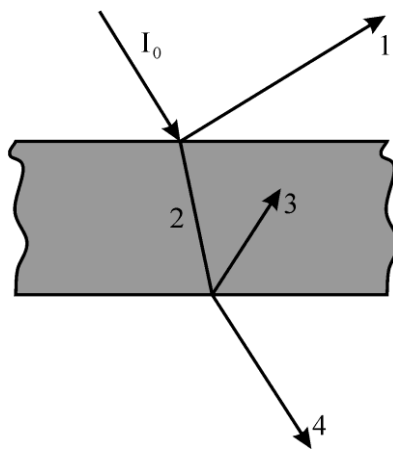


Рис. 6.5. Падіння світла на поверхню скла

6.11. Вузкий пучок світла падає під кутом Брюстера на стопу Столетова, що складається з N товстих плоскопаралельних пластин зі скла ($n = 1,5$). Визначити: а) ступінь поляризації P пучка, який пройшов крізь стопу;

- чому дорівнює P при $N = 1, 2, 5$ і 10 .

6.12. Вузкий пучок природного світла падає під кутом Брюстера на поверхню товстої плоскопаралельної пластини (прозорої). При цьому від верхньої поверхні пластини відбивається $\rho = 0,08$ світлового потоку. Визначити ступінь поляризації пучків 1–4 (рис. 6.6).

Контрольні питання до розділу 6

- Яке світло називається природним, а яке поляризованим?
- Види поляризації світла.
- Яка площина називається площиною поляризації світла?
- Яке світло називається лінійно поляризованим?
- Яке світло називається еліптично поляризованим?

6. Яке світло називається циркулярно поляризованим?
7. Чому дорівнює ступінь поляризації світла?
8. Сформулюйте закон Малюса.
9. Дайте визначення коефіцієнтам відбиття і пропускання світла.
10. Запишіть співвідношення між коефіцієнтами відбиття і пропускання.
11. Що означає термін «частково поляризоване світло»?
12. Що таке поляризатор?
13. Що таке аналізатор?
14. Запишіть формули Френеля для відбитого пучка світла і для заломленого пучка світла.
15. Фізичний зміст формул Френеля.

РОЗДІЛ 7. КРИСТАЛООПТИКА. ЯВИЩЕ ПОДВІЙНОГО ПРОМЕНЕЗАЛОМЛЕННЯ

При проходженні світла крізь прозорі кристали (за винятком кристалів кубічної системи) спостерігається **явище подвійного променезаломлення**. Це явище полягає в тому, що промінь, який падає на кристал, розділяється всередині кристала на два промені. Ці промені поширюються у кристалі з різними швидкостями і в різних напрямках (рис. 7.1).

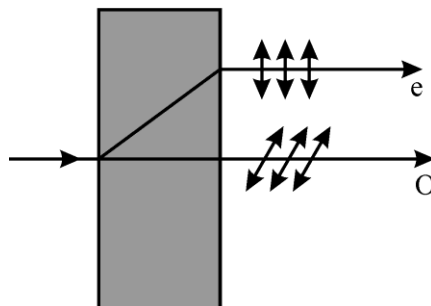


Рис. 7.1. Хід променів у кристалі

Кристали з подвійним променезаломленням (ісландський шпат, кварц, турмалін) розподіляються на **одновісні і двовісні**. **Оптичною віссю кристала** називається напрямок у кристалі, вздовж якого два промені у кристалі поширюються не розділяючись з однаковою швидкістю. Ці промені мають назву **звичайний** (на рис. 7.1 – «o» – ordinary) і **незвичайний** (на рис. 7.1 – «e» – extraordinary). Один з променів, які поширюються в кристалі, підпорядковується звичайному закону заломлення (o – промінь, рис. 7.1). Для другого променя (e-променя) закон заломлення не виконується, і він відхиляється у кристалі навіть при нормальному падінні. Промені у кристалі поляризовані, і їх площини поляризації взаємно перпендикулярні. Площина поляризації e-променя лежить у площині кристала, яка називається **головною площиною кристала**. Будь-яка площина, яка проходить крізь оптичну вісь, називається **головним перерізом або головною площиною кристала**. Площина коливань o-променя перпендикулярна до оптичної осі кристала.

Оскільки швидкості поширення o-променя і e-променя різні, то треба ввести у розгляд два показники заломлення, відповідно n_o і n_e .

Назву o-промінь і e-промінь мають промені тоді, коли вони поширюються в кристалі. На виході з кристала обидва промені будуть поляризовані у взаємно перпендикулярних площинах (рис. 7.2).

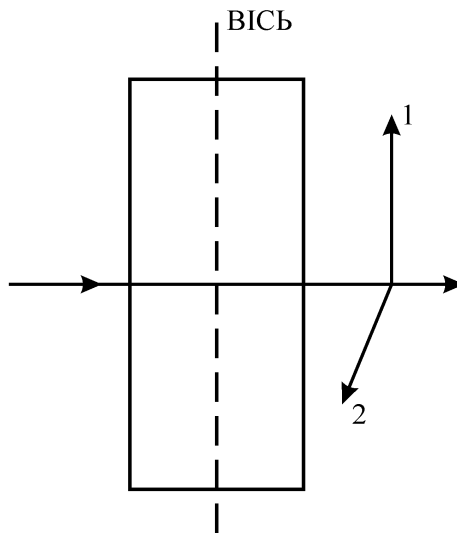


Рис. 7.2. Поляризація променів на виході з кристала

В залежності від того, яка зі швидкостей v_o або v_e більша, кристали розподіляються на **позитивні** і **негативні**. У позитивних кристалів $v_o > v_e$ (або $n_e > n_o$), у негативних – $v_e > v_o$ (або $n_o > n_e$). У довіднику, як правило, наведена різниця $(n_e - n_o)$ або $(n_o - n_e)$. Ця різниця для кожного типу кристала залежить від довжини хвилі світла.

Інтерференція поляризованих променів

Інтерференція хвиль спостерігається тільки у випадку, коли коливання у променях, які взаємодіють, відбуваються вздовж одного напрямку. Коливання у двох променях, поляризованих у взаємно перпендикулярних напрямках (на виході з кристала), можна звести в одну площину, якщо пропустити ці промені крізь поляризатор. Площа поляризатора встановлюється так, щоб не збігалася з площиною коливань жодного із променів.

Розглянемо таку оптичну систему (рис. 7.3).

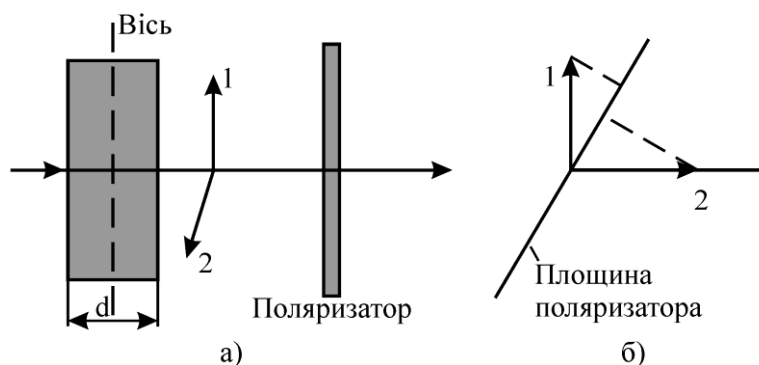


Рис. 7.3. Інтерференція поляризованих променів

Кристалічна пластинка вирізана паралельно до оптичної осі. При нормальному падінні променя на пластинку о-промінь і е-промінь поширюються у пластинці не розділяючись, але з різними швидкостями. На виході ці промені поляризовані у взаємно перпендикулярних площинах, і між ними виникає різниця ходу

$$\Delta = (n_o - n_e) d \quad (7.1)$$

або різниця фаз

$$\delta = \frac{(n_o - n_e) d}{\lambda_0} \cdot 2\pi, \quad (7.2)$$

де d – товщина пластинки, λ_0 – довжина хвилі у вакуумі.

Якщо на шляху променів 1 і 2 (рис. 7.3 а) поставити поляризатор, то коливання обох променів після проходження крізь поляризатор будуть лежати в одній площині.

Якщо на пластинку падає природне світло, то промені 1 і 2 будуть некогерентними і інтерференція не спостерігається.

Якщо на пластинку падає плоскополяризоване світло, то у цьому випадку промені 1 і 2 будуть когерентними і будуть інтерферувати.

Проходження плоскополяризованого світла крізь кристалічну пластинку

Кристалічна пластинка, що вирізана паралельно до оптичної осі, для якої виконується співвідношення

$$(n_e - n_o) d = m \lambda_0 + \frac{\lambda_0}{4}, \quad m=0,1,2,3\dots, \quad (7.3)$$

називається пластинкою у чверть хвилі.

При проходженні крізь таку пластинку о-промінь і е-промінь набувають різниці фаз $\pi/2$.

Аналогічно для пластинки, в якій різниця ходу дорівнює

$$(n_e - n_o) d = m \lambda_0 + \frac{\lambda_0}{2}, \quad (7.4)$$

називається пластинкою у півхвилі.

Хід променів крізь пластинку у півхвилі показаний на рис. 7.4.

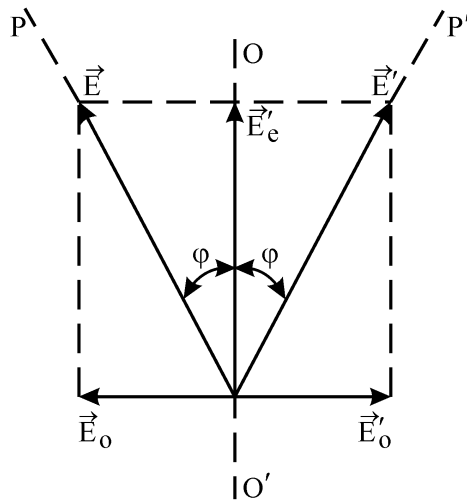


Рис. 7.4. Хід променів крізь пластинку у півхвилі

За час проходження світла крізь пластинку різниця фаз між коливаннями \vec{E}_0 і \vec{E}_e змінюється на π . Пластинка у півхвилі повертає площину коливань світла, яке пройшло крізь пластинку, на кут 2φ .

Хід променів крізь пластинку в чверть хвилі показаний на рис. 7.5.

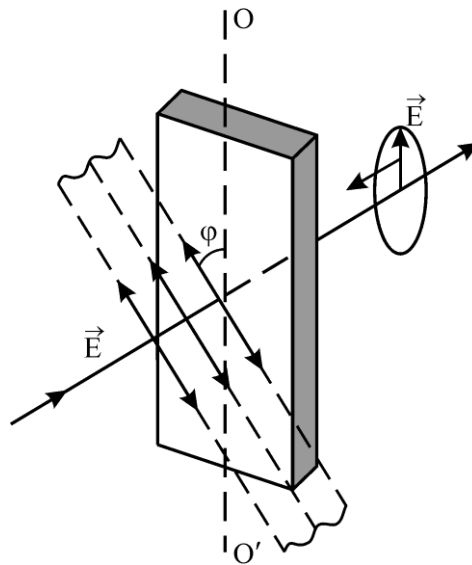


Рис. 7.5. Хід променів крізь пластинку у чверть хвилі

Якщо кут $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (рис. 7.5), то амплітуди обох променів на виході з пластинки будуть рівні і зсув фаз між ними дорівнює $\pi/2$. Таким чином, світло на виході буде поляризоване по колу. При довільному куті φ світло буде еліптично поляризоване, причому одна з осей збігається з віссю пластинки OO' .

Кристалічна пластинка між двома поляризаторами

Схема проходження світла крізь таку систему наведена на рис. 7.6.

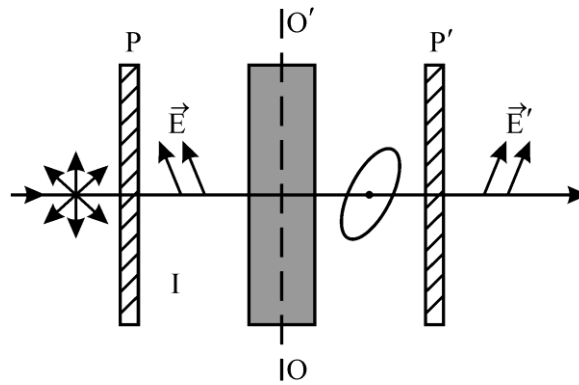


Рис. 7.6. Кристалічна пластинка між двома поляризаторами

Нехай кут φ між площиною поляризатора P і віссю пластинки OO' дорівнює $\frac{\pi}{4}$. Розглянемо два випадки: поляризатори паралельні (рис. 7.7 а) і поляризатори схрещені (рис. 7.7 б).

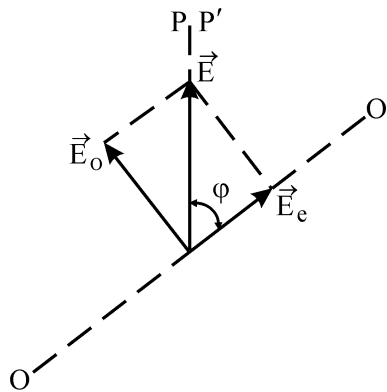


Рис. 7.7 (а). Площини поляризаторів паралельні

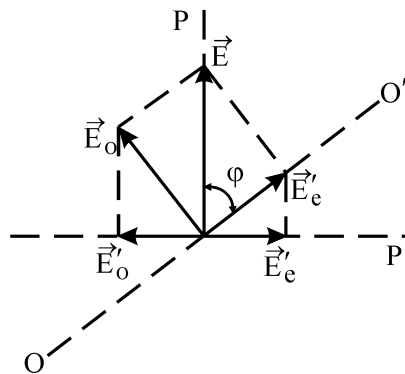


Рис. 7.7 (б). Площини поляризаторів перпендикулярні

Коливання світла після першого поляризатора зображено вектором \vec{E} , який лежить у площині P . При вході у пластинку коливання \vec{E} збуджує два коливання – \vec{E}_0 і \vec{E}_e . Ці коливання будуть когерентними, і різниця фаз між ними набуває значення (7.2). Амплітуди цих коливань однакові:

$$E_0 = E_e = E \cos \frac{\pi}{4} = \frac{E}{\sqrt{2}}. \quad (7.5)$$

Крізь другий поляризатор пройдуть складові коливань \vec{E}_0 і \vec{E}_e у напрямку площини P' . Амплітуди цих коливань дорівнюють:

$$E'_0 = E'_e = \frac{E}{2}. \quad (7.6)$$

Хвилі, які вийшли з другого поляризатора, інтерферують. Амплітуда E_{\parallel} результуючої хвилі при паралельних поляризаторах визначається співвідношенням:

$$E_{\parallel}^2 = E_0'^2 + E_e'^2 + 2E'_0 E'_e \cos \delta, \quad (7.7)$$

а у випадку перпендикулярних поляризаторів – співвідношенням:

$$E_{\perp}^2 = E_0'^2 + E_e'^2 + 2E'_0 E'_e \cos(\delta + \pi), \quad (7.8)$$

де враховано, що вектори \vec{E}'_0 і \vec{E}'_e спрямовані у протилежних напрямках.

Оскільки інтенсивність світла пропорційна квадрату амплітуди, то ми одержимо такі вирази:

$$I_{\parallel} = I \cos^2 \left(\frac{\delta}{2} \right); \quad I_{\perp} = I \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right), \quad (7.9)$$

де I – інтенсивність світла після першого поляризатора.

Штучне подвійне променезаломлення

У прозорих аморфних тілах, а також у кристалах кубічної структури під впливом зовнішніх факторів може виникати подвійне променезаломлення. Як показує дослід, різниця показників заломлення між променями o і e дорівнює $(n_0 - n_e)$ і пропорційна напрузі σ (силі на одиницю площини) у даній точці тіла:

$$(n_0 - n_e) = k \sigma, \quad (7.10)$$

де k – коефіцієнт пропорційності, який залежить від властивостей речовини.

Ефект Керра (1875 р.)

Явище подвійного променезаломлення у рідинах і аморфних тілах під впливом електричного поля відкрив у 1875 р. шотландський фізик Дж. Керр. Пізніше (у 1930 р.) це явище було відкрито і для газів.

Прилад для спостереження ефекту Керра у рідинах складається з комірки Керра, яка розміщена між схрещеними поляризаторами P і P' (рис. 7.8).

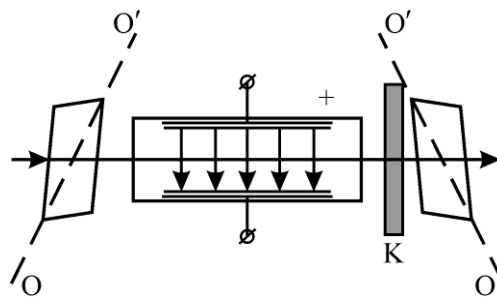


Рис. 7.8. Комірка Керра між схрещеними поляризаторами

При відсутності електричного поля світло крізь систему проходить. При включенні електричного поля середовище стає оптично анізотропним. На виході з конденсатора світло поляризовано еліптично і частково проходить крізь поляризатор P' . Дія електричного поля полягає в тому, що молекули рідини являють собою електричні диполі. А у зовнішньому електричному полі диполь обертається навколо своєї осі і орієнтується у напрямку поля \vec{E} , тим самим утворюючи оптичну вісь. Швидкодія керрівських модуляторів світла і оптичних затворів може бути доведена до 10^{-12} с.

Якщо перед другим поляризатором (рис. 7.8) поставити компенсатор K , то можна виміряти різницю фаз між о-променем і е-променем. Як впливає з дослідів, різниця показників заломлення $(n_0 - n_e)$ дорівнює:

$$(n_e - n_0) = k E^2, \quad (7.11)$$

де k – коефіцієнт, характерний для кожного середовища.

Для різниці фаз на шляху l можна записати:

$$\varphi = \left(\frac{2\pi}{\lambda} l \right) \cdot (n_o - n_e) = 2\pi B l E^2, \quad (7.12)$$

де $B = \frac{k}{\lambda}$ – стала Керра.

Велике значення сталої Керра має нітробензол. Наприклад, якщо конденсатор має довжину $l = 5$ см і відстань між пластинками $\delta = 1$ мм, то при напрузі $U = 1500$ В різниця фаз дорівнює $\frac{\pi}{2}$, тобто комірка Керра діє як пластинка в чверть хвилі.

Природне і магнітне обертання площини поляризації

У природі існують кристали (наприклад, кварц), при проходженні крізь які для лінійно поляризованого світла спостерігається поворот площини поляризації. Кут обертання

$$\varphi_{\text{прир}} = \alpha l, \quad (7.13)$$

де α – стала обертання, $[\varphi_{\text{прир}}] = \frac{\text{рад}}{\text{м}}$.

Існують кристали, для яких обертання площини поляризації відбувається як за годинниковою стрілкою, так і в протилежному напрямку (наприклад, для кварцу існують обидві модифікації: лівообертаюча і правообертаюча). Обертання залежить тільки від напрямку поширення хвилі.

Таким самим ефект спостерігається і у розчинах. У цьому випадку

$$\alpha = [\alpha] \cdot c, \quad (7.14)$$

де $[\alpha]$ – питома стала обертання; c – концентрація активної речовини.

Ефект Фарадея. Існують такі середовища (наприклад, рідина нітробензол), які стають оптично активними (обертають площину поляризації лінійно поляризованого світла) при включенні повздовжнього магнітного поля в напрямку поширення хвилі. У цьому випадку кут обертання дорівнює:

$$\varphi_{\text{магн}} = V \cdot l H_{\parallel}, \quad (7.15)$$

де v – стала Верде.

Напрямок обертання в цьому випадку залежить тільки від напрямку магнітного поля.

7.1. Розв'язання задач

7.1. Вузкий пучок природного світла з довжиною хвилі $\lambda = 589$ нм падає нормально на поверхню призми Волластона, яка виготовлена з ісландського шпату (рис. 7.9). Оптичні осі обох частин призми взаємно перпендикулярні. Визначити кут α між напрямками пучків світла за призмою, якщо кут призми $\Theta = 30^\circ$.

Розв'язок. Напрямки пучків світла в призмі і за нею показані на рис. 7.9.

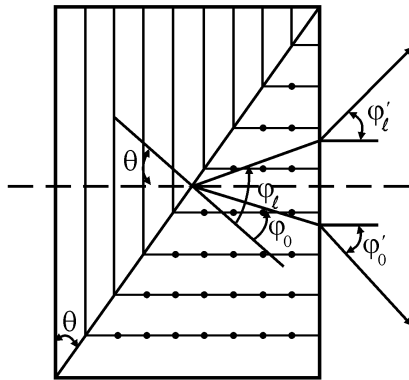


Рис. 7.9. Хід променів у призмі Волластона

Для призми кут α дорівнює

$$\alpha = \varphi'_o + \varphi'_e,$$

де φ'_o і φ'_e – кути на виході з пластинки о- і е-променів.

При переході крізь границю розподілу між двома середовищами зі взаємно перпендикулярними оптичними осями о-промінь у першому середовищі стає е-променем у другому середовищі, а е-промінь стає о-променем.

Закон заломлення світла для границі розподілу кристалів має вигляд:

$$\begin{cases} n_o \sin \Theta = n_e \sin \varphi_e, \\ n_e \sin \Theta = n_o \cdot \sin \varphi_o, \end{cases} \quad (1)$$

а на границі розподілу кристал – повітря:

$$\begin{cases} \sin \varphi'_o = n_e \sin (\Theta - \varphi_o), \\ \sin \varphi'_e = n_e \cdot \sin (\varphi_e - \Theta). \end{cases} \quad (2)$$

Із рівнянь (1) і (2) знаходимо:

$$\begin{cases} \sin \varphi_0' = n_e [\sin \Theta \cdot \cos \varphi_0 - \cos \Theta \cdot \sin \varphi_0], \\ \sin \varphi_e' = n_e \cdot [\sin \varphi_e \cdot \cos \Theta - \cos \varphi_e \cdot \sin \Theta]. \end{cases}$$

З урахуванням того, що

$$\sin \varphi_e = \frac{n_0}{n_e} \sin \Theta; \quad \sin \varphi_0 = \frac{n_e}{n_0} \sin \Theta,$$

одержимо вирази для $\sin \varphi_0'$ і $\sin \varphi_e'$:

$$\sin \varphi_0' = n_0 \left[\sin \Theta \sqrt{1 - \frac{n_e^2}{n_0^2} \sin^2 \Theta} - \cos \Theta \cdot \frac{n_e}{n_0} \sin \Theta \right],$$

$$\sin \varphi_e' = n_e \left[\frac{n_0}{n_e} \sin \Theta \cdot \cos \Theta - \sqrt{1 - \frac{n_0^2}{n_e^2} \sin^2 \Theta} \cdot \sin \Theta \right],$$

або

$$\sin \varphi_0' = \sin \Theta \left[\sqrt{n_0^2 - n_e^2 \sin^2 \Theta} - n_e \cos \Theta \right],$$

$$\sin \varphi_e' = \sin \Theta \left[n_0 \cos \Theta - \sqrt{n_e^2 - n_0^2 \sin^2 \Theta} \right].$$

Показники заломлення n_0 і n_e для ісландського шпату знаходимо з довідника при $\lambda = 589$ нм.

Оскільки кути α , φ_0' , φ_e' – малі, то $\sin \varphi_0' \approx \varphi_0'$, $\sin \varphi_e' \approx \varphi_e'$ і кут α дорівнює $\alpha = \varphi_0' + \varphi_e' = 11^\circ$.

7.2. Треба виготовити паралельну до оптичної осі кварцову пластинку, товщина якої була б не більше 0,5 мм. Знайти максимальну товщину пластинки, для якої лінійно поляризоване світло з довжиною хвилі $\lambda = 589$ нм після проходження її:

- має поворот площини поляризації;
- стає поляризованим циркулярно.

Розв'язок.

а) Для того, щоб при проходженні лінійно поляризованого світла площина поляризації повернулася на кут 2φ (φ – кут між віссю пластинки і площиною поляризації), треба вибрати пластинку у півхвилі, яка вносить зсув фаз π між променями. Цю умову запишемо у вигляді:

$$\frac{2\pi}{\lambda} d(n_e - n_o) = (2m+1) \cdot \pi,$$

де $m=0,1,2,\dots$, а $(n_e - n_o)$ для кварцу визначимо з довідника.

При $d=d_{\max}$ знайдемо m_{\max} :

$$m_{\max} = \frac{d_{\max} (n_e - n_o)}{\lambda} - \frac{1}{2} = 7,6.$$

Оскільки m_{\max} – ціле число, то найближчі цілі числа 7 і 8. Умові задачі задовольняє $m_{\max} = 7$.

Товщина пластинки дорівнює:

$$d = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda}{(n_e - n_o)} = 0,49 \text{ (мм)}, \text{ де } m=7.$$

б) Для того, щоб при виході з пластинки лінійно поляризоване світло стало циркулярно поляризованим, пластинка повинна бути пластинкою в чверть хвилі, причому кут φ між оптичною віссю пластинки і площиною поляризації повинен бути $\frac{\pi}{4}$. Така пластинка вносить різницю фаз між променями на виході у $\frac{\pi}{2}$. Тобто повинна виконуватися умова:

$$\delta = (2m+1) \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ де } m=0,1,2,\dots,$$

або

$$\frac{2\pi}{\lambda} d(n_e - n_o) = (2m+1) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

При $d=d_{\max}$ визначимо максимальний порядок m_{\max} :

$$m_{\max} = \frac{2d_{\max} (n_e - n_o)}{\lambda} - \frac{1}{2} = 14,78.$$

Оскільки m – цілі числа, то найближчими числами є $m = 14; 15$. Умові задачі підходить $m = 14$. Товщина пластинки дорівнює:

$$d = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda}{2(n_e - n_o)} = 0,475 \text{ (мм)}.$$

7.3. Вирізану паралельно оптичній осі пластинку помістили між двома схрещеними поляризаторами. Кут φ між площинами пропускання поляризаторів і оптичною віссю дорівнює 45° . Товщина пластинки $d = 0,5$ мм. Для яких хвиль світла з довжиною хвилі $0,5 - 0,6$ (мкм) інтенсивність світла на виході з системи не буде залежати від повороту заднього поляризатора? Різниця показників заломлення ($n_e - n_o$) дорівнює $\Delta n = 0,009$.

Розв'язок. Проходження світла крізь пластинку показано на рис. 7.10.

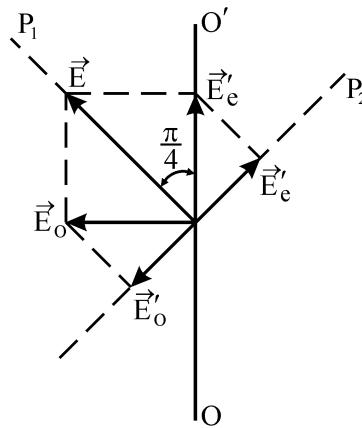


Рис. 7.10. Проходження світла крізь пластинку

Для того, щоб інтенсивність світла на виході не залежала від повороту заднього поляризатора, світло повинно бути поляризованим по колу, тобто амплітуди хвиль на виході повинні бути рівними і зсув фаз між ними $\delta = \frac{\pi}{2}$. Для цього треба вибрати пластинку у чверть хвилі. Для такої пластинки повинна виконуватись умова:

$$\frac{2\pi}{\lambda} d \Delta n = (2m+1) \frac{\pi}{2}, \text{ де } m=0,1,2\dots$$

При $d = d_{\max}$ визначимо m_{\max} для хвиль з довжиною λ_1 і λ_2 :

$$m_{\max 1} = \frac{2d_{\max} \Delta n}{\lambda_1} - \frac{1}{2} = 17,5,$$

$$m_{\max 2} = \frac{2d_{\max} \Delta n}{\lambda_2} - \frac{1}{2} = 14,5,$$

Оскільки m – ціле число, то треба вибрати $m = 17; 16; 15$.

$$\lambda = \frac{2\Delta n d}{\left(m_i + \frac{1}{2}\right)}$$

$\lambda_1 = 0,58 \text{ мкм}$ при $m_1 = 15$, $\lambda_2 = 0,55 \text{ мкм}$ при $m_2 = 16$, $\lambda_3 = 0,51 \text{ мкм}$ при $m_3 = 17$.

7.4. Біле природне світло падає на системи із двох схрещених поляризаторів, між якими вирізали паралельно оптичній осі кварцову пластинку завтовшки 1,5 мм. Кут φ між віссю пластинки і площинами пропускання поляризаторів дорівнює 45° . Світло на виході з системи розклали в спектр. Скільки темних смуг можна спостерігати в інтервалі довжин хвиль 0,55–0,66 (мкм)? Різниця показників заломлення $(n_e - n_o) = \Delta n = 0,009$.

Розв'язок. Хід променів крізь систему показаний на рис. 7.10 (задача 7.3). Після першого поляризатора світло буде лінійно поляризоване. Після кристалічної пластинки світло буде циркулярно поляризованим. Після проходження другого поляризатора коливання будуть зведені в одну площину (площину поляризатора). Оскільки коливання когерентні, то спостерігається інтерференція поляризованого світла.

Різниця фаз між хвилями \vec{E}'_o і \vec{E}'_e дорівнює:

$$\delta' = \delta + \pi,$$

де $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \Delta n$, а π обумовлене різницею напрямків векторів \vec{E}'_o і \vec{E}'_e на виході.

Умова мінімуму інтерференції має наступний вигляд:

$$\frac{2\pi}{\lambda} d \Delta n + \pi = (2m+1)\pi,$$

або

$$\frac{2\pi}{\lambda} d \Delta n = 2m\pi, \text{ де } m = 0, 1, 2, \dots$$

Із останнього виразу знайдемо при

$$m_1 = \frac{d \Delta n}{\lambda_1} = 24,54 \approx 25,$$

$$m_2 = \frac{d \Delta n}{\lambda_2} = 20,45 \approx 21.$$

Кількість темних смуг дорівнює $(m_1 - m_2) = 4$.

7.5. Світло з довжиною хвилі λ падає на систему схрещених поляризатора Π і аналізатора A , між якими знаходиться компенсатор Бабіне K (рис. 7.11).

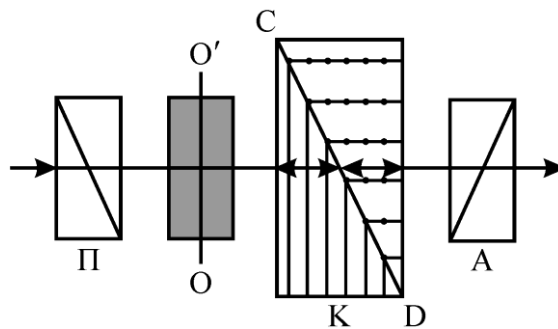


Рис. 7.11. Хід променів через компенсатор

Компенсатор складається з двох клинів, які виготовлені з кварцу. Оптична вісь одного клина паралельна ребру клина, іншого – перпендикулярна. Клини можуть ковзати вздовж лінії CD , при цьому змінюються відстані h_1 і h_2 (відстані від грані клина до лінії CD). Площини пропускання поляризатора і аналізатора складають кут $\varphi=45^\circ$ з оптичними осями компенсатора. Кут заломлення клина дорівнює Θ ($\Theta \ll 1$), різниця показників заломлення для кварцу дорівнює $(n_e - n_o)$. Якщо у систему помістити зразок (кристалічну пластинку, вирізану паралельно оптичній осі OO'), то спостерігається зсув інтерференційних смуг вгору на δx мм. Знайти:

- ширину інтерференційної смуги;
- величину і знак оптичної різниці ходу між о-променем і е-променем, яку вносить зразок.

Розв'язок.

а) Оскільки кристал позитивний ($v_o > v_e$), то о-промінь після проходження першого клина буде випереджати по фазі е-промінь на величину

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)h_1. \quad (1)$$

Після проходження границі розділу у компенсаторі о-промінь стає е-променем і буде відставати по фазі від другого променя на величину

$$\delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)h_2. \quad (2)$$

Загальний зсув фаз між двома променями після проходження компенсатора складає

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) \cdot (h_1 - h_2). \quad (3)$$

Якщо за компенсатором поставити аналізатор, то у компенсаторі будуть спостерігатися темні смуги в тих місцях, які відповідають лінійній поляризації і для яких виконується умова

$$\delta = m\pi, \text{ де } m = 0, \pm 1; \pm 2 \dots \quad (4)$$

З рівнянь (3) і (4) одержимо, що темні смуги спостерігаються в тих місцях, для яких

$$h_1 - h_2 = \frac{m\lambda}{2(n_e - n_o)}.$$

Відстань від краю компенсатора до темної смуги складає

$$d_i = \frac{h_i}{\operatorname{tg} \Theta} \approx \frac{h_i}{\Theta},$$

оскільки $\Theta \ll 1$, $\operatorname{tg} \Theta \approx \Theta$.

Ширина інтерференційної смуги дорівнює

$$\begin{aligned} \Delta x &= d_i - d_{(i-1)}, \\ \Delta x &= d_1 - d_2 = \frac{(h_1 - h_2)}{\Theta} = \frac{\Delta m \lambda}{2(n_e - n_o)\Theta} = \frac{\lambda}{2(n_e - n_o)\Theta}, \end{aligned}$$

оскільки $\Delta m = m_i - m_{i-1} = 1$.

б) Різниця ходу між променями дорівнює

$$\Delta = d(n_o' - n_e') = -2(n_e - n_o)\Theta \cdot \delta x < 0,$$

оскільки $\Theta \ll 1$, $\operatorname{tg} \Theta \approx \Theta$.

7.6. Комірку Керра розмістили між двома схрещеними поляризаторами так, що напрямок електричного поля \vec{E} в конденсаторі складає кут $\varphi = 45^\circ$ з площинами пропускання поляризаторів. Конденсатор має довжину $l = 100$ мм і заповнений нітробензолом. Система освітлюється світлом з довжиною хвилі $\lambda = 0,5$ мкм. Стала Керра $B = 2,2 \cdot 10^{-10}$ см/ B^2 . Визначити:

а) мінімальну напруженість електричного поля E в конденсаторі, при якій інтенсивність світла на виході з системи не буде залежати від повороту заднього поляризатора;

б) число переривань світла за секунду, якщо на конденсатор подати синусоїдальну напругу з частотою $\nu=10\text{МГц}$ з амплітудою $E_m=50\text{кВ/см}$.

Розв'язок.

а) За означенням сталою Керра називають коефіцієнт B у формулі

$$n_e - n_o = B \lambda E^2.$$

Як показує дослід, для комірки Керра

$$(n_o - n_e) = k E^2,$$

де k – коефіцієнт, який залежить від речовини у конденсаторі.

На довжині шляху світла в конденсаторі різниця фаз між о-променем і е-променем дорівнює:

$$\delta = K \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot k l E^2,$$

або $\delta = 2\pi B l E^2$,

де $B = \frac{k}{\lambda}$ – стала Керра.

При куті $\varphi = 45^\circ$ світло на виході буде поляризованим по колу і зсув фаз між променями дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

Отже,

$$\delta = 2\pi B \cdot l \cdot E^2 = \frac{\pi}{2}, E_{\min} = \sqrt{\frac{1}{4Bl}} = 10,6 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}.$$

б) Відсутність світла за другим поляризатором буде мати місце в ті моменти часу, коли хвилі після проходження комірки Керра другим поляризатором будуть зведені в одну площину і в результаті інтерференції загасять одна одну. Хід променів крізь комірку Керра показаний на рис. 7.12.

Умова інтерференційного мінімуму має вигляд:

$$\delta' = (\delta + \pi) = (2m + 1) \cdot \pi, \text{ де } m = 0, 1, 2, \dots$$

Тут врахований додатковий зсув фаз π , який обумовлений тим, що вектори E'_0 і E'_e є антиколінеарними.

З іншого боку,

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} k l E^2 = \frac{2\pi}{\lambda} k l E_m^2 \cdot \sin^2 \omega t = 2\pi_m,$$

звідки $m\lambda = k l E_m^2 \sin^2 \omega t$ – умова переривання.

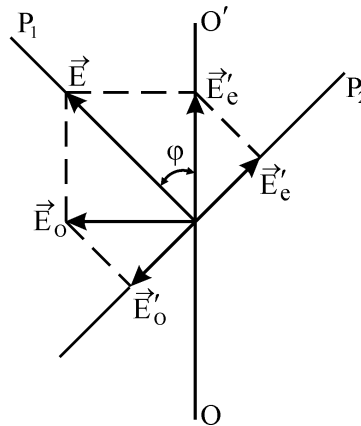


Рис. 7.12. Хід променів крізь комірку Керра

З цього виразу випливає, що $m = m_{\max}$ при $\sin \omega t = 1$.

$$m_{\max} = \frac{k \cdot l \cdot E_m^2}{\lambda} = B \cdot l E_m^2.$$

За один період число затемнень (переривань) дорівнює 4. При синусоїдальній зміні E з часом за чверть періоду при зростанні E від нуля до E_{\max} наведене вище співвідношення виконується m разів. За секунду число переривань дорівнює:

$$N = \frac{4m}{T} = \frac{4BlE_m^2}{T} = 4BlE_m^2 \cdot \nu = 2,2 \cdot 10^8 \text{ c}^{-1}.$$

7.7. Монохроматичне плоскополяризоване світло з круговою частотою ω проходить крізь речовину уздовж однорідного магнітного поля з напруженістю H . Визначити різницю показників заломлення для право- і лівополяризованих по колу компонент пучка світла. Стала Верде дорівнює v .

Розв'язок. Оптично неактивна речовина набуває здатності повертати площину поляризації світла під дією магнітного поля. Це явище називається ефектом Фарадея.

Лінійну поляризовану хвилю можна уявити як суперпозицію хвиль з лівою і правою круговими поляризаціями (рис. 7.13).

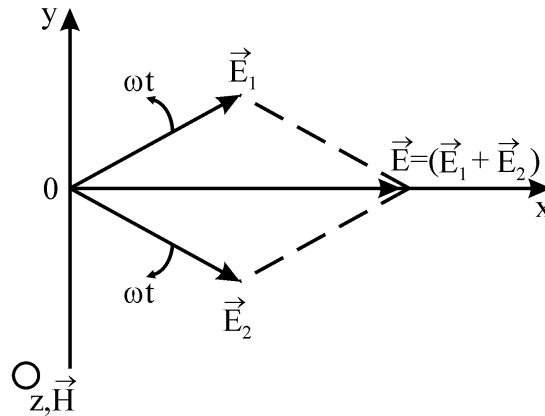


Рис. 7.13. Суперпозиція хвиль з лівою і правою круговими поляризаціями

Компоненти хвиль дорівнюють:

$$E_{1x} = E_0 \cos \omega t, \quad E_{2x} = E_0 \cdot \cos \omega t,$$

$$E_{1y} = E_0 \cdot \sin \omega t, \quad E_{2y} = -E_0 \cdot \sin \omega t.$$

За теорією Френеля поворот площини поляризації обумовлений різницею швидкостей поширення поляризованих по колу хвиль з різними напрямками обертання електричного вектора. Позначимо показники заломлення для таких хвиль n_- і n_+ . Вони пов'язані з довжиною хвилі у вакуумі λ_0 співвідношенням:

$$\lambda_- = \frac{\lambda_0}{n_-}, \quad \lambda_+ = \frac{\lambda_0}{n_+}.$$

Запишемо компоненти хвиль на виході з речовини:

$$E_{1x} = E_0 \cos(\omega t - k n_- l), \quad E_{2x} = E_0 \cdot \cos(\omega t - k n_+ l),$$

$$E_{1y} = E_0 \cdot \sin(\omega t - k n_- l), \quad E_{2y} = -E_0 \cdot \sin(\omega t - k n_+ l),$$

де $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ – хвильове число.

На виході з речовини вектори \vec{E}_1 і \vec{E}_2 розташовані симетрично лінії, яка і визначає поворот площини поляризації на кут φ (рис. 7.14).

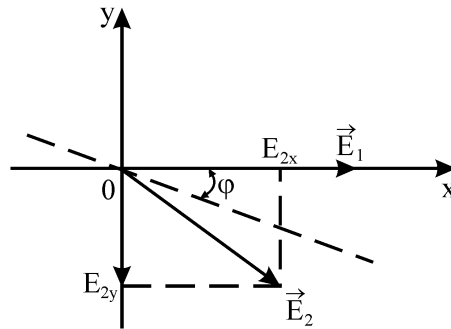


Рис.7.14. Поворот площини поляризації

Тангенс кута повороту φ площини поляризації визначається наступним чином:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_y}{E_x} = \operatorname{tg} \left(\frac{E_{1y} + E_{2y}}{E_{1x} + E_{2x}} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{k l \Delta n}{2} \right),$$

де $\Delta n = n_+ - n_-$.

Кут повороту φ дорівнює:

$$\varphi = \frac{k \cdot \Delta n \cdot l}{2} = \frac{\pi l}{\lambda_0} \Delta n.$$

Згідно з ефектом Фарадея:

$$\varphi = V \cdot l \cdot H_{\parallel}.$$

З урахуванням того, що $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k}$ і $k = \frac{\omega}{c}$, одержимо:

$$\Delta n = \frac{2c \cdot H_{\parallel} \cdot V}{\omega}.$$

7.8. Вузький пучок плоскополяризованого світла проходить крізь правообертаючу позитивну речовину, яка знаходиться у повздовжньому магнітному полі (рис. 7.15).

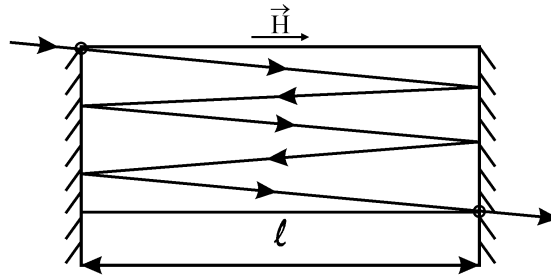


Рис. 7.15. Хід пучка плоскополяризованого світла крізь правообертуючу позитивну речовину

Визначити кут повороту площини поляризації пучка світла на виході оптичного резонатора, якщо його довжина дорівнює l , стала обертяння речовини α , стала Верде V і напруженість магнітного поля \vec{H} .

Розв'язок. Як впливає з рис. 7.15, пучок світла проходить резонатор $N = 5$ разів. Кут повороту площини поляризації обумовлений природним обертянням і магнітним обертянням (ефект Фарадея).

Природне обертяння залежить тільки від напрямку поширення світла. Тому при відбиванні від дзеркала напрямок повороту площини поляризації змінюється на протилежний. При проходженні резонатора $N = 5$ разів кут обертяння φ_1 дорівнює:

$$\varphi_1 = \alpha l. \quad (1)$$

При магнітному обертянні напрямок повороту площини поляризації залежить тільки від напрямку зовнішнього поля \vec{H} (а він не змінюється). Кут повороту в цьому випадку дорівнює:

$$\varphi_N = +N \cdot V l H. \quad (2)$$

З рівнянь (1) і (2) визначимо кут повороту площини поляризації:

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_N = \alpha l - N V l h = l(\alpha - V H N),$$

де $N = 5$.

7.9. Трубку з бензолом завдовжки $L = 26$ см помістили у повздовжнє магнітне поле соленоїда, який розташований між двома поляризаторами. Кут між площинами пропускання поляризаторів $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Визначити мінімальну напруженість магнітного поля, при якій світло з довжиною хвилі $\lambda = 589$ нм буде проходити крізь систему тільки в одному напрямку (оптичний вентиль). Як буде поводитись цей оптичний вентиль, якщо змінити напрямок магнітного поля на протилежний?

Розв'язок. Схема установки наведена на рис. 7.16 (E_{Π} – площина поляризатора, E_A – площина аналізатора).

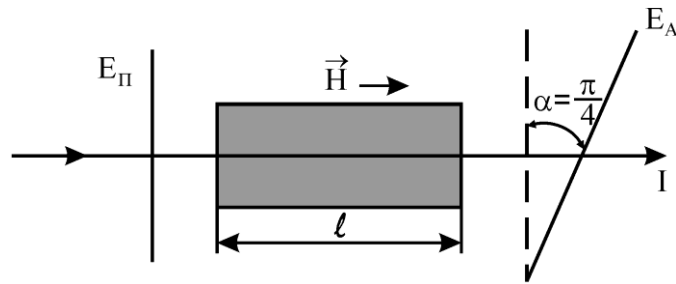


Рис. 7.16. Схема установки

Із довідника знаходимо сталу Верде для бензолу (вона залежить від довжини хвилі): $V = 2,59 \frac{\text{кут} \cdot \text{хв}}{A}$.

При проходженні бензолу в результаті ефекту Фарадея площина поляризації лінійно поляризованого світла повернеться на кут

$$\varphi_F = V l H. \quad (1)$$

На аналізатор падає лінійно поляризоване світло інтенсивності I_0 . Інтенсивність I на виході системи визначається законом Малюса:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi, \quad (2)$$

де кут φ визначається взаємним положенням поляризатора і аналізатора $\varphi_{\Pi-A}$ і магнітним обертанням φ_F .

Система працює як оптичний вентиль, коли виконується умова:

$$I = 0 \text{ при } \cos^2 \varphi = 0, \text{ звідки } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Результуючий кут визначається співвідношенням:

$$\varphi = \varphi_{\Pi-A} + \varphi_F = \frac{\pi}{2},$$

звідки

$$\varphi_F = \frac{\pi}{2} - \varphi_{\Pi-A} = \frac{\pi}{4}. \quad (3)$$

За законом Фарадея

$$\varphi_F = V l H. \quad (4)$$

З рівнянь (3) і (4) визначаємо H_{\min} :

$$H_{\min} = \frac{\pi}{4Vl} = \left(\frac{\kappa A}{m} \right).$$

При зміні напрямку магнітного поля на протилежний напрямок пропускання світла (оптичний вентиль) змінюється також на протилежний.

7.10. Плоский пучок природного світла інтенсивності I_0 падає під кутом Брюстера на поверхню води ($n=1,33$). При цьому $\rho=0,039$ потоку світла відбивається. Визначити інтенсивність заломленого пучка.

7.11. На поверхню води ($n=1,33$) під кутом Брюстера падає пучок плоскополяризованого світла. Площина коливань вектора світла складає кут $\varphi=45^\circ$ з площиною падіння. Визначити коефіцієнт відбиття.

7.12. На поверхню скла ($n=1,5$) падає пучок природного світла. Кут падіння дорівнює 45° . Визначити за допомогою формул Френзеля ступінь поляризації: а) відбитого світла; б) заломленого світла.

7.13. Плоска монохроматична світлова хвиля інтенсивності I_0 падає нормально на прозорий диск з оптично активної речовини, який перекриває півтори зони Френзеля для точки спостереження P і, крім того, повертає площину поляризації на 90° . Нехтуючи відбиванням і поглинанням світла, визначити інтенсивність світла в точці P .

Контрольні питання до розділу 7

1. Яке світло називається поляризованим?
2. Що називається площиною поляризації?
3. Типи поляризації світла. Поясніть фізичний зміст кожного типу поляризації.
4. Що означає термін «лівополяризована» і «правополяризована» хвилі?
5. Закон Малюса, його фізичний зміст.
6. Поляризація відбитого і заломленого променів на границі розподілу середовищ.
7. Що означає кут Брюстера?
8. Формули Френзеля.
9. Подвійне променезаломлення.

10. Які кристали називаються одновісними, а які – двовісними?
11. Що називається оптичною віссю кристала?
12. Що означає термін о-промінь і е-промінь?
13. Як поляризовані о-промінь і е-промінь у кристалі?
14. Принцип роботи компенсатора Бабіне.
15. Інтерференція поляризованих променів.
16. Штучне подвійне променезаломлення.
17. Ефект Керра. Природа ефекту Керра.
18. Поворот площини поляризації світла при проходженні крізь кристал.
19. Ефект Фарадея.
20. За яким правилом відбувається поворот площини поляризації світла при проходженні крізь оптично активне середовище?

РОЗДІЛ 8. ДИСПЕРСІЯ ТА ПОГЛИНАННЯ СВІТЛА

Дисперсією світла називаються явища, обумовлені залежністю показника заломлення речовини від довжини хвилі світла:

$$n = f(\lambda_0), \quad (8.1)$$

де λ_0 – довжина хвилі у вакуумі.

Дисперсією речовини називається похідна $dn/d\lambda$. Для всієї прозорої речовини $dn/d\lambda < 0$. Така дисперсія називається **нормальною**. Якщо $dn/d\lambda > 0$, то така дисперсія – **аномальна**.

Групова швидкість. Будь-який імпульс можна уявити як суперпозицію хвиль в інтервалі $(\omega, \omega + \Delta\omega)$. Така суперпозиція хвиль називається **хвильовим пакетом** або **групою хвиль**, яку згідно з теоремою Фур'є можна уявити як

$$E(x, t) = \int_{\omega - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega + \frac{\Delta\omega}{2}} A_\omega \cos(\omega t - k_\omega x + \alpha_\omega) \cdot d\omega. \quad (8.2)$$

Швидкість U , з якою поширюється центр хвильового пакета (точка з максимальною амплітудою E), називається **груповою швидкістю**. У диспергуючому середовищі групова швидкість відрізняється від фазової швидкості:

$$V = \frac{\omega}{k}. \quad (8.3)$$

Групова швидкість визначається формулою:

$$U = \frac{d\omega}{dk}. \quad (8.4)$$

Зв'язок між груповою та фазовою швидкістю:

$$U = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda} \text{ – формула Релея.} \quad (8.5)$$

Дисперсія світла пояснюється електромагнітною теорією Максвелла і електронною теорією речовини Лоренца.

Дисперсійне рівняння для електромагнітних хвиль, що поширюються у речовині, має вигляд:

$$n^2 = 1 + \frac{N}{\epsilon_0} \sum_k \frac{e^2 / m}{\omega_{0k}^2 - \omega^2}, \quad (8.6)$$

де n – показник заломлення середовища; e – заряд електрона; m – маса електрона; N – число молекул в одиниці об'єму; ω_{0k} – власні частоти електронів.

Розсіювання світла

Природа розсіювання світла. До складу середовища входять молекули або атоми основної речовини і сторонні частинки, які складаються з агрегатів молекул. Розмір цих агрегатів – у тисячі і десятки тисяч разів більший за розмір молекули.

Процес розсіювання полягає в тому, що молекула або дисперсна частинка під дією поля хвилі світла сама стає джерелом випромінювання (вторинним).

Розсіювання світла молекулою або частинкою відбувається однаково, і різниця лише в механізмах перевипромінювання.

За теорією Релея інтенсивність розсіювання світла пропорційна

$$I \sim \frac{1}{\lambda^4}. \quad (8.7)$$

Поглинання світла. В основі теорії дисперсії лежать лінійні рівняння. Тому показники заломлення n і загасання χ в теорії постійні. Інтенсивність хвилі світла зменшується при проходженні крізь речовину за законом

$$I = I_0 \exp(-\chi x), \quad (8.8)$$

де I_0 – інтенсивність падаючої хвилі; χ – показник поглинання ($[\chi] = \text{м}^{-1}$).

Формула (8.8) називається **законом Бугера** (1726 р.). За законом Бугера для монохроматичного світла коефіцієнт загасання (поглинання) не залежить від інтенсивності світла.

8.1. Розв'язання задач

8.1. Вільний електрон знаходиться в полі монохроматичної хвилі світла. Інтенсивність світла $I = 150 \text{ Вт/м}^2$, його частота $\omega = 3,4 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$.

Визначити: а) амплітуду коливань електрона і амплітуду його швидкості; б) відношення F_M / F_e , де F_M і F_e – амплітудні значення сил, які діють на електрон з боку магнітної і електричної складових поля хвилі світла.

Розв'язок.

б) Для плоскої хвилі модулі векторів E і H пов'язані співвідношенням

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0} H, \quad H = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E,$$

де враховано, що для вакууму $\varepsilon=1$.

Сила Лоренца, що діє на електрон:

$$F_L = -e \vec{E} - e(\vec{V} \times \vec{B}) = \vec{F}_e + \vec{F}_M.$$

$$\frac{F_M}{F_e} = \frac{-e \mu_0 V H}{-e E} = \frac{\mu_0 V \cdot \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} E}{E} = V \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{V}{c} \ll 1,$$

де враховано, що $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$, де c – електродинамічна стала ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с).

Висновок: в подальшому дію магнітної складової не враховуємо.

а) Під дією електричного поля світлової хвилі електрон буде коливатися біля положення рівноваги (рис. 8.1).

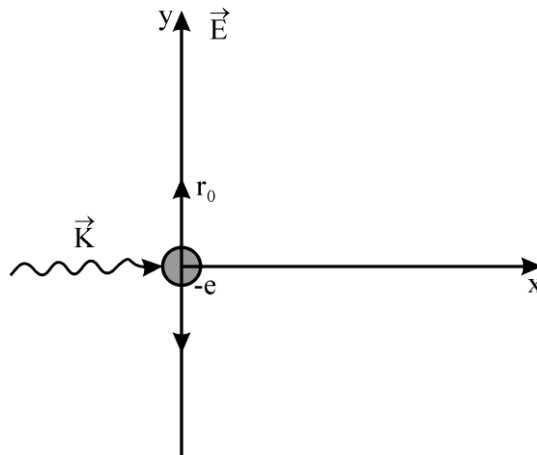


Рис. 8.1. Електрон у полі світлової хвилі

У рівнянні руху для електрона магнітною складовою поля хвилі світла нехтуємо. Електричне поле хвилі світла в точці $x=0$ і змінюється за законом:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}.$$

Рівняння руху для електрона:

$$m\ddot{r} = -e E_0 e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

Розв'язання рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$r = r_0 e^{-i\omega t}.$$

Визначимо

$$\dot{r} = r_0 e^{-i\omega t} \cdot (-i\omega),$$

$$\ddot{r} = \omega^2 r_0 e^{-i\omega t}.$$

Після підстановки останнього виразу у рівняння (1) одержимо:

$$m\omega^2 r_0 e^{-i\omega t} = -e E_0 e^{-i\omega t},$$

звідки $r_0 = -\frac{e E_0}{m\omega^2}$.

Амплітуда коливань електрона дорівнює $|r_0|$:

$$|r_0| = \frac{e E_0}{m\omega^2}.$$

З рівняння $\dot{r} = V = r_0 e^{-i\omega t} \cdot (-i\omega)$ визначимо амплітуду швидкості електрона:

$$v_{амл} = r_0 \cdot \omega.$$

До цього виразу входить амплітуда коливань електрона, до якої входить амплітуда поля хвилі світла E_0 . Визначимо E_0 :

$$I = \langle S \rangle,$$

де $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ – вектор Пойнтінга.

Для плоскої хвилі:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r}),$$

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot E = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r}),$$

$$S = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \vec{r}).$$

За означенням $I = \langle S \rangle = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \vec{r}) \rangle = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{E_0^2}{2}$, оскільки $\langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \vec{r}) \rangle = \frac{1}{2}$.

Амплітуда поля хвилі:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2S}{\epsilon_0 c}}.$$

8.2. Електромагнітна хвиля з частотою ω поширюється в розрідженій плазмі, де концентрація вільних електронів n_0 . Нехтуючи взаємодією хвилі з іонами плазми, визначити залежність: а) діелектричної проникності плазми від частоти; б) фазової швидкості від довжини хвилі λ в плазмі.

Розв'язок. На електрони плазми з боку електромагнітної хвилі діє сила (магнітною складовою нехтуємо):

$$F_e = -e E_0 \cos \omega t.$$

Рівняння руху електрона:

$$m \ddot{z} = e E_0 \cos \omega t.$$

Його розв'язання шукаємо у вигляді:

$$z = z_0 \cos \omega t.$$

Визначимо першу і другу похідні \dot{z} і \ddot{z} і підставляємо їх у рівняння руху:

$$-m z_0 \omega^2 \cos \omega t = -e E_0 \cos \omega t,$$

звідки

$$z_0 = -\frac{e E_0}{m \omega^2}, \text{ а } z(t) = \frac{e E_0 \cos \omega t}{m \omega^2} = \frac{e E(t)}{m \omega^2}.$$

Електрон, що коливається, є електричний диполь, електричний момент якого

$$\vec{P}(z) = -\frac{e^2 \vec{E}(t)}{m \omega^2} = -e \vec{z}(t).$$

За визначенням вектор поляризації \vec{P} дорівнює

$$\vec{P} = n_0 e \vec{z}(t) = -\vec{E}_0 \frac{n_0 e^2}{m \omega^2} \cos \omega t,$$

де n_0 – концентрація електронів.

Зв'язок між векторами $\vec{P}, \vec{D}, \vec{E}$ такий самий, як і у діелектрику:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E}_0 \cos \omega t - \vec{E}_0 \frac{n_0 e^2}{m \omega^2} \cos \omega t.$$

З іншого боку,

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}.$$

З останніх двох рівнянь знаходимо:

$$\varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \cos \omega t = \varepsilon_0 \vec{E}_0 \cos \omega t - \vec{E}_0 \frac{n_0 e^2}{m \omega^2} \cos \omega t,$$

або $\varepsilon = 1 - \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m \omega^2}$ – дисперсійне рівняння для плазми.

За означенням

$$v_\phi = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m \omega^2}}}.$$

8.3. Вивести формулу Релея (V – фазова швидкість, U – групова швидкість).

Розв'язок. За визначенням

$$\begin{aligned} V &= \frac{\omega}{k}, \quad U = \frac{d\omega}{dk}, \\ U &= \frac{d}{dk}(kV) = V + k \frac{dV}{dk}. \end{aligned} \quad (1)$$

Визначимо похідну dV/dk :

$$\frac{dV}{dk} = \frac{dV}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dk}. \quad (2)$$

За визначенням

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad \frac{d\lambda}{dk} = -\frac{2\pi}{k^2} = -\frac{\lambda}{k}.$$

Підставимо цей вираз у рівняння (2):

$$\frac{dV}{dk} = \frac{dV}{d\lambda} \cdot \left(-\frac{\lambda}{k}\right).$$

і далі у вираз (1):

$$U = V - k \frac{2\pi}{k^2} \cdot \frac{dV}{dk} = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda} \quad \text{— формула Релея.}$$

8.4. Знайти залежність між груповою і фазовою швидкостями для закону дисперсії $V \sim 1/\sqrt{\lambda}$.

Розв'язок. За означенням залежність між груповою і фазовою швидкостями має вигляд:

$$U = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda},$$

$$V = \frac{A}{\sqrt{\lambda}},$$

де $A = \text{const}$.

$$U = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda} = V - \lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{A}{\sqrt{\lambda}} \right) = \frac{3}{2}V.$$

8.5. Пучок природного світла інтенсивності I_0 падає на систему з двох схрещених поляризаторів, між якими знаходиться трубка з оптично неактивним розчином у повздовжньому магнітному полі A . Довжина трубки l , лінійний показник поглинання розчину χ і стала Верде v . Нехтуючи відбиваннями, знайти інтенсивність світла на виході системи.

Розв'язок. Схема приладу наведена на рис. 8.2.

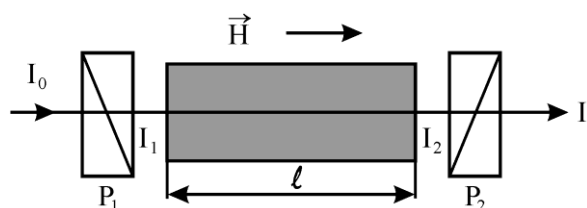


Рис. 8.2. Проходження пучка природного світла інтенсивності I_0 крізь систему з двох схрещених поляризаторів

Після проходження світла крізь перший поляризатор P_1 його інтенсивність дорівнює

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0.$$

Після проходження світла крізь трубку з розчином його інтенсивність за законом Бугера зменшується:

$$I_2 = I_1 e^{-\chi l} = \frac{1}{2} I_0 e^{-\chi l}.$$

В результаті ефекту Фарадея площина поляризації світла повертається на кут φ_F :

$$\varphi_F = V \cdot l \cdot H,$$

де V – стала Верде.

Після другого поляризатора світло лінійно поляризоване, й інтенсивність його визначається законом Малюса:

$$I' = I_2 \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + \varphi_F \right) = I \cdot \sin^2 \varphi_F = \frac{1}{2} I_0 e^{-\chi l} \cdot \sin^2 \varphi_F.$$

8.6. Плоска монохроматична хвиля світла інтенсивності I_0 падає нормально на пластинку завтовшки d , у якій коефіцієнт відбиття кожної поверхні дорівнює ρ . Враховуючи багатократні відбиття, знайти інтенсивність світла на виході з пластинки, якщо: а) пластинка ідеально прозора (поглинання відсутнє); б) лінійний показник поглинання дорівнює χ .

Розв'язок. Хід променів крізь пластинку показаний на рис. 8.3.

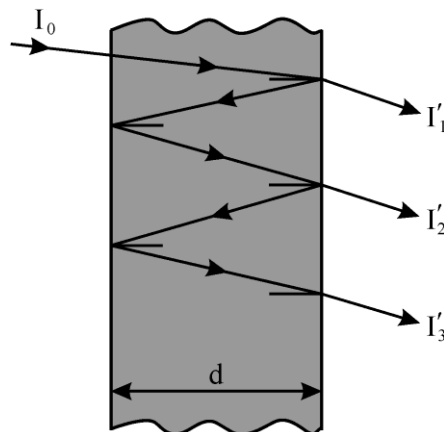


Рис. 8.3. Хід променів крізь пластинку

За означенням коефіцієнтом відбиття ρ називається

$$\rho = \frac{I_{\text{від}}}{I_{\text{над}}},$$

а коефіцієнтом пропускання

$$\tau = \frac{I_{\text{пр}}}{I_{\text{над}}}.$$

Ці коефіцієнти пов'язані співвідношенням: $\tau + \rho = 1$, звідки $\tau = 1 - \rho$.

а) У випадку некогерентних хвиль інтенсивність дорівнює

$$I' = I'_1 + I'_2 + I'_3 + \dots$$

$$I'_1 = I_0 (1 - \rho)^2,$$

$$I'_2 = I_0 (1 - \rho)^2 \rho^2,$$

$$I'_3 = I_0 (1 - \rho)^2 \rho^4,$$

$$I' = I_0 (1 - \rho)^2 (1 + \rho^2 + \rho^4 + \dots) = \frac{I_0 (1 - \rho)^2}{1 - \rho^2}.$$

б) У випадку з поглинанням інтенсивність змінюється за законом Бугера:

$$I = I|_{x=0} e^{-\chi d}.$$

Послаблення світла на виході з пластинки обумовлено двома механізмами: відбиттям на границях і поглинанням. У цьому випадку рівняння набувають вигляду:

$$I'_1 = I_0 (1 - \rho)^2 \cdot e^{-\chi d},$$

$$I'_2 = I_0 (1 - \rho)^2 \rho^2 \cdot e^{-3\chi d},$$

$$I'_3 = I_0 (1 - \rho)^2 \rho^4 \cdot e^{-5\chi d},$$

$$I' = I_0 (1 - \rho)^2 \cdot e^{-\chi d} (1 + \rho^2 \cdot e^{-2\chi d} + \rho^4 \cdot e^{-4\chi d} + \dots) = I_0 \frac{(1 - \rho)^2 \cdot e^{-\chi d}}{1 - \rho^2 \cdot e^{-2\chi d}}.$$

8.7. Із деякої речовини виготовили дві пластинки завтовшки $d_1 = 3,8$ мм, $d_2 = 9$ мм. Після опромінювання монохроматичним світлом виявили, що перша пластинка пропускає $\tau_1 \approx 0,84$ світлового потоку, друга –

$\tau_2 \approx 0,7$. Знайти лінійний показник поглинання речовини. Світло падає нормально, вторинним відбиттям нехтувати.

Розв'язок. Механізм послаблення світла після проходження пластинки обумовлений відбиттям на границі розподілу і поглинанням світла у речовині:

$$I' = I_0 (1 - \rho)^2 \cdot e^{-\chi d},$$

де I_0 – інтенсивність падаючого світла; ρ – коефіцієнт відбиття.

За означенням коефіцієнт відбиття дорівнює:

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{I_1'}{I_0} = (1 - \rho)^2 \cdot e^{-\chi d_1}, \\ \tau_2 = \frac{I_2'}{I_0} = (1 - \rho)^2 \cdot e^{-\chi d_2}. \end{cases}$$

З цих двох рівнянь знайдемо показник поглинання χ :

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = e^{\chi(d_2 - d_1)},$$

$$\chi = \frac{\ln\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)}{d_2 - d_1} = 0,35 \text{ (см}^{-1}\text{)}.$$

8.8. Монохроматичне світло проходить крізь $N = 5$ однакових плоскопаралельних пластинок, виготовлених зі скла і притиснутих одна до одної, завтовшки $l = 0,5$ см кожна. Коефіцієнт відбиття ρ на кожній поверхні пластинок $\rho = 0,05$. Коефіцієнт пропускання світла крізь таку систему $\tau = 0,55$. Визначити показник поглинання скла. Вторинним відбиттям нехтувати.

Розв'язок. При проходженні світла крізь таку систему має місце відбиття на $2N$ границях. Послаблення світла обумовлено відбиттям на границях пластин поглинанням у склі. За означенням:

$$\tau = \frac{I'}{I_0},$$

де

$$I' = I_0 (1 - \rho)^{2N} \cdot e^{-N\chi l},$$

або

$$\tau = \frac{I'}{I_0} = (1 - \rho)^{2N} \cdot e^{-N\chi l},$$

$$\chi = \frac{1}{Nl} \ln \left[\frac{(1 - \rho)^{2N}}{\tau} \right] = 0,034 \text{ (см}^{-1}\text{)}.$$

8.9. Монохроматичне світло падає нормально на поверхню плоскопаралельної пластинки завтовшки l . Показник поглинання речовини пластинки лінійно змінюється вздовж нормалі до поверхні від χ_1 до χ_2 . Коефіцієнт відбиття на кожній поверхні ρ . Визначити коефіцієнт пропускання пластини. Вторинним відбиттям нехтувати.

Розв'язок. Розглянемо шар пластини завтовшки dx (рис. 8.4).

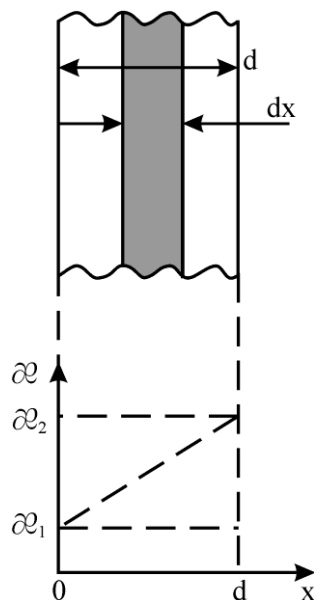


Рис. 8.4. Проходження монохроматичного світла крізь пластинку

Запишемо коефіцієнт пропускання для шару dx :

$$d\tau = e^{-\chi(x)dx},$$

де $\chi(x) = \chi_1 + \frac{\chi_2 - \chi_1}{d} \cdot x$.

$$\tau = \exp \left(- \int_0^d \chi(x) dx \right) = \exp \left(- \frac{\chi_1 + \chi_2}{2} d \right).$$

Врахуємо відбиття на двох границях

$$\tau = (1 - \rho^2) \exp \left(- \frac{\chi_1 + \chi_2}{d} \right) \cdot d.$$

8.10. Точкове монохроматичне джерело світла знаходиться в центрі сферичного шару речовини радіусом від a до b . Лінійний показник поглинання речовини χ , коефіцієнт відбиття поверхонь ρ . Знайти інтенсивність світла на виході з речовини. Вторинним відбиттям нехтувати. Джерело випромінює світловий потік Φ .

Розв'язок. Подумки виділимо сферичний фрагмент радіуса від r до $(r+dr)$ (рис. 8.5).

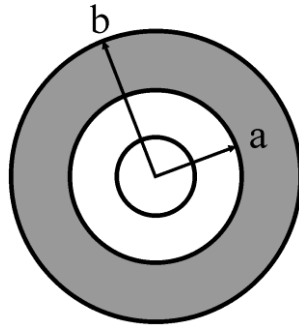


Рис. 8.5. Сферичний фрагмент речовини

Потік світла крізь поверхню дорівнює

$$\Phi = 4\pi b^2 \cdot I_0, \quad I_0 = \frac{\Phi}{4\pi b^2}.$$

Для шару речовини радіусом від r до $(r+dr)$:

$$dI = I_0 e^{-\chi dr} \cdot (1-\rho)^2,$$

де враховано поглинання та відбиття на границях. Після інтегрування одержимо:

$$dI = I_0 \cdot (1-\rho)^2 \exp\left(-a \int \chi dr\right) = \frac{\Phi}{4\pi b^2} (1-\rho)^2 e^{-\chi(b-a)}.$$

8.11. У скільки разів зменшиться інтенсивність вузького пучка рентгенівського випромінювання з довжиною хвилі 20 нм при проходженні свинцевої пластинки завтовшки $d = 1,0$ мм, якщо масовий коефіцієнт ослаблення для даної довжини хвилі $\mu/\rho = 3,6 \text{ см}^2/\text{г}$?

8.12. Знайти для алюмінію товщину шару половинного ослаблення вузького пучка монохроматичного рентгенівського випромінювання, якщо масовий показник ослаблення $\mu/\rho = 0,32 \text{ см}^2/\text{г}$.

8.13. Скільки шарів половинного ослаблення в пластинці, яка зменшує інтенсивність вузького пучка рентгенівського випромінювання у $\eta=50$ разів?

Контрольні питання до розділу 8

1. Що називається дисперсією світла?
2. Що називається дисперсією речовини?
3. Яка дисперсія називається нормальною, а яка – аномальною?
4. Що таке хвильовий пакет?
5. Що таке групова швидкість?
6. Зв'язок групової швидкості з фазовою.
7. Закон Бугера.
8. У чому полягає механізм розсіювання світла?
9. Закон ослаблення вузького пучка електромагнітного випромінювання.
10. Що таке масовий показник ослаблення.
11. Коефіцієнт відбиття і коефіцієнт пропускання. Зв'язок між цими коефіцієнтами.

РОЗДІЛ 9. ЕФЕКТ ДОПЛЕРА

Ефектом Доплера називається доплерівське зміщення частоти, обумовлене відносним рухом джерела і приймача.

Якщо джерело світла помістити в початок координат, а приймач буде рухатися вправо від джерела вздовж осі X зі швидкістю v ($v \ll c$), то частота, яку буде фіксувати приймач, буде

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{v}{c} \right), \quad (9.1)$$

де ω_0 – частота світла, яку випромінює джерело у системі відліку K , яка пов'язана з джерелом.

З формули (9.1) можна знайти відносну зміну частоти $\Delta\omega/\omega$:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{v}{c}, \quad (9.2)$$

де $\Delta\omega = \omega - \omega_0$.

Формула (9.2) описує **повздовжній ефект Доплера**.

У випадку, коли вектор відносної швидкості перпендикулярний до прямої, що проходить крізь приймач і джерело, спостерігається **поперечний ефект Доплера**. Відносна зміна частоти при поперечному ефекті

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2}. \quad (9.3)$$

Ця відносна зміна частоти значно менша, ніж у повздовжньому ефекті.

У загальному випадку вектор відносної швидкості можна розкласти на дві складові, одна з яких спрямована вздовж променя, а друга – перпендикулярна променю. Перша обумовлює повздовжній ефект, друга – поперечний.

Тепловий рух молекул газу, який світиться, приводить внаслідок ефекту Доплера до розширення спектральних ліній.

Ширина спектральної лінії, яку реєструє прилад, дорівнює:

$$\delta\omega_D = 2\omega_0 \frac{v}{c} \quad (9.4)$$

і називається **доплерівською шириною спектральної лінії**.

9.1. Розв'язання задач

9.1. У досліді Фізо з визначення швидкості світла відстань між зубчастим колесом і дзеркалом $l=8,6$ км, число зубців $z=610$. Два послідовні зникнення світла спостерігали при швидкостях обертання зубчастого колеса $n_1=283$ об/с і $n_2=313$ об/с. Визначити швидкість світла c .

Розв'язок. За час $\tau=2l/c$ колесо повернеться на кут:

$$\Delta\varphi=\omega\tau=\omega\frac{2l}{c}.$$

Кут між центрами зубців колеса дорівнює $\alpha=\frac{2\pi}{z}$. Світло не потрапляє в око при кутах: $\frac{\alpha}{2}, 3\frac{\alpha}{2}, \dots, \left(m-\frac{1}{2}\right)\alpha$, де $m=1, 2, 3, \dots$

Умова m -го затемнення:

$$\Delta\varphi=\left(m-\frac{1}{2}\right)\cdot\alpha, \text{ або } \Delta\varphi=\left(m-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2\pi}{z}=\frac{2lm_T}{c}.$$

Для швидкостей обертання зубчастого колеса n_1 і n_2 запишемо:

$$\begin{cases} \frac{2l\omega_1}{c}=\left(m_1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2\pi}{z}, \\ \frac{2l\omega_2}{c}=\left(m_2-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2\pi}{z}. \end{cases}$$

Від другого рівняння віднімемо перше і одержимо:

$$\frac{2\pi}{z}\left(m_2-\frac{1}{2}-m_1+\frac{1}{2}\right)=\frac{2l}{c}(\omega_2-\omega_1),$$

або з урахуванням $\Delta m=1$

$$\frac{\pi}{z}=\frac{l}{c}(\omega_2-\omega_1).$$

Оскільки $\omega_1=2\pi n_1$, $\omega_2=2\pi n_2$, одержимо вираз для швидкості світла c :

$$c=2lz(n_2-n_1)=3,14\cdot 10^8 \text{ (м/с)}.$$

9.2. Одна зі спектральних ліній, яку випромінюють збуджені іони He^+ , має довжину хвилі $\lambda=410$ нм. Знайти доплерівське зміщення $\Delta\lambda$ цієї лінії, якщо її спостерігають під кутом $\Theta=30^\circ$ до пучка іонів з кінетичною енергією $T = 10$ Мев.

Розв'язок. Доплерівське зміщення обумовлено повздовжнім ефектом Доплера:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{v}{c} \cos \Theta.$$

Оскільки $\omega=2\pi\nu=\frac{2\pi c}{\lambda}$, то $\Delta\omega=\frac{2\pi c}{\Delta\lambda}$, $\frac{2\pi c}{\Delta\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2\pi c} = -\frac{v}{c} \cos \Theta$.

Швидкість теплового руху молекул:

$$v = \sqrt{\frac{2T}{m_c}},$$

де T – кінетична енергія іонів; m_i – маса іонів.

Таким чином,

$$\Delta\lambda = -\lambda \sqrt{\frac{2T}{m_i c^2}} \cdot \cos \Theta = -26 \text{ (нм)}.$$

9.3. Аберация світла полягає в тому, що при спостереженні зірки здаються зміщеними від справжнього стану на небосхилі (через рух Землі по орбіті). Напрямок на зірку в площині екліптики періодично змінюється, і зірка робить такий рух, ніби коливання в межах кута $\delta\Theta=41''$. Знайти швидкість руху Землі по орбіті.

Розв'язок. Схема спостереження зірки наведена на рис. 9.1.

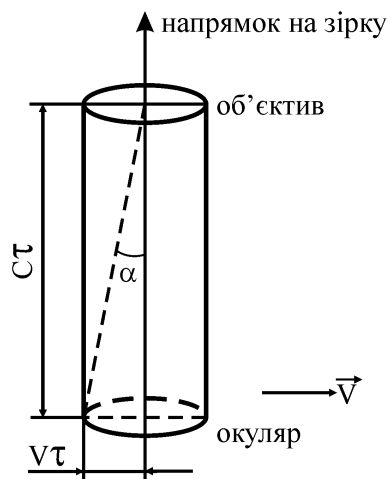


Рис. 9.1. Схема спостереження зірки

Позначимо τ – час, за який світло проходить крізь телескоп:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v\tau}{c\tau} \approx \frac{v}{c},$$

оскільки кут $\alpha \ll 1$.

Як випливає із рис. 9.1, $\alpha = \frac{\delta\Theta}{2}$. Таким чином, $\frac{\delta\Theta}{2} = \frac{v}{c}$, звідки $v = \frac{c}{2} \cdot \delta\Theta = 30$ (км/с).

9.4. Знайти умови, за яких заряджена частинка, яка рівномірно рухається у середовищі з показником заломлення n , буде випромінювати світло (ефект Черенкова).

Розв'язок. Частинка, яка рухається у середовищі, своїм полем збуджує атоми середовища, і вони стають джерелами вторинних хвиль. Розглянемо дві довільні точки A і B на шляху руху частинки (рис. 9.2).

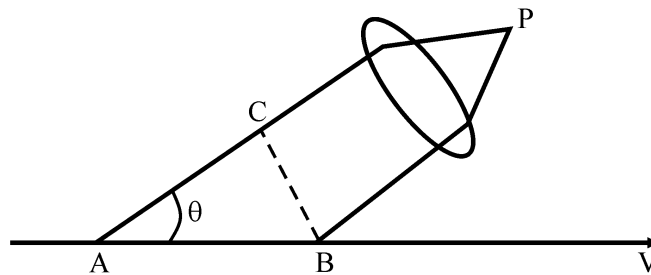


Рис. 9.2. Схема ефекту Черенкова

Хвилі світла, що випромінюються при проходженні крізь них частинки, досягнуть точки P за однаковий час і посилять одна одну.

Якщо час поширення хвилі світла з точки A в точку C буде дорівнювати часу прольоту частинкою шляху AB , то ця умова має вигляд:

$$\cos \Theta = \frac{v}{v},$$

$v = \frac{c}{n}$ – фазова швидкість світла. Ця умова виконується при $v > v$, тобто коли швидкість частинки більша за фазову швидкість світла в середовищі.

9.5. Локатор працює на частоті ω і опромінює предмет, який рухається зі швидкістю v у довільному напрямку відносно локатора. Враховуючи ефект Доплера, знайти частоту ω^* відбитого від предмета випромінювання, яку приймає той самий локатор.

Розв'язок. Позначимо через K – систему, пов'язану з локатором; K' – систему, пов'язану з предметом (рис. 9.3).

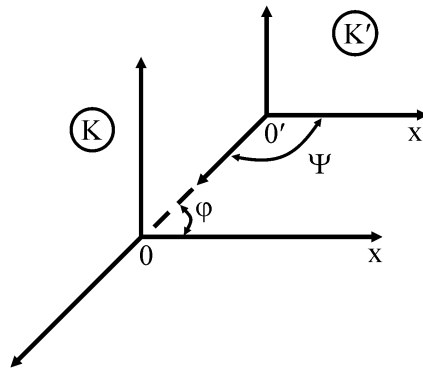


Рис. 9.3. Системи відліку (K – система і K' – система)

У системі K' локатор відіграє роль джерела випромінювання з частотою ω' у напрямку локатора.

Запишемо перетворення Лоренця для швидкостей:

$$U_x = \frac{U'_x + v}{1 + \frac{U'_x v}{c^2}} \quad \text{або формула} \quad U \cdot \cos \Psi = \frac{U' \cos \Psi + v}{1 + \frac{v U' \cos \Psi'}{c^2}}$$

$$\text{Для світла } U = U' = c, \quad \cos \Psi = \frac{\cos \Psi' + \beta}{1 + \beta \cdot \cos \Psi'}, \quad \text{звідки } \cos \Psi' = \frac{\cos \Psi - \beta}{1 - \beta \cdot \cos \Psi \cdot \beta},$$

де $\beta = \frac{v}{c}$.

У системі K' локатор рухається зі швидкістю $(-v)$. Перейдемо до системи K :

$$\omega^* = \omega' \frac{1 + \cos \Psi'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

З урахуванням того, що $\Psi = \pi + \varphi$, $\cos \Psi' = \frac{\cos \Psi - \beta}{1 - \beta \cdot \cos \Psi'}$, одержимо:

$$\omega^* = \omega \frac{1 - \beta \cdot \cos \varphi}{1 + \beta \cdot \cos \varphi}$$

Контрольні питання до розділу 9

1. Яка система відліку називається інерціальною?
2. Що таке перетворення Лоренця?
3. В чому полягає ефект Доплера?
4. Повздовжній ефект Доплера.

5. Поперечний ефект Доплера.
6. Що називається доплерівським зміщенням?
7. В чому полягає принцип відносності?
8. Два постулати теорії відносності.

Список літератури

1. Горбань І. С. Оптика. – Київ : Вища школа, 1979. – 223 с.
2. Остроухов А. А., Стрижевський В. Л., Цвєлих М. Г., Цященко Ю. П. Розв'язання задач з курсу загальної фізики. – Київ : Радянська школа, 1966. – 503 с.
3. Практикум розв'язування задач з курсу загальної фізики. Оптика : навчальний посібник. Видання друге, перероблене і доповнене / Б. К. Остафійчук, М. М. Яцура, І. П. Яремій, А. М. Гамарник. – Івано-Франківськ : 2015. – 348 с.
4. Хвильова оптика. Частина 1. Електромагнітна теорія світла та інтерференція : підручник для студентів / уклад. В. Г. Колобродов. – К. : НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», 2017. – 208 с.
5. Збірник задач з оптики : навчальний посібник / В. М. Ігнатенко, В. Ф. Нефедченко. – Суми : Сумський державний університет, 2018. – 234 с.
6. Фізика: Оптика : методичні вказівки до самостійної роботи студентів технічних напрямків підготовки усіх форм навчання / уклад. О. В. Анісімова, О. В. Пугач. – К. : «КПІ ім. І. Сікорського», 2014. – 52 с.
7. Розв'язування задач із фізики: коливання, хвилі, оптика : навчальний посібник / О. В. Лисенко, В. В. Коваль, М. Ю. Ромбовський. – Суми : Сумський державний університет, 2014. – 183 с.
8. Практикум розв'язування задач з курсу загальної фізики. Оптика : навчальний посібник. Видання друге, перероблене і доповнене / Б. К. Остафійчук, М. М. Яцура, І. П. Яремій, А. М. Гамарник. – Івано-Франківськ : 2015. – 348 с.

Інформаційні ресурси

Навчальні матеріали кафедри експериментальної фізики

https://kef.univer.kharkov.ua/navch_materialy.html

Лекційні демонстрації з оптики

<https://www.youtube.com/playlist?list=PLs1Exxbg3O-cc-tiNa5DcSmrLyY-GW4bQ>

Навчальне видання

Дубовик Володимир Миколайович
Сухов Володимир Миколайович

**РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З ОПТИКИ
В КУРСІ ЗАГАЛЬНОЇ ФІЗИКИ**

Навчальний посібник

Коректор *О. В. Анцибора*
Комп'ютерне верстання *О. С. Чистякова*

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 9,31. Наклад 100 пр. Зам. № 200/23.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна