ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 93

МАТЕМАТИКА

ВЫПУСК 38

ИЗДАТЕЛЬСТВО ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

84 коп.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 93

МАТЕМАТИКА

ВЫПУСК 38

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
Харьков
1973

В настоящий выпуск включены статьи по современной алгебре, теории функций комплексного переменного и функциональному анализу. Отдельные статьи посвящены случайным процессам и их применениям, магнитной гидродинамике и электродинамике.

Сборник рассчитан на научных работников, преподавателей и студентов старших курсов механико-математических факультетов.

Адрес редакционной коллегии:

Харьков-77, пл. Дзержинского 4, Харьковский университет, механико-математический факультет.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Э. М. Жмудь

Пусть L — решетка, $\wedge$ и $\vee$ —операции пересечения и объединения в L. Систему образующих решетки L относительно операции $\wedge$ ($\vee$) назовем системой $\wedge$-образующих (соответственно $\vee$-образующих) решетки L. Предполагая решетку L конечной, $\wedge$-базисом ($\vee$-базисом) решетки L назовем всякую ее минимальную систему $\wedge$-образующих ($\vee$-образующих). Легко показать, что конечная решетка L обладает единственным $\wedge$-базисом $B_\wedge(L)$ и единственным $\vee$-базисом $B_\vee(L)$. Отличный от единичного елемент $a \in L$ тогда и только тогда принадлежит $B_\wedge(L)$, когда он покрывается единственным элементом решетки; ненулевой элемент $a \in L$ тогда и только тогда принадлежит $B_\vee(L)$, когда им покрывается единственный элемент решетки[1]. Очевидно, $1 \in B_\wedge(L)$, $0 \in \in B_\vee(L)$. Из единственности базисов вытекает, что $B_\wedge(L)$ ($B_\vee(L)$) содержится в каждой системе $\wedge$-образующих ($\vee$-образующих) решетки L. Если L — конечная модулярная решетка, то, как известно [2], $|B_\wedge(L)| = |B_\vee(L)|$[2].

Пусть G — конечная группа и $L_N(G)$ — решетка ее нормальных делителей. $\wedge$ и $\vee$ являются в этом случае операциями теоретико-множественного пересечения и теоретико-группового объединения (умножения) нормальных делителей группы G. Считая операцию $\wedge$ совпадающей с первой, а $\vee$ — со второй, положим $B(G) = B_\wedge(L_N(G))$, $B^*(G) = B_\vee(L_N(G))$. Из модулярности решетки $L_N(G)$ вытекает, что $|B(G)| = |B^*(G)|$.

Ядрами группы G назовем ядра гомоморфизмов ее неприводимых линейных представлений над произвольным полем, характеристика которого не делит $|G|$; систему всех ядер группы G обозначим через $\Sigma(G)$[3]. Ядра, отличные от G, будем называть

---

[1] Если $a, b \in L$, то b покрывает a, если $a < b$, причем из $a \leqslant c \leqslant b$ следует, что $c = a$, либо $c = b$.

[2] Через $|M|$ обозначается число элементов конечного множества M.

[3] Система $\Sigma(G)$ не зависит от поля представлений, удовлетворяющего указанному выше ограничению на характеристику.

собственными. Антиядрами группы G назовем подгруппы, порожденные одним ее классом сопряженных элементов; систему всех антиядер группы G обозначим через $\Sigma^*(G)$[1]. Антиядра, отличные от (1), будем называть собственными. $\Sigma(G)$, как легко видеть, является системой $\wedge$-образующих, а $\Sigma^*(G)$ — системой $\vee$-образующих решетки $L_N(G)$. Поэтому $B(G) \subseteq \Sigma(G)$, $B^*(G) \subseteq \Sigma^*(G)$.

В настоящей статье изучаются конечные группы, удовлетворяющие условиям

$$B(G) = \Sigma(G), \quad B^*(G) = \Sigma^*(G). \tag{1}$$

Конечные группы, для которых имеет место (1), назовем B-группами. В [4] доказано, что для любой конечной группы G $|\Sigma(G)| = |\Sigma^*(G)|$. Так как вместе с тем $|B(G)| = |B^*(G)|$, то класс B-групп можно охарактеризовать выполнением любого из двух условий (1) [2]. B-группы, как ясно из предыдущего, характеризуются следующим свойством: каждое собственное ядро группы покрывается только одним ее нормальным делителем (верхней оболочкой ядра), каждым собственным антиядром группы покрывается только один ее нормальный делитель (нижняя оболочка антиядра) [3].

Класс B-групп достаточно широк: в него входят, например, все конечные р-группы, все простые группы; существуют также разрешимые B-группы, не являющиеся нильпотентными.

Основными результатами настоящей статьи являются необходимый и достаточный критерий для B-групп, выражающийся теоремой 2, и теорема 3, устанавливающая ряд структурных свойств B-групп, не допускающих точных неприводимых представлений. В заключительной части статьи рассмотрена некоторая серия разрешимых, но не нильпотентных, B-групп.

1. Приведем без доказательств некоторые известные факты, относящиеся к группам с операторами и к теории представлений конечных групп (см. [3] или [4]).

Пусть G и H конечные группы, $\mathrm{Aut}\, H$ — группа автоморфизмов, $\mathrm{Aut}_i\, H$ — группа внутренних автоморфизмов группы H. Будем называть H G-группой, если G служит для H областью операторов, причем

(I) Каждый элемент $g \in G$ порождает в H автоморфизм $x \to g \circ x = \alpha(g)\, x$ $(x \in H)$.

---

[1] Антиядра в некотором смысле двойственны ядрам, чем и обусловлено их наименование.

[2] Это вытекает также из того обстоятельства, что системы $\Sigma(G)$ и $\Sigma^*(G)$, с одной стороны, и системы $B(G)$ и $B^*(G)$ — с другой, взаимно дополнительны в смысле Аванна [5].

[3] Верхней оболочкой H^* нормального делителя H группы G называется композит всех нормальных делителей группы G покрывающих H; нижней оболочкой H нормального делителя H называется пересечение всех нормальных делителей, покрываемых H. При этом $G^* = G$, $\{1\}_* = \{1\}$.

(II) Отображение $g \to \alpha(g)$ является гомоморфизмом группы G в $\mathrm{Aut}\, H$.

(III) $\mathrm{Im}\,\alpha \supseteq \mathrm{Aut}_i H$.

Допустимые подгруппы G-группы H являются ее нормальными делителями. Все они, так же как и отвечающие им фактор-группы группы H, естественным образом могут рассматриваться как G-группы. G-группа H называется вполне приводимой, если H разлагается в прямое произведение некоторого числа своих минимальных допустимых подгрупп; число сомножителей в таком разложении, являющееся инвариантом группы H, назовем G-рангом последней. (Обозначение: $\rho_G(H)$; G-группы G-ранга 1 называются неприводимыми. Вполне приводимая G-группа называется однородной, если все ее минимальные допустимые подгруппы G-изоморфны между собой. Неприводимые G-группы элементарны. В частности, абелева неприводимая G-группа является p-группой показателя p. Кольцо Ω G-эндоморфизмов неприводимой абелевой G-группы F, имеющей порядок p^r, является полем Галуа $GF(p^w)$, где $w|r$. Числа p, r и w назовем G-инвариантами группы F. На аддитивном языке группу F можно рассматривать как неприводимый левый Ω-G-модуль размерности $\frac{r}{w}$ над Ω. Число $\frac{r}{w}$ назовем G-размерностью неприводимой G-группы F $\left(\frac{r}{w} = \dim_G F\right)$.

Однородная вполне приводимая G-группа H всегда либо неприводима, либо абелева. Во втором случае H является p — группой показателя p. G-инвариантами абелевой однородной вполне приводимой G-группы H будем называть числа $\rho_G(H)$, p, r и w, где p, r и w — G-инварианты любой минимальной допустимой подгруппы группы H.

Обозначим через M_H множество всех минимальных допустимых подгрупп G-группы H. Если H вполне приводима, H_1 и H_2 — ее допустимые подгруппы, то $H = H_1 \circ H_2$ будет означать, что $H = H_1 \times H_2$ и $M_H = M_{H_1} \cup M_{H_2}$. Каждая вполне приводимая G-группа H допускает единственное, с точностью до порядка следования сомножителей, разложение $H = H_1 \circ \ldots \circ H_s$, где H_i $(i = 1, \ldots, s)$ однородные вполне приводимые G-группы — однородные компоненты G-группы H [1].

В частности, вполне приводим композит всех минимальных допустимых подгрупп произвольной G-группы H. Назовем его G-цоколем последней (обозначение: $\mathrm{Sc}_G H$).

В дальнейшем G-группы будут пониматься в несколько более узком смысле. Пусть H — фактор какого-нибудь инва-

---

[1] Последние иногда называются G-когерентами G-группы H.

риантного ряда группы G. Так как внутренние автоморфизмы группы G индуцируют на факторе H некоторые автоморфизмы последнего, то G можно рассматривать как область операторов фактора H: действие элементов группы G на H сводится к действию соответствующих внутренних автоморфизмов. При таком определении действия группы G на факторах, последние, как легко видеть, оказываются G-группами. В дальнейшем только такие G-группы и будут иметься в виду.

Изложенные факты тесно связаны с вопросами, относящимися к точным представлениям конечных групп. В дальнейшем будет использован следующий результат, принадлежащий Шода [1] [1].

Предложение 1. Конечная группа G тогда и только тогда обладает точными неприводимыми немодулярными линейными представлениями, когда G-ранг каждой абелевой однородной компоненты цоколя группы G не превосходит G-размерности содержащихся в ней минимальных нормальных делителей группы G.

Предложение 1 позволяет получить необходимый и достаточный критерий для ядер произвольной конечной группы. Нижеследующее предложение дает необходимый и достаточный критерий для абелевых вполне приводимых однородных антиядер.

Предложение 2. [2]. Вполне приводимый абелев однородный нормальный делитель H группы G тогда и только тогда является ее антиядром, когда $r_G(H) \leqslant \dim_G F$, где F любой содержащийся в H минимальный нормальный делитель группы G.

2. Приступая к изучению B-групп, докажем для них некоторое свойство наследственности.

Теорема 1. Если G—B-группа и $N \lhd G$, то G/N также является B-группой.

Доказательство. Так как $\Sigma(G) = B(G)$ и $B(G/N) = \{H/N \mid H \in B(G),\ H \supseteq N\}$, $\Sigma(G/N) = \{H/N \mid H \in \Sigma(G),\ H \supseteq N\}$, то $B(G/N) = \Sigma(G/N)$, что и доказывает утверждение.

Пусть G — произвольная конечная группа и Φ — ее главный фактор, т. е. минимальный нормальный делитель некоторой фактор-группы G/N, где $H \lhd G$. Назовем главный фактор Φ изолированным, если содержащая Φ однородная компонента цоколя группы G/N совпадает с Φ. Неизолированные главные факторы, как легко видеть, всегда абелевы.

Теорема 2. Группа G является B-группой тогда и только тогда, когда

(I) Цоколи всех фактор-групп группы G однородны.

---

[1] См. также [3].

[2] Из предложений 1 и 2 легко вытекает теорема Гашюца: конечная группа тогда и только тогда обладает точными неприводимыми немодулярными линейными представлениями, когда ее цоколь является антиядром.

(II) G-размерность любого неизолированного главного фактора группы G равна 1.

Доказательство 1°. Пусть G—B-группа. В силу теоремы 2, для доказательства (I) и (II) достаточно убедиться в справедливости следующих утверждений:

(Ia) Цоколь ScG группы G однороден.

(IIa) Если ScG имеет G-ранг > 1, то G-размерность любого минимального нормального делителя группы G равна 1.

Утверждение (Ia) тривиально, если группа G обладает единственным минимальным нормальным делителем. Допуская, что это не имеет места, покажем, что любые два минимальных нормальных делителя F_1 и F_2 группы G G-изоморфны. Действительно, из $F_1 \overset{G}{\cong} F_2$ [1] вытекало бы, что $F_1 \times F_2 = F_1 \circ F_2$. Поэтому F_1 и F_2 являлись бы единственными минимальными нормальными делителями группы G, содержащимися в $H = F_1 \circ F_2$. Замечая, что $F_i =$ «f_i»[2], где $f_i \in F_i^{\#}$ $(i = 1, 2)$[3] положим $H_1 =$ «$f_1 \cdot f_2$». Так как $H \neq \{1\}$, $H_1 \neq F_i \, (i = 1, 2)$, то $H_1 = H$. Следовательно, $H =$ «$f_1 \cdot f_2$» является антиядром группы G. Так как $G - B$-группа, то нормальным делителем H должен покрываться лишь один нормальный делитель группы G. Это, однако, противоречит тому, что H покрывает F_1 и F_2. Таким образом, в любом случае цоколь группы G однороден. Утверждение (Ia) доказано.

Приступая к доказательству утверждения (IIa), допустим, что

$$ScG = F_1 \times \ldots \times F_n,$$

где $\{F_i\}_1^n$ — минимальные нормальные делители группы G и $n > 1$. В силу (Ia) $F_1 \overset{G}{\cong} \ldots \overset{G}{\cong} F_n$. Так как $n > 1$, то (см. п. I) все $F_i \, (i = 1, \ldots, n)$ являются элементарными абелевыми p-группами. В силу предложения 2, из $\dim_G F_i \geqslant 2$ следовало бы, что $H = F_1 \times F_2$ является антиядром группы G. Это, однако, невозможно, так как H покрывает по крайней мере два нормальных делителя группы G: F_1 и F_2. Итак, $\dim_G F_i = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тем самым доказана справедливость (IIa). Вместе с тем доказана необходимость условий (I) и (II).

2°. Допустим, что для группы G удовлетворяются условия (I) и (II). Рассмотрим сначала случай, когда группа G обладает точными неприводимыми представлениями. В силу (I) цоколь группы G является однородной G-группой. Если бы

---

[1] Символом $\overset{G}{\cong}$ обозначается G-изоморфизм G-групп.

[2] «g» — пересечение всех нормальных делителей группы G, содержащих элемент g.

[3] Если H — группа, то $H^{\#} = H \setminus \{1\}$.

G-ранг n цоколя был >1, то в силу (II) для любого минимального нормального делителя F группы G имело бы место $n > \dim_G F = 1$. Но тогда, в силу теоремы Шода (предложение 1), группа G не обладала бы точными неприводимыми представлениями. Противоречие показывает, что $n=1$. Таким образом, если группа удовлетворяет условиям (I) и (II) и, кроме того, обладает точными неприводимыми представлениями, то она имеет только один минимальный нормальный делитель.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть H — любое собственное ядро группы G, удовлетворяющей условиям (I) и (II). Фактор-группа G/H, очевидно, также удовлетворяет условиям (I) и (II) и, вместе с тем, обладает точными неприводимыми представлениями. В силу доказанного выше, группа G/H обладает единственным минимальным нормальным делителем. Следовательно, H покрывается единственным нормальным делителем группы G. Тем самым доказано, что последняя является B-группой. Итак, достаточность условий (I) и (II) доказана.

Следствие. В классе конечных нильпотентных групп B-группами являются p-группы и только они.

Доказательство 1°. Пусть G—p-группа. Условие (1) теоремы 1 выполняется, так как все минимальные нормальные делители любой нетривиальной фактор-группы G/H содержатся в ее центре, имеют порядок p и поэтому G-изоморфны. Условие (II) выполняется для всех главных факторов группы G, ибо их порядки равны p.

2°. Если G нильпотентная B-группа, то в силу условия (1) теоремы 1, ее цоколь является элементарной абелевой группой, откуда вытекает, что G p-группа [1].

Теорема 3. Если G—B-группа, не обладающая точными неприводимыми представлениями (т. е. имеющая более одного минимального нормального делителя), то для любого $x \in (ScG)^{\#}$ имеет место $C_G(x) = C_G(ScG)$ [2]. Фактор-группа $G/C_G(ScG)$ является циклической q-группой. Ее порядок q^l делит $p^r - 1$, где p^r — порядок любого минимального нормального делителя группы G.

Доказательство. Так как цоколь группы G однороден и имеет G-ранг>1, то он является элементарной абелевой p-группой. Если F — любой минимальный нормальный делитель группы G, то в силу предложения 2 $\dim_G F = 1$. Таким образом, если пользоваться аддитивным языком, F является одномерным (левым) линейным пространством над полем $\Omega = \mathrm{Hom}_G(F, F)$:

$$F = \Omega f, \text{ где } f \in F^{\#}. \tag{2}$$

---

[1] Доказанное предложение может быть легко получено и без помощи теоремы 2.

[2] $C_G(M)$ — централизатор подмножества $M \subset G$ в группе G.

Если ω пробегает поле Ω, то при фиксированном $f \in F^{\#}$ отображение $\omega \to \omega f$ является биекцией Ω на F. Отсюда вытекает, что для любого $g \in G$

$$g \circ f = gfg^{-1} = \psi(g) f,$$

где $\psi(g)$ — однозначно определяющийся элементом g элемент мультипликативной группы Ω^* поля Ω. Отображение $g \to \psi(g)$ является, как легко видеть, гомоморфизмом группы G в Ω^*. При этом, $\mathrm{Ker}\,\psi = C_G(f)$. Так как Ω^* циклическая группа, то и гомоморфный образ группы G при гомоморфизме ψ цикличен. Следовательно $G/C_G(f)$ — циклическая группа. В силу теоремы 1 и следствия теоремы 2 эта группа примарна: $|G/C_G(f)| = q^l$, где q — простое число. Из предыдущего ясно, что g^l делит $|\Omega^*|$.

Так как в рассматриваемом случае $|\Omega| = |F| = p^r$, то $q^l/p^r - 1$.

Легко видеть, что $C_G(x)$ не зависит от выбора элемента $x \in F$. Действительно, в силу (2) $x = \omega f$, где $\omega \in \Omega^*$. Поэтому для любого $g \in G$ $gxg^{-1} = g \circ x = g \circ (\omega f) = \omega(g \circ f) = \omega(gfg^{-1})$ и следсвательно, $C_G(x) = C_G(f)$. Далее, если F' — минимальный нормальный делитель группы G, отличный от F, и если $x' \in F'^{\#}$, то ввиду G-изоморфизма $F \overset{G}{\cong} F'$, $C_G(x') = C_G(x)$, где $x \in F^{\#}$. Отсюда вытекает, что для любого $x \in (ScG)^{\#}$ $C_G(x)$ не зависит от x и совпадает с $C_G(ScG)$.

Из теорем 2 и 3 вытекает, что если G-ранг цоколя B-группы $G > 1$, то любой элемент группы G порождает на цоколе либо тождественный, либо регулярный автоморфизм. При этом, все q-регулярные элементы группы G индуцируют на ScG тождественный автоморфизм. Таким образом, B-группы указанного типа в какой-то мере напоминают группы Фробениуса. В частности B-группа G становится группой Фробениуса с ядром Фробениуса ScG, если $C_G(ScG) = ScG$. Это обстоятельство наводит на мысль искать B-группы в классе групп Фробениуса с примарным абелевым ядром Фробениуса. Нижеследующее предложение доставляет пример B-группы такого типа.

Теорема 4. Пусть G — группа Фробениуса, ядром которой является абелева p-группа P (p — нечетное простое число), а дополнительным множителем — группа 2-го порядка $H = \{1, h\}$. Тогда G является B-группой, цоколь которой совпадает с цоколем подгруппы P. P является единственным максимальным нормальным делителем группы G.

Доказательство 1°. Прежде всего докажем, что всякий нормальный делитель K группы G, не содержащийся в P, совпадает с G. Пусть $N = K \cap P$. Очевидно, N является силовской p-подгруппой группы K. Так как $K \not\subseteq P$, то $|K|$ четно и, следовательно $(K:N) = 2$. Фактор-группа $\bar{G} = G/N$ содержит минимальный нормальный делитель $\overline{K}=K/N$ 2-го порядка, лежащий поэтому в центре $Z(\overline{G})$ группы $\overline{G}$. Из разложения $G=P\cdot H$ вытекает $\overline{G}=\overline{P}\cdot\overline{H}$, где $\overline{P}=P/N$ и $\overline{H}$ — образ подгруппы H при естественном гомоморфизме $g\to\overline{g}$ группы G на $\overline{G}$. Очевидно, $\overline{H}\cong H$ и, следовательно, $|\overline{H}|=2$. Так как $\overline{K}$, также как и $\overline{H}$, является силовской подгруппой группы $\overline{G}$ и так как $\overline{K}\subseteq Z(\overline{G})$, то $\overline{H}=\overline{K}$. Следовательно, $\overline{H}\subseteq Z(\overline{G})$. Это, однако, невозможно, если $\overline{P}\neq\{\overline{1}\}$. Действительно, если $\overline{x}\in\overline{P}^{\#}$, то[1] $\overline{x}=\overline{h}\overline{x}\overline{h}^{-1}=\overline{hxh^{-1}}=\overline{x}^{-1}$, откуда $\overline{x}^2=\overline{1}$, а это противоречит нечетности порядка элемента $\overline{x}$. Итак, $\overline{P}=\{\overline{1}\}$ и, следовательно, $N=P$. Таким образом, $K\supseteq P$. Так как по условию $K\neq P$, то $K=G$.

2. Докажем теперь, что группа G удовлетворяет условиям (I) и (II) теоремы 2 и, следовательно, является B-группой.

Покажем сначала, что группа G удовлетворяет условию (Iа) (см. доказательство теоремы 2). Прежде всего, заметим, что все подгруппы группы P являются нормальными делителями группы G. Действительно, элементы группы G индуцируют на P либо тождественный автоморфизм, либо автоморфизм $x\to x^{-1}$. В обоих случаях все подгруппы группы P остаются инвариантными. Из сделанного замечания вытекает, что минимальные нормальные делители группы G совпадают с минимальными подгруппами группы P[2] и, следовательно, имеют порядок p. Таким образом, все минимальные нормальные делители группы G изоморфны между собой. Любой изоморфизм $x\to x'$ минимального нормального делителя F на минимальный нормальный делитель F' является G-изоморфизмом, ибо $x\to x'$ влечет $x^{-1}\to x'^{-1}$. Итак, цоколь группы G однороден, т. е. условие (Iа) выполнено.

Пусть теперь $K\lhd G$, $K\neq G$. Тогда $K\subseteq P$. Если $K\neq P$, то $\overline{G}=G/K$ является группой Фробениуса с ядром $\overline{P}=P/K$ и дополнением 2-го порядка $\overline{H}=KH/K$, т. е. группа того же типа, что и G. По доказанному ее цоколь однороден.

Однородность цоколя фактор-группы G/P очевидна, ибо $|\mathrm{Sc}(G/P)|=|G/P|=2$. Итак, все фактор-группы группы G имеют однородные цоколи: условие (I) выполнено. Далее, любой главный фактор Φ группы G является минимальным нормальным делителем фактор-группы G/K, где $K\subseteq P$. Если $K\neq P$, то $|\Phi|=p$, если же $K=P$, то $|\Phi|=2$. Таким образом, в любом случае $\dim_G\Phi=1$. Следовательно, условие (II) также выполнено. Вместе с тем, доказано, что G—B-группа.

---

[1] Так как G — группа Фробениуса с ядром P и h — инволюция, принадлежащая дополнению H, то, как известно, для любого $x\in P$ имеет место $hxh^{-1}=x^{-1}$.

[2] На основании доказанного в п. 1 минимальные нормальные делители группы G содержатся в P.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Shoda. Über direkt zerlegbaren Gruppen, Journ. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1—2 (1929).
2. R. P. Dilworth. Proof of a conjecture of finite modular lattice., Ann. of Math., 60, № 2 (1954), 359—364.
3. Э. М. Жмудь. Об изоморфных линейных представлениях конечных групп. «Матем. сб.», т. 38(80), № 4 (1956), 417—430.
4. Э. М. Жмудь. О ядрах гомоморфизмов линейных представлений конечных групп. «Матем. сб.», т. 44(86), № 3 (1958), 353—408.
5. Э. М. Жмудь. Верхние и нижние дополнения в конечных модулярных структурах и теория линейных представлений конечных групп. «Ученые записки механико-матем. ф-та ХГУ им. А. М. Горького и Харьк. матем. об-ва», т. 33 (1967), 6—19.

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ДИЛУОРСА

Г. Ч. Куринной

Около 1930 г. Биркгофом и Орэ была сформулирована гипотеза, согласно которой в каждой конечной модулярной решетке количество элементов, неразложимых в объединение, равно количеству элементов, неразложимых в пересечение.

В 1954 г. Дилуорсом [1] был установлен следующий, более общий факт:

Теорема. Пусть $A(m, L)$ — количество элементов конечной модулярной решетки L, покрывающих m элементов этой решетки, и $B(m, L)$ — количество элементов, покрываемых ровно m элементами из L. Тогда $A(m, L) = B(m, L)$.

Для конечных модулярных решеток с дополнениями утверждение этой теоремы легко вытекает из ее справедливости для простых решеток. Действительно, любая конечная модулярная решетка с дополнениями L разлагается в кардинальное произведение простых решеток. Если $L = L_1 \times L_2 \times \ldots, \times L_r$ такое разложение, то

$$A(m, L) = \sum_{m_1+m_2+\ldots+m_r=m} \prod_{i=1}^{r} A(m_i, L_i),$$

$$B(m, L) = \sum_{m_1+m_2+\ldots+m_r=m} \prod_{i=1}^{r} B(m_i, L_i),$$

откуда и вытекает утверждение, ввиду $A(m_i L_i) = B(m_i, L_i)$.

В настоящей статье дается доказательство теоремы Дилуорса, в отличие от статьи [1], не использующее свойств теоретико-структурной функции Мёбиуса—Вайснера.

В дальнейшем используются следующие обозначения:

$|T|$ — количество элементов конечного множества T;

L — конечная модулярная решетка, $0(L)$ и $1(L)$ ее минимальный и максимальный элементы;

$\subseteq, \cap, \cup$ — теоретико-множественные знаки «включения», «пересечения» и «объединения» соответственно.

Для обозначения отношения частичного порядка, «пересечения» и «объединения» в решетках используются знаки $\geqslant$, $\cdot$, $+$ соответственно.

Если x, $y \in L$, то $x/y = \{z \in L : x \geqslant z \geqslant y\}$; $x > y$ обозначает „x покрывает y“, т. е. $|x/y| = 2$ $x^* = \sum\limits_{y > x} y$, $x_* = \prod\limits_{y < x} y$, $Scx = x^*/x$.

$$A(m, L) = |\{x \in L : |\{y \in L : y > x\}| = m\}|$$

$$B(m, L) = |\{x \in L : |\{y \in L : y < x\}| = m\}|$$

Утверждение 1. Если $x \in L$, то Scx — конечная модулярная решетка с дополнениями.

Модулярность x^*/x следует из модулярности L и, если $z \in x^*/x$, то дополнением к z в Scx будет

$$y_0 + y_1 + \ldots + y_n, \text{ где } y_0 = x$$

$$y_{i+1} \in \{y \in L : y > x,\ y \underline{\leqq} z + y_0 + \ldots + y_i\}\, i = 0, 1, \ldots, n-1$$

и

$$\{y \in L : y > x,\ y \leqslant z + y_0 + y_1 + \ldots + y_n\} = \varnothing.$$

Утверждение 2. Если L — конечная модулярная решетка с дополнениями, то $(1(L))_* = 0(L)$ и $(0(L))^* = 1(L)$.

Если бы утверждение 2 было неверно, то либо $(1(L))_*$, либо $(0(L))^*$ не имело бы дополнения.

Утверждение 3. Если x, $y \in L$ и $x \geqslant y$, то $x^* \geqslant y^*$ и $x_* \geqslant y_*$. Действительно, если $z > y$, то $z + x > x$ либо $z + x = x$. Отсюда $y^* = \sum\limits_{z > y} z \leqslant x + \sum\limits_{z > y} z = \sum\limits_{z > y} (x + z) = x^*$. Аналогично проверяется, что $x_* \geqslant y_*$.

Лемма 1. Конечная решетка L модулярна тогда и только тогда, когда существует подмножество S множества $\{Scx : x \in L\}$ такое, что

(1) для каждого $x \in L$ существует один и только один $Scy \in S$ такой, что $Scx \subseteq Scy$;

(2) для каждого $x \in L$ существует один и только один $Scy \in S$ такой, что $x/x_* \subseteq Scy$;

(3) каждый $Scy \in S$ является модулярной решеткой.

Доказательство. Пусть L — конечная модулярная решетка. Покажем, что множество

$$S = S(L) = \{Scx : x \in L,\ (x^*)_* = x\}$$

удовлетворяет условиям (1), (2) и (3).

Выполнение условия (3) следует из модулярности L.

Покажем, что если $x \in L$, то $Scx \leqslant Sc(x^*)_* \in S$. Используя утв. 2, получаем, что $(x^*)_* \leqslant x$. Используя утв. 2 и 3, получаем, что $((x^*)_*)^* = x^*$, т. е.

$$Scx \subseteq Sc(x^*)_* \text{ и } Sc(x^*)_* \in S.$$

Покажем, что если $x, y, z \in L$, $Scx \subseteq Scy$, $Scx \leqslant Scx$, Scy, $Scz \in S$, то $y=z$. Из утверждения 3 следует, что в этом случае $x^*=y^*=z^*$, а из того, что $Scy, Scz \in S$, следует, что $y = (y^*)_* = (z^*)_* = z$.

Выполнение условия (1) проверено.

Аналогично проверяется выполнение условия (2).

Можно проверить, что условиями (1), (2) и (3) множество $S(L)$ определяется однозначно.

Пусть нам заданы конечная решетка L и множество $S(L)$, удовлетворяющее условиям (1)—(3). Из условий (1) и (3) следует верхняя полумодулярность L, а из условий (2) и (3) следует нижняя полумодулярность.

Лемма 1 доказана.

Введем на $S(L)$ отношение частичного порядка, полагая $Scx_1 \geqslant Scx_2$ при $x_1 \geqslant x_2$.

Лемма 2. Относительно введенного отношения порядка множество $S(L)$ является решеткой.

Доказательство. Покажем, что если Scx, $Scy \in S(L)$, то $Sc(x+y) \in S(L)$.

Из утв. 3 следует, что $x^* \leqslant (x+y)^* \geqslant y^*$ и $(x^*)_* = x \leqslant \leqslant ((x+y)^*)_* \geqslant (y^*)_* = y$, т. е. $((x+y)^*)_* \geqslant (x+y)$. А так как для всех $z \in L$ $(z^*)_* \leqslant z$, то $((x+y)^*)_* = x+y$, т е. $Sc(x+y) \in S$. Отсюда получаем, что для произвольных Scx, $Scy \in S$ точной верхней гранью в S будет $Sc(x+y)$.

Существование точной нижней грани для Scx, $Scy \in S$ следует из того, что $Sc(0(L)) \in S$ и, если $Scz_1 \leqslant Scx$, $Scz_1 \leqslant Scy$, $Scz_2 \leqslant Scx$, $Scz_2 \leqslant Scy$, то $Sc(z_1+z_2) \leqslant Scx, Scy$.

Рассматривая двойственную к L решетку можно доказать, что из того, что Scx, $Scy \in S$, следует, что $Scx \cdot Scy = Sc(x^* \cdot y^*)_*$.

Перейдем собственно к доказательству теоремы 1.

Утверждение 4. Если $a, x, y \in L$; Scx, $Scy \in S$;

$a \in Scx \cap Scy$; $|\{z \in Scx \cap Scy : z > a\}| = m$, то $|\{z \in Scx \cdot Scy : z > a\}| = m$.

Справедливость утверждения 4 следует из того, что $Scx \cap Scy = x^* \cdot y^* / (x+y)$, а $Scx \cdot Scy = x^* \cdot y^* / (x^* \cdot y^*)_*$.

Пусть, если $a \in L$, $T \subseteq S$ и m — целое неотрицательное число,

$$\delta(T) = \begin{cases} 1 \text{ при } |\{y \in \bigcap\limits_{Scx \in T} Scx : y > a\}| = m, a \in \bigcap\limits_{Scx \in T} Scx \\ 0 \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

$$\gamma(a, T) = \gamma(T) = (-1)^{|T|-1} \cdot \delta(T);$$

$$C = \{Scx \in S : a \in Scx, |\{y \in Scx : y > a\}| = m\};$$

и если $s \in C$, то

$$T(s) = \{Scx \in S : a \in Scx,\ Scx \geqslant s\}$$

Лемма 3. Если $a \in L$, то

$$\sum_{T \subseteq S} \gamma(T) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\{y \in L : y > a\}| = m \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Если $|\{y \in L : y > a\}| = m$, то, в силу (1), в левой части (4) отличным от 0 будет только одно слагаемое, оно равно 1.

Если $|\{y \in L : y > a\}| < m$ то, очевидно, все слагаемые в левой части (4) будут равны 0.

Пусть $|\{y \in L : y > a\}| > m$. Если $T \subseteq S$ и $\delta(T) \neq 0$, то, в силу утв. 4, $\prod\limits_{Scx \in T} Scx \in C$. Поэтому

$$\sum_{T \subseteq S} \gamma(T) = \sum_{s \in C} \sum_{T \subseteq T(s)} \gamma(T)$$

и для доказательства леммы 3 достаточно проверить, что если $s \in C$, то

$$\sum_{T \subseteq T(s)} \gamma(T) = 0. \tag{5}$$

Зафиксируем $s \in C$.

Первый шаг. Выберем $T_1 \subseteq T(s)$ так, что $\prod\limits_{Scx \in T_1} Scx = s$ и, если $T \subset T_1$, то $\prod\limits_{Scx \in T} Scx \neq s$.

Тогда левая часть (5) перепишется так:

$$\sum_{T_1 \subseteq T \subseteq T(s)} \gamma(T) + \sum_{T_1 \overline{\subseteq} T \subseteq T(s)} \gamma(T). \tag{6}$$

Так как $a^*/(a^*)_* \overline{\in} T_1$ и $a^*/(a^*)_* \in T(s)$, то

$$\sum_{T_1 \subseteq T \subseteq T(s)} \gamma(T) = 0.$$

Если

$$M_1=\{T:T_1\subseteq T\subseteq T(s),\ \prod_{Scx\in T} Scx=s\}\neq\varnothing,$$

то делаем второй шаг.

Второй шаг. Выбираем $T_2\in M_1$, такое, что если $T\subset T_2$, то $T\overline{\subseteq} M_1$. Тогда (6) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{T_2\subseteq T\subseteq T(s)}\gamma(T)-\sum_{T_1\cup T_2\subseteq T\subseteq T(s)}\gamma(T)+\sum_{T\subseteq T(s),\,T\overline{\supseteq}T_1,\,T\overline{\supseteq}T_2.}\gamma(T) \tag{7}$$

Так как $Sc(a^*)_*\overline{\supseteq}T_1\cup T_2$ и $Sc(a^*)_*\in T(s)$, то в (7) первые две суммы равны 0. И если

$$M_2=\{T:T\subseteq T(s),\ T\overline{\supseteq}T_1,\ T\overline{\supseteq}T_2,\ \prod_{Scx\in T} Scx=s\}\neq\varnothing,$$

делаем третий шаг и т. д.

Через конечное число шагов мы получим

$$M_n=\{T:T\subseteq T(s),\ T\overline{\supseteq}T_1,\dots,T\overline{\supseteq}T_n,\ \prod_{Scx\in T} Scx=s\}=\varnothing$$

и (5), а тем самым и лемма 3 доказана.

Утверждение 5. Если x, $y\in L$, то $Scx\cap Scy$ — решетка с дополнениями.

Справедливость утверждения 5 следует из того, что

$$Scx\cap Scy=x^*\cdot y^*/(x+y)\subseteq Scx$$

На основании леммы 3

$$A(m,L)=\sum_{a\in L}\ \sum_{T\subseteq S}\gamma(a,T).$$

Если L' — решетка двойственная к L, то, очевидно, $A(m,L)=B(m,L')$. Используя утверждение 5 и справедливость теоремы для конечных модулярных решеток с дополнениями, получаем $B(m,L)=B(m,L')=A(m,L)$, что и доказывает теорему Дилуорса.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. P. Dilworth. Proof of a conjecture on finite modular lattices, Ann. of Math., vol. 60 (1954) 359—364.

КОММУТАТИВНЫЕ СВЯЗКИ

В. Я. Шварц

Понятие связки является одним из фундаментальных в теории полугрупп. Естественно возникает вопрос о возможности применения связок, и прежде всего, коммутативных связок для изучения позиционных оперативов — алгебраических систем с одной n-арной операцией, подчиненной тождествам типа ассоциативности. В настоящей работе с помощью обратных спектров описано строение позиционных оперативов, разложенных в коммутативную связку своих $n\pi$-подгрупп. Тем самым обобщен известный результат Клиффорда [3, 6, 7] о строении вполне регулярных инверсных полугрупп.

§ 1. Определения

1. Пусть $\pi = \{\pi_k, \ \sigma_k\}_{k=1}^{k=n}$ — семейство подстановок множества $I = \{1, \ 2, \dots, n\}$ таких, что $\sigma_k k = k$, $\pi_1 = \sigma_1 = \pi_n = \sigma_n = \varepsilon$, где ε — тождественная подстановка.

Алгебра S с одной всюду определенной n-арной операцией

$$(x_1 x_2 \dots x_n) = x \, (x_i, \ x \in S) \tag{1}$$

называется позиционным $n\pi$-оперативом (π-оперативом [1]), если при любых x_i, $y_i \in S$

$$(x_1 x_2 \dots x_{k-1} (y_1 y_2 \dots y_n) x_{k+1} \dots x_n) = ((x_{\sigma_k 1} x_{\sigma_k 2} \dots x_{\sigma_k (k-1)} y_{\pi_k 1} \dots$$

$$\dots y_{\pi_k (n-k+1)}) y_{\pi_k (n-k+2)} \dots y_{\pi_k n} x_{\sigma_k (k+1)} \dots x_{\sigma_k n}). \tag{2}$$

2. Пусть $A, B, \dots, C$ — подмножества S. Часто применяемая в дальнейшем запись $(A^\alpha B^\beta \dots C^\gamma)$ означает множество всех произведений вида $(a_1 a_2 \dots a_\alpha b_1, b_2 \dots b_\beta \dots c_1 \dots c_\gamma)$, где $a_i \in A$, $b_j \in B, \dots$, $c_k \in C$ $(\alpha + \beta + \dots + \gamma = n)$. Если одно из подмножеств $A, B, \dots, C$ состоит из одного элемента (например, $B = \{b\}$), то будем писать $(A^\alpha b^\beta \dots C^\gamma$; A° — пустой символ. Запись $(x_1 x_2 \dots, x_{k-1} \cdot x_k \cdot x_{k+1} \dots x_n)$ означает то же, что и $(x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k x_{k+1} \dots x_n)$.

3. Пусть K — произвольное подмножество I. Непустое подмножество A оператива S называется его K-идеалом, если $(S^{k-1} A S^{n-k}) \subseteq A$ для любого $k \in K$. K-идеал называется правым, если $K = \{1\}$; левым, если $K = \{n\}$; двусторонним, если $K = \{1, n\}$. При $K = I$ говорят просто об идеале [1].

Элемент $a \in S$ называется K-обратимым, если $(S^{x-1} a \ S^{n-k}) = S$ для всякого $k \in K$. K-обратимый элемент называется двусторонне обратимым (обратимым), если $k=\{1, n\}$ (соответственно, $K=I$) [1]. Если все элементы оператива S являются K-обратимыми, то он, очевидно, не содержит собственных K-идеалов и наоборот.

Если в равенстве (1) любой из элементов x_i определяется остальными n элементами (т. е. все элементы обратимы), то такой $n\pi$ — оператив назовем $n\pi$ — группой. Как доказано в [1], всякий двусторонне обратимый элемент $n\pi$ — оператива S обратим. Отсюда вытекает, что $n\pi$ — оператив S является $n\pi$ — группой тогда и только тогда, когда он не содержит собственных левых или правых идеалов.

4. Конгруентность σ на оперативе S по аналогии с теорией полугрупп [3] называется связкой, если каждый ее класс является подоперативом. Очевидно, каждый элемент α фактор-оператива $\Gamma=S/\sigma$ идемпотентен, т. е. $(\alpha^n)=\alpha$. Полный прообраз F_α элемента $\alpha \in \Gamma$ при естественном гомоморфизме S на S/σ (т. е. соответствующий класс конгруентности σ) назовем компонентной связки. Будем говорить также, что оператив $S = \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} F_\alpha$ разложен в связку своих компонент $F_\alpha (\alpha \in \Gamma)$ и наоборот, что оперативы F_α образуют связку S.

Оператив Γ назовем коммутативным, если $(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n) = (\alpha_{\varphi_1}\alpha_{\varphi_2} \ldots \alpha_{\varphi_n})$ для любой подстановки φ множества I $\alpha_i \in \Gamma$, связку σ — коммутативной, если оператив Γ коммутативен. Множество Σ всех связок на оперативе S упорядочено отношением включения: $\sigma \leqslant \sigma'$ тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in S$ из $x\sigma y$ следует $x\sigma' y$.

§ 2. Главные идеалы

5. Обозначим через $M\langle a\rangle$ главный идеал оператива S, порожденный элементом a, т. е. пересечение всех идеалов S, содержащих a. Введем на множестве S следующее бинарное отношение J [7]: $aJb \longleftrightarrow M\langle a\rangle = M\langle b\rangle$. Оператив S разбивается на непересекающиеся J — классы, которые будем обозначать через D_i. Множество всех таких индексов i обозначим через Δ, главный идеал, соответствующий J — классу D_i — через M_i.

Всюду далее $S=\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} F_\alpha$ — $n\pi$ — оператив, являющийся коммутативной связкой $n\pi$ — групп $F_\alpha(\alpha \in \Gamma)$.

Теорема. J — классы D_i оператива S образуют коммутативную связку $n\pi$ — групп.

Доказательство основано на леммах пп. 6—10.

6. *Лемма*. Если L — левый идеал S и $F_\alpha \cap L \neq \varnothing$, то $F_\alpha \subset L$.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in F_\alpha$; $x_1 \in F_\alpha \cap L$. Поскольку $(F_\alpha^n) = F_\alpha$, то найдутся $y_i \in F_\alpha$ такие, что $x_2 = (y_1 y_2 \ldots y_{n-1} x_1)$. Отсюда следует $x_2 \in (F_\alpha^{n-1} x_1) \subseteq (S^{n-1} L) \subseteq L$.

Такое же утверждение справедливо и для правого идеала R оператива S.

Следствие. Всякий двусторонний идеал A оператива S есть идеал S.

Действительно, поскольку $(F_\alpha^n) = F_\alpha$, то $(A^n) = A$ и наше утверждение вытекает из теоремы п. 2.4 работы [1].

7. ***Лемма.*** Главные идеалы $M\langle a\rangle$ оператива S при произвольном $k \in I$ имеют вид

$$M\langle a\rangle = (S^{k-1} a S^{n-k}).$$

Доказательство. Очевидно, множество (aS^{n-1}) есть правый идеал S. При любых $x_i \in S$ произведения $x = (x_1 x_2 \ldots x_{n-1} a)$ и $x' = (a x_2 x_3 \ldots x_{n-1} x_1)$ лежат в одной $n\pi$ — группе F_α, поэтому найдутся элементы $z_i \in F_\alpha$ такие, что $x = (x' z_2 z_3 \ldots z_n)$. Следовательно, $(x_1 x_2 \ldots x_{n-1} (aS^{n-1})) = ((x_1 x_2 \ldots x_{n-1} a)\ S^{n-1}) = (xS^{n-1}) = (((ax_2 x_3 \ldots x_{n-1} x_1)\, z_2 z_3 \ldots z_n)\, S^{n-1}) \subseteq (((aS^{n-1}) \times S^{n-1})\, S^{n-1}) \subseteq (aS^{n-1})$. Итак, $M_1 = (aS^{n-1}$— двусторонний идеал S. Точно так же можно показать, что $(S^{n-1} a)$—двусторонний идеал S. Множество $(S^{k-1}\ a\ S^{n-k})$ при $1 < k < n$, очевидно, является двусторонним идеалом S. Итак, $M^k = (S^{k-1} a S^{n-k}$ есть двусторонний идеал S при любом $k \in I$. По следствию из предыдущей леммы, M_k— идеал S. Поскольку $a \in M_k \subseteq M\langle a\rangle$,то $M_k = M\langle a\rangle$.

Следствие. Для произвольных x_i, $y_i \in D_i$, $k \in I$ найдутся элементы $z_j \in S$ такие, что $x_i = (z_1 z_2 \ldots z_{k-1} \cdot y_i \cdot z_{k+1} \ldots z_n)$.

8. ***Лемма.*** Если $F_\alpha \cap D_i \neq \varnothing$, то $F_\alpha \subset D_i$.

Действительно, пусть x, $y \in F_\alpha$. Тогда, учитывая лемму п. 7, получаем: $x \in (F_\alpha^{n-1} y) \subset (S^{n-1} y) = M\langle y\rangle$ и $M\langle x\rangle = (S^{n-1} x) \subseteq (S^{n-1} M\langle y\rangle) \subseteq M\langle y\rangle$. Точно так же получаем: $M\langle y\rangle \subseteq M\langle x\rangle$. Итак, $M\langle x\rangle = M\langle y\rangle$, т. е. из $x \in D_i$ вытекает $y \in D_i$.

Следствие. Пусть M — идеал S. Тогда, если $F_\alpha \cap M \neq \varnothing$, то $F_\alpha \subseteq M$.

9. ***Лемма.*** J — классы D_i оператива S являются $n\pi$ — группами.

Доказательство. Покажем вначале, что если L — левый идеал S, $D_i \cap L \neq \varnothing$, то $D_i \subseteq L$. Действительно, пусть x_1, $x_2 \in D_i$; $x_1 \in D_i \cap L$. Тогда в силу $(S^{n-1} x_1) = (S^{n-1} x_2)$ имеем: $x_2 \in (S^{n-1} x_1) \subseteq (S^{n-1} L) \subseteq L$. Нетрудно проверить, что множество $T = ((S^{n-1} x_1)^{n-1} x_1$ является левым идеалом S, содержащим x_1. По доказанному ранее, из $x_1 \in D_i$ следует: $D_i \subset T$, т. е. для всякого $x_2 \in D_i$ найдутся такие $b_j \in (S^{n-1} x_1)$, что $x_2 = (b_1 b_2 \ldots b_{n-1} x_1)$. Множество $D_i' = M_i \setminus D_i = (S^{n-1} x_1) \setminus D_i$ не содержит x_2. Если хоть один из элементов b_j принадлежит D_i', то $x_2 \in D_i'$, ибо, как показано в [2], D_i' есть идеал S. Поскольку $x_2 \in D_i'$ (т. е. $x_2 \bar{\in} D_i'$), то все элементы b_j принадлежат D_i', Тогда $x_2 \in (D_i^{n-1} x_1)$. Пусть $x_1 \in L_i$, где L_i — левый идеал D_i. Тогда $x_2 \in (D_i^{n-1}x_1) \subseteq (D_i^{n-1} L_i) \subseteq L_i$, т. е. $D_i \subseteq L_i$. Итак, $D_i = L_i$.

Так же можно показать, что подоператив D_i не содержит и собственных правых идеалов, т. е. он является $n\pi$ —группой. Лемма доказана.

10. Обозначим через D множество J — классов оператива S; через M — множество соответствующих главных идеалов (т. е. $D = \{D_i\}$, $M = \{M_i\}$ $(i \in \Delta)$).

Лемма. Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_n \in M$. Тогда $(M_1 M_2 \ldots M_n) = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$.

Доказательство. Включение $(M_1 M_2 \ldots M_n) \subseteq M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$ очевидно. Докажем обратное включение. Обозначим $M = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$. Пусть $x \in F_\alpha \cap M$. По следствию из леммы п. 8, $F_\alpha \subset M$. Из $(F_\alpha^n) = F_\alpha$ вытекает, что $x = (x_1 x_2 \ldots x_n)$ при некоторых $x_i \in F_\alpha$. В силу определения M, можно считать, что $x_1 \in M_1 x_2 \in M_2, \ldots, x_n \in M_n)$. Отсюда имеем $x \in (M_1, M_2, \ldots, M_n)$, т. е. $M \subseteq (M_1 M_2 \ldots M_n$, что и требовалось доказать.

11. Переходим к доказательству теоремы п. 5.

Пусть $D_1, D_2, \ldots, D_n \in D$, $x_i \in D_i$. Тогда $M\langle(x_1 x_2 \ldots x_n)\rangle = (S^{n-1}(x_1 x_2 \ldots, x_n)) \subseteq (S^{n-1}(S^{k-1} x_k S^{n-k})) \subseteq M_k$, т. е.

$$M\langle(x_1 x_2 \ldots x_n)\rangle \subseteq M = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n.$$

Пусть $y \in M$. По лемме п. 10, $y = (z_1 z_2 \ldots z_n)$, где $z_i \in M_i$. Поскольку $z_1 \in M_1 = (x_1 S^{n-1})$, то при некоторых $a_i \in S$ имеем $y = ((x_1 a_2 a_3 \ldots a_n) z_2 z_3, \ldots z_n) = (t_1(v_1 v_2 \ldots v_n) t_3 t_4 \ldots t_n)$, где среди сомножителей v_j один равен z_2, остальные — a_k. Произведение $v = (v_1 v_2 \ldots v_n)$ принадлежит M_2, т. е. найдутся такие элементы $b_i \in S$, что при $r = \pi_2 1$ $v = (b_1 b_2 \ldots b_{r-1} x_2 b_{r+1} \ldots b_n)$. Теперь $y = (t_1 (b_1 b_2 \ldots b_{r-1} x_2 b_{r+1} \ldots b_n) t_3 t_4 \ldots t_n) = ((x_1 x_2 b_3' \ldots b_n') \times b_2' x_3 x_4 \ldots x_n)$, где $\{b_2', b_3', \ldots, b_n'\} = \{b_2, b_3, \ldots, b_n\}$.

Продолжая действовать таким же образом, в конце концов при некоторых $c_e \in S$ получим $y = ((x_1 x_2 \ldots x_n) c_2 c_3 \ldots c_n) \in M < <(x_1 x_2 \ldots x_n)$. Итак, $M\langle x_1 x_2 \ldots x_n)\rangle = (M_1 M_2 \ldots M_n)$. Последнее равенство показывает, что $M\ (x_1 x_2 \ldots x_n)\rangle$ не зависит от выбора представителей x_i в J — классах D_i, а зависит лишь от самих J — классов. Это означает, что произведение любого набора элементов, взятых из данных J — классов D_i, порождает один и тот же главный идеал (он равен M), т. е. все такие произведения лежат в одном J — классе. Тем самым доказано, что подоперативы D_i образуют связку σ_0, каждая компонента которой, по лемме п. 9, есть $n\pi$ — группа. Ее коммутативность следует из коммутативности операции пересечения множеств.

12. **Теорема.** Эквивалентность σ_0 на оперативе S (пп. 5, 11) является максимальной коммутативной связкой (п. 4), все компоненты которой — $n\pi$ — группы.

Справедливость теоремы вытекает из пп. 8 и 11.

2*

§ 3. Строение максимальных коммутативных связок

13. Пусть Γ — нижняя полуструктура, т. е. частично упорядоченное множество, имеющее точную нижнюю грань для любой пары своих элементов; $F=\{F_\alpha\}$ $(\alpha\in\Gamma)$ — множество $n\pi$-групп F_α с одним и тем же семейством $\pi=\{\pi_k,\ \sigma_k\}_{k=1}^{k=n}$. Пусть, наконец, $\Phi=\{\varphi_\alpha^\beta\}$ $(\alpha,\beta\in\Gamma)$ — система гомоморфизмов $\varphi_\alpha^\beta: F_\beta\to F_\alpha$, определенная для таких пар α,β, что $\alpha\leqslant\beta$, причем φ_α^α — тождественные отображения и

$$\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma\to\varphi_\alpha^\beta\varphi_\beta^\gamma=\varphi_\alpha^\gamma. \tag{3}$$

Такая система $\{F,\ \Phi\}$ называется обратным спектром над множеством Γ [4, 5].

14. Определим на множестве индексов Γ n-арную операцию $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)=\beta$, если β есть точная нижняя грань множества $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ $(\alpha_i,\beta\in\Gamma)$. Относительно этой операции Γ является, очевидно, коммутативным n-оперативом идемпотентов (см. п. 4). Поскольку из $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)=\beta$ следует $\beta\leqslant\alpha_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$, то существуют гомоморфизмы $\varphi_\beta^{\alpha_i}: F_{\alpha_i}\to F_\beta$ и на множестве $S=\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}F_\alpha$ можно определить n-арную операцию: для любых $x_i\in F_{\alpha_i}$ $(x_1x_2\ldots x_n)=(\varphi_\beta^{\alpha_1}x_1\cdot\varphi_\beta^{\alpha_2}x_2\ldots\cdot\varphi_\beta^{\alpha_n}x_n)$.
(4)

Обозначим полученный оператив через $S(\Gamma,\ F,\ \Phi)$.

15. **Теорема.** $S(\Gamma,F,\Phi)$ является: 1) $n\pi$—оперативом; 2) максимальной коммутативной связкой своих $n\pi$ — подгрупп F_α.

Доказательство. Из формулы (4) и условий, накладываемых на систему Φ, следует, что S является $n\pi$ — оперативом с той же системой $\pi=\{\pi_k,\ \sigma_k\}_{k=1}^{k=n}$, что и каждая $n\pi$ — группа F_α. Кроме того, в силу (4) S является связкой своих $n\pi$ — подгрупп F_α. Докажем ее максимальность. В силу идемпотентности и коммутативности оператива Γ, его главные идеалы имеют вид: $M\langle\alpha\rangle=(\Gamma^{n-1}\alpha)$. Если $M\langle\alpha\rangle=M\langle\beta\rangle$, то $\alpha\in(\Gamma^{n-1}\beta)$, $\beta\in(\Gamma^{n-1}\alpha)$. Это означает, что $\alpha\leqslant\beta$, $\beta\leqslant\alpha$, т. е. $\alpha=\beta$. Итак, каждый элемент $\alpha\in\Gamma$ образует J — класс оператива Γ. Отсюда следует, что каждая $n\pi$ — группа F_α $(\alpha\in\Gamma)$ образует J - класс оператива S. В силу теоремы п. 5 связка $S=\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}F_\alpha$ максимальна.

16. **Теорема.** Всякий $n\pi$ — оператив S, являющийся максимальной коммутативной связкой своих $n\pi$ — подгрупп F_α $(\alpha\in\Gamma)$, изоморфен некоторому оперативу S $(\Gamma,\ F,\ \Phi)$.

Доказательство теоремы приведено в п. 19.

17. Определим на множестве Γ бинарное отношение: $\alpha<\beta$ тогда и только тогда, когда $M_\alpha\subseteq M_\beta$. Здесь M_α — главный идеал, порожденный подоперативом F_α; по теореме п. 5, F_α является J-классом. Легко показать, что это отношение

есть частичная упорядоченность и Г является нижней полуструктурой относительно отношения $<$. В силу включения $M\langle(x_1 x_2 \ldots x_n)\rangle \subseteq M_{j_k} (x_k \in F_{j_k};\ k = 1,\ 2, \ldots n;\ j_k \in \Gamma)$, из $(F_{j_1} F_{j_2} \ldots \ldots F_{j_n}) \subseteq F_i$ вытекает $i < j_k$. С другой стороны, из $i < j$ следует $(F_i^{n-1} F_j) \subseteq F_i$. Действительно, пусть $c_k \in F_i$, $x_j \in F_j$. Тогда $M\langle(c_1 c_2 \ldots c_{n-1} x_j)\rangle \subseteq M\langle c_k\rangle = M_i$, а из $i < j$ следует, что $M_i \subseteq M\langle(c_1 c_2 \ldots c_{n-1} x_j)\rangle$. Итак, $M\langle(c_1 c_2 \ldots c_{n-1} x_j)\rangle = M_i$, т. е. $(c_1 c_2 \ldots c_{n-1} x_j) \in F_i$, что и требовалось. Учитывая, что $(F_\alpha^n) = F_\alpha (\alpha \in \Gamma)$, при $i < j$ получаем: для всякого $c_i \in F_i$, $x_j \in F_j$ найдется элемент $x_i \in F_i$ такой, что $(c_i^{n-1} x_j) = (c_i^{n-1} x_i)$. Этим равенством определено некоторое отображение φ_i^j оператива F_j в оператив F_i $(\varphi_i^j x_j = x_i)$. Из $\pi_n = \sigma_n = \varepsilon$ (п. 1) и из доказательства теоремы п. 2.1 в работе [I] для отображения φ_i^j при любых $z_l \in F_i$, $x_j \in F_j$, $k \in I$ следует справедливость равенства:

$$(z_1 z_2 \ldots z_{k-1} \cdot x_j \cdot z_{k+1} \ldots z_n) = (z_1 z_2 \ldots z_{k-1} \cdot \varphi_i^j x_j \cdot z_{k+1} \ldots z_n). \tag{5}$$

18. ***Лемма.*** Отображения φ_i^j являются гомоморфизмами, удовлетворяющими условию (3).

Доказательство. Пусть $c_k \in F_i$, $x_\alpha \in F_j$. Тогда $t = (c_1 c_2 \ldots c_{n-1} \times \varphi_i^j (x_1 x_2 \ldots x_n)) = (c_1 c_2 \ldots c_{n-1} (x_1 x_2 \ldots x_n)) = ((c_1 c_2 \ldots c_{n-1} x_1) x_2 \ldots \ldots x_n) ((c_1 c_2 \ldots c_{n-1} \cdot \varphi_i^j x_1) x_2 \ldots x_n) = (z_1 (y_1 y_2 \ldots y_n) z_3 \ldots z_n)$. В последнем выражении один из элементов y_r равен x_2, остальные принадлежат F_i. В силу (5) в произведении $(y_1 y_2 \ldots y_n)$ элемент x_2 можно заменить на $\varphi_i^j x_2$. Сдвинув скобки, как в (2), на первое место, получим $t = ((c_1 c_2 \ldots c_{n-1} \cdot \varphi_i^j x_1) \cdot \varphi_i^j x_2 \times x_3 x_4 \ldots x_n)$. Теперь, сдвинув скобки на третье место, заменив, опять-таки в силу (5), x_3 на $\varphi_i^j x_3$ и вернув скобки на первое место, получим $t = ((c_1 c_2 \ldots c_{n-1} \cdot \varphi_i^j x_1) \cdot \varphi_i^j x_2 \cdot \varphi_i^j x_3 \cdot x_4 x_5 \ldots \ldots x_n)$. Продолжая действовать так же, в конце концов получим:
$t = ((c_1 c_2 \ldots c_{n-1} \cdot \varphi_i^j x_1) \cdot \varphi_i^j x_2 \cdot \varphi_i^j x_3 \cdot \ldots \cdot \varphi_i^j x_n) = (c_1 c_2 \ldots c_{n-1} (\varphi_i^j x_1 \cdot \varphi_i^j x_2 \cdot \ldots \ldots \cdot \varphi_i^j x_n))$. Отсюда следует, что φ_i^j — гомоморфизм F_j в F_i.

Пусть $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$; $y \in F_\beta$; $z \in F_\alpha$; $x \in F_\beta$. Тогда $t = (z^{n-1} (y^{n-1} x)) = (z^{n-1} \cdot \varphi_\alpha^\beta (y^{n-1} \cdot \varphi_\beta^\gamma x)) \in F_\alpha$. Поскольку φ_α^β — гомоморфизм, то

$$t = (z^{n-1} ((\varphi_\alpha^\beta y)^{n-1} \cdot \varphi_\alpha^\beta \varphi_\beta^\gamma x)). \tag{6}$$

С другой стороны $t = ((z^{n-1} y) y^{n-2} x) = ((z^{n-1} \cdot \varphi_\alpha^\beta y) y^{n-2} x)$.

Применяя метод, использованный в первой части доказательства, получаем:

$$t = (z^{n-1} ((\varphi_\alpha^\beta y)^{n-1} \cdot \varphi_\alpha^\gamma x)) \tag{7}$$

Из (6) и (7) вытекает $\varphi_\alpha^\beta \varphi_\beta^\gamma = \varphi_\alpha^\gamma$.

19. *Доказательство* теоремы п. 16.

Частичная упорядоченность, введенная в п. 17, такова, что для каждой пары индексов (α, β) точной нижней гранью будет $\gamma = (\alpha\beta^{n-1})$. Для пар (i, j) таких, что $i < j$, в п. 17 определены отображения φ_i^j; $F_j \to F_i$, удовлетворяющие, в силу леммы п. 18 условиям, накладываемым на систему Φ обратного спектра. Остается показать, что операцию в S можно определить формулой (4). Пусть $(F_{\alpha_1} F_{\alpha_2} \dots F_{\alpha_n}) \subseteq F_\beta$; $x_i \in F_{\alpha i}$, $c_\beta \in F_\beta$. Тогда произведения $x_\beta = (x_1 x_2 \dots x_n)$ и $y_\beta = (c_\beta^{n-1} \; x_\beta)$ принадлежит F_β. Как показано в пп. 17, 18, $\beta < \alpha_i$ и существуют гомоморфизмы $\varphi_\beta^{\alpha_i} : F_{\alpha_i} \to F_\beta$. Используя метод, примененный в доказательстве леммы п. 18, получаем $y = (c_\beta^{n-1} (\varphi_\beta^{\alpha_1} x_1 \cdot \varphi_\beta^{\alpha_2} x_2 \cdot \dots \cdot \varphi_\beta^{\alpha} x_n)$. Отсюда вытекает требуемый результат $(x_1 x_2 \dots x_n) = (\varphi_\beta^{\alpha_1} x_1 \cdot \varphi_\beta^{\alpha_2} x_2 \cdot \dots \cdot \varphi_\beta^{\alpha_n} x_n)$.

В заключение приношу глубокую благодарность профессору Л. М. Глускину за постановку задачи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Глускин. Позиционные оперативы. «Матем. сб.», 1965, 68, 110, 3, 444—472.

2. Л. М. Глускин. Минимальные идеалы оператива. «Матем. записки», Свердловск, 1970, т. VII, тетрадь 3, 56—60.

3. Е. С. Ляпин. Полугруппы. М., Физматгиз, 1960.

4. А. Стинрод, С. Эйленберг. Основания алгебраической топологии. М., Физматгиз, 1958.

5. Э. Спеньер. Алгебраическая топология. М., «Мир», 1971.

6. A. H. Clifford. Semi — groups admitting relative inverses. Ann. Math, (2), 42, 1941, 1037—1049.

7. A. H. Clifford and G. B. Preston. The algebraic theory of semigroups., v. I, Providence., 1961.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ТОЧНОЙ ЛЕВОИНВАРИАНТНОЙ МЕТРИКИ НА ГРУППАХ

В. Н. Калюжный

Метрика ρ на группе G называется левоинвариантной, если все левые сдвиги группы G являются изометриями, т. е. группа изометрий $I(\rho)$ содержит группу левых сдвигов L_G. Левоинвариантную метрику назовем точной, если $I(\rho) = L_G$. Прежде, чем сформулировать основной результат, введем один класс групп.

Группу G назовем группой кватернионного типа, если она содержит абелеву подгруппу A индекса 2 и показателя *, отлич-

---

* Показателем группы G называется такое наименьшее натуральное m, что $g^m = e$ для всех $g \in G$.

ного от 2, содержащую такой элемент d второго порядка, что для любых $b \overline{\in} A$ и $a \in A$ выполняются равенства: $b^2 = d$, $b^{-1}ab = a^{-1}$.

Примером группы кватернионного типа может служить группа обобщенных кватернионов. Группа кватернионного типа, как легко убедиться, не может быть абелевой.

Теорема 1. Если мощность группы G не выше континуума, то для существования на ней точной левоинвариантной метрики необходимо и достаточно, чтобы в абелевом случае она имела показатель 2, а в неабелевом случае не являлась группой кватернионного типа.

Пусть S — группа подстановок множества M, т. е. произвольная группа взаимно однозначных отображений множества M на себя. При каких условиях существует такая метрика ρ на M что S является группой изометрий, т. е. $I(\rho) = S$? Этот вопрос тесно связан с предыдущим, так как для существования на группе G точной левоинвариантной метрики, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы группа L_G была группой изометрий на множестве G.

Обозначим через $M^{(2)}$ множество неупорядоченных пар $\{x, y\} \subset M$, таких, что $x \neq y$. Произвольное подмножество $\Gamma \subset M^{(2)}$ определяет на множестве M граф, ребрами которого служат пары множества Γ. Введем в рассмотрение группу $\mathrm{Aut}\,\Gamma$ автоморфизмов графа Γ. Группой автоморфизмов пустого графа считаем группу всех подстановок множества M.

Теорема 2. Для того чтобы группа подстановок S множества M была группой изометрий, необходимо и достаточно, чтобы множество $M^{(2)}$ допускало разбиение $\Omega = \{\Gamma_\lambda\}$ не более, чем на континуум классов Γ_λ, такое, что

$$S = \bigcap_\lambda \mathrm{Aut}\,\Gamma_\lambda \qquad (1)$$

Доказательство. Для любого числа λ определим граф Γ_λ, полагая $\{x, y\} \in \Gamma_\lambda$ тогда и только тогда, когда $\rho(x, y) = \lambda$ (для некоторых λ граф Γ_λ может быть пустым). Семейство $\Omega = \{\Gamma_\lambda\}$, очевидно, является разбиением множества $M^{(2)}$ не более чем на континуум классов, и, как легко установить,

$$I(\rho) = \bigcap_\lambda \mathrm{Aut}\,\Gamma_\lambda. \qquad (2)$$

Таким образом, условие необходимо.

Обратно, пусть условие выполнено. Можно считать, что классы семейства Ω занумерованы числами из отрезка $1 \leqslant \lambda \leqslant 2$. Положим $\rho(x, y) = \lambda$ тогда и только тогда, когда

$\{x, y\} \in \Gamma_\lambda$; $\rho(x, x) = 0$. Легко видеть, что ρ — метрика. Определяемое ею разбиение совпадает с Ω. Но тогда из (1) и (2) видно, что $S = I(\rho)$. Теорема 2 доказана.

Группа подстановок S действует на множестве $M^{(2)}$ естественным образом. Обозначим через Ω_S разбиение множества $M^{(2)}$ на орбиты $\Gamma\{x, y\}$ под действием группы S. Положим

$$\hat{S} = \bigcap \operatorname{Aut} \Gamma\{x, y\}, \tag{3}$$

где пересечение взято по всем орбитам. Ясно, что $S \subset \hat{S}$. Очевидно, $\varphi \in \hat{S}$ тогда и только тогда, когда для всех $\{x, y\} \in M^2$ справедливо равенство $\varphi(\Gamma\{x, y\}) = \Gamma\{\varphi(x), \varphi(y)\}$.

Следствие. Группа подстановок S множества M, мощность которого не выше континуума, является группой изометрий тогда и только тогда, когда $S = \hat{S}$.

Доказательство. Если S есть группа изометрий, то справедливо равенство (1). Поскольку разбиение Ω_S мельче, чем Ω, то $\hat{S} \subset S$, и, следовательно, $\hat{S} = S$. Обратно, если $\hat{S} = S$, то равенство (3) превращается в (1). Разбиение Ω_S состоит не более, чем из континуума классов. Следовательно, S — группа изометрий.

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Лемма 1. Группа L_G не является группой изометрий тогда и только тогда, когда существует подмножество $T \subset G$, обладающее следующими свойствами: 1) $T \neq G$; 2) если $g, h \,\overline{\in}\, T$, то $g^2 = h^2$ или $gh = hg$; 3) множество C элементов x, таких что $x^2 = e$, содержится в множестве T; 4) если $t \in T$, то $t^{-1} \in T$; 5) если $t \in T$, $g \,\overline{\in}\, T$, то $tgt = g$.

Доказательство. В силу следствия, утверждение леммы эквивалентно тому, что $\hat{L}_G \neq L_G$. Если группа подстановок $\hat{L}_G$ регулярна на G (т. е. неединичные подстановки действуют без неподвижных точек), то, как легко убедиться, $\hat{L}_G = L_G$. Значит, существует такая подстановка $\varphi \in \hat{L}_G \setminus L_G$, что $\varphi(x) = x$ для некоторого $x \in G$. Можно считать, что $x = e$. Легко видеть, что для орбит группы L_G равенство $\Gamma\{a, b\} = \Gamma\{x, y\}$ имеет место тогда и только тогда, когда $a^{-1}b = x^{-1}y$ или $a^{-1}b = y^{-1}x$. Отсюда следует, что для любого $g \in G$ выполняется $\varphi(g) = g$ или $\varphi(g) = g^{-1}$. Пусть T — множество неподвижных элементов подстановки φ. Нетрудно проверить, что T обладает нужными свойствами. Обратно, любое такое подмножество T определяет подстановку $\varphi \in \overline{L}_G \setminus L_G$ по правилу: $\varphi(x) = x$, если $x \in T$, $\varphi(x) = x^{-1}$, если $x \,\overline{\in}\, T$.

Выясним строение групп, подчиняющихся требованиям леммы 1.

Пусть группа G абелева. Очевидно, $C \neq G$, т. е. G не является группой показателя 2. Обратно, если показатель группы G не равен 2, то условию леммы 1 можно удовлетворить, положим $T=C$.

Пусть группа G неабелева.

Группа кватернионного типа удовлетворяет условию леммы 1 при $T=A$. Обратно, пусть группа G удовлетворяет условию леммы 1. Покажем, что G — группа кватернионного типа.

***Лемма** 2.* Если $t \in T$, $g \bar{\in} T$, то $tg \bar{\in} T$.

Доказательство. Если $tg \in T$, то по свойству 5) $tg \cdot g \cdot tg = g$. Отсюда $g^2 = t^{-2}$. Значит, существует такой элемент $c \in G$, что для всех $x \in G$ выполняется $x^2 = c$. Очевидно, что $c = e$. Следовательно, группа G абелева — противоречие.

Покажем, что подмножество T является подгруппой. Пусть $t \in T$, $g \bar{\in} T$. С помощью леммы 2 легко убедиться, что для любого натурального n выполняется $t^n g \in G \setminus T$. По свойству 4), $t^{-1} \in T$, и аналогично $t^{-n} g \in G \setminus T$. Значит, $\langle t \rangle g \subset G \setminus T$, где $\langle t \rangle$ — подгруппа, порожденная элементом t. Таким образом,

$$G \setminus T = \bigcup_g \langle t \rangle g,$$

где элемент g пробегает множество $G \setminus T$. Отсюда следует, что и T есть объединение классов смежности по подгруппе $\langle t \rangle$. Итак, для любого $t \in T$ справедливо равенство:

$$T = \bigcup_x \langle t \rangle x,$$

откуда видно, что если $t \in T$, то $tT = T$. Отсюда и из свойств 4) следует, что T — подгруппа.

Покажем, что подгруппа T абелева. Свойство 5) элементов t, s, $ts \in T$, $g \bar{\in} T$ дает: $tgt = g$, $sgs = g$, $ts \cdot g \cdot ts = g$. Отсюда $st = ts$.

Покажем, что если $T = C$, то группа G гамильтонова, т. е. содержит только инвариантные подгруппы. Пусть H — произвольная подгруппа группы G. Элемент $h \in H$ будем сопрягать элементом $g \in G$. Ограничимся рассмотрением случая, когда g, $h \bar{\in} T$. По свойству 2) имеем две возможности: $gh = hg$ и $g^2 = h^2$. Если $gh = hg$, то $g^{-1}hg = h \in H$. Пусть $g^2 = h^2$, причем $gh = T$. Так как $T = C$, то $(gh)^2 = e$, откуда $g^{-1}hg = g^{-2}h^{-1}$. Следовательно, $g^{-1}hg = h^{-3} \in H$. Пусть теперь $gh \bar{\in} T$. По свойству 2) элементов g, $hg \bar{\in} T$, имеем $g \cdot hg = hg \cdot g$, откуда $gh = hg$, или $g^2 = (hg)^2$, откуда $g^{-1}hg = h^{-1} \in H$. Итак, подгруппа H инвариантна, стало быть группа G гамильтонова.

Любая гамильтонова группа K имеет вид $K = Q \times V \times W$, где $Q = [\pm e, \pm i, \pm j, \pm k]$ — группа кватернионов, V — абелева группа показателя 2, W — абелева группа, каждый элемент которой конечного нечетного порядка [см. 1, 213].

Покажем, что у группы G сомножитель W отсутствует. Пусть u, $w \in W$. Пользуясь свойством 2) элементов iu, jw, не принадлежащих множеству $T=C$, легко получить, что $u^2=w^2$. Отсюда ясно, что $W=(e)$.

Итак, $G=Q\times V$. Группа G является группой кватернионного типа, так как можно, например, положить

$$A=\{\pm e, \ \pm i\}\times V, \ d=-e.$$

Рассмотрим альтернативу: 1) существуют такие элементы $g, \overline{h\in}T$, что $g^2\neq h^2$; 2). для любого $g\overline{\in}T$ выполняется $g^2=d$ при некотором $d\in G$.

1. На основании свойства 2) $gh=hg$. Пусть $t\in T$. По лемме 2 $tg\overline{\in}T$. Согласно свойству 2) элементов h, tg выполняется $h^2=(tg)^2$ или $h\cdot tg=tg\cdot h$. Из условия 5) вытекает, что $g^2=$ $=(tg)^2$, так что в первом случае имели бы $g^2=h^2$ — противоречие. Во втором случае: $ht=th$, что вместе со свойством 5) элемента h дает $t^2=e$. Значит, в этом случае $T=C$.

2. Предположим $d=e$, тогда $G\diagdown T\subset C\subset T$, откуда $G=T$, что противоречит свойству 1). Значит, $d\neq e$, откуда легко следует, что $d\in T$. Покажем, что $d^2=e$. Пусть $g\overline{\in}T$. По лемме 2, $dg\overline{\in}T$, следовательно, $(dg)^2=d$. Отсюда $d=(g^2)^{-1}=d^{-1}$.

Легко видеть, что подгруппа T инвариантна. Рассмотрим факторгруппу G/T. Она является группой показателя 2. Предположим, что порядок группы G/T не равен 2. Возьмем два различных неединичных элемента второго порядка $\overline{g}, \overline{h}\in G/T$. Легко видеть, что $gh\overline{\in}T$. Свойство 5), примененное к элементам g, h, $gh\overline{\in}T$, $t\in T$ дает $tgt=g$, $tht=h$, $tght=gh$. Отсюда $t^2=e$. Значит, и в этом случае $T=C$.

Итак, можно считать, что порядок группы G/T равен 2, и, следовательно, группа G является группой кватернионного типа при $T=A$.

В заключение отметим, что наши методы позволяют доказать следующее утверждение: для любой группы G существует множество M и такая метрика ρ на M, что группа изометрий $I(\rho)$ изоморфна G.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Холл. Теория групп. Изд-во иностр. лит-ры. М., 1962.

МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ ВЕЙЛЕВСКОГО СЕМЕЙСТВА УЗЛОВ

В. К. Дубовой

В работах [1, 2] изучаются мультипликативные представления х. о.-ф. различных классов операторов. Настоящая статья посвящена описанию мультипликативного представления х. о.-ф. вейлевского семейства узлов.

1. **Мультипликативный интеграл Стилтьеса по мере**[1]. Пусть U — открытое множество на прямой. Интервалом множества U будем называть такой интервал (x', x''), что 1) $(x', x'') \subset U$, 2) точки x' и x'' не принадлежат U. Далее, если $x \in U$ и (x', x'') — интервал множества U, содержащий x, то положим $x^- = x'$, $x^+ = x''$.

Рассмотрим на сегменте $[a, b]$ произвольное замкнутое множество F. Пусть F^0 — внутренность множества F и $F^c = (a,b) \setminus F$. Очевидно, F^c открыто и $F^c \cap F^0 = \varnothing$. Обозначим через F^+ множество правых концов интервалов из F^c. Введем на $[a, b]$ меру ν, положив для любого измеримого множества $\Gamma \subset [a, b]$ $\nu(\Gamma) = \mathrm{mes}[\Gamma \setminus (\Gamma \cap F^c)] + N$, где $\mathrm{mes}[\Gamma \setminus (\Gamma \cap F^c]$ — лебегова мера множества $\Gamma \setminus (\Gamma \cap F^c)$, а N — число точек множества

$$\Gamma \cap F^+. \text{ Если } N = \infty, \text{ то } \nu(\Gamma) = \infty.$$

Пусть $R(t)$ — матрица-функция на $[a, b]$ такая, что для любого интервала (x', x'') из F^0 существует мультипликативный интеграл

$$\chi(x', x'') = \overrightarrow{\int_{x'}^{x''}} \exp R(t)\, dt.$$

Если (x', x'') интервал из F^c, то положим

$$\chi(x', x'') = I + R(x'').$$

Образуем разбиение Δ:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Условимся называть весом разбиения Δ наибольшую из длин интервалов (t_{k-1}, t_k). В разбиении Δ оставим для дальнейшего рассмотрения лишь те точки, которые принадлежат $F^0 \cup F^c$. Далее, если несколько точек разбиения Δ принадлежат одному и тому же интервалу множества $F^0 \cup F^c$, то оставим среди этих точек лишь по одному представителю соответствующего интервала. Будем считать, что точки $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ разбиения Δ удовлетворяют перечисленным выше условиям. Разбиению Δ поставим в соответствие интегральное произведение

$$\chi(\Delta) = \overrightarrow{\prod_{k=1}^{n-1}} \chi(t_k^-, t_k^+),$$

[1] Для чтения статьи необходимо ознакомиться с работами [3—6].

где (t_k^-, t_k^+) — интервал множества $F^0 \cup F^c$, содержащий точку t_k. Если при $\max \Delta t_k \to 0$ $(\Delta t_k = t_k - t_{k-1})$ интегральные произведения стремятся к определенному пределу, не зависящему от способа разбиения сегмента $[a, b]$ точками t_k, то этот предел назовем мультипликативным интегралом Стилтьеса от матрицы-функции $R(t)$ по мере ν и обозначим его символом

$$\overset{b}{\underset{a}{\overrightarrow{\int}}} \exp R(t)\, d\nu(t).$$

2. Замечание о внешнем представлении. Пусть $\tau(p) = (N(p) + A, H_{\tilde{u}}, K, E_v)$ — вейлевское семейство узлов, причем $\dim H = \infty$. Напомним (см. [5]), что представление $g \to v_g$ унитарно, а метрика в E индефинитна. Чтобы подчеркнуть индефинитность метрики в E, обозначим ее следующим образом:

$$[\xi_1, \xi_2], \ \xi_1, \xi_2 \in E.$$

В E существует базис $\{e_k\}_{k=1}^{4r}$ (будем называть его каноническим) такой, что (см. [6])

1) $$[\xi_1, \xi_2] = \sum_{k=1}^{4r} \xi_1^{(k)} \bar{\xi}_2^{(4r-k+1+(-1^k)},$$

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{4r} \xi_i^{(k)} e_k \quad (i = 1, 2);$$

2) матрицы операторов v_g в этом базисе имеют вид

$$\begin{pmatrix} c_g \oplus I_r & 0 \\ 0 & c_g^{*-1} \oplus I_r \end{pmatrix},$$

где символом $\oplus$ обозначено тензорное произведение матриц, а I_r — единичная матрица размерности r.

Введем в E дефинитную матрику

$$(\xi_1, \xi_2) = \sum_{k=1}^{4r} \xi_1^{(k)} \bar{\xi}_2^{(k)}.$$

Тогда $[\xi_1, \xi_2] = (J\xi_1, \xi_2)$, причем матрица оператора J в каноническом базисе имеет вид

$$I_2 \oplus \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

[1] Как и в работах [3—6] будем предполагать, что $\dim E < \infty$

Обозначим через K^* оператор, сопряженный к K в дефинитной метрике, т. е.

$$(Kh, \xi)_E = (h, K^*\xi)_H.$$

Очевидно, $K^+ = K^*J$.

В дальнейшем пространство E будем рассматривать как унитарное пространство с метрикой (ξ_1, ξ_2), при этом будем считать, что метрика $[\xi_1, \xi_2]$ порождается оператором J.

В связи с этим вейлевское семейство узлов будем записывать в виде

$$\tau(p) = \begin{pmatrix} N(p) + A & K & J \\ H_{\widetilde{u,u}} & & E_n \end{pmatrix}$$

3. Мультипликативное представление х.о.-ф. вейлевского семейства узлов. Прежде чем формулировать основную теорему, введем следующие обозначения:

$$\sigma^{(m)} = \begin{pmatrix} \sigma_k \oplus I_m & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_k \oplus I_m \end{pmatrix} (k = 0, 1, 2, 3),$$

$$\sigma^{(m)}(p) = -\sigma_0^{(m)} p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_\alpha^{(m)} p_\alpha.$$

Через $q_k (k=1, 2, \ldots)$ обозначим последовательность матриц вида

$$\begin{pmatrix} q_k^{(1)} & 0 \\ 0 & q_k^{(2)} \end{pmatrix} \oplus I_2,$$

где $q_k^{(i)}$ $(i=1, 2;\ k = 1, 2, \ldots)$ — две последовательности матриц столбцов, состоящих из r элементов. Далее через $q(t)$ обозначим матрицу-функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

α) $q(t)$ определена на сегменте $[0, a]$, $a < \infty$;

β) существует такое число $0 \leq a' \leq a$ и такое измеримое множество $M \subset [0, a')$, что $q(t)$ на $[0, a')$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \chi_M(t) \\ q_2(t) \chi_{[0, a') \setminus M}(t) \end{pmatrix},$$

где $\chi_M(t)$ — характеристическая функция множества M,

$$q_i(t) = q_{rm}^{(i)}(t) \oplus I_2 \quad (i = 1, 2).$$

а $q^{(i)}_{rm}(t)$ — матрицы-функции с r строками и m столбцами;
(γ) существует такое замкнутое множество $F \supset [a', a]$, что на сегменте $[a', a]$ матрица-функция $q(t)$ имеет вид

$$q(t) = \begin{cases} \widehat{q}(t), & t \in F^0, \\ \breve{q}(t), & t \in F^c \cup F^+, \end{cases}$$

$$\widehat{q}(t) = \begin{pmatrix} \widehat{q}^{(1)}_{rm}(t) & 0 \\ 0 & \widehat{q}^{(2)}_{rm}(t) \end{pmatrix} \oplus I_2,$$

при этом $\widehat{q}^{(i)}_{rm}(t)\ (i=1, 2)$ — матрицы-функции с r строками и m столбцами,

$$\breve{q}(t) = \breve{q}_{2r\,2m}(t) \oplus I_2,$$

где $\breve{q}_{2r2m}(t)$ — матрица-функция с $2r$ строками и $2m$ столбцами, причем элементы $\breve{q}_{ik}(t)$ матрицы-функции $\breve{q}_{2r\,2m}(t)$ отличны от нуля лишь тогда, когда либо $k = m$, $1 \leqslant i \leqslant r$, либо $k = m+1$, $r+1 \leqslant i \leqslant 2r$.

Теорема. Пусть $\tau(p) = \begin{pmatrix} N(p)+A & K & I \\ H_{\breve{u},u} & & E_v \end{pmatrix}$

вейлевское семейство узлов. Тогда $W_\tau(p)$ —х.о.-ф. семейства узлов $\tau(p)$ допускает в каноническом базисе пространства E мультипликативное представление в виде

$$W_\tau(p) = W_1(p)\, W_2(p)\, W_3(p),$$

где

$$\alpha)\ W_1(p) = \overrightarrow{\prod_{k=1}^{\omega}} (\mathrm{I} - i q_k (\sigma^{(1)}(p) + \mathrm{A}_k)^{-1} q^*_k I),$$

при этом $\omega \leqslant \infty$

$$A_k = \lambda_k \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu_k} \\ \mu_k & 0 \end{pmatrix} \oplus I_2,\ \operatorname{Im} \lambda_k \neq 0;\ \mu_k > 0,$$

причем

$$\frac{1}{i}\ A_k - A^*_k) = q^*_k J q_k;$$

$$\beta)\ W_2(p) = \overrightarrow{\int_0^{a'}} \exp\left(-\frac{i}{l^2(p)} q(t)\, \sigma'(sp, t)\, q^*(t)\, J\right) dt,$$

где

$$\sigma'(p,t) = -\sigma'_0(t)\,p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma'_\alpha(t)\,p_\alpha,$$

$$\sigma'_k(t) = \begin{cases} \sigma_k \oplus I_m, & t \in [0, a'] \setminus M, \\ \breve{\sigma}_k \oplus I_m, & t \in M, \end{cases}$$

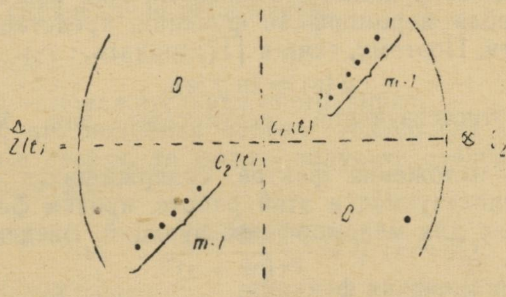
а s — матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma)\ W_3(p) = \overrightarrow{\int_{a'}^{a}} \exp\left(-iq(t)\left(\sigma^{(m)}(p) + Z(t)\right)^{-1} q^*(t)\,J\right) d\nu(t),$$

где мера ν порождена замкнутым множеством F, причем

$$Z(t) = \begin{cases} \alpha(t)\begin{pmatrix} 0 & I_{2m} \\ I_{2m} & 0 \end{pmatrix}, & t \in F^0, \\ \hat{Z}(t), & t \in F^c \cup F^+. \end{cases}$$



Наконец, функция $\alpha(t)$ не убывает на F^0 и

$$\frac{1}{i}\left(Z(t) - Z^*(t)\right) = q(t)\,Jq^*(t), \quad t \in F^c \cup F^+.$$

Автор выражает благодарность М. С. Лившицу за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Бродский и М. С. Лившиц. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы. УМН 13, № 1 (79) 1958, 3—85.

2. М. С. Бродский. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. «Наука», 1969.

3. В. К. Дубовой. Инвариантные операторные узлы. Сб. «Вестник ХГУ. Математика и механика», вып. 36, 1971.

4. В. К. Дубовой. Вейлевские семейства операторных узлов и соответствующие им открытые поля. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 14. Изд-во ХГУ, Харьков, 1971.

5. В. К. Дубовой. О характеристической оператор-функции вейлевского семейства узлов. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 15. Изд-во ХГУ, Харьков, 1972.

6. В. К. Дубовой. Об основных свойствах характеристических оператор-функций вейлевских семейств узлов. «Вестник ХГУ. Математика и механика», вып. 7, 1972.

7. М. С. Лившиц. Операторы, колебания, волны. «Наука», М., 1966.

8. М. С. Лившиц и А. А. Янцевич. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Изд-во ХГУ, Харьков, 1971.

9. М. А. Наймарк. Линейные представления группы Лоренца. ГИФМЛ, М., 1958.

10. И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос и З. Я. Шапиро. Представления группы вращений и группы Лоренца. Физматгиз, М., 1955.

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

И. В. Ушакова

В настоящей работе с помощью результатов [1] получены теоремы единственности для мероморфных функций. В [1] изучены оценки функций $u(z)$, представляющих разности двух субгармонических функций в плоскости. Как известно, $\ln|f(z)|$, где $f(z)$ — любая мероморфная функция, представляется в виде такой разности. Поэтому, если в [1] принять

$$u(z) = \ln|f(z)|,$$

получим соответствующие результаты для мероморфных функций.

Начнем с изложения фактов, содержащихся в [1], которыми мы воспользуемся в этой работе, причем формулировать их будем сразу для мероморфных функций. Введем следующие обозначения:

$f(z)$ — мероморфная функция;

$T(r)$ — характеристика Неванлинна функции $f(z)$;

$\sigma(r)$ — неотрицательная, непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_1^\infty T(r)\,\sigma(r)\,dr < \infty, \tag{1}$$

$\{a_к\}_1^\infty$ — последовательность корней $f(z)$;

$\{b_к\}_1^\infty$ — последовательность полюсов $f(z)$;

$\mu(r)$ — убывающая, положительная, непрерывная функция при $r > 0$ такая, что

$$\sum_к \mu(|a_к|) < \infty, \quad \sum_k \mu(|b_k|) < \infty. \tag{2}$$

В [1] показано, что такой функцией $\mu(r)$ является, например,

$$\mu(r)=\int_r^\infty \frac{dt}{t}\int_t^\infty \sigma(\tau)\,d\tau, \tag{3}$$

$\{z_k\}_1^\infty$ — последовательность точек в плоскости, имеющая предельную точку на бесконечности, $r_к=|z_к|>0$;

$\{D_к\}_1^\infty$ — система кружков в плоскости с конечной суммой логарифмических длин радиусов;

$R_к$ — модуль центра кружка $D_к$;

$h_к$ — радиус $D_к$

В работе [1] установлено, что вне некоторой системы $\{D_к\}_1^\infty$

$$\ln|f(z)|>-\frac{R+r}{R-r}T(R)-\frac{\delta(R)+\varepsilon\ln 12}{\mu(R)}, \tag{4}$$

где $r=|z|$, $r<R\leqslant\frac{3}{2}r$, $\delta(R)$ — неотрицательная функция, стремящаяся к нулю при $R\to\infty$.

Далее, для каждого $\eta>0$ существует такая система $\{D_к\}_1^\infty$, вне которой справедливо неравенство

$$\ln|f(z)|>-C_\theta\,T(r+\theta r)r^\eta$$

($0<\theta<1$, C_θ — положительная постоянная).

Если учесть, что подобная оценка (только без знака минуса) имеет место и сверху, то можно получить следующее асимптотическое равенство:

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ z\overline{\in}\{D_к\}_1^\infty}}\frac{\ln|f(z)|}{T(r+\theta r)\,r^\eta}=0\quad(r=|z|). \tag{5}$$

Если характеристика мероморфной функции растет медленно и удовлетворяет условию

$$T(r)=0(\ln^\alpha r),$$

то имеет место следующее асимптотическое соотношение

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln|f(z)|}{\ln^\alpha r}\geqslant-\varliminf_{r\to\infty}\frac{T(r\ln^\alpha r)}{\ln^\alpha r}\;(r=|z|). \tag{6}$$

Точка z здесь удаляется на бесконечность, минуя некоторую систему кружков $\{D_к\}_1^\infty$.

Для целых функций в [1] получен следующий результат

$$\ln|f(z)|=B(r)+0(\ln^{\alpha-1+\delta}r);\quad(|z|=r,\ \delta>0), \tag{7}$$

если

$$z \overline{\in} \{D_к\}_1^\infty$$

и

$$B(r) = \max_{|z|=r} \ln |f(z)|.$$

Наша постановка вопроса единственности следующая:

Какой должна быть последовательность точек плоскости, имеющая предельную точку на бесконечности, чтобы из достаточно быстрого убывания на ней мероморфной функции определенного класса следовало тождественное равенство нулю этой функции.

Смысл полученных нами теорем единственности упрощенно можно выразить так: мероморфная функция, принадлежащая определенному классу * не может «слишком быстро» убывать на некоторых последовательностях точек, не будучи тождественно равной нулю.

Введем следующее определение: последовательность точек $\{z_к\}_1^\infty$ назовем μ — последовательностью, если ее нельзя заключить ни в какую систему кружков $\{D_j\}_1^\infty$ для которой сходился бы ряд

$$\sum_j \mu(R_j).$$

Покрытие при этом можно осуществлять только так, чтобы каждый покрывающий кружок содержал точки, не покрытые остальными кружками.

Заметим также, что в этом определении $\mu(r)$ — любая положительная непрерывная, монотонно убывающая функция, не связанная с какой-либо мероморфной функцией $f(z)$ условием (2).

Если характеристики некоторого класса мероморфных функций удовлетворяют условию (1) с одной и той же функцией $\sigma(r)$, то множеством единственности для этого класса в наших теоремах, как правило, будут служить μ — последовательности точек, если функция $\mu(r)$ определена по равенству (3).

Теорема 1. Последовательность корней (полюсов) мероморфной функции $f(z)$ не является μ — последовательностью, если $\mu(r)$ определена в соответствии с (3).

Предположим противное, т. е., что последовательность $\{a_к\}_1^\infty$ удалось заключить в какую-нибудь систему кружков $\{D_j\}_1^\infty$.

* Мероморфную функцию относят к тому же классу, что и ее характеристику.

Докажем, что ряд

$$\sum_j \mu(R_j)$$

сходится.

Поскольку в каждом кружке D_j будет находиться некоторая точка a_{κ_j}, то начиная с некоторого j,

$$\sum_j \mu(R_j) = \sum_j [\mu(R_j) - \mu(|a_{\kappa_j}|) + \mu(|a_{\kappa_j}|)] \leqslant \sum_j \mu(|a_{\kappa_j}|) +$$

$$+ \sum_j \left| \int_{|a_{\kappa_j}|}^{R_j} \frac{dt}{t} \int_t^{\infty} \sigma(\tau)\, d\tau \right| \leqslant \sum_j \mu(|a_{\kappa_j}|) + \left(\int_1^{\infty} \sigma(\tau)\, d\tau \right) \sum_j \left| \int_{|a_{\kappa_j}|}^{R_j} \frac{dt}{t} \right|.$$

Как отмечалось (см. (2)), первый ряд $\sum_j \mu(|a_{\kappa_j}|)$ сходится.

В силу (1)

$$\int_1^{\infty} \sigma(\tau)\, d\tau < \infty,$$

а

$$\left| \int_{|a_{\kappa_j}|}^{R_j} \frac{dt}{t} \right| \leqslant d_j$$

d_j — логарифмическая длина диаметра D_j. Поэтому

$$\sum_j \mu(R_j) < \infty,$$

что противоречит определению μ — последовательности. Аналогично рассматривается случай последовательности $\{b_\kappa\}_1^\infty$.

С помощью асимптотического равенства (5) можно сформулировать следующий общий факт: если последовательность точек $\{z_\kappa\}_1^\infty$ невозможно покрыть множеством исключительных кружков $\{D_j\}$, соответствующем мероморфной функции $f(z)$, то выполнение любого из соотношений

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln |f(z_\kappa)|}{r_\kappa^\eta T(r_\kappa + \theta r_\kappa)} < 0;$$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln |f(z_\kappa)|}{r_\kappa^\eta T(r_\kappa + \theta r_\kappa)} > 0, \quad (\eta > 0;\ 0 < \theta < 1)$$

влечет тождественное равенство нулю функции $f(z)$.

Однако из этого общего факта трудно сделать вывод, какой должна быть последовательность точек z_k, чтобы она могла служить множеством единственности в указанном смысле для мероморфных функций определенного класса. Для мероморфных функций конечного порядка удается показать, что множеством единственности в теоремах подобного рода являются μ — последовательности, если функция $\mu(r)$ построена по характеристике мероморфной функции в соответствии с равенством (3). Остановимся подробнее на мероморфных функциях конечного порядка.

Если мероморфная функция имеет конечный порядок λ, то λ является предельным показателем для интеграла

$$\int_{1}^{\infty} \frac{T(r)}{r^{\beta+1}} dr, \tag{8}$$

т. е. точной нижней гранью тех β, для которых интеграл (8) сходится. Будем различать класс сходимости и класс расходимости в зависимости от того, сходится или расходится интеграл (8) при $\beta=\lambda$. Если $T(r)$ принадлежит классу сходимости, то функцию $\sigma(r)$, в силу (1), можно выбрать равной $r^{-\lambda-1}$ Тогда

$$\mu(r) = r^{-\lambda}/\lambda^2.$$

В случае класса расходимости имеем

$$\sigma(r) = r^{-\lambda-1-\varepsilon}; \quad \mu(r) = \frac{r^{-\lambda-\varepsilon}}{(\lambda+\varepsilon)^2} \qquad (\varepsilon > 0).$$

Поэтому для функций конечного порядка с помощью оценки (4) получается следующее асимптотическое соотношение

$$\underline{\lim}_{\substack{r\to\infty \\ re^{i\theta}\overline{\in}\{D_j\}}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\lambda+\varepsilon}} \geqslant 0; \qquad (\varepsilon > 0), \tag{9}$$

причем для функций, принадлежащих классу сходимости, можно положить $\varepsilon=0$.

Имеет место следующая

Теорема 2. Если $f(z)$ имеет конечный порядок λ и принадлежит классу расходимости, последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ является μ — последовательностью при $\mu(r) = r^{-\lambda-\varepsilon}$ ($\varepsilon>0$), то соотношение

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln|f(z_k)|}{r_k^{\lambda+\varepsilon}} < 0$$

влечет тождественное равенство нулю функции $f(z)$. Если же $f(z)$ принадлежит классу сходимости, то утверждение теоремы сохраняется при $\varepsilon=0$.

Доказательство. Исключительные кружки, пересекаясь, образуют некоторые области G_k. Области, не содержащие корней и полюсов функции $f(z)$, можно не причислять к исключительному множеству. В самом деле, в каждой такой области $\ln|f(z)|$ будет функцией гармонической. По принципу минимума для гармонических функций оценка снизу, вытекающая из (9),

$$\ln|f(re^{i\theta})| > -\delta r^{\lambda+\varepsilon} \, (\delta > 0, \; r \geqslant r_0(\delta))$$

и справедливая на границе области, будет иметь место и внутри области (возможно, с большим δ).

Области G_k нетрудно заключить в систему кружков $\{D'_k\}$ с конечной суммой логарифмических длин радиусов. Каждый новый кружок будет содержать по крайней мере один корень либо полюс функции $f(z)$. Как и в теореме 1, устанавливаем сходимость ряда

$$\sum_k \mu(R'_k) \quad (\mu(r) = r^{-\lambda-\varepsilon}, \; \varepsilon \geqslant 0),$$

где R'_k — модуль центра кружка D'_k.

Поскольку последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ является μ — последовательностью, то ее невозможно заключить в систему исключительных кружков. Поэтому найдется подпоследовательность $\{z_{k_j}\}$, вдоль которой, в соответствии с (9), будет выполнено соотношение:

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\ln|f(z_{k_j})|}{|z_{k_j}|^{\lambda+\varepsilon}} \geqslant 0.$$

Это соотношение противоречит условию теоремы. Следовательно, $f(z) \equiv 0$. Доказательство закончено.

Перейдем теперь к рассмотрению мероморфных функций, имеющий нулевой порядок роста. Примем, что характеристика таких функций удовлетворяет условию

$$T(r) = O(\ln^\alpha r) \tag{10}$$

при некотором $\alpha \geqslant 1$.

Как было показано в [1], в этом случае можно положить

$$\mu(r) = \frac{1}{\ln^{\alpha-1+\delta} r} \; (\delta > 0).$$

Если теперь воспользоваться соотношением (6) и провести такие же рассуждения, как и при выводе теоремы 2 для функций с медленно растущей характеристикой, то мы получим следующую теорему единственности:

Теорема 3. Если характеристика мероморфной функции $f(z)$ удовлетворяет условию (10) и последовательность $\{z_к\}_1^\infty$ является μ — последовательностью с функцией $\mu(r) = \frac{1}{\ln^{\alpha-1+\delta} r}$, то соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln|f(z_к)|}{\ln^\alpha r_к} = -\infty \tag{11}$$

влечет $f(z) \equiv 0$.

Замечание. Случай $T(r) = O(\ln r)$ соответствует рациональной функции и теорема 3 становится тогда очевидной.

Для целых функций, удовлетворяющих условию

$$B(r) = O(\ln^\alpha r)$$

теорема 3 допускает уточнение: вместо (11) можно потребовать выполнения более слабого условия, а именно:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln|f(z_к)|}{\ln^\alpha r_к} < 0.$$

Это уточнение немедленно следует из асимптотического равенства (7).

Остановимся теперь на выводе достаточных условий того, чтобы последовательность $\{z_к\}_1^\infty$ являлась μ — последовательностью при некоторой заданной функции $\mu(r)$.

Теорема 4. Для того чтобы последовательность $\{z_к\}_1^\infty$ являлась μ — последовательностью при некоторой положительной непрерывной, монотонной убывающей функции $\mu(r)$ такой, что $r[-\mu'(r)]$ непрерывна и также монотонно убывает, достаточна расходимость ряда

$$\sum_k \mu(r_к) \tag{A}$$

в сочетании с каким-нибудь из приведенных ниже условий несгущаемости:

$$|\ln|z_n| - \ln|z_m|| \geqslant \delta|n-m|; \tag{A_1}$$

$$\frac{|z_n - z_m|}{\min\{|z_n|, |z_m|\}} \geqslant \delta|n-m|; \tag{A_2}$$

$$\frac{\mu(r_{к-1}) - \mu(r_к)}{r_{к-1}\,\mu(r_к)[-\mu'(r_{к-1})]} \geqslant \delta. \tag{A_3}$$

Во всех трех условиях число δ положительно. В условии (A_3) предполагается, что точки $z_к$ перенумерованы в порядке возрастания модулей.

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{z_к\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям (A) и (A_1) и тем не менее ее удалось заключить в систему кружков $\{D_j\}_1^\infty$, такую что $\sum_j \mu(R_j)<\infty$.

Пусть z_m и z_n две точки последовательности в кружке D_j, причем из всех точек последовательности, принадлежащих D_j, точка z_n имеет наибольший номер, а точка z_m — наименьший. В этом случае, общее число точек последовательности, принадлежащих D_j, не превзойдет $N_j=n-m+1$. Обозначим d_j логарифмическую длину диаметра D_j и для определенности допустим, что $|z_n|>|z_m|$.

Тогда с помощью (A_1) получим, что

$$d_j=\int\limits_{R_j-h_j}^{R_j+h_j}\frac{dr}{r}\geqslant\int\limits_{|z_m|}^{|z_n|}\frac{dr}{r}=\ln|z_n|-\ln|z_m|\geqslant\delta(n-m)=\delta(N_j-1).$$

Поэтому

$$\sum_j(N_j-1)<\infty.$$

Рассмотрим оставшиеся точки. Каждый исключительный кружок содержит только одну такую точку. Последовательность этих точек обозначим $\{z_{к_j}\}$ и докажем сходимость ряда

$$\sum_j\mu(r_{к_j}).$$

Для этого представим функцию $\mu(r)$ через ее производную

$$\mu(r)=\int\limits_r^\infty(-\mu'(t))\,dt.$$

Тогда

$$\sum_j\mu(r_{к_j})=\sum_j[\mu(r_{к_j})-\mu(R_j)+\mu(R_j)]\leqslant\sum_j\mu(R_j)+$$

$$+\sum_j\left|\int\limits_{r_{к_j}}^{R_j}(-\mu'(t))\,dt\right|;$$

$$\left|\int\limits_{r_{к_j}}^{R_j}(-\mu'(t))\,dt\right|=\left|\int\limits_{r_{к_j}}^{R_j}\frac{(-\mu'(t)\,t)}{t}\,dt\right|\leqslant m\left|\int\limits_{r_{к_j}}^{R_j}\frac{dt}{t}\right|\leqslant md_j.$$

Итак,

$$\sum_j \mu(r_{\kappa_j}) \leqslant \sum_j \mu(R_j) + m\sum_j d_j.$$

Оба ряда, стоящие справа, сходятся по определению множества кружков D_j. Чтобы закончить вывод, достаточно сравнить все полученное с условием (A).

Доказательство достаточности (A) и (A_2) мало отличается от предыдущего случая. В самом деле, пусть z_h и z_n — две точки последовательности в D_j, причем z_n имеет наибольший номер, а z_h — наименьший. Тогда, начиная с некоторого j,

$$2\int_{R_j}^{R_j+h_j}\frac{dr}{r} \geqslant \frac{2h_j}{R_j+h_j} = \frac{2h_j}{R_j-h_j+2h_j} \geqslant \frac{2h_j}{3(R_j-h_j)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{|z_n-z_m|}{\min\{|z_n|,\ |z_m|\}} \geqslant \delta(n-m) = \delta(N_j-1).$$

Поэтому $\sum\limits_j (N_j-1)$ — конечна. Затем, как и в предыдущем случае, убеждаемся в сходимости ряда $\sum\limits_j \mu\ (r_{\kappa_j})$, соответствующего точкам z_{κ_j}, лежащим по одной в кружке. Сходимость такого ряда в сравнении с (А) указывает на то, что последовательность $\{z_\kappa\}_1^\infty$ в этом случае нельзя заключить в указанную систему кружков.

Пусть, наконец, имеют место (А) и (A_3). Спроектируем кружки D_j на вещественную ось дугами окружностей с центрами в начале координат. Тогда на положительной полуоси мы получим систему отрезков $[R_j-h_j,\ R_j+h_j]$ $(j=1, 2, \ldots)$, которую обозначим E. По определению системы кружков множество E будет иметь конечную логарифмическую длину, т. е.

$$\int_E \frac{dr}{r} < \infty. \tag{12}$$

Положим $\mu(r)=v$. Поскольку функция $\mu(r)$ монотонно убывает и имеет непрерывную производную, это уравнение определяет r как некоторую монотонно убывающую, непрерывно дифференцируемую функцию $\omega(v)$. Сделаем замену переменной в интеграле (12), положив $r=\omega(v)$. Интеграл (12) после этой замены преобразуется в следующий

$$\int_{E_1}\left[-\frac{\omega'(v)}{\omega(v)}\right]dv,$$

где множество E_1 представляет систему промежутков $[\alpha_j,\ \beta_j]$ $(j=1, 2, \ldots)$, причем

$$\alpha_j = \mu(R_j+h_j),\ \beta_j = \mu(R_j-h_j).$$

Рассмотрим систему точек $\{v_к\}_1^\infty$, где $v_к = \mu(r_к)$. Точки $z_к$ перенумерованы в порядке возрастания их модулей $r_к$, а точки $v_к$ положительной полуоси нумеруются, таким образом, в порядке убывания.

Обозначим точки $v_к$, принадлежащие промежутку $[\alpha_j, \beta_j]$ $v_{к_j}, v_{к_j+1}, \ldots, v_{к_j+m_j}$, и рассмотрим

$$\sum_{i=1}^{m} v_{к_j+i} = \sum_{i=1}^{m_j} \frac{v_{к_j+i}}{\left[-\frac{\omega'(v_{к_j+i-1})}{\omega(v_{к_j+i-1})}\right](v_{к_j+i-1} - v_{к_j+i})} \times$$

$$\times \left[-\frac{\omega'(v_{к_j+i-1})}{\omega(v_{к_j+i-1})}\right](v_{к_j+i-1} - v_{к_j+i}).$$

По условию несгущаемости (A_3) имеем

$$-\frac{\omega'(v_{к_j+i-1})(v_{к_j+i-1} - v_{к_j+i})}{\omega(v_{к_j+i-1})\, v_{к_j+i}} \geqslant \delta.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{m_j} v_{к_j+i} \leqslant \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{m_j} \left[-\frac{\omega'(v_{к_j+i-1})}{\omega(v_{к_j+i-1})}\right](v_{к_j+i-1} - v_{к_j+i}).$$

Нетрудно видеть, что

$$-\frac{\omega'(v)}{\omega(v)} = -\frac{1}{r\mu'(r)}.$$

Поэтому $-\dfrac{\omega'(v)}{\omega(v)}$ является положительной монотонно убывающей функцией и

$$\sum_{i=1}^{m_j} -\frac{\omega'(v_{к_j+i-1})}{\omega(v_{к_j+i-1})}(v_{к_j+i-1} - v_{к_j+i}) \leqslant \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \left[-\frac{\omega'(v)}{\omega(v)}\right] dv.$$

Значит,

$$\sum_{i=1}^{m_j} v_{к_j+i} \leqslant \frac{1}{\delta} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \left[-\frac{\omega'(v)}{\omega(v)}\right] dv.$$

Суммирование по всем отрезкам системы приводит к неравенству

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_j} v_{к_j+i} \leqslant \frac{1}{\delta} \int_{E_1} \left[-\frac{\omega'(v)}{\omega(v)}\right] dv. \qquad (13)$$

Чтобы закончить доказательство, остается рассмотреть ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} v_{\text{к}_j} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(r_{\text{к}_j})$. Сходимость этого ряда доказывается как и в предыдущих случаях. Если учесть (13), то мы получим сходимость ряда, составленного из всех точек $V_{\text{к}}$, принадлежащих множеству E_1.

По условию (A) $\sum\limits_k v_{\text{к}} = \infty$. Значит, бесконечная последовательность точек $v_{\text{к}}$ лежит вне множества E_1, а соответствующие им точки $z_{\text{к}}$ вне системы кружков.

Доказательство теоремы закончено.

Остановимся теперь на необходимых условиях того, чтобы последовательность точек $\{z_{\text{к}}\}_1^{\infty}$ могла служить множеством единственности в теоремах рассматриваемого типа.

Отметим, во-первых, что на точки последовательности следует положить некоторое условие несгущаемости. Действительно, возьмем какую-нибудь мероморфную функцию с корнями $\{a_{\text{к}}\}_1^{\infty}$ и построим последовательность $\{z_{\text{к}}\}_1^{\infty}$ из этих корней и достаточно большого числа точек из малых окрестностей корней так, чтобы расходился ряд

$$\sum_k \mu(r_k).$$

В этой ситуации из сколь угодно быстрого убывания функции на такой последовательности точек не следует тождественное равенство нулю этой функции.

Что касается условия (A), то его необходимость можно показать для класса функций, имеющих конечный порядок. В самом деле, пусть последовательность $\{z_{\text{к}}\}_1^{\infty}$ такова, что ряд

$$\sum_k \frac{1}{r_k^{\beta}}$$

сходится при некотором β. Введем показатель сходимости λ этого ряда, т. е. точную нижнюю грань тех чисел β, для которых этот ряд сходится. Построим каноническое произведение, обращающееся в нуль в точках $z_{\text{к}}$:

$$\pi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{z_{\text{к}}}, p\right),$$

где p — род канонического произведения, а

$$G(u, p) = (1-u)\, e^{u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^p}{p}}.$$

По теореме Бореля порядок роста канонического произведения равен λ.

По теореме 1 последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ не является μ — последовательностью с функцией $\mu(r) = r^{-\lambda-\varepsilon}$ и, очевидно, не может служить множеством единственности.

Рассмотрим частные случаи теоремы 5. Пусть $\mu(r) = \ln^{-\lambda} r$. Запишем (A) и (A_3) для такой функции $\mu(r)$:

$$\sum_k \ln^{-\lambda} r_k = \infty;$$

$$(\ln^\lambda r_k - \ln^\lambda r_{k-1}) \ln r_{k-1} \geqslant \delta.$$

Если же $\mu(r)$ выбрать равной $r^{-\lambda}$, что соответствует функциям конечного порядка, то условия (A) и (A_3) примут вид

$$\sum_k \frac{1}{r_k^\lambda} = \infty;$$

$$r_k^\lambda - r_{k-1}^\lambda \geqslant \delta.$$

Приведем в заключение примеры μ — последовательностей.

Последовательность $\{k^\alpha e^{i\varphi_k}\}_1^\infty$ при произвольном выборе φ_k является μ-последовательностью, если $\mu(r) = r^{-\lambda}$ при $\lambda = 1/\alpha$.

Последовательность $\{e^{\gamma k^\alpha} e^{i\varphi_k}\}_1^\infty$ $(\gamma > 0)$ (является μ-последовательностью, если $\mu(r) = \ln^{-\lambda} r$ при $\frac{1}{2\alpha} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{\alpha}$.

Как следует из первого примера, последовательность целых чисел является множеством единственности в указанном смысле для мероморфных функций первого порядка и класса сходимости.

Второй пример показывает, что последовательность e^{k^α} является множеством единственности для мероморфных функций, характеристика которых растет не быстрее, чем $\ln^{1+1/\alpha-\varepsilon} r$ $(\varepsilon > 0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. В. Ушакова. Асимптотические оценки разности субгармонических функций в плоскости. «Вестник Харьковского университета» № 53, 1970 г., вып. 34, серия механико-математическая».

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ БЕСКОНЕЧНОГО ТИПА

И. И. Антыпко

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = 0, \qquad (1)$$

$$x \in R^m, \; t \in [0, T],$$

при краевых условиях

$$a_{i1} u(x,0) + a_{i2}\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} + a_{i3} u(x,T) + a_{i4}\frac{\partial u(x,T)}{\partial t} = 0, \; i = 1,2, \qquad (2)$$

где $P(s)$ и $Q(s)$ — полиномы от $s_1, \ldots, s_m$ с постоянными коэффициентами, a_{ik}, $k = 1, 2, 3, 4,$ — произвольные комплексные числа, ранг матрицы краевых условий равен 2.

В [1] введено понятие определителя $\Delta(s)$ краевой задачи в бесконечном слое $R^m \times [0, T]$ для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных с нелокальными краевыми условиями и получена классификация краевых задач. В зависимости от многообразия нулей определителя $\Delta(s)$ установлены классы единственности решения таких краевых задач. В частности, если определитель $\Delta(s)$ не обращается в нуль ни при одном s (такие краевые задачи мы называем невырожденными краевыми задачами бесконечного типа), то однородная краевая задача имеет только тривиальное решение в классах функций, растущих при $\|x\| \to \infty$ экспоненциально с порядком, большим единицы. Если же определитель $\Delta(s)$ имеет нули, то однородная краевая задача имеет нетривиальное решение, растущее при $\|x\| \to \infty$ не быстрее, чем $\exp\{a\|x\|\}$ при некотором $a > 0$.

Целью настоящей работы является установление критерия (в терминах краевых условий) того, что краевая задача (1)—(2) имеет бесконечный тип.

Если уравнение (1) записать в виде системы, положив $u_1(x,t) = u(x,t)$, $u_2(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$, то нетрудно посчитать, что определитель $\Delta(s)$ краевой задачи (1)—(2) равен

$$\Delta(s) \equiv e^{-\frac{TP(-is)}{2}}\left\{C^{12} e^{\frac{TP(-is)}{2}} + C^{34} e^{-\frac{TP(-is)}{2}} + \right.$$

$$+ (C^{14} - C^{23})\,\mathrm{ch}\,\frac{TD(-is)}{2} + [2C^{13} + 2C^{24}Q(-is) - (C^{23} +$$

$$\left. + C^{14}) P(-is)] \cdot \frac{\mathrm{sh}\,\frac{TD(-is)}{2}}{D(-is)}\right\}, \qquad (3)$$

если
$$D(-is)\equiv\sqrt{P^2(-is)-4Q(-is)}\neq 0,$$
и
$$\Delta(s)\equiv e^{-\frac{TP(-is)}{2}}\left\{C^{12}e^{\frac{TP(-is)}{2}}+C^{34}e^{-\frac{TP(-is)}{2}}+\right.\tag{3'}$$
$$\left.+C^{13}T+C^{24}TQ(-is)+(C^{14}-C^{23})-(C^{23}+C^{14})\frac{TP(-is)}{2}\right\},$$
если $D(-is)=0$; здесь C^{jk}, $1\leqslant j<k\leqslant 4$ — миноры 2-го порядка матрицы C краевых условий (2), если последние переписаны таким образом, что базисный минор имеет вид $\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}$.

Определитель $\Delta(s)$ краевой задачи (1)—(2) —целая функция $s=(s_1, \ldots, s_m)$ порядка роста не выше p_0 *, где p_0 — приведенный порядок уравнения (1) [2, 51].
$$p_0=\max\left(p, \frac{q}{2}\right),\tag{4}$$
здесь $p=\deg P(s)$, $q=\deg Q(s)$.
Мы рассматриваем уравнения, приведенный порядок которых $p_0>0$. Степень полинома $D^2(s)$ обозначим $2r$ (r — быть может полуцелое число).

Нам понадобится запись определителя $\Delta(s)$ в виде
$$\Delta(s)\equiv e^{-\frac{TP(-is)}{2}}\left\{C^{12}e^{\frac{TP(-is)}{2}}+C^{34}e^{-\frac{TP(-is)}{2}}+\frac{1}{2}e^{\frac{TD(-is)}{2}}\times\right.$$
$$\left.\times M_1(s)+\frac{1}{2}e^{-\frac{TD(-is)}{2}}M_2(s),\right.\tag{5}$$
где $M_1(s)\equiv C^{14}-C^{23}+\dfrac{2C^{13}+2C^{24}Q(-is)-(C^{23}+C^{14})P(-is)}{D(-is)},$
$$M_2(s)\equiv C^{14}-C^{23}-\frac{2C^{13}+2C^{24}Q(-is)\quad (C^{23}+C^{14})P(-is)}{D(-is)},$$
$D(-is)\neq 0$.
Сначала рассмотрим задачу для $s\in C^1$.

Будем различать три основных случая:

1°. $0\leqslant p<r$; 2°. $p=r$; 3°. $p>r\geqslant 0$. 1°. Пусть $0\leqslant p<r$. Как следует из (4), $q=2p_0$, $0\leqslant p<p_0$, $r=p_0$. Здесь мы рассмотрим подслучаи $p=0$ и $0<p<r$.

* Если $|f(s)|\leqslant C\exp\{A\|S\|^p\}$, то $p_0=\inf p$ — порядок роста функции $f(s)$.

Теорема 1. Пусть полином $P(s) \equiv \mathrm{const} = P$. Тогда для того, чтобы краевая задача (1)—(2) имела бесконечный тип, необходимо и достаточно, чтобы краевые условия (2) имели вид *

$$\begin{cases} a u(x, 0) - bu(x, T) = 0 \\ aPu(x, 0) + a\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} + b\dfrac{\partial u(x, T)}{\partial t} = 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$a \neq \pm e^{-\frac{TP}{2}} b.$$

Для доказательства необходимости рассмотрим индикатор функции $\Delta(s) \exp \frac{TP}{2}$ ([3], 72—73). Если угловая плотность ([3], 119) корней голоморфной функции внутри некоторого угла $\Theta_1 \leqslant \Theta \leqslant \Theta_2$ отлична от нуля, то внутри этого угла функция имеет корни. $\Delta(s) \exp \frac{TP}{2}$ — функция вполне регулярного роста при всех θ, $s = re^{i\theta}$ ([3], стр. 183). Для того, чтобы множество корней функции вполне регулярного роста имело нулевую плотность внутри некоторого угла, необходимо и достаточно, чтобы ее индикатор был тригонометрическим внутри этого угла ([3], 202). Значит, если определитель $\Delta(s)$ не обращается в нуль ни при одном s, то индикатор функции $\Delta(s) \exp \frac{TP}{2}$ тригонометрический.

В силу (3), если $C^{14} - C^{23} \neq 0$ и $2C^{24} Q(-is) + 2C^{13} - (C^{14} + C^{23}) P \not\equiv 0$ одновременно, то порядок роста функции $\Delta(s) \exp \frac{TP}{2}$ определяют слагаемые, содержащие $\frac{1}{D(-is)} \times \operatorname{sh} \frac{TD(-is)}{2}$ или $\operatorname{ch} \frac{TD(-is)}{2}$. Тогда из (5) следует, что

$$M_1(s) \cdot M_2(s) \not\equiv 0, \text{ так как } M_1(s) \cdot M_2(s) \equiv \frac{1}{D^2(-is)} \times$$
$$\times \{(C^{14} - C^{32})^2 D^2(-is) - [2C^{13} + 2C^{24} Q(-is) - (C^{14} + C^{23}) P]^2\}$$

и если $M_1(s) \cdot M_2(s) \equiv 0$, то обязательно $C^{24} = 0$ и $C^{14} - C^{23} = 0$, последнее противоречит предположению. Итак $M_1(s) \times M_2(s) \not\equiv 0$. Но тогда индикатор функции $\Delta(s) \exp \frac{TP}{2}$ не тригонометрический. Если $C^{14} - C^{23} = 0$, а $2C^{13} + 2C^{21} Q(-is) - (C^{14} + C^{23}) P \not\equiv 0$ (или наоборот), то, очевидно, индикатор $\Delta(s) \exp \frac{TP}{2}$ не тригонометрический (совпадает с индикатором

* Это означает, что некоторая линейная комбинация уравнений (2) имеет вид (6).

$\operatorname{ch}\frac{TD(-is)}{2}\Big)$. Поэтому обязательно $C^{14}-C^{23}=0$ и $2C^{13}+$ $+2C^{24}\ Q(-is)-(C^{14}+C^{23})\ P\equiv 0$ и, следовательно, имеют место и соотношения

$$M_1(s)\equiv 0,\ M_2(s)\equiv 0,$$

$$\Delta(s)e^{\frac{TP}{2}}\equiv C^{12}e^{\frac{TP}{2}}+C^{34}e^{-\frac{TP}{2}}\neq 0. \tag{7}$$

Из условий (7), рассматривая всевозможные положения базисного минора $\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}$ в матрице C, приходим к заключению теоремы.

Достаточность. Вид краевых условий (6) влечет выполнение условий (7). А этого достаточно для того, чтобы определитель $\Delta(s)$ не имел нулей.

Теорема 2. Пусть $0<p<r$. Тогда краевая задача (1)—(2) имеет бесконечный тип тогда и только тогда, когда краевые условия (2) принимают одну из форм

$$\begin{cases} u(x,0)=0\\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0\end{cases} \tag{8}$$

или

$$\begin{cases} u(x,T)=0\\ \dfrac{\partial u(x,T)}{\partial t}=0.\end{cases} \tag{8'}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Вместо условий (7) получаем условия

$$M_1(s)\equiv 0;\ M_2(s)\equiv 0;$$

$$C^{12}\cdot C^{34}=0;\quad (C^{12})^2+(C^{34})^2\neq 0, \tag{9}$$

которые являются необходимыми и достаточными для того, чтобы определитель $\Delta(s)$ не обращался в нуль ни при одном s. Условия (9) равносильны (8) или (8').

2°. Пусть $p=r$. Тогда из (4) следует, что $p=r=p_0$ и $0\leqslant$ $\leqslant q\leqslant 2p_0$. Здесь мы рассмотрим случаи а) $Q(s)\equiv 0$, б) $0\leqslant$ $\leqslant q<p_0$, но $Q(s)\not\equiv 0$, в) $q=p_0$ и г) $p_0<q\leqslant 2p_0$.

Теорема 3. Пусть полином $Q(s)\equiv 0$. Тогда краевая задача (1)—(2) имеет бесконечный тип в том и только том случае, когда краевые условия (2) совпадают с одним из видов:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0\\ au(x,0)-bu(x,T)+c\,\dfrac{\partial u(x,T)}{\partial t}=0,\end{cases} \tag{10}$$

$$a\neq b,$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,T)}{\partial t} = 0 \\ au(x,0) + c\,\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} - bu(x,T) = 0, \\ a \neq b. \end{cases} \tag{10'}$$

Доказательство. Если полином $Q(s) \equiv 0$, **то определитель**

$$\Delta(s) \equiv e^{-\frac{TP(-is)}{2}} \left\{ e^{\frac{TP(-is)}{2}} \left[C^{12} - C^{23} + \frac{C^{13}}{P(-is)} \right] + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{TP(-is)}{2}} \left[C^{34} + C^{14} - \frac{C^{13}}{P(-is)} \right] \right\},$$

откуда следует, что определитель $\Delta(s)$ не имеет нулей тогда и только тогда, когда

$$C^{13} = 0; \ (C^{12} - C^{23}) \cdot (C^{34} + C^{14}) = 0; \tag{11}$$

$$(C^{12} - C^{23})^2 + (C^{34} + C^{14})^2 \neq 0.$$

Условия (11) равносильны (10) или (10′).

Теорема 4. Пусть $p = r$, $0 \leqslant q < p$ и полином $Q(s) \not\equiv 0$. Тогда для того, чтобы краевая задача (1)—(2) имела бесконечный тип, необходимо и достаточно, чтобы краевые условия (2) имели вид (8) или (8′).

Доказательство. В силу соотношений между степенями полиномов $P(s)$, $Q(s)$ и $D^2(s)$, функция $D(s)$ не может быть полиномом. Действительно, если $D(s)$ — полином, то полином

$$4Q(s) \equiv [P(s) - D(s)] \cdot [P(s) + D(s)]. \tag{12}$$

В этом представлении одна из скобок является полиномом степени p_0, а другая — полиномом степени меньшей, чем p_0, отличным от тождественного нуля. Таким образом, степень полинома $Q(s)$ не меньше p_0, в отличие от условий теоремы.

Все слагаемые функции $\Delta(s) \exp \dfrac{TP(-is)}{2}$ — целые функции одинакового порядка роста. В силу (5) и факта, что $D(s)$ не полином, определитель $\Delta(s)$ не имеет нулей тогда и только тогда, когда выполнены условия (9). Из (9) (случаи $Q(s) \equiv$ $\equiv \text{const} \neq 0$ и $Q(s) \not\equiv \text{const}$ следует рассмотреть отдельно) приходим к утверждению теоремы.

Лемма 1. Пусть $p = q = r$. Тогда функция $D(s)$ является полиномом тогда и только тогда, когда существует такая постоянная $a \neq 0$, что

$$P(s) \equiv aQ(s) + \frac{1}{a}, \tag{13}$$

при этом

$$D(s) \equiv \pm\left[aQ(s) - \frac{1}{a}\right]. \tag{14}$$

Доказательство. Выполнение условия (13) влечет выполнение условия (14).

Пусть $D(s)$ — полином. Из (12) и соотношения между степенями полиномов $P(s)$, $Q(s)$ и $D(s)$ следует, что либо $P(s) + D(s) \equiv \text{const} \neq 0$, либо $P(s) - D(s) \equiv \text{const} \neq 0$, откуда получаем (13).

Теорема 5. Пусть $p=r=q$. Тогда, если $D(s)$ не полином, то краевая задача (1)—(2) имеет бесконечный тип тогда и только тогда, когда краевые условия (2) имеют вид (8) или (8′). Если же $D(s)$ полином, то краевая задача (1)—(2) имеет бесконечный тип в том и лишь том случае, когда краевые условия (2) совпадают с одной из форм

$$\begin{cases} u(x,0) + a\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \\ bu(x,0) + cu(x,T) + d\dfrac{\partial u(x,T)}{\partial t} = 0, \end{cases} \tag{15}$$

$$e^{\frac{T}{a}}b + c - \frac{d}{a} \neq 0,$$

или

$$\begin{cases} u(x,T) + a\dfrac{\partial u(x,T)}{\partial t} = 0 \\ bu(x,0) + c\dfrac{\partial u(x,0)}{dt} + du(x,T) = 0, \end{cases} \tag{15'}$$

$$b - \frac{c}{a} + de^{-\frac{T}{a}} \neq 0$$

($a \neq 0$ постоянная, удовлетворяющая (13)).

Доказательство. Сравнивая индикаторы слагаемых функции $\Delta(s)\exp\dfrac{TP(-is)}{2}$, получаем, что ее индикатор является тригонометрическим тогда и только тогда, когда выполнены условия (9), если $D(s)$ не полином, и, если $D(s)$ полином, в силу (5) и леммы 1, условия

$$R_1^2(s) + R_2^2(s) \equiv \text{const} \neq 0; \tag{16}$$

$$R_1(s) \cdot R_2(s) \equiv 0,$$

где

$$R_1(s) \equiv C^{12} e^{\frac{T}{2a}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{T}{2a}} \Bigg[C^{14} - C^{23} +$$

$$+ \frac{2C^{13} + 2C^{24} Q(s) - (C^{14} + C^{23}) \left(aQ(s) + \frac{1}{a} \right)}{aQ(s) - \frac{1}{a}} \Bigg],$$

$$R_2(s) \equiv C^{34} e^{-\frac{T}{2a}} + \frac{1}{2} e^{\frac{T}{2a}} \Bigg[C^{14} - C^{23} -$$

$$- \frac{2C^{13} + 2C^{24} Q(s) - (C^{14} + C^{23}) \left(aQ(s) + \frac{1}{a} \right)}{aQ(s) - \frac{1}{a}} \Bigg].$$

Нетрудно видеть, что условия (9) ($D(s)$ — не полином) и (16) ($D(s)$ — полином) достаточны для того, чтобы определитель $\Delta(s)$ не имел нулей.

Из условий (9) ($D(s)$ — не полином) и условий (16) ($D(s)$ — полином) приходим к утверждению теоремы.

Теорема 6. Пусть $p=r$ и $p_0<q \leqslant 2p_0$. Тогда для того, чтобы краевая задача (1)—(2) имела бесконечный тип, необходимо и достаточно, чтобы краевые условия (2) имели вид (8) либо (8').

Доказательство аналогично доказательствам предыдущих теорем. Независимо от того, является ли функция $D(s)$ полиномом или нет, $\Delta(s)$ не обращается в нуль ни при одном s тогда и только тогда, когда имеют место условия (9). Если $D(s)$ не является полиномом, то это утверждение устанавливается так же, как условие (9) в доказательстве теоремы 5. Если же $D(s)$ полином, то условие $\Delta(s) \neq 0$ при всех s влечет за собой выполнение либо условий (9), либо условий

$$M_1^2(s) + M_2^2(s) \equiv \text{const} \neq 0;$$

$$M_1(s) \cdot M_2(s) \equiv 0; \; C^{12} = C^{34} = 0, \tag{17}$$

так как при $p=r=p_0$ и $p_0<q\leqslant 2p_0$, в силу (12), полином $D(s) \neq \pm P(s) + b$ ($b=\text{const}$). Однако нетрудно проверить, что в рассматриваемом случае условия (17) реализоваться не могут.

Из условий (9) следует вид краевых условий (8) или (8′).

3°. Пусть $p > r \geqslant 0$. Тогда $p = p_0$ и $q = 2p_0$. Рассмотрим случаи $D(s) \not\equiv \text{const}$ и $D(s) \equiv \text{const} = D$.

Теорема 7. Пусть $0 < r < p$. Тогда краевая задача (1)—(2) имеет бесконечный тип тогда и только тогда, когда краевые условия (2) имеют вид (8) или (8′).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.

Теорема 8. Пусть $D(s) \equiv \text{const}$. Тогда для того, чтобы краевая задача (1)—(2) имела бесконечный тип, необходимо и достаточно, чтобы краевые условия (2) принимали одну из форм при $D \neq \frac{2k\pi i}{T}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, (8) или (8′) или

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ u(x, T) = 0 \end{cases}$$

и при $D = \frac{2k\pi i}{T}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$,

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ \dfrac{\partial u(x, 0)}{\partial t} + au(x, T) = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} u(x, T) = 0 \\ au(x, 0) + \dfrac{\partial u(x, T)}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Доказательство аналогично доказательствам предыдущих теорем.

4°. Перейдем к случаю $s \in C^m$. Достаточность условий в каждой из теорем 1—8 ясна, так как краевые условия, приведенные в каждой из этих теорем, равносильны соответствующим соотношениям для миноров C^{jk}, $1 \leqslant j < k \leqslant 4$, матрицы краевых условий, что, в свою очередь, гарантирует тождество $\Delta(s) \equiv \equiv A \exp R(s)$, $A \neq 0$, $R(s)$ — полином.

Для доказательства необходимости условий теорем 1—8 в случае $m > 1$, сведем рассмотрение к случаю $m = 1$. Фиксируя $s^0 \in C^m$ и полагая $s = s^0 z = (s_1^0 z, \ldots, s_m^0 z)$, получим, в предположении бесконечности типа задачи (1) — (2), что $\Delta_1(z) \equiv \Delta(s^0 z) \neq 0$ при $z \in C^1$. При этом функция $\Delta_1(z)$, $z \in C^1$, в силу (3) и (3′), выражается через значения полиномов $P_1(z) \equiv P(s^0 z)$ и $Q_1(z) \equiv Q(s^0 z)$ по тем же формулам, по которым $\Delta(s)$ выражается через значения $P(s)$ и $Q(s)$. Если для функций $P_1(z)$, $Q_1(z)$ и $D_1(z) \equiv \sqrt{P_1^2(z) - 4Q_1(z)}$ выполнены предположения какой-либо из теорем 1—8 (то есть имеет место определенное соотношение между их степенями p, q и r, а в случае $p = q = r$, кроме того, предположение о том, является ли $D_1(z)$ полином, то, в силу доказанного при $m=1$, из $\Delta_1(z)\neq 0$, $z\in C^1$, заключаем о выполнении соотношений для миноров C^{lk}, равносильных заключениям теорем. Итак, задача сводится к доказательству возможности такого выбора $s^0\in C^m$, что степени p, q и $2r$ полиномов $P(s)$, $Q(s)$ и $D^2(s)$, $s\in C^m$, совпадают соответственно со степенями полиномов $P_1(z)$, $Q_1(z)$ и $D_1^2(z)$, а в случае $p=q=r$, кроме того, если $D(s)$ не является полиномом, то $D_1(z)$ также должно обладать этим свойством. Оставив пока последний случай в стороне, укажем, как следует выбрать s^0 в остальных случаях. Пусть $\widehat{P}(s)$, $\widehat{Q}(s)$ и $\widehat{D}^2(s)$ означает главную часть соответственно полиномов $P(s)$, $Q(s)$ и $D^2(s)$. Выберем s^0 так, чтобы $\widehat{P}(s^0)\cdot\widehat{Q}(s^0)\cdot\widehat{D}^2(s^0)\neq 0$, что возможно, если ни один из полиномов $P(s)$, $Q(s)$ и $D^2(s)$ не равен тождественно нулю; в последнем случае s^0 выберем так, чтобы главные части двух отличных от тождественного нуля полиномов не обращались в этой точке в нуль. Тогда, очевидно, степени $P_1(z)$, $Q_1(z)$ и $D_1^2(z)$ совпадают со степенями $P(s)$, $Q(s)$ и $D^2(s)$ соответственно.

Вернемся к случаю $p=q=r$. Если при этом $D(s)$ — полином, то, очевидно, при любом выборе s_0 $D_1(z)$ — также полином. Поэтому s^0 нужно выбирать из условия $\widehat{P}(s_0)\cdot\widehat{Q}(s_0)\times\times\widehat{D}(s_0)\neq 0$. Если же $D(s)$ не является полиномом, то кроме условия $\widehat{P}(s^0)\cdot\widehat{Q}(s^0)\cdot\widehat{D}^2(s^0)\neq 0$, гарантирующего для $P_1(z)$, $Q_1(z)$ и $D_1^2(z)$ соотношение $p=q=r$, нужно еще выбор s^0 подчинить тому условию, что функция $D_1(z)$ не должна быть полиномом (от z). Это возможно в силу следующих соображений. В силу леммы 1 (очевидно, справедливой при любом m) из того, что $D(s)$ не полином, следует выполнение одной из двух возможностей: а) либо при некотором $a_0\neq 0$ $P(s)-P(0)\equiv\equiv\alpha_0(Q(s)-Q(0))$, но $P(0)\neq a_0Q(0)+\frac{1}{a_0}$, б) либо при любом $a\neq 0$ $P(s)-P(0)\not\equiv a(Q(s)-Q(0))$. В случае а) легко видеть, что при любом выборе s^0 $D_1(z)$ не полином. В случае б) условие, что $D(s)$ не полином, равносильно условию $R(s)\equiv[P(0)-D(0)]\cdot[P(s)-P(0)]-2[Q(s)-Q(0)]\not\equiv 0$. Поэтому выбор s^0 теперь осуществляется из условия

$$\widehat{P}(s^0)\,\widehat{Q}(s^0)\widehat{D}^2(s^0)\,R(s^0)\neq 0.$$

Тогда степени $P_1(z)$, $Q_1(z)$ и $D_1^2(z)$ будут соответственно равны $p\cdot q$ и $2r$, а $R_1(z)\equiv R(s^0z)\not\equiv 0$, поскольку $R_1(1)=R(s^0)\neq 0$, и, следовательно, $D_1(z)$ не является полиномом.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. М. Борок за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Антыпко. О краевой задаче в бесконечном слое для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных. «Вестник ХГУ, № 67, серия механико-математическая», вып. 36, 1971.
2. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. ГИФМЛ, 1958.
3. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. ГИТТЛ, 1956.

О ФИНИТНОМ УПРАВЛЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМОЙ

Г. Б. Клебанова

Рассматривается задача финитного управления двумерной распределенной колебательной системой. Требуется найти управление (хотя бы одно) из некоторого класса допустимых управлений, такое, чтобы полностью успокоить систему за фиксированное время T.

Подобная задача ставилась в работе [1]. Было показано, что управление, сосредоточенное в одной точке границы двумерного управляемого объекта, может погасить лишь направленные колебания, т. е. колебания, зависящие от одной пространственной переменной. Это приводит к необходимости постановки задачи финитного управления с учетом пространственного расположения управляющих воздействий.

Пусть распределенный управляемый объект описывается двумерным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 Q(x,y,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Q(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q(x,y,t)}{\partial y^2} + f(x,y,t) \qquad \begin{matrix} 0 < x < \pi \\ 0 < y < \pi \\ t > 0 \end{matrix} \tag{1}$$

с начальными и граничными условиями

$$Q(x,y,0) = Q_{01}(x,y), \quad \left.\frac{\partial Q(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = Q_{02}(x,y), \qquad \begin{matrix} 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi \end{matrix} \tag{2}$$

$$\begin{matrix} Q(x,0,t)=0 & Q(0,y,t)=0, \\ Q(x,\pi,t)=0 & Q(\pi,y,t)=0. \end{matrix} \qquad t \geqslant 0 \tag{3}$$

Функция $Q(x, y, t)$ описывает отклонение некоторого параметра от положения равновесия в точке пространства с координатами x, y в момент времени t, а функция $f(x, y, t)$ — интенсивность внешнего возмущения.

Пусть задано некоторое $T>0$. Вне отрезка $[0, T]$ будем считать управление тождественно равным нулю. В качестве допустимого класса управлений естественно взять класс $L_2[0, T]$.

Найдем функцию $f(x, y, t)$ при каждом $x \in [0,\pi]$ $y \in [0,\pi]$ финитную на $[0, T]$ и принадлежащую $L_2[0, T]$, и такую, чтобы

$$\begin{aligned} &Q(x, y, T) = 0, \\ &\left.\frac{\partial Q(x, y, t)}{\partial t}\right|_{t=T} = 0. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi \end{aligned} \tag{4}$$

Решение уравнения (1) с начальными условиями (2) и граничными условиями (3) имеет вид

$$Q(x, y, t) = \sum_{k,j=1}^{\infty} \left(a_{kj} \cos Rt + \frac{b_{kj}}{R} \sin Rt\right) \sin kx \cdot \sin jy +$$

$$+ \sum_{k,j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{R} \int_0^t f_{kj}(\tau) \sin R(t-\tau)\, d\tau\right) \sin kx \cdot \sin jy, \tag{5}$$

где

$$a_{kj} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} Q_{01}(x, y) \sin kx \cdot \sin jy\, dx\, dy,$$

$$b_{kj} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} Q_{02}(x, y) \sin kx \ \sin jy\, dx\, dy, \tag{6}$$

$$f_{kj}(\tau) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x, y, \tau) \sin kx \cdot \sin jy\, dx\, dy, \tag{7}$$

$$R = \sqrt{k^2 + j^2}.$$

Будем предполагать, что функции $Q_{01}(x, y)$, $Q_{02}(x, y)$, $f(x, y, t)$ являются достаточно гладкими (кусочно-гладкими) для того, чтобы решение задачи (1)—(2)—(3) было классическим.

Условия успокоения системы (4) записываются теперь так:

$$\sum_{k,j=1}^{\infty} \left(a_{kj} \cos RT + \frac{b_{kj}}{R} \sin RT\right) \sin kx \cdot \sin jy =$$

$$= - \sum_{k,j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{R} \int_0^T f_{kj}(\tau) \sin R(T-\tau)\, d\tau\right) \sin kx \cdot \sin jy, \tag{8}$$

$$\sum_{k,j=1}^{\infty}\left(-a_{kj}\sin RT+\frac{b_{kj}}{R}\cos RT\right)\sin kx\cdot\sin jy=$$

$$=-\sum_{k,j=1}\left(\frac{1}{R}\int_0^T f_{kj}(\tau)\cos R(T-\tau)d\tau\right)\sin kx\cdot\sin jy.$$

Сравнивая коэффициенты при функциях $\sin kx\cdot\sin jy$ и производя простые преобразования, получаем бесконечную систему равенств

$$Ra_{kj}\cos RT+b_{kj}\sin RT=-\sin RT\int_0^T\cos R\tau f_{kj}(\tau)\,d\tau+$$

$$+\cos RT\int_0^T\sin R\tau f_{kj}(\tau)\,d\tau, \qquad (9)$$

$$-Ra_{kj}\sin RT+b_{kj}\cos RT=-\cos RT\int_0^T\cos R\tau f_{kj}(\tau)\,d\tau-$$

$$-\sin RT\int_0^T\sin R\tau f_{kj}(\tau)\,d\tau.$$

$$k=1,2,3,\ \ldots;\ j=1,2,3,\ \ldots.$$

Для каждой пары индексов k, j эту систему алгебраических линейных уравнений можно разрешить относительно

$$\xi=\int_0^T\cos R\tau f_{kj}(\tau)\,d\tau,\qquad \eta=\int_0^T\sin R\tau f_{kj}(\tau)\,d\tau.$$

Таким образом, задача сводится к нахождению функции $f_{kj}(t)$, удовлетворяющей двум равенствам

$$\int_0^{T_{kj}} f_{kj}(\tau)\cos R\tau\,d\tau=-b_{kj}\quad k, j \text{ — фиксированы},$$

$$\int_0^{T_{kj}} f_{kj}(\tau)\sin R\tau\,d\tau=a_{kj}R\qquad T_{kj}\leqslant T. \qquad (10)$$

Повторяя рассуждения работы [1, 711—712 *], приходим к следующей интерполяционной задаче: требуется найти целую функцию $\tilde{f}^*_{kj}(\omega)$ степени не выше $\sigma_{kj}=\frac{T_{kj}}{2}$, принадлежащую $L_2(-\infty, \infty)$, и такую, что

$$\tilde{f}^*_{kj}(-R)=(-b_{kj}+ia_{kj}R)\,e^{-iR\sigma_{kj}},$$
$$\tilde{f}^*_{kj}(R)=(-b_{kj}-ia_{kj}R)\,e^{iR\sigma_{kj}}. \tag{11}$$

Чтобы решить эту задачу, возьмем целую функцию $\varphi_{kj}(z)=$ $=\sin\frac{\pi z}{\sqrt{k^2+j^2}}$ степени $\frac{\pi}{\sqrt{k^2+j^2}}$ и воспользуемся интерполяционной формулой Лагранжа с узлами в двух точках $-R$ и R. Имеем

$$\tilde{f}^*_{kj}(\omega)=\frac{(-b_{kj}+ia_{kj}R)\,e^{-iR\sigma_{kj}}}{\frac{\pi}{R}(\omega+R)}\sin\frac{\pi}{R}(\omega+R)+$$
$$+\frac{(-b_{kj}-ia_{kj}R)\,e^{iR\sigma_{kj}}}{\frac{\pi}{R}(\omega-R)}\times\sin\frac{\pi}{R}(\omega-R). \tag{12}$$

Функция $f_{kj}(t)$ связана с функцией $\tilde{f}^*_{kj}(\omega)$ соотношением

$$f_{kj}(t)=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}^*_{kj}(\omega)\,e^{i\omega(t-\sigma_{kj})}\,d\omega,\quad 0\leqslant t\leqslant T_{kj}. \tag{13}$$

Производя необходимые преобразования, получаем

$$f_{kj}(t)=-\frac{b_{kj}R}{\pi}\cos Rt+\frac{a_{kj}R^2}{\pi}\sin Rt,\quad 0\leqslant t\leqslant T_{kj}. \tag{14}$$

Искомое финитное управление имеет вид

$$f(x,y,t)=\sum_{k,j=1}^{\infty}f_{kj}(t)\sin kx\cdot\sin jy. \tag{15}$$

Минимальное время, за которое можно успокоить систему управлением из данного класса есть

$$T=\max_{k,j}\frac{2\pi}{\sqrt{k^2+j^2}}=\pi\sqrt{2}.$$

---

* На стр. 711 имеется опечатка. В формулах для $x_{+k}(t)$, $x_{-k}(t)$ верхний предел в интеграле должен быть равен t.

Пусть теперь распределенный управляемый объект описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 Q(x,y,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Q(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q(x,y,t)}{\partial y^2} \qquad \begin{matrix} 0 < x < \pi \\ 0 < y < \pi \end{matrix} \tag{16}$$

с начальными условиями (2), а управление осуществляется через границу:

$$\left.\begin{aligned} &Q(x, 0, t) = f_1(x, t), \\ &Q(0, y, t) = f_2(y, t), \\ &Q(x, \pi, t) = 0, \\ &Q(\pi, y, t) = 0. \end{aligned}\right. \qquad t \geqslant 0 \tag{17}$$

Найдем управляющие функции: $f_1(x, t)$, при каждом $x \in [0, \pi]$ финитную на $[0, T]$ и принадлежащую $L_2[0, T]$ и $f_2(y, t)$, при каждом $y \in [0, \pi]$ финитную на $[0, T]$ и принадлежащую $L_2[0, T]$, такие, чтобы выполнялись условия успокоения системы (4).

Решение задачи (16)—(2)—(17) имеет вид [2]:

$$\begin{aligned} Q(x,y,t) = &\sum_{k,j=1}^{\infty} \left(a_{kj} \cos Rt + \frac{b_{kj}}{R} \sin Rt\right) \sin kx \cdot \sin jy + \\ &+ \sum_{k,j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{R} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^t [j f_{1k}(\tau) + k f_{2j}(\tau)] \sin R(t-\tau)\, d\tau\right) \sin kx \cdot \sin jy, \end{aligned} \tag{18}$$

где a_{kj}, b_{kj} определены в (6), а

$$\begin{aligned} f_{1k}(\tau) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_1(\tau, x) \sin kx\, dx, \\ f_{2j}(\tau) &= \int_0^\pi f_2(\tau, y) \sin jy\, dy. \end{aligned} \tag{19}$$

Поступая так же, как при переходе от (5) к (10), можно получить бесконечную систему равенств

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^T \cos R\tau\, [j f_{1k}(\tau) + k f_{2j}(\tau)]\, d\tau = -\frac{\pi b_{kj}}{2}, \\ &\int_0^T \sin R\tau\, [j f_{1k}(\tau) + k f_{2j}(\tau)]\, d\tau = \frac{\pi a_{kj} R}{2}. \end{aligned}\right. \qquad \begin{matrix} k = 1, 2, 3, \ldots, \\ j = 1, 2, 3, \ldots, \end{matrix} \tag{20}$$

Пусть числа λ_{kj}, μ_{kj} таковы, что $0 \leqslant \lambda_{kj} \leqslant 1$, $0 \leqslant \mu_{kj} \leqslant 1$ при всех $k = 1, 2, 3, \ldots$, $j = 1, 2, 3, \ldots$.
Будем искать при каждом фиксированном k функцию $f_{1k}(t)$, удовлетворяющую бесконечной системе равенств

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_0^{T_{1k}} \cos R\tau f_{1k}(\tau)\, d\tau = -\frac{\pi b_{kj}\lambda_{kj}}{2j}, \\ &\int\limits_0^{T_{1k}} \sin R\tau f_{1k}(\tau)\, d\tau = \frac{\pi a_{kj} R \mu_{kj}}{2j} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &j = 1, 2, 3, \ldots, \\ &k \text{ — фиксировано}, \\ &T_{1k} \leqslant T. \end{aligned} \tag{21}$$

и при каждом фиксированном j функцию $f_{2j}(t)$, удовлетворяющую бесконечной системе равенств

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_0^{T_{2j}} \sin R\tau f_{2j}(\tau)\, d\tau = -\frac{\pi b_{kj}(1-\lambda_{kj})}{2k}, \\ &\int\limits_0^{T_{2j}} \sin R\tau f_{2j}(\tau)\, d\tau = \frac{\pi a_{kj} R\,(1-\mu_{kj})}{2k}. \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &k = 1, 2, 3, \ldots, \\ &j \text{ — фиксировано}, \\ &T_{2j} \leqslant T. \end{aligned} \tag{22}$$

Рассмотрим систему (21). Она приводит к следующей интерполяционной задаче: нужно найти целую функцию $\tilde{f}^*_{1k}(\omega)$ степени не выше $\sigma_{1k} = \frac{T_{1k}}{2}$, принадлежащую $L_2(-\infty, \infty)$ и такую, что

$$\begin{aligned} &\tilde{f}^*_{1k}\left(-\sqrt{k^2+j^2}\right) = \left(-\frac{\pi b_{kj}\lambda_{kj}}{2j} + i\,\frac{\pi a_{kj} R \mu_{kj}}{2j}\right) e^{-iR\sigma_{ik}}, \\ &\tilde{f}^*_{1k}\left(\sqrt{k^2+i^2}\right) = \left(-\frac{\pi b_{kj}\lambda_{kj}}{2j} - i\,\frac{\pi a_{kj} R \mu_{kj}}{2j}\right) e^{iR\sigma_{1k}}, \end{aligned} \tag{23}$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots.$$

Возьмем целую функцию $\varphi_k(z) = \frac{\sin \pi \sqrt{z^2 - k^2}}{\sqrt{z^2 - k^2}}$. Степень ее равна π при каждом фиксированном $k = 1, 2, 3, \ldots$. С помощью интерполяционной формулы Лагранжа с узлами в точках $\pm\sqrt{k^2 + j^2}$, k — фиксировано, $j = 1, 2, 3, \ldots$ построим функцию $\tilde{f}^*_{1k}(\omega)$.
Обозначим при каждом фиксированном k

$$\tilde{f}^*_{1k}\left(\sqrt{k^2+j^2}\right) = A_{+j}, \quad \tilde{f}^*_{1k}\left(-\sqrt{k^2+j^2}\right) = A_{-j}.$$

Имеем

$$\tilde{f}^{*}_{1k}(\omega)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j j^2}{\pi R}\left\{\frac{A_{+j}\sin\pi\sqrt{\omega^2-k^2}}{\sqrt{\omega^2-k^2}(\omega-R)}-\frac{A_{-j}\sin\pi\sqrt{\omega^2-k^2}}{\sqrt{\omega^2-k^2}(\omega+R)}\right\}. \quad (24)$$

Функция $f_{1k}(t)$ связана с функцией $\tilde{f}^{*}_{1k}(\omega)$ соотношением

$$f_{1k}(t)=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}^{*}_{1k}(\omega)\,e^{i\omega(t-\pi)}d\omega,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi. \quad (25)$$

Выполняя обратное преобразование Фурье [3] и производя сдвижку аргумента, после несложных вычислений получаем

$$f_{1k}(t)=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\frac{j}{2R}\{a_{kj}R\mu_{kj}\psi_1(t)-b_{kj}\lambda_{kj}\psi_2(t)\},\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi, \quad (26)$$

где

$$\psi_1(t)=\int_{-\pi}^{t-\pi}J_0(ik\sqrt{\pi^2-u^2})\cos R(t-u)\,du,$$

$$\psi_2(t)=\int_{-\pi}^{t-\pi}J_0(ik\sqrt{\pi^2-u^2})\sin R(t-u)\,du.$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя I рода с индексом нуль.
Искомое управление $f_1(x,t)$ имеет вид

$$f_1(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_{1k}(t)\sin kx. \quad (27)$$

Аналогично находится управляющая функция $f_2(y,t)$.

Минимальное время, за которое можно успокоить систему, равно 2π.

Решение интерполяционных задач (11) и (23) не единственно. Это обстоятельство может быть использовано для нахождения финитного управления, оптимального в том или ином смысле.

В заключение автор благодарит А. А. Янцевича за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Фельдбаум, А. Г. Бутковский. Методы теории автоматического управления. «Наука», М., 1971.

2. Г. А. Гринберг. Избранные вопросы теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, М.—Л., 1948.

3. Н. Я. Сонин. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. ГИТТЛ, М., 1954.