Уравнение Гамильтона – Якоби в курсе классической механики

Могильная М.М., Шаломаева Т.М.
Научные руководители:
к.ф.-м.н., доц. Езерская Е.В., к.ф.-м.н., доц. Майзелис З.А.
Кафедра теоретической физики имени академика И.М.Лифшица

Тема «Уравнение Гамильтона–Якоби» важна для понимания фундаментальных основ классической механики и в то же время является важным «мостом» для перехода к квантовой механике. Нами подготовлены методические указания «Уравнение Гамильтона–Якоби в курсе классической механики» для самостоятельной работы студентов физических специальностей, изучающих классическую механику.

В начале пособия приводятся необходимые справочные сведения о канонических уравнениях, о полной производной по времени от функции динамических переменных, скобках Пуассона, рассматривается функция действия, как функция координат и времени на верхнем пределе интегрирования, вводится понятие канонических преобразований. Далее рассматривается уравнение Гамильтона–Якоби, и доказывается теорема Якоби. Приводятся необходимые для нахождения полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби сведения из теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Рассмотрено разделение переменных сначала в общем виде, затем в частном случае движения частицы во внешнем поле в различных координатах. Даны подробные решения задач о движении свободной частицы, частицы в однородном внешнем поле, задачи о движении точки на конусе в однородном поле тяжести, задачи о сферическом маятнике, задачи Кеплера, движении в поле $U=-\frac{\alpha}{r}+\beta z$ (эффект Штарка), движении в поле электрического диполя. Особое внимание уделено одномерному движению. Предлагаются решения задачи о математическом маятнике, о движении в одномерных полях, для которых известно точное решение квантовомеханического уравнения Шредингера, таких как потенциал Морзе

$$U(x)=U_0\left(1-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 ,$$

потенциальная яма Пешля – Теллера

$$U(x)=\frac{U_0}{ch^2\left(\frac{x}{a}\right)}$$

и др.

Некоторые задачи сопровождаются подробными решениями, а остальные можно использовать для самостоятельной работы студентов, а также в качестве зачетных заданий или при проведении контрольных работ.