

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
(повне найменування вищого навчального закладу)

Факультет математики і інформатики
(повне найменування інституту, назва факультету (відділення))

Кафедра фундаментальної математики
(повна назва кафедри (предметної, циклової комісії))

Кваліфікаційна робота

магістр
(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему:

Деякі властивості лінійних функціоналів у просторі поліномів

Виконала: студентка групи М-162 II курсу
другого (магістерського) рівня
111 Математика
(шифр і назва напрямку підготовки, спеціальності)

Дубова К.О.
(прізвище та ініціали)

Керівник: доцент Гефтер С. Л.
(прізвище та ініціали)

Рецензент: к. ф.-м. наук, доцент кафедри
математичного моделювання та аналізу даних
ННІ Комп'ютерних наук та штучного інтелекту
Макаров О.А
(прізвище та ініціали)

Харків - 2024

Зміст

Анотації.....	3
Вступ.....	4
Розділ 1. Попередні відомості.....	6
Розділ 2. Дельта-функція у просторі поліномів на відрізку	13
Розділ 3. Теорема про загальний вигляд лінійного функціоналу у просторі поліномів $\mathbb{R}[x]$	15
Розділ 4. Дельта-функція у просторі $\mathbb{R}[x]$	17
Розділ 5. Дельта-функція у просторі $\mathbb{C}[z]$	19
Список використаних джерел.....	21

Анотації

ДУБОВА К.О., Деякі властивості лінійних функціоналів у просторі поліномів

У кваліфікаційній роботі за допомогою теореми Бореля про нескінченно диференційовані функції наведено коротке доведення теореми про те, що на відміну від скінченного відрізка, довільний лінійний функціонал у просторі поліномів $\mathbb{R}[x]$ можна представити за допомогою інтегралу з функцією з простору Шварца. Наведені явні приклади такого представлення для дельта-функції. Також наведені прості приклади, що показують неоднозначність таких представлень. Показано, що ситуація у просторі поліномів $\mathbb{C}[z]$ протилежна: на відміну від представлення довільного лінійного функціоналу у просторі $\mathbb{R}[x]$ у вигляді інтегралу по дійсній вісі, у випадку поля комплексних чисел не всі лінійні функціонали у просторі $\mathbb{C}[z]$ можна представити за допомогою звичайного інтеграла Коші.

DUBOVA K.O., Some properties of linear functionals in the space of polynomials

In the qualified work, in addition to Borel's theorem about infinitely differentiable functions, a short summary of the theorem about those that can be administrated from a skimmed section, rather linear The functional of the polynomial space $\mathbb{R}[x]$ can be represented by an additional integral with the function of the Schwartz space. There are clear applications of such a representation for the delta function. We also point out simple examples to show the ambiguity of such ideas. It is shown that the situation in the space of polynomials $\mathbb{C}[z]$ is similar: in view of the representation of a sufficient linear functional in the space $\mathbb{R}[x]$ in the form of an integral over the $\mathbb{R}$, in the case of the field of complex numbers, not all linear functionals in the space $\mathbb{C}[z]$ can be represented using the prime Cauchy integral.

ВСТУП

Лінійні функціонали у просторах поліномів над полями дійсних і комплексних чисел вивчалися у багатьох роботах з алгебри, комбінаторики та теорії ортогональних поліномів (див., наприклад, монографію [1]). У представленій кваліфікаційній роботі лінійні функціонали у просторах поліномів над полями дійсних і комплексних чисел досліджуються з точки зору функціонального аналізу, теорії узагальнених функцій та комплексного аналізу. Хоча формально лінійний простір $\mathbb{K}[x]'$ всіх лінійних функціоналів у просторі поліномів $\mathbb{K}[x]$ над полем $\mathbb{K}$ можна ототожнити з лінійним простором $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ всіх послідовностей елементів поля $\mathbb{K}$ (див. розділ 1.2) у класичному випадку поля дійсних і поля комплексних чисел з'являються дуже цікаві й важливі зв'язки теорії лінійних функціоналів у просторі поліномів з гармонічним аналізом, простором Шварца, теорією узагальнених функцій та комплексним аналізом.

У першому розділі представленої кваліфікаційної роботи подані попередні відомості про лінійний простір поліномів, лінійні функціонали у цьому лінійному просторі, про простір Шварца й перетворення Фур'є у цьому просторі. Також там наведені типові приклади лінійних функціоналів у просторі поліномів над полем дійсних чисел. У другому розділі вивчається випадок, коли поліноми розглядаються тільки на скінченному відрізку. У цьому випадку показано, що все дуже схоже на властивості неперервних лінійних функціоналів у просторі неперервних функцій на відрізку, а саме, на скінченному проміжку не всі лінійні функціонали у просторі поліномів можуть бути задані за допомогою інтегралу (наприклад, таке задання неможливе для дельта-функції). Крім того, доведено, що у випадку можливості такого задання, відповідна функція визначається однозначно (з точністю до множини нульової міри).

Основні результати кваліфікаційної роботи містяться у розділах 3 – 5. У розділі 3 за допомогою теореми Бореля про нескінченно диференційовані функції наведено коротке доведення теореми про те, що на відміну від скінченного відрізка, довільний лінійний функціонал у просторі поліномів $\mathbb{R}[x]$ можна

представити за допомогою інтегралу з функцією з простору Шварца. У розділі 4 наведені явні приклади такого представлення для дельта-функції. Також наведені прості приклади, що показують неоднозначність таких представлень. У розділі 6 показано, що ситуація у просторі поліномів $\mathbb{C}[z]$ протилежна: на відміну від представлення довільного лінійного функціоналу у просторі $\mathbb{R}[x]$ у вигляді інтегралу по дійсній вісі, у випадку поля комплексних чисел не всі лінійні функціонали у просторі $\mathbb{C}[z]$ можна представити за допомогою звичайного інтеграла Коші.

1. Попередні відомості

1.1. Лінійні простори і лінійні функціонали [2, розділ 5]

Нехай $\mathbb{K}$ – довільне поле. Множина X із заданими на ній операціями додавання елементів і множення на елементи з поля $\mathbb{K}$ називається лінійним простором над полем $\mathbb{K}$, якщо X є абелевою групою відносно додавання та для будь-яких елементів λ, μ з поля $\mathbb{K}$ і будь-яких елементів x, y з групи X виконуються наступні рівності, що пов'язують множення на елементи з поля $\mathbb{K}$ з додаванням елементів з групи X :

- $1 \cdot x = x$
- $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
- $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

У дипломній роботі розглядаються тільки лінійні простори на полем нульової характеристики. Важливими прикладами таких полів є поле дійсних чисел $\mathbb{R}$, поле комплексних чисел $\mathbb{C}$ та поле раціональних чисел $\mathbb{Q}$.

Підмножина Y лінійного простору X називається лінійним підпростором, якщо для будь-яких λ, μ з $\mathbb{K}$ і будь-яких x, y з Y лінійна комбінація $\lambda x + \mu y$ також лежить в Y .

Підмножина A лінійного простору X називається повною, якщо $\text{Lin } A = X$; підмножина A називається лінійно незалежною, якщо для будь-якого скінченного набору елементів $x_k \in A, k = 1, 2, \dots, n$, рівність $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0$ виконується, тільки коли всі коефіцієнти λ_k дорівнюють нулю. Повна лінійно незалежна підмножина називається базисом Гамеля. Якщо в просторі X існує скінченний базис Гамеля, тоді простір називається скінченновимірним, в іншому випадку простір називається нескінченновимірним. Відмітимо наступні важливі властивості базису Гамеля:

- якщо в лінійному просторі існує злічена повна система векторів, то будь-який базис Гамеля не більш ніж злічений;

- якщо в лінійному просторі існує зліченна лінійно незалежна система векторів, то довільний базис Гамеля містить, принаймні, зліченне число елементів;
- якщо в лінійному просторі існує зліченний базис Гамеля, то будь-який інший базис Гамеля у цьому просторі також є зліченим.

Нехай X, Y – лінійні простори над довільним полем $\mathbb{K}$. Відображення $T: X \rightarrow Y$ називається лінійним оператором, якщо для будь-яких елементів $x_1, x_2 \in X$ та скалярів $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ виконується така рівність:

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2)$$

У випадку, коли $Y = \mathbb{K}$, лінійний оператор $T: X \rightarrow \mathbb{K}$ називається лінійним функціоналом.

1.2. Кільце поліномів $\mathbb{K}[x]$

Кільце поліномів з коефіцієнтами з поля $\mathbb{K}$ зокрема є й лінійним простором над полем $\mathbb{K}$. Цей лінійний простір є об'єднанням зростаючої послідовності своїх скінченновимірних підпросторів:

$\mathbb{K} \subset \mathbb{K}_1[x] \subset \mathbb{K}_2[x] \subset \dots \subset \mathbb{K}_m[x] \subset \dots$, $\mathbb{K}[x] = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathbb{K}_m[x]$, де $\mathbb{K}_m[x]$ – підпростір поліномів, степені яких не перевершує m . Базис Гамеля у просторі $\mathbb{K}[x]$ створює послідовність степенів:

$$\{1, x, x^2, \dots, x^m, x^{m+1}, \dots\}$$

Якщо $T: \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}$ – лінійний функціонал, то він повністю визначається, своїми значеннями на степенях, а саме, якщо $p \in \mathbb{K}[x]$, $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$, то $T(p) = a_0 T(1) + a_1 T(x) + a_2 T(x^2) + \dots + a_m T(x^m)$.

Позначимо за $\mathbb{K}[x]'$ лінійним простір всіх лінійних функціоналів у просторі поліномів $\mathbb{K}[x]$.

Є правильним наступне просте твердження.

Лема 1.2.1. Відображення I , $I(T) = \{T(x^m)\}_{m=0}^{\infty}$, з простору $\mathbb{K}[x]'$ у простір $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ всіх послідовностей елементів поля $\mathbb{K}$ є ізоморфізмом лінійних просторів $\mathbb{K}[x]'$ і $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$.

1.3. Випадок поля дійсних чисел

У випадку, коли $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ у $(m + 1)$ -вимірному просторі $\mathbb{R}_m[x]$ можна ввести одну із стандартних норм. Всі ці норми породжують у просторі $\mathbb{R}_m[x]$ топологію покоефіцієнтної збіжності. Як добре відомо, будь-який лінійний функціонал у скінченновимірному просторі $\mathbb{R}_m[x]$ буде неперервним. Розглянемо тепер у просторі поліномів $\mathbb{R}[x] = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathbb{R}_m[x]$ природню топологію індуктивної границі. Збіжність послідовності поліномів у такій топології просто означає, що всі поліноми з розглянутої послідовності належать одному скінченновимірному простору $\mathbb{R}_m[x]$ і збігаються у цьому просторі. Отже, ми маємо, що будь-який лінійний функціонал у просторі поліномів $\mathbb{R}[x] = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathbb{R}_m[x]$ буде неперервним.

1.4. Простір Шварца швидко спадаючих гладких функцій [3, Гл. III, §5]

Нехай $\mathcal{S}_{\infty}(\mathbb{R})$ — множина всіх таких нескінченно диференційованих комплексно значних функцій на прямій, для кожної із яких існує така постійна C_{pq} (яка залежить від самої функції f і цілих невід’ємних чисел p, q), що

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leq C_{pq}. \quad (1.4.1)$$

Таким чином, функція із $\mathcal{S}_{\infty}(\mathbb{R})$ і всі її похідні прямують до нуля на ∞ швидше будь-якого степеня $\frac{1}{x^p}$. Множина $\mathcal{S}_{\infty}(\mathbb{R})$ є векторним простором і оператор диференціювання $\frac{d}{dx}$ є лінійним оператором в цьому просторі. Іще одним важливим прикладом лінійного оператора в просторі $\mathcal{S}_{\infty}(\mathbb{R})$ буде оператор M множення на незалежну змінну: $(Mf)(x) = xf(x), f \in \mathcal{S}_{\infty}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}$.

Приведемо приклади функцій із простору $\mathcal{S}_{\infty}(\mathbb{R})$.

Приклад 1.4.1. Нехай $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ — нескінченно диференційована фінітна функція, тобто $\exists R > 0 : f(x) = 0$, якщо $|x| \geq R$. Тоді $f \in \mathcal{S}_{\infty}(\mathbb{R})$.

Приклад 1.4.2. Нехай $f(x) = e^{-x^2}$.

Перевіримо, що $f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R})$. Очевидно, що $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Покажемо, що $f^{(q)}(x) = P(x)e^{-x^2}$, де $P(x)$ – поліном. Застосуємо метод математичної індукції. База індукції очевидно виконана. Тепер необхідно зробити індуктивний перехід:

$$f^{(q+1)}(x) = (P(x)e^{-x^2})' = P'(x)e^{-x^2} - 2xP(x)e^{-x^2} = P_1(x)e^{-x^2}, \text{ де}$$

$P_1(x) = P'(x) - 2xP(x)$ – поліном. Отже:

$x^p f^{(q)}(x) = P_2(x)e^{-x^2}$, де $P_2(x)$ – поліном. Оскільки показникова функція e^x на $+\infty$ зростає швидше будь-якого степені, то $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p f^{(q)}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_2(x)}{e^{x^2}} = 0$ для всіх p і q . Тому функція $x^p f^{(q)}(x)$ обмежена на $\mathbb{R}$ для всіх p і q , тобто виконується умова (1.4.1).

Важливу роль для подальшого вивчення властивостей лінійних функціоналів у просторі поліномів $\mathbb{R}[x]$ буде відігравати наступна теорема Еміля Бореля (див. [4, Гл. I, §1.2]).

Теорема 1.4.1. Нехай $\{a_n\}$, де $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ – довільна числова послідовність. Тоді існує така функція $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, що

$$\varphi^{(n)}(0) = (-i)^n a_n, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

1.5 Перетворення Фур'є у просторі Шварца швидко спадаючих гладких функцій [3, Гл. VIII, §4]

Використовуючи той факт, що при переході від функції f до її перетворення Фур'є g властивості гладкості функції та прямування її до нуля на нескінченності міняються місцями, можна знайти клас функцій, що переводиться перетворенням Фуріє в себе.

Нехай $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ – множина нескінченно диференційованих функцій на всій вісі, для кожної з яких існує такий набір сталих C_{pq} (що залежить від самої функції f та чисел p, q), що

$$|x^p f^{(q)}(x)| < C_{pq}. \quad (1.5.1)$$

Покажемо, що у випадку, коли $f \in S(\mathbb{R})$, то й $g = F[f] \in S(\mathbb{R})$. З нерівності (1.5.1) випливає абсолютна інтегрованість кожної з функцій $x^p f^{(q)}(x)$. Справді, оскільки (1.5.1) виконується для всіх p та q , то

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leq C_{p+2,q}/x^2,$$

тобто функція $x^p f^{(q)}(x)$ прямує до нуля не повільніше, ніж $1/x^2$. З цього в свою чергу випливає, що функція $F[f]$ має похідні всіх степенів. Отже, з інтегрованості $f^{(q)}(x)$ ($q = 1, 2, \dots$) випливає, що $g = F[f]$ прямує до нуля на нескінченності швидше, ніж $1/|\lambda|^q$. Розглянемо тепер функції

$$(i\lambda)^q g^{(p)}(\lambda) = (-i)^q F[(x^p f(x))^q],$$

кожна з яких, як перетворення Фур'є інтегрованої функції обмежена деякою сталою D_{pq} . Отже, якщо $f \in S(\mathbb{R})$, то й $g = F[f] \in S(\mathbb{R})$. Навпаки, нехай тепер $g \in S_\infty$. Тоді, за доведеним, функція

$$f^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda$$

належить простору $S(\mathbb{R})$. Нехай тепер $f(x) = \frac{1}{2\pi} f^*(-x)$. Тоді $f \in S(\mathbb{R})$. Тепер за формулою обернення маємо

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) e^{i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx,$$

тобто g є перетворенням Фур'є функції $f \in S(\mathbb{R})$. Отже, перетворення Фур'є переводить простір $S(\mathbb{R})$ на весь простір $S(\mathbb{R})$. Отже, що це відображення є взаємно однозначним.

1.6 Приклади лінійних функціоналів у просторі поліномів $\mathbb{R}[x]$

1. Нехай $K = \mathbb{R}$ і f — така вимірنا за Лебегом функція, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| |x|^k dx < +\infty \text{ для всіх } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Тогда f наступним чином задає лінійний функціонал у просторі поліномів $\mathbb{R}[x]$:

$$(f, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx, p \in \mathbb{R}[x].$$

Зокрема, будь-яка функція з простору Шварца $S(\mathbb{R})$ таким чином задає лінійний функціонал у просторі поліномів $\mathbb{R}[x]$.

Відмітимо, що на відміну від аналогічних ситуацій у класичному функціональному аналізі, ненульова вимірنا за Лебегом функція може задавати нулевий лінійний функціонал у просторі поліномів $\mathbb{R}[x]$. Перший приклад такого типу було побудовано Стільтьєсом (див. [7], пункт 3.1.2.5). Наведемо цей класичний приклад Стільтьєса.

Нехай $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\sqrt[4]{x}} \sin \sqrt[4]{x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$. Тоді $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x) dx = 0$, для всіх

$k = 0, 1, 2, 3, \dots$, тобто ненульова функція φ задає нульовий лінійний функціонал у просторі поліномів $\mathbb{R}[x]$.

Більш прості приклади таких функцій побудовані у розділі 3 представленої роботи.

2. Нехай тепер K — довільне поле нульової характеристики. Розглянемо наступний приклад лінійного функціоналу у просторі поліномів $K[x]$. За традицією цей лінійний функціонал називають δ -функцією:

$$(\delta, p) = p(0), \quad p \in K[x].$$

У розділі 3 представленої роботи ми покажемо, що у випадку, коли $K = \mathbb{R}$, на відміну від аналогічних ситуацій у класичному функціональному аналізі, δ -функцію можна задати за допомогою інтегралу зі звичайною вимірною за Лебегом функцією, яку можна навіть взяти з простору Шварца.

3. Розглянемо тепер наступний лінійний функціонал у просторі поліномів $K[x]$: $(\delta^{(k)}, p) = (-1)^k p^{(k)}(0)$, $p \in K[x]$, де $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Цей лінійний функціонал можна розглядати як деякий суто алгебраїчний аналог k -ї похідної δ -функції (див. статтю [8]). Цікаво відмітити, що у просторі всіх лінійних функціоналів $\mathbb{R}[x]'$ у просторі поліномів $\mathbb{R}[x]$ є коректно визначеною нескінченна сума

$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \delta^{(k)}$, оскільки $(\delta^{(k)}, p) = 0$, якщо $k > \deg p$. Покажемо, що у просторі лінійних функціоналів $\mathbb{R}[x]'$ є правильною наступна рівність:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \delta^{(k)}(x) = f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Для цього зазначимо, що $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^k dx = \Gamma(k+1) = k!$. Тому для $\varphi \in \mathbb{R}[x]$, $\varphi(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$, $b_k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}$ маємо:

$$(f, \varphi) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \varphi(x) dx = \sum_{k=0}^n b_k k! = \sum_{k=0}^n \varphi^{(k)}(0) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\delta^{(k)}, \varphi).$$

Отже, лінійний функціонал $T: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ у просторі поліномів $\mathbb{R}[x]$,

$$T(p) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{(k)}(0) \text{ можна задати такою рівністю } T(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x} p(x) dx.$$

1.7 Фактор-простір [2, розділ 5]

Нехай X – лінійний простір, X_1 – підпростір в X . Введемо наступне відношення еквівалентності на просторі $X: x \sim y$, якщо $x - y \in X_1$. Класом еквівалентності елемента x називають наступну множину:

$$[x] = x + X_1 = \{x + y: y \in X_1\}.$$

Множина таких класів еквівалентності утворює новий лінійний простір, а саме, фактор-простір простору X за його підпростором X_1 і позначається як X/X_1 .

З фактор-простором є пов'язаним лінійний оператор q – фактор-відображення простору X на фактор-простір X/X_1 : $q(x) = [x]$. Оператор фактор-відображення є сюр'єктивним

Нехай X, Y – лінійні простори і $T: X \rightarrow Y$ – сюр'єктивний лінійний оператор. Тоді відображення $\tilde{T}: X/\text{Ker}T \rightarrow Y$, яке ставить у відповідність класу еквівалентності $[x]$ елемента $x \in X$ елемент Tx , визначено коректно і встановлює ізоморфізм лінійних просторів $X/\text{Ker}T$ і Y .

2 Дельта-функція у просторі поліномів на відрізку

У цьому розділі ми покажемо, що на скінченному проміжку не всі лінійні функціонали у просторі поліномів можуть бути задані за допомогою інтегралу, а саме, таке задання неможливе для дельта-функції. Крім того, буде доведено, що у випадку можливості такого задання, відповідна функція визначається однозначно (з точністю до множини нульової міри).

Теорема 2.1. Нехай $a > 0$. Не існує такої інтегрованої за Лебегом функції φ на відрізку $[-a, a]$, що $\int_{-a}^a p(x)\varphi(x)dx = p(0)$ для будь-якого полінома $p \in \mathbb{R}[x]$.

Доведення. Припустимо, що така функція існує. За теоремою Вейерштрасса множина всіх поліномів на відрізку утворює щільний підпростір у просторі неперервних функцій на цьому відрізку. Тому рівність

$\int_{-a}^a f(x)\varphi(x)dx = f(0)$ буде виконуватись для всіх неперервних функцій на відрізку $[-a, a]$. Не важко побудувати таку послідовність $\{f_n\}$ неперервних функцій на відрізку $[-a, a]$, що $f_n(0) = 1$, $0 \leq f_n(x) \leq 1$ і $f_n(x) = 0$ якщо $|x| \geq \frac{1}{n}$. Тоді:

$$1 = |f_n(0)| = \left| \int_{-a}^a f_n(x)\varphi(x)dx \right| = \left| \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)\varphi(x)dx \right| \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |\varphi(x)|dx \rightarrow 0.$$

Отримали суперечність. Теорема доведена.

Теорема 2.2. Нехай $a > 0$ і $T: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ – такий лінійний функціонал у просторі поліномів, що

$$T(p) = \int_{-a}^a p(x)f(x)dx = \int_{-a}^a p(x)g(x)dx, \quad p \in \mathbb{R}[x],$$

де f і g – інтегровані за Лебегом функції на відрізку $[-a, a]$. Тоді функції f і g співпадають майже скрізь.

Доведення. Нехай $h = f - g$. Тоді $\int_{-a}^a p(x) h(x) dx = 0$ для всіх $p \in \mathbb{R}[x]$. За теоремою Вейерштрасса множина всіх поліномів на відрізку утворює щільний підпростір у просторі неперервних функцій на цьому відрізку. Тому рівність $\int_{-a}^a h(x) e^{-i\lambda x} dx = 0$ буде виконуватись для всіх дійсних λ . За теоремою єдиності для перетворення Фур'є інтегрованої функції отримуємо, що $h(x) = 0$ майже скрізь на відрізку $[-a, a]$ (див. [3, Гл. VIII). Тому функції f і g співпадають майже скрізь на цьому відрізку.

3 Теорема про загальний вигляд лінійного функціоналу у просторі поліномів $\mathbb{R}[x]$

Нехай $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функція з простору Шварца $S(\mathbb{R})$. Тоді f породжує лінійний функціонал у просторі поліномів $\mathbb{R}[x]$:

$$T(p) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)f(x)dx, \quad p \in \mathbb{R}[x]. \quad (3.1)$$

Справедливо й зворотне твердження.

Теорема 3.1. Якщо $T : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ – довільний лінійний функціонал, то існує така функція $f \in S(\mathbb{R})$, що виконується рівність (2.1).

Зазначимо, що доведення більш загального результату А.Дюрана можна знайти у статті [5] та монографії [6]. Наведемо незалежне коротке доведення необхідного нам результату. Відзначимо, що рівність (2.1) достатньо перевірити для мономів $p_n(x) = x^n$, де $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Нехай $a_n = T(p_n)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. В силу теореми Бореля існує така функція $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, що

$$\varphi^{(n)}(0) = (-i)^n a_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

(див. розділ 1.4).

Зворотне перетворення Фур'є цієї функції

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (3.2)$$

є елементом простору Шварца $S(\mathbb{R})$. Тоді $\varphi(\lambda)$ є перетворенням Фур'є функції $f_1(x)$:

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-i\lambda x} dx$$

та

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n f_1(x) dx = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Положимо $f(x) = Ref_1(x)$. Тоді $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ та $f \in S(\mathbb{R})$. В силу (2.3) функція f задовольняє співвідношенням (3.1).

Відмітимо, що ця функція в рівності (3.1) визначається неоднозначно. Наприклад, якщо $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, носій φ лежить на $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi(x) > 0$ на $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, функція f_1 визначена формулою (2.2), а $f(x) = Ref_1(x)$, то $\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx = 0$ для всіх $n = 0, 1, 2, \dots$ та $f \neq 0$ (див. також приклад у розділі 3).

Наслідок 3.2. Розглянемо природне відображення $F: S(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}[x]'$ (див. розділ 2). Тоді лінійні простори $S(\mathbb{R})/KerF$ і $\mathbb{R}[x]'$ є ізоморфними.

4 Дельта-функція у просторі $\mathbb{R}[x]$

Нехай $\varepsilon > 0$ та $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ – така парна функція, що $\varphi_\varepsilon(x) = 1$, якщо $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ та $\varphi_\varepsilon(x) = 0$, якщо $x \notin (-2\varepsilon, 2\varepsilon)$ (див. рисунок 3.1). Крім того, функція $\varphi_\varepsilon(x)$ має наступну властивість: $0 < \varphi_\varepsilon(x) < 1$ на $(\varepsilon, 2\varepsilon)$.

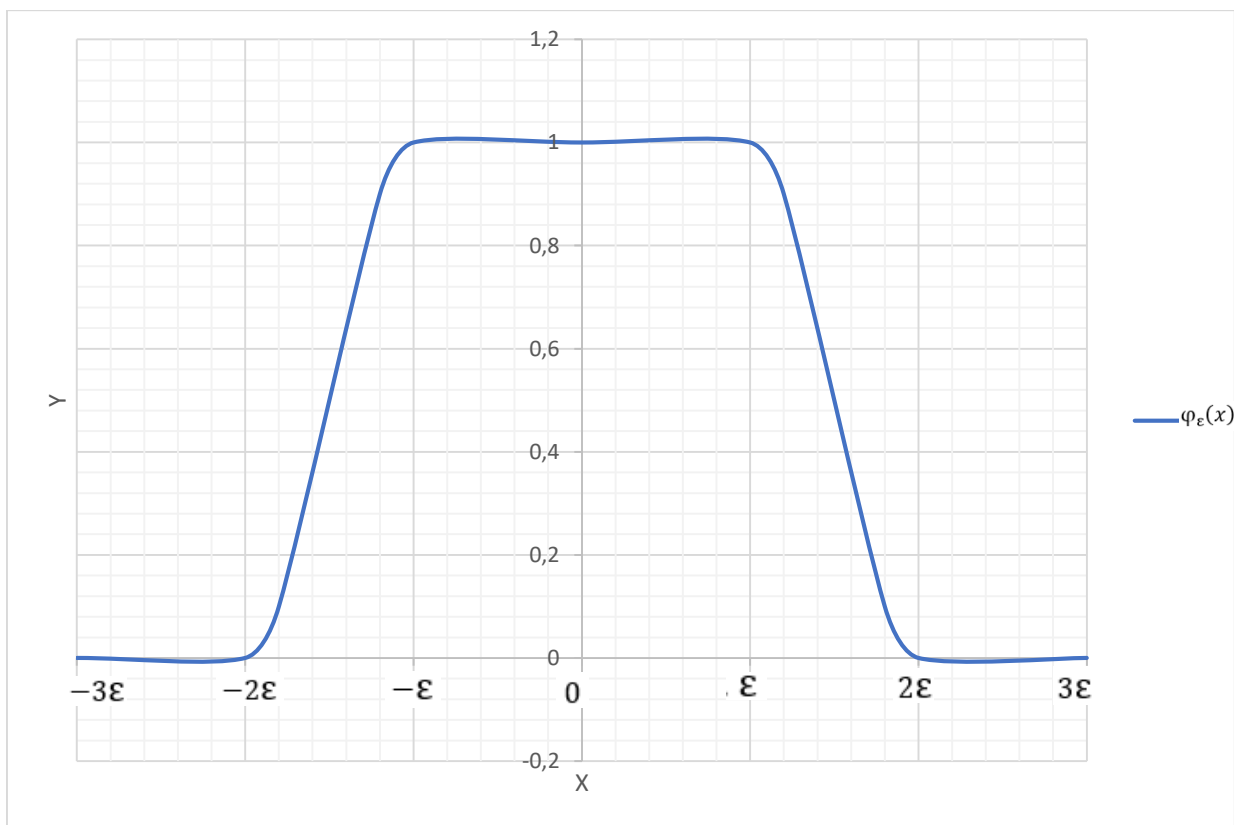


Рисунок 4.1 – Графік функції $\varphi_\varepsilon(x)$

Існування такої функції випливає з теореми 1.4.1 монографії [4]. Тоді $\varphi_\varepsilon(0) = 1$ та $\varphi_\varepsilon^{(n)}(0) = 0$ для всіх натуральних n . Положимо тепер

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\varepsilon(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\lambda) \cos \lambda x d\lambda.$$

Тоді $f_\varepsilon \in S(\mathbb{R})$, $\varphi_\varepsilon(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x) e^{-i\lambda x} dx$ та

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x) dx = 1, \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_\varepsilon(x) dx = i^n \varphi_\varepsilon^{(n)}(0) = 0, n \geq 1.$$

Тому $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) f_\varepsilon(x) dx = p(0)$ для будь-якого полінома $p \in \mathbb{R}[x]$.

Зокрема, якщо $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ та $g(x) = f_{\varepsilon_1}(x) - f_{\varepsilon_2}(x)$, то $\int_{-\infty}^{\infty} x^n g(x) dx = 0$ для всіх $n = 0, 1, 2, \dots$.

Наведемо ще один приклад функції з простору Шварца, що породжує δ -функцію у просторі поліномів.

$$\text{Нехай } \psi(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{1-e^{x^2}}}, & x \neq 0 \end{cases}. \text{ Тоді } \psi(0) = 1 \text{ та } \psi^{(n)}(0) = 0, n \geq 1.$$

Крім того, можна перевірити, що $\psi \in S(\mathbb{R})$. Положимо тепер

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda) \cos \lambda x d\lambda.$$

Тоді $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \varphi(x) dx = p(0)$ для будь-якого полінома $p \in \mathbb{R}[x]$.

5 Дельта-функція у просторі $\mathbb{C}[z]$

Нехай $\mathbb{C}\left[\left[z, \frac{1}{z}\right]\right]$ — лінійний простір формальних рядів Лорана з коефіцієнтами з поля комплексних чисел $\mathbb{C}$. Для $g \in \mathbb{C}\left[\left[z, \frac{1}{z}\right]\right]$ і $g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k z^k$ наступним чином визначимо формальний лишок:

$$\text{Res}(g(z)) = g_{-1}.$$

У випадку збіжного ряду Лорана цей формальний лишок співпадає зі звичайним лишком, що розглядається у комплексному аналізі..

Означення 5.1. Нехай $T \in \mathbb{C}[z]'$. Розглянемо наступний формальний ряд Лорана з кільця $\frac{1}{s}K\left[\left[\frac{1}{s}\right]\right]$:

$$C(T)(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T, z^k)}{s^{k+1}}.$$

Ряд Лорана $C(T)(s)$ будемо називати перетворенням Коші лінійного функціоналу T .

Неформально можна собі уявляти, що $C(T)(s) = \left(T, \frac{1}{s-z}\right)$. Очевидно, що відображення $C: \mathbb{C}[z]' \rightarrow \frac{1}{s}\mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{s}\right]\right]$ є ізоморфізмом векторних просторів над полем комплексних чисел.

Твердження 5.2. (Формула обернення). Нехай $T \in \mathbb{C}[z]'$ і $p \in \mathbb{C}[z]$. Тоді

$$(T, p) = \text{Res}(C(T)(s)p(s)).$$

Доведення. Достатньо розглянути випадок, коли поліном є мономом, тобто $p(z) = z^n$ для деякого $n \in \mathbb{N}_0$. У цьому випадку ми маємо, що

$$C(T)(s)s^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T, z^k)s^n}{s^{k+1}}.$$

Тому $\text{Res}(C(T)(s)s^n) = (T, z^n)$.

Теорема 5.3. Для δ -функції, $(\delta, p) = p(0)$ маємо:

$$(\delta, p) = \text{Res}\left(\frac{p(s)}{s}\right) \text{ для всіх } p \in \mathbb{C}[z].$$

Доведення зразу впливає з означення лишка і рівності $C(\delta)(s) = \frac{1}{s}$.

Отже, у випадку поля комплексних чисел δ -функція задається за допомогою звичайною інтегральної формули Коші:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{p(\zeta)}{\zeta} d\zeta = p(0)$$

для будь-якого полінома $p \in \mathbb{C}[z]$, де у якості контура інтегрування можна взяти, наприклад одиничне коло з центром у початку координат.

Зауваження 5.4. На відміну від представлення довільного лінійного функціоналу у просторі $\mathbb{R}[x]$ у вигляді інтегралу по дійсній вісі, у випадку поля комплексних чисел не всі лінійні функціонали у просторі $\mathbb{C}[z]$ можна представити за допомогою звичайного інтеграла Коші. Наприклад, лінійний функціонал

$T(p) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{(k)}(0)$, $p \in \mathbb{C}[z]$ приводить до ряду Лорана

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T, z^k)}{s^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{s^{k+1}}, \text{ який всюди розбігається.}$$

Література

1. Garcia-Ardila JC, Marcellán F, Marriaga ME. *Orthogonal Polynomials and Linear Functionals. An Algebraic Approach and Applications*. EMS Series of Lectures in Mathematics. Berlin: EMS Press (2001).
2. Кадець В.М. *Курс функціонального аналізу та теорії міри*. Підручник. – Львів: Видавець І.Е. Чижигов, 2012. – 590 с. – (Серія “Університетська бібліотека”).
3. Kolmogorov A. N. and Fomin S. V., *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Martino Fine Books (May 8, 2012).
4. Hörmander L. *The Analysis of Linear Partial Differential Equations. 1. Distribution Theory and Fourier Analysis*. Berlin: Springer-Verlag (1983).
5. Duran A.J., THE STIELTJES MOMENTS PROBLEM FOR RAPIDLY DECREASING FUNCTIONS, *Proceedings of the American Mathematical Society* (107), Number 3, November 1989.
6. Estrada R., Kanwal R.P. *A distributional approach to asymptotics theory and applications*. Birkhauser, 2002.
7. Titchmarsh E.C. *The Theory of Functions* (2ed., Oxford, 1939).
8. Gefter S.L., Piven' A. L. Some class of nonlinear partial differential equations in the ring of copolynomials over a commutative ring. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*, Volume 10 – 2024, pp. 01 - 09.