

НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ТЕОРИИ МНОГОПОЛЮСНИКОВ

А. Г. Руткас

В статье рассматриваются передающие реактивные многополюсники с сосредоточенными параметрами; их колебания изучаются с точки зрения открытых систем М. С. Лившица [6, 7]. В целях наглядности изложение ведется в терминах электрических цепей, переход к механическим и акустическим системам с сосредоточенными параметрами легко осуществляется известным методом аналогий. Строится линейный несамосопряженный оператор T , характеристическая матрица-функция которого совпадает с передаточной матрицей многополюсника. С помощью T можно найти также внутреннее состояние многополюсника по заданному входу, указать эквивалентную цепочку простейших многополюсников, применить для изучения колебаний спектральный анализ несамосопряженных операторов. Понятие электрической цепи мы строим аксиоматически, исходя из мультиграфа.

§ 1. Введение

Передающим многополюсником в теории электрических цепей называется устройство, в котором m пар клемм объявлено входом, m

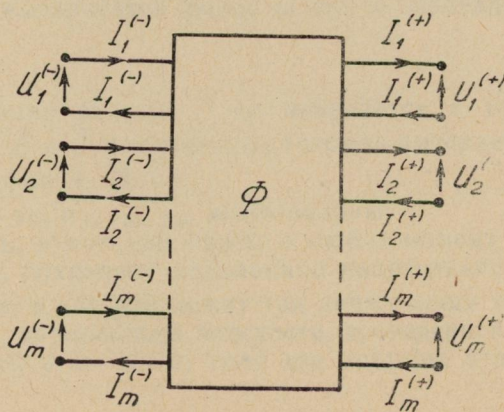


Рис. 1

пар — выходом (рис. 1). Ниже будет дано строгое определение реактивного многополюсника с помощью теории графов.

Пусть X — конечное множество точек на плоскости или в пространстве, Γ — конечное множество отрезков линий, таких, что каждый отрезок

зок не имеет самопересечений, а оба конца его принадлежат X . Совокупность множеств X и Γ называется мультиграфом G и обозначается $\vec{G} = (X, \Gamma)$. Точки из X называются вершинами, отрезка линий на Γ — ребрами мультиграфа G . Всюду в дальнейшем предполагается, что на каждом ребре q выбрано направление. Графически оно обозначается стрелкой; ребро q превращается в дугу $\vec{q}$.

В частном случае, когда каждая пара вершин мультиграфа соединяется не более чем одной дугой в данном направлении, мы приходим к понятию графа. Цепь — это последовательность ребер $q_1, q_2, \dots, q_n$, такая, что из вершины ребра q_1 можно, непрерывно двигаясь по ребрам цепи, попасть в вершину ребра q_n , пройдя по всем ребрам последовательности. Цикл Q — это цепь, начинающаяся и заканчивающаяся в одной вершине. Цикл, при обходе которого каждая вершина встречается один раз (за исключением начала и конца движения), называется элементарным. Мультиграф связан, если любые две вершины соединяются хотя бы одной цепью; и двусвязен — когда любые две вершины одновременно принадлежат некоторому элементарному циклу. Перенумеруем ребра (дуги) из Γ : $q_1, q_2, \dots, q_R$. Циклу Q ставится в соответствие вектор-цикл $\vec{Q}$, принадлежащий координатному R -мерному пространству H_R .

Если при обходе Q дуга $\vec{q}_i$ проходится r_i раз в направлении ее ориентации и s_i раз — в противоположном, то

$$\vec{Q} = (c_1, c_2, \dots, c_R), \quad c_i = r_i - s_i.$$

Для элементарного цикла $c_i = 0, 1$ или -1 . Циклы $Q_1, \dots$ считаются независимыми в случае линейной независимости соответствующих вектор-циклов. Цикломатическое число мультиграфа G — это величина $M = |\Gamma| - |X| + p$, где $|X|$ — количество вершин, $|\Gamma|$ — количество дуг, p — число связных компонент в G . Известно, что наибольшее количество независимых циклов равно M [1]. Всякие M независимых циклов (соответственно вектор-циклов) мы будем называть базисом мультиграфа. Дерево — это связный граф без циклов.

Пусть элементарные вектор-циклы $\vec{Q}_1, \dots, \vec{Q}_M = \{\vec{Q}_k\}_{k=1}^M$ образуют базис мультиграфа G и H_M — их линейная оболочка, $H_M \subset H_R$. Имеет место

Лемма 1. Если вектор $\vec{Q} = (c_1, c_2, \dots, c_R)$ принадлежит H_M и некоторые его компоненты $c_i = 0$ ($i = i_1, i_2, \dots, i_n$), то в G существует набор независимых элементарных циклов $\{\vec{Q}'_k\}_{k=1}^r$, такой

что $\vec{Q} = \sum_{k=1}^r a_k \vec{Q}'_k$, а у вектор-циклов $\vec{Q}'_k = (c_1^k, c_2^k, \dots, c_R^k)$ компоненты $c_i^k = 0$ при всех $i = i_1, i_2, \dots, i_n$; $k = 1, 2, \dots, r$. При $M=2$ утверждение леммы легко проверяется; общий результат устанавливается по индукции.

Под электрической цепью мы будем понимать мультиграф $G = (X, \Gamma)$, у которого каждая дуга $\vec{q}_i$ заменена двухполюсным электрическим устройством, изображенным на рис. 2. Каждому двухполюснику рис. 2 отвечают две комплексные величины: I_i , называемая током, и U_i , называемая напряжением. Току приписывается направ-

ление совпадающее с направлением дуги $\vec{q}_i$. В зависимости от выбора направления для u_i будем различать два типа двухполюсников:

- а) направления u_i и I_i совпадают;
- б) направления u_i и I_i противоположны.

Двухполюсник типа а) назовем *активным*, типа б) — *пассивным*. Поступают следующие соотношения, связанные с конструкцией мультиграфа G .

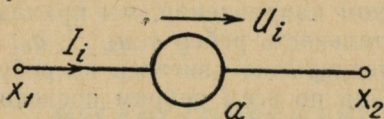


Рис. 2

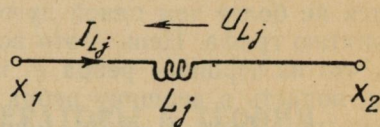
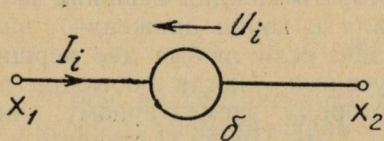


Рис. 3



Первый закон Кирхгофа. Алгебраическая сумма токов I_i , инцидентных вершине x_k , равна нулю:

$$\sum_i I_i = 0, \quad (1)$$

где токи, входящие в x_k , берутся со знаком плюс, выходящие со знаком минус.

Второй закон Кирхгофа. Алгебраическая сумма напряжений u_i вдоль произвольного цикла Q_α равна нулю:

$$\sum_i u_i = 0, \quad (2)$$

где напряжение u_i взято со знаком плюс, если его направление совпадает с направлением обхода Q_α , и со знаком минус — в противном случае. Всякое подмножество дуг* Γ_1 из цепи G назовем $2n$ -полюсником Φ или просто — *многополюсником* ($\Gamma_1 \subset \Gamma$). Дуга $\vec{q}_i \in (\Gamma \setminus \Gamma_1)$

называется внешней для многополюсника Φ ; дуга $\vec{q}_i$, принадлежащая Γ_1 , — внутренней. Многополюсник Φ считаем передающим, если множество внешних двухполюсников $\Gamma \setminus \Gamma_1$ состоит из m активных и m пассивных. Передающий многополюсник (или $4m$ -полюсник) показан на рис. 1, где сами внешние двухполюсники не изображены, но в местах их подключения выписаны соответствующие внешние токи и напряжения, с индексом (—) для активных, (+) — для пассивных. Входом Φ считаются клеммы, куда подключаются внешние активные двухполюсники, выходом — соответственно клеммы для пассивных. Многополюсник Φ вместе с внешними двухполюсниками будем называть *замкнутым* многополюсником Φ ($\Phi = G$).

Зададим соотношения между величинами u_i , I_i на внутренних двухполюсниках из Φ . Если справедливо (см. рис. 3).

$$u_{Lj} = L_j \frac{dI_{Lj}}{dt}, \quad (3)$$

* Вместе с их граничными точками (вершинами).

где L_j — положительный коэффициент, то соответствующий двухполюсник (ребро) q_{Lj} называется *индуктивностью* (или L —ребром).

Если (рис. 3)

$$I_{ck} = C_k \frac{du_{ck}}{dt}, \quad (C_k > 0), \quad (4)$$

то q_{ck} называется *емкостью* или конденсатором (C —ребром).

Пара ребер q_{tl} , q'_{tl} (рис. 4) может рассматриваться как передаю-

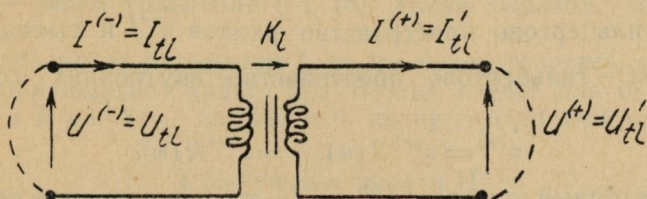


Рис. 4

щий четырехполюсник t_l , так как на основании (1), (2) действие многополюсника $G \setminus t_l$ на t_l равносильно воздействию на t_l некоторых двух новых двухполюсников, присоединенных соответственно на вход и на выход t_l (пунктир на рис. 4). Если

$$u'_{tl} - K_L u_{tl} = 0, \quad (5)$$

$$I_{tl} - K_L I'_{tl} = 0, \quad (6)$$

то t_l называется *идеальным трансформатором**, q_{tl} — входным трансформаторным ребром, q'_{tl} — выходным.

Предполагается, что все внутренние ребра в Φ являются индуктивными, емкостными или трансформаторными; такой многополюсник Φ называется *реактивным*. Рассматриваются установившиеся колебания; временной множитель $e^{i\omega t}$ отбрасываем, сохранив для амплитуд токов и напряжений обозначения I_i , u_i . Тогда (3) и (4) перепишутся:

$$u_{Lj} = i\omega L_j I_{Lj}, \quad (7)$$

$$I_{ck} = i\omega C_k u_{ck}. \quad (8)$$

Максимальное число линейно-независимых уравнений (1) в цепи $\overline{\Phi} = G = (X, \Gamma)$ составляет $|X| - \rho$, уравнений (2) — соответственно $M = |\Gamma| - |X| + \rho$. Предположим, Φ содержит κ трансформаторов; $\{I\}$ — максимальная система линейно независимых уравнений (1); $\{U\}$ — соответственно для уравнений (2). В дальнейшем рассматриваются цепи, для которых совокупность уравнений $\{U\}$, $\{I\}$ и 2κ уравнений (5), (6) при любых вещественных $K_L \neq 0$ линейно независима**. Тогда для числа N_0 независимых уравнений (1), (2), (5), (6) получаем

$$N_0 = |\Gamma| + 2\kappa. \quad (9)$$

* При изучении электрической цепи всегда можно от реального трансформатора, т. е. от взаимной индуктивности, перейти к идеальному [3, 10].

** Можно найти простое достаточное условие на топологию таких цепей; независимость будет обеспечена в дальнейшем более сильными ограничениями на цепь G .

§ 2. Открытая система и операторный комплекс

Для постановки задачи понадобятся три определения из теории открытых систем М. С. Лившица [6, 7].

а) Открытой системой F называется совокупность двух отображений $R(\omega)$ и $S(\omega)$, действующих по схеме:

$$\begin{array}{ccc} & S(\omega) & \\ E & \xrightarrow{\quad} & E \\ & R(\omega) & \\ & \xrightarrow{\quad} & H \end{array}$$

Здесь E — гильбертово пространство входов $\vec{\varphi}^{(-)}$ и выходов $\vec{\varphi}^{(+)}$ системы F ; H — гильбертово пространство внутренних состояний $\vec{\psi}$, так что

$$\vec{\varphi}^{(+)} = \vec{\varphi}^{(-)} S(\omega), \quad \vec{\psi} = \vec{\varphi}^{(-)} R(\omega). \quad (10)$$

б) Операторный комплекс $[T, e_\alpha, J]$ — это совокупность оператора T , действующего в пространстве H , оператора J ($J^2 = I$, $J = J^*$), действующего в пространстве E , и фиксированных векторов $\vec{e}_\alpha \in H$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n = \dim E$), для которых выполняется соотношение (11):

$$\vec{\psi} \frac{T - T^*}{i} = \sum_{\alpha, \beta=1}^n (\vec{\psi}, \vec{e}_\alpha) J_{\alpha\beta} \vec{e}_\beta, \quad (11)$$

где $\|J_{\alpha\beta}\|$ — матрица оператора J в координатном пространстве E с базисом $\vec{a}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{a}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

в) Операторный комплекс $[T, e_\alpha, J]$ принадлежит открытой системе F , если он связан с отображениями $R(\omega)$, $S(\omega)$ соотношениями (12), (13):

$$\vec{\psi} (T - \omega I) = \sum_{\alpha=1}^n \varphi_\alpha^{(-)} \vec{e}_\alpha, \quad (12)$$

$$S(\omega) = I - i \| (\vec{e}_\alpha (T - \omega I)^{-1}, \vec{e}_\beta) \| J, \quad (13)$$

где $(\varphi_1^{(-)}, \varphi_2^{(-)}, \dots, \varphi_n^{(-)}) = \vec{\varphi}^{(-)} \in E$.

Условие (13) означает, что отображение $S(\omega)$ открытой системы совпадает с характеристической матрицей — функцией оператора T [].

Для передающего многополюсника Φ рис. 1 положим:

$$\vec{\varphi}^{(-)} = (u_1^{(-)}, \dots, u_m^{(-)}; I_m^{(-)}, \dots, I_1^{(-)}), \quad \vec{\varphi}^{(+)} = (u_1^{(+)}, \dots, u_m^{(+)}; I_m^{(+)}, \dots, I_1^{(+)}).$$

Пусть Φ содержит μ индуктивностей, η емкостей, κ трансформаторов. Из энергетических соображений выберем вектор внутренних состояний так:

$$\vec{\psi} = (\sqrt{L_1} I_{L1}, \dots, \sqrt{L_\mu} I_{L\mu}; \sqrt{C_{\mu+1}} u_{C(\mu+1)}, \dots, \sqrt{C_N} u_{CN}) = (\xi_1, \dots, \xi_N),$$

где $N = \mu + \eta$. Поскольку энергия емкости C составляет $\frac{1}{2} C |u_c|^2$, индуктивности — соответственно $\frac{1}{2} L |I_L|^2$, то вся энергия, запасаемая

многополюсником Φ , равна: $W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N |\xi_i|^2 = \frac{1}{2} \|\vec{\Phi}\|^2$. Идеальные трансформаторы не запасают энергии.

Задачей I будем называть определение всех токов и напряжений в цепи $G = \bar{\Phi}$ по заданному вектору $\vec{\varphi}^{(-)}$ на входе. Количество неизвестных при этом равно $2|\Gamma| - 2m$, где m — число входных ребер. Максимальное количество линейно независимых уравнений цепи составляет $N_0 + N = 2|\Gamma| - 2n$, где n — число связей (9), $N = |\Gamma| - 2x - 2m$ — число уравнений (7), (8). Таким образом, задача I корректна.

Если она однозначно разрешима*, то мы будем говорить, что многополюсник Φ принадлежит классу Ω_t . В этом случае для Φ существуют отображения $R(\omega)$, $S(\omega)$ из (10) и Φ является открытой системой.

§ 3. Решение задачи II

Когда многополюснику Φ из класса Ω_t принадлежит операторный комплекс $[T, e_a, J]$? Чтобы получить (12), достаточно решить следующую задачу II:

а) выразить все напряжения u_{Lj} , u_{tl} , u'_{tl} , $u_{\beta}^{(+)}$ в количестве $\mu + 2x + m$ через напряжения $u_{\beta}^{(-)}$, u_{ck} с помощью $M + x$ уравнений $\{U\}$, (5);

б) выразить все токи I_{ck} , I_{tl} , I'_{tl} , $I_{\beta}^{(+)}$ в количестве $\eta + 2x + m$ через токи I_{Lj} , $I_{\beta}^{(-)}$ с помощью $|X| - p + x$ уравнений** $\{I\}$, (6):

$$\left. \begin{aligned} u_{Lj} &= \sum_{k=\mu+1}^N a_k^j u_{ck} + \sum_{\alpha=1}^m b_{\alpha}^j u_{\alpha}^{(-)}, & (14) \\ u_{tl} &= \dots \dots \dots, & (15) \\ u_{\beta}^{(+)} &= \dots \dots \dots; & (16) \end{aligned} \right\} \text{II а)}$$

$$\left. \begin{aligned} I_{ck} &= \sum_{j=1}^{\mu} a_j^k I_{Lj} + \sum_{\beta=1}^m \hat{b}_{\beta}^k I_{\beta}^{(-)}, & (17) \\ I_{tl} &= \dots \dots \dots, & (18) \\ I_{\beta}^{(+)} &= \dots \dots \dots & (19) \end{aligned} \right\} \text{II б)}$$

$$(j = 1, \dots, \mu; k = \mu + 1, \dots, N; \alpha(\beta) = 1, \dots, m; l = 1, \dots, x).$$

Для корректности задачи II необходимо, чтобы $\mu + 2x + m \leq M + x$ и $\eta + 2x + m \leq |X| - p + x$. Учитывая соотношения

$$\eta = N - \mu = |\Gamma| - 2x - 2m - \mu, \quad M = |\Gamma| - |X| + p,$$

из первого неравенства получаем $\mu \leq M - m - x$, из второго $\mu \geq M - m - x$. Следовательно, задача II требует, чтобы имела следующая зависимость количества индуктивностей μ и емкостей η от топологии цепи $G = \bar{\Phi}$:

$$\mu = M - m - x, \quad (20)$$

$$\eta = |X| - m - x - p. \quad (21)$$

* В этом случае соответствующий определитель системы всех уравнений должен быть отличным от нуля.

** Уравнения (1, 2, 5, 6) не устанавливают никакой зависимости между напряжениями с одной стороны, и токами, с другой.

При этом (21) вытекает из (20) и наоборот. Однако, (20) и (21) еще не обеспечивают II а) и II б); для получения достаточных топологических условий введем вспомогательные понятия.

Пусть $\pi = \{Q_\gamma\}_{\gamma=1}^r$ — система линейно независимых циклов Q_γ , $Q_\gamma \in \Phi$, а $v = \{t_l\}_l$ — множество трансформаторов t_l , обеими ребрами принадлежащих системе π ($v \subset \pi$). Построим для π моделирующий мультиграф G_π :

а) между вершинами x_i ($x_i \in G_\pi$) и циклами Q_γ из системы $\{Q_\gamma\}_{\gamma=1}^r$ устанавливается взаимно однозначное соответствие;

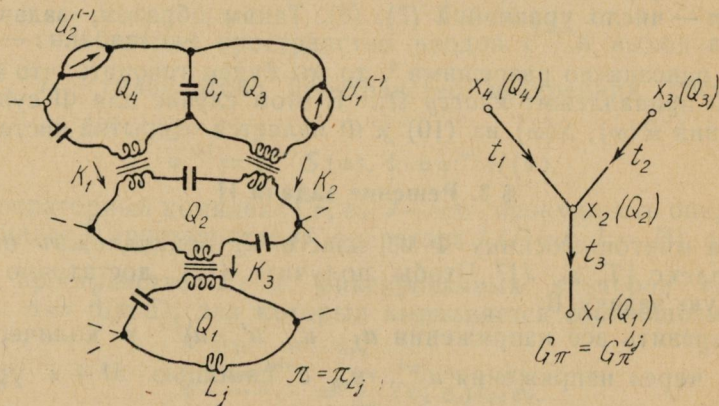


Рис. 5

б) вершины x_p и $x_\gamma \in G_\pi$ соединены дугой индексом t_l в направлении от x_p к x_γ , если в π входное ребро q_{il} трансформатора t_l принадлежит циклу Q_p , выходное q'_{il} — циклу Q_γ ($t_l \in v$).

Систему $\pi = \{Q_\gamma\}_{\gamma=1}^r$ назовем t -циклом, если моделирующий мультиграф G_π есть дерево с попарно различными индексами ребер t_l . Если, кроме того, ребро q_{Lj} принадлежит лишь одному циклу из системы $\{Q_\gamma\}_{\gamma=1}^r$, а мультиграф $\pi \setminus (q_{Lj} \cap v)$ состоит из ребер типа q_{ck} , $q_{\beta}^{(-)}$, то π называется стандартным t -циклом для q_{Lj} и обозначается π_{Lj} .

На рис. 5 дан пример системы циклов $\pi = \{Q_\gamma\}_{\gamma=1}^4$ и ее моделирующего мультиграфа G_π ; здесь π является стандартным t -циклом π_{Lj} . В отличие от q_{Lj} ребро типа q_{ck} , $q_{\beta}^{(-)}$ может принадлежать нескольким циклам Q_γ ($q_{c1} \in Q_3, Q_4$). Запишем уравнения (2) для циклов $Q_\gamma \in \pi_{Lj}$, обозначая их соответственно через $[Q_\gamma]$, $\gamma = 1, \dots, r$, и уравнения (5) для $t_l \in v \subset \pi_{Lj}$, обозначая их соответственно через (5)_l, $l = 1, \dots, r-1$ (G_π^{Lj} — моделирующий граф для π_{Lj} — дерево, поэтому число его дуг равно $r-1$, где r — число вершин G_π^{Lj} [1]). Линейная комбинация τ_{Lj} этих уравнений вида

$$\tau_{Lj} = \sum_{\gamma=1}^r \alpha_\gamma [Q_\gamma] + \sum_{l=1}^{r-1} \beta_l (5)_l \quad (22)$$

дает (14) при условии

$$K_l = \frac{\alpha_{\gamma_1}}{\alpha_{\gamma_2}}, \quad \alpha_{\gamma_2} = -\beta_l, \quad l=1, \dots, r-1, \quad (23)$$

где принято $q_{il} \in Q_{\gamma_1}$, $q'_{il} \in Q_{\gamma_2}$. Всегда можно выбрать нумерацию так, что $q_{Lj} \in Q_1 \subset \pi_{Lj}$; тогда $\alpha_1 = 1$ и все коэффициенты в (22) однозначно определены.

Стандартный t -цикл π_β определяется как и π_{Lj} , где ребро q_{Lj} заменяется на $q_\beta^{(+)}$. С помощью π_β можно получить (16). Аналогично замена q_{Lj} на q_{il} приводит к понятию стандартного t -цикла $\pi_{il} = \{Q_i\}_{i=1}^r$ при дополнительном условии, что $q'_{il} \in \{Q_i\}_{i=1}^r$; с помощью π_{il} получается (15). Таким образом, задача IIа) решается, если имеется набор стандартных t -циклов π_{Lj} , π_{il} , π_β ($j=1, \dots, \mu$; $l=1, \dots, \kappa$; $\beta=1, \dots, m$). В этом случае обозначим для удобства выражения (14), (15), (16) через $[\pi_{Lj}]$, $[\pi_{il}]$, $[\pi_\beta]$, называя их соответственно уравнениями стандартных t -циклов π_{Lj} , π_{il} , π_β .

Можно ввести понятие стандартного t -цикла π'_{il} , поменяв ролями q_{il} и q'_{il} в определении π_{il} . Когда в цепи G нет π_{il} , но имеется π'_{il} , удобно изменить—упорядочить—направление трансформации t_l , положив $\frac{1}{K_l}$ вместо K_l в (5), (6); тем самым обеспечивается существование π_{il} в G .

Для обсуждения задачи IIб) перейдем к контурным токам. Каждому элементарному циклу Q_i из некоторого базиса $\{Q_i\}_{i=1}^M$ мультиграфа G ставится в соответствие ток I_i , условно текущий в этом цикле по направлению его обхода. Если ребро $q \in Q_{i\lambda}$, $\lambda=1, 2, \dots, p$, то

$$I_q = \sum_{\lambda=1}^p \pm I_{i\lambda}. \quad (24)$$

Условие (24) однозначно определяет систему контурных токов $\{I_i\}_{i=1}^M$ [3, 10]. Задача IIб) равносильна задаче выражения некоторой системы контурных токов $\{I_i\}_{i=1}^M$ через токи $I_\beta^{(-)}$, I_{Lj} из (6) и (24).

Если в определении стандартных t -циклов π_{Lj} , π_{il} , π_β ребра $q_\beta^{(-)}$ заменить на $q_\beta^{(+)}$ и наоборот, то получатся t -циклы $\hat{\pi}_{Lj}$, $\hat{\pi}_{il}$, $\hat{\pi}_\beta$, которые мы назовем сопряженными стандартными для q_{Lj} , q_{il} , $q_\beta^{(+)}$. Имеет место.

Теорема 1. Пусть выполнено (20), переменные u_β^+ , $u_{\text{ск}}$ линейно независимы и в цепи $G = \bar{\Phi}$ есть сопряженные стандартные t -циклы $\hat{\pi}_{Lj}$, $\hat{\pi}_{il}$, $\hat{\pi}_\beta$, $j=1, \dots, \mu$; $l=1, \dots, \kappa$; $\beta=1, \dots, m$. Тогда задача IIб) для токов решается.

Доказательство. Моделирующие мультиграфы для $\hat{\pi}_{Lj}$, $\hat{\pi}_{il}$, $\hat{\pi}_\beta$ обозначаются как $\hat{G}_{\pi_{Lj}}^{Lj}$, $\hat{G}_{\pi_{il}}^{il}$, $\hat{G}_{\pi_\beta}^\beta$.

1. Система t -циклов из условия теоремы единственна. Допустим, в цепи G найдется t -цикл $\pi = \{Q_i\}_{i=1}^r$, сопряженный стандартный для

q_{Lj} , но не совпадающий с $\hat{\pi}_{Lj} = \{Q_i\}_{i=1}^r$. Коэффициенты трансформации K_l ($K_l \neq 0$, $l=1, \dots, \kappa$) можно выбрать так, чтобы уравнения $[\pi]$ и $[\hat{\pi}_{Lj}]$, выражающие u_{Lj} через u_{ck} , $u_{\beta}^{(+)}$, не совпадали. Но при условии (20) выражения u_{Lj} , u_{tl} , u'_{tl} , $u_{\beta}^{(-)}$ через u_{ck} , $u_{\beta}^{(+)}$ единственны; эта задача — назовем ее сопряженной к задаче IIa) — аналогична IIa); в ней число неизвестных $\mu + 2\kappa + m$ равно числу уравнений $M + \kappa$. Допущение неверно.

2. Если трансформатор $t_l \in \hat{\pi}_{Lj}$, то $\hat{\pi}_{tl} \subset \hat{\pi}_{Lj}$. Вынув из дерева $\hat{G}_{\pi}^{Lj}$ ребро t_l , получим два дерева: G_1 и G_2 . Система обычных циклов $\{Q_i\}_{i=1}^r = \hat{\pi}_{Lj}$ разбивается на две: π_1 и π_2 , причем G_1 — моделирующий граф для π_1 , G_2 — для π_2 . Пусть $q_{Lj} \in \pi_1$; тогда π_2 — сопряженный стандартный t -цикл для q_{tl} или для q'_{tl} . Но по условию имеется уже такой t -цикл $\hat{\pi}_{tl}$ для q_{tl} , значит, $\hat{\pi}_{tl}$ не существует (иначе для решения сопряженной к IIa) задачи не будет использовано одно уравнение (5), что невозможно). На основании п. 1 $\pi_2 = \hat{\pi}_{tl}$, т. е. $\hat{\pi}_{tl} \subset \hat{\pi}_{Lj}$.

3. Вершина x_1 является единственной максимальной для дерева $\hat{G}_{\pi}^{Lj}$, если $q_{Lj} \in Q_1$. Допустим, из x_1 исходит дуга t_l ; т. е. $q_{tl} \in Q_1$. Ребро q_{tl} заменим на $\hat{\pi}_{tl} \setminus q_{tl}$; на месте $\hat{\pi}_{Lj}$ получится сопряженный стандартный t -цикл для q_{Lj} , которому не принадлежит трансформатор t_l . Противоречие доказывает, что x_1 — максимальная вершина. Если бы имелась еще одна максимальная вершина x_2 , соответствующая циклу Q_2 , то из системы циклов $\hat{\pi}_{Lj} \setminus Q_2$ удалось бы выделить новый сопряженный стандартный t -цикл для q_{Lj} , ибо уравнение (2) для Q_2 не нужно для получения $[\hat{\pi}_{Lj}]$.

4. Свойства $\hat{\pi}_{Lj}$ из пунктов 2 и 3 относятся к любому $\hat{\pi}_i$ из системы t -циклов $\{\hat{\pi}_i\}_{i=1}^{\mu+\kappa+m} = \{\hat{\pi}_{Lj}; \hat{\pi}_{tl}; \hat{\pi}_{\beta}\}$. Максимальный элементарный цикл Q_i в $\hat{\pi}_i$ (соответствующий максимальной вершине моделирующего графа $\hat{G}_i$) содержит лишь одно ребро из совокупности $\{q_{Lj}, q_{tl}, q_{\beta}^{(-)}\}$. При условии (20) цикломатическое число $M = \mu + \kappa + m$, и линейно независимая система максимальных элементарных циклов $\{Q_i\}_{i=1}^M = B$ есть базис мультиграфа $G = \bar{\Phi}$. Всякий не максимальный цикл из $\hat{\pi}_i$ является максимальным для некоторого $\hat{\pi}_{tl}$, отсюда все элементарные циклы из $\{\hat{\pi}_i\}_{i=1}^M$ суть элементы базиса B . С другой стороны, произвольный t -цикл $\hat{\pi}_{tl}$ принадлежит некоторому t -циклу $\hat{\pi}_{Lj}$ или $\hat{\pi}_{\beta}$. В мультиграфе $\hat{\Sigma} = \bigcup_{i=1}^M \hat{G}_i$ (сумма графов, моделирующих t -циклы π_i) вершины взаимно-однозначно соответствуют элементам базиса B , а дуги с индексом t_l исходят из одной вершины, максимальной для $\hat{G}_{\pi}^{tl}$, $\hat{G}_{\pi}^{tl} \subset \hat{\Sigma}$. Максимальные вершины $\hat{\Sigma}$ являются максимальными для $\hat{G}_{\pi}^{Lj}$, $\hat{G}_{\pi}^{\beta}$ и наоборот ($x_9, x_{10}, x_{14}, x_{15}, x_{16}$ на (рис. 7)).

5. Покажем, что систему контурных токов $\{I_i\}_{i=1}^M$, соответствующую базису $B = \{Q_i\}_{i=1}^M$, можно выразить через I_{Lj} , $I_{\beta}^{(-)}$ (см. рис. 6).

Если $Q_i \supset q_{Lj}(q_{ll})$, то направление обхода Q_i выбирается совпадающим с направлением $\vec{q}_{Lj}(\vec{q}_{ll})$; если же $Q_i \supset q_{\beta}^{(-)}$, то направления $\vec{q}_{\beta}^{(-)}$ и обхода Q_i противоположны (рис. 6). Имеем

$$I_i = I_{Lj}, \quad i = j = 1, \dots, \mu; \quad (25)$$

$$I_i = -I_{\beta}^{(-)}, \quad i = \beta + \mu + x = 1 + \mu + x, 2 + \mu + x, \dots, M. \quad (26)$$

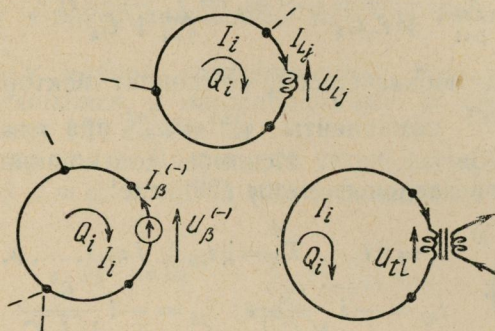


Рис. 6

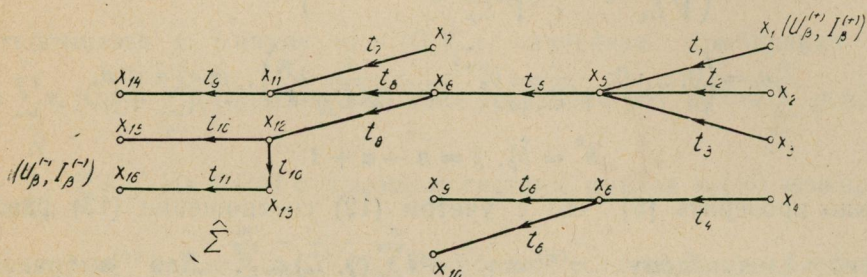


Рис. 7

Для остальных контурных токов $I_i = I_{ll}$, $i = l + \mu = 1 + \mu, \dots, x + \mu$. Из (6) записывается:

$$I_i = K_i \sum_{\lambda} I_{\lambda}, \quad (27)$$

где токи I_i , I_{λ} отвечают таким вершинам x_i , $x_{\lambda} \in \hat{\Sigma}$, что дуга с индексом t_i исходит из x_i , заходит в x_{λ} (рис. 7). Для не максимальной вершины $x_i \in \hat{\Sigma}$ найдется цепь Z_i^p , монотонно возрастающая от x_i до некоторой максимальной вершины x_p (двух таких цепей между x_i и x_p не может быть). Выражая с помощью (27), последовательно вдоль возрастания цепи Z_i^p , соответствующие I_{λ} друг через друга, получим в правой части (27) слагаемое $\Pi_i^p \cdot I_p$, где Π_i^p — произведение коэффициентов трансформации k_l вдоль цепи Z_i^p , I_p — контурный ток для x_p ($I_p = I_{Lj}$ или $-I_{\beta}^{(-)}$). С другой стороны, всякое начатое в x_i передвижение вдоль стрелок заканчивается в максимальной вершине мультиграфа $\hat{\Sigma}$. Перебрав все возможные цепи Z_i^p ($p = p_1, p_2, \dots$), мы выразим I_i через I_{Lj} , $I_{\beta}^{(-)}$. Теорема доказана.

§ 4. Достаточные условия существования комплекса $[T, e_\alpha, J]$

Уравнения (7), (8) после деления на $i\sqrt{L_j}(i\sqrt{C_k})$ переписываются с помощью (14), (17) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=\mu+1}^N -\frac{ia_k^j}{\sqrt{C_k L_j}} \xi_k - \omega \xi_j &= \sum_{\alpha=1}^m \frac{ib_\alpha^j}{\sqrt{L_j}} u_\alpha^{(-)}, \\ \sum_{j=1}^{\mu} -\frac{ia_j^k}{\sqrt{L_j C_k}} \xi_j - \omega \xi_k &= \sum_{\beta=1}^m \frac{i\hat{b}_\beta^k}{\sqrt{C_k}} I_\beta^{(-)}, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где использованы обозначения ξ_k компонент вектора $\vec{\psi}$ (см. стр. 7). Для вектора $\vec{\varphi}^{(\pm)}$ компоненты $\varphi_\alpha^{(\pm)} = u_\alpha^{(\pm)}$ при $\alpha = 1, \dots, m$, и $\varphi_\alpha^{(\pm)} = I_{n-\alpha+1}^{(\pm)}$ при $\alpha = m+1, \dots, n$. Искомое соотношение (12) является матричной формой записи системы (28), где:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_1 & \dots & T_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad T_1 = \|t_{kj}\|, \quad T_2 = \|t_{jk}\|, \quad j = 1, \dots, \mu, \\ t_{kj} = -i \frac{a_k^j}{\sqrt{C_k L_j}}; \quad t_{jk} = -i \frac{a_j^k}{\sqrt{L_j C_k}}, \quad k = \mu+1, \dots, N; \\ \vec{e}_\alpha = \left(\frac{i}{\sqrt{L_1}} b_\alpha^1; \dots; \frac{i}{\sqrt{L_\mu}} b_\alpha^\mu; 0; \dots; 0 \right), \quad 1 \leq \alpha \leq m; \\ \vec{e}_\alpha = \left(0; \dots; 0; \frac{i}{\sqrt{C_{\mu+1}}} b_\alpha^{\mu+1}; \dots; \frac{i}{\sqrt{C_N}} b_\alpha^N \right), \quad m < \alpha \leq n, \\ b^k = \hat{b}_\beta^k, \quad \beta = n - \alpha + 1.$$

Можно проверить [6], что с учетом (12) соотношение (13) равносильно следующему: $\vec{\varphi}^{(+)} = \vec{\varphi}^{(-)} - i \sum_{\alpha=1}^n (\vec{\psi}, \vec{l}_\alpha) \vec{a}_\alpha J$. Для выбранных

здесь $\vec{a}_\alpha$ и $J = \begin{pmatrix} 00\dots 01 \\ 00\dots 10 \\ \vdots \\ 10\dots 00 \end{pmatrix}$ имеем по компонентам:

$$\varphi_\alpha^{(+)} = \varphi_\alpha^{(-)} - i(\vec{\psi}, \vec{e}_{n-\alpha+1}). \quad (29)$$

Выше были найдены достаточные условия разрешимости задачи II, что обеспечивает (12); оказывается, (11) и (13) также выполняются, если дополнительно наложить еще одно естественное условие нормировки передаточного отображения на бесконечной частоте: $S(\infty) = I$. Постулируется, что в цепи G при $\omega = \infty$ индуктивность q_{Lj} убирается

(это соответствует бесконечно большому сопротивлению $i\omega L_j = \frac{U_{Lj}}{I_{Lj}}$),

емкость q_{ck} заменяется новым двухполюсником с нулевым напряжением (сопротивление отсутствует). Законы Кирхгофа и соотношения (5), (6) предполагаются выполненными для $\Phi(\infty) = G(\infty)$. Под $S(\infty)$ здесь понимается передаточное отображение многополюсника

$\Phi(\infty)$; если открытой системе Φ принадлежит операторный комплекс $[T, e_a, J]$, то вследствие (13) $\lim_{\omega \rightarrow \infty} S(\omega) = I = S(\infty)$.

Теорема 2. Пусть в замкнутом многополюснике $\bar{\Phi} = G$ выполнены условия:

1) $\mu = M - m - \kappa$, где μ — количество индуктивностей q_{Lj} , m — число входных (выходных) ребер; κ — количество трансформаторов; M — цикломатическое число мультиграфа G ;

2) для каждого ребра q_{Lj} , $q_{\beta}^{(+)}$, q_{ii} имеется стандартный и сопряженный к нему t -цикл; переменные u_{β}^{+} , u_{ck} линейно независимы;

3) $S(\infty) = I$.

Тогда при любом наборе коэффициентов трансформации $K_l \neq 0$ задачи I и II решаются, а многополюснику Φ принадлежит операторный комплекс $[T, e_a, J]$.

Доказательство. Достаточно установить (29) и (11).

1. При $\alpha = \beta \leq m$ $\varphi_{\alpha}^{(\pm)} = u_{\beta}^{(\pm)}$ и (29) записывается как:

$$u_{\beta}^{(+)} = u_{\beta}^{(-)} - \sum_{k=\mu+1}^N b_{n-\beta+1}^k u_{ck},$$

или

$$u_{\beta}^{(+)} = u_{\beta}^{(-)} - \sum_{k=\mu+1}^N \hat{b}_{\beta}^k u_{ck}. \quad (30)$$

Относящаяся к t -циклу $\hat{\pi}_{\beta} = \{Q_{\gamma}\}_{\gamma=1}^r$ линейная комбинация $\hat{\tau}_{\beta} = \sum_{\gamma=1}^r \alpha_{\gamma} [Q_{\gamma}] + \sum_{l=1}^{r-1} \beta_l (5)_l$ типа (22) дает уравнение $[\hat{\pi}_{\beta}] : u_{\beta}^{(-)} = \sum_{\alpha=1}^m g_{\alpha} u_{\alpha}^{(+)} + \sum_{k=\mu+1}^N \delta_k^{\beta} u_{ck}$. Из $G(\infty)$ с помощью системы циклов $\hat{\pi}_{\beta}(\infty)$ можно по-

лучить: $u_{\beta}^{(-)}(\infty) = \sum_{\alpha=1}^m g_{\alpha} u_{\alpha}^{(+)}(\infty)$. Вследствие условия $S(\infty) = I = S^{-1}(\infty)$ коэффициенты $g_{\alpha} = 0$ ($\alpha \neq \beta$), $g_{\alpha} = 1$ ($\alpha = \beta$). Это определяет следующий вид $[\hat{\pi}_{\beta}] : u_{\beta}^{(-)} = u_{\beta}^{(+)} + \sum_{k=\mu+1}^N \delta_k^{\beta} u_{ck}$. В силу единственности уравне-

ние (16), обозначаемое через $[\pi_{\beta}]$, можно записать так: $u_{\beta}^{(+)} = u_{\beta}^{(-)} - \sum_{k=\mu+1}^N \delta_k^{\beta} u_{ck}$. Отсюда* $\hat{\pi}_{\beta} = \pi_{\beta} = \{Q_{\gamma}\}_{\gamma=1}^r$, можно считать, что $q_{\beta}^{(-)} \in Q_r$, $q_{\beta}^{(+)} \in Q_1$ и в $\hat{\pi}_{\beta}$ коэффициенты $\alpha_1 = \alpha_r = 1$. Если $q_{ck} \in Q_{ii} \subset \hat{\pi}_{\beta}$, где

$i = 1, 2, \dots, v$, то $\delta_k^{\beta} = \sum_{i=1}^v \alpha_{ii} v_i$, где v_i^k — коэффициент перед u_{ck} в урав-

нении $[Q_{ii}]$. Очевидно, $v_i^k = 1$, если направления дуги $\vec{q}_{ck}$ и обхода Q_{ii} противоположны; $v_i^k = -1$, если направления совпадают. При этом $Q_{ii} \subset B$ (теорема 1), направление обхода Q_{ii} соответствует рис. 6.

Вычислим $\hat{b}_{\beta}^k$ в (30), переходя к задаче IIб) для токов (17). Обратимся

* Подробное доказательство равенства $\hat{\pi}_{\beta} = \pi_{\beta}$ содержится в § 5.

к системе контурных токов $\{I_i\}_{i=1}^M$ и мультиграфу $\hat{\Sigma}$, моделирующему базис B из теоремы 1. Пусть $q_{ck} \in Q_{\gamma_i} \subset \hat{\pi}_\beta \subset B$, $i=1, \dots, \nu$; и еще $q_{ck} \in Q_f \subset B$, $Q_f \bar{\in} \hat{\pi}_\beta$, $f = \nu + 1, \dots, \rho$. Всякая монотонно убывающая цепь $Z_i^r = (x_r, x_{r-1}, \dots, x_{\gamma_i})$ в $\hat{\Sigma}$ принадлежит $\hat{G}_\pi^\beta$, где вершина x_{γ_i} соответствует циклу Q_{γ_i} , $i=1, \dots, \nu$, а x_r — циклу $Q_r \supset q_\beta^{(-)}$. Наоборот, не может существовать цепи, монотонно убывающей от x_r к x_f , $f = \nu + 1, \dots, \rho$, иначе такая цепь входит в $\hat{\pi}_\beta$. Из (24) $I_{ck} = - \sum_{i=1}^{\nu} v_i^k I_{\gamma_i} -$

$-\sum_{f=\nu+1}^{\rho} v_f^k I_f$, где I_{γ_i} , I_f — контурные токи и из системы $\{I_i\}_{i=1}^M$, отвечающие циклам Q_{γ_i} , Q_f . На основании п. 5 теоремы 1 в последнем вы-

ражении для I_{ck} коэффициент перед $I_\beta^{(-)}$ равен $\hat{b}_\beta^k = \sum_{i=1}^{\nu} v_i^k \Pi_i^r$, где Π_i^r — произведение коэффициентов трансформации K_i вдоль цепи Z_i^r .

Используя (23) для $\hat{\pi}_\beta$, получим $\Pi_i^r = \frac{\alpha_{\gamma_i}}{\alpha_r} = v_{\gamma_i}$, откуда следует, что $\hat{b}_\beta^k$ совпадает с δ_β^k . Установлена справедливость (30) для $\beta \leq m$.

2. При $m < \alpha = n - \beta + 1$ ($n = 2m$) $\varphi_\alpha^{(\pm)} = I_\beta^{(\pm)}$, и (29) равносильно

$$I_\beta^{(+)} = I_\beta^{(-)} - \sum_{j=1}^p b_\beta^j I_{Lj}. \quad (31)$$

В сопряженной к Па) задаче уравнение $[\hat{\pi}_{Lj}]$ t -цикла $\hat{\pi}_{Lj} = \{\hat{Q}_i^j\}_{i=1}^{r_j}$ дается линейной комбинацией (ср. (22)):

$$\hat{\pi}_{Lj} = \sum_{\gamma=1}^{\hat{r}_j} \hat{\alpha}_\gamma^j [\hat{Q}_\gamma^j] + \sum_{l=1}^{\hat{r}_j-1} \hat{\beta}_l^j (\hat{5})_l. \quad (32)$$

Ребро $q_{Lj} \in \hat{Q}_1^j$, $\hat{\alpha}_1^j = 1$, что однозначно определяет направления обхода циклов $\hat{Q}_\gamma^j$ ($\gamma = 1, \dots, \hat{r}_j$) согласованные с рис. 6. Предположим, $q_\beta^{(+)} \in \hat{Q}_{\gamma_1}^j, \dots, \hat{Q}_{\gamma_p}^j$ одновременно; введем параметр δ_i^β : $\delta_i^\beta = 1$, если обход цикла $\hat{Q}_{\gamma_i}^j$ идет вдоль дуги $\vec{q}_\beta^{(+)}$, $\delta_i^\beta = -1$ в противном случае. На мультиграфе $\hat{\Sigma}$ есть цепь Z_i^j , монотонно возрастающая от вершины x_i^j (x_i^j соответствует циклу $\hat{Q}_{\gamma_i}^j$) до вершины x_1^j (x_1^j соответствует циклу $\hat{Q}_1^j$); очевидно, Z_i^j принадлежит дереву $\hat{G}_\pi^{Lj}$ ($i = 1, 2, \dots, p$). С учетом (23) коэффициент в $[\hat{\pi}_{Lj}]$ перед $u_\beta^{(+)}$ равен

$$\hat{b}_\beta^j = \sum_{i=1}^p \hat{\alpha}_{\gamma_i}^j \delta_i^\beta = \sum_{i=1}^p \frac{\hat{\alpha}_{\gamma_i}^j}{\hat{\alpha}_1^j} \delta_i^\beta = \sum_{i=1}^p \Pi_i^j \delta_i^\beta,$$

где Π_i^j — произведение коэффициентов трансформации K_i вдоль цепи Z_i^j . В разности уравнений $[\pi_{Lj}] - [\hat{\pi}_{Lj}]$ после приведения подобных членов коэффициент перед $u_\beta^{(-)}$ равен b_β^j (см. 14), перед $u_\beta^{(+)}$ — равен $-\hat{b}_\beta^j$, а u_{Lj} отсутствует. Значит, $[\pi_{Lj}] - [\hat{\pi}_{Lj}] = [\pi_\beta]$, если

$b_\beta^j \neq 0$; и $[\pi_{Lj}] - [\hat{\pi}_{Lj}] = 0$, если $b_\beta^j = 0$. Отсюда $b_\beta^j = \hat{b}_\beta^j = \sum_{i=1}^p \Pi_i^j \delta_i^\beta$. Но по теореме 1 ток $I_\beta^{(+)} = \sum_{\alpha=1}^m A_\alpha I_\alpha^{(-)} - \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^p \Pi_i^j \delta_i^\beta \right) I_{Lj}$. Из последнего выражения и условий $S(\infty) = I$, $I_{Lj}(\infty) = 0$ вытекает (31). Следовательно, (29) и (13) выполнены.

3. Уравнение $[\hat{\pi}_{Lj}]$ имеет вид:

$$u_{Lj} = \sum_{k=\mu+1}^N a_k^j u_{ck} + \sum_{\alpha=1}^m \hat{b}_\alpha^j u_\alpha^{(+)},$$

ср. $[\pi_{Lj}]$ (14). В $[\pi_{Lj}]$ подставим вместо $u_\alpha^{(-)}$ его выражение из (30):

$$u_{Lj} = \sum_{k=\mu+1}^N a_k^j u_{ck} + \sum_{\alpha=1}^m b_\alpha^j u_\alpha^{(+)} + \sum_{k=\mu+1}^N \sum_{\alpha=1}^m b_\alpha^j b_{n-\alpha+1}^k u_{ck}.$$

В силу единственности $[\hat{\pi}_{Lj}]$ получаем: $b_\alpha^j = \hat{b}_\alpha^j$,

$$\hat{a}_k^j = a_k^j + \sum_{\alpha=1}^m b_\alpha^j b_{n-\alpha+1}^k. \quad (33)$$

Определим параметр v_{ij}^k :

$$v_{ij}^k = \begin{cases} 0, & \text{если } q_{ck} \in \hat{Q}_i^j (\hat{Q}_i^j \subset \hat{\pi}_{Lj}). \\ 1, & \text{если } q_{ck} \in \hat{Q}_i^j, \text{ а цикл } \hat{Q}_i^j \text{ обходится вдоль } \vec{q}_{ck}. \\ -1, & \text{если } q_{ck} \in \hat{Q}_i^j, \text{ а } \hat{Q}_i^j \text{ обходится против дуги } \vec{q}_{ck}. \end{cases}$$

Если циклу $\hat{Q}_i^j$ соответствует ток I_i^j из системы контурных токов $\{I_i\}_{i=1}^M$ теоремы 1, то вследствие (24) ток

$$I_{ck} = \sum_{i,j} I_i^j v_{ij}^k + \dots = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{\hat{r}_j} v_{ij}^k \Pi_{ij}^1 I_{Lj} + \dots,$$

где Π_{ij}^1 — произведение K_l вдоль цепи из $\hat{\Sigma}$, монотонно возрастающей от x_{ij} (соответствует циклу $\hat{Q}_i^j$) до x_{1j} (соответствует циклу $\hat{Q}_1^j$). Такая цепь всегда имеется в $\hat{G}_\pi^{Lj} \subset \hat{\Sigma}$ при $v_{ij}^k \neq 0$. Следовательно,

в (17) коэффициент $a_j^k = \sum_{i=1}^{\hat{r}_j} \Pi_{ij}^1 v_{ij}^k = \sum_{i=1}^{\hat{r}_j} \hat{a}_i^j v_{ij}^k$. В то же время из (32)

$\hat{a}_k^j = -\sum_{i=1}^{\hat{r}_j} \hat{a}_i^j v_{ij}^k$, так что $\hat{a}_k^j = -a_j^k$, и с учетом (33) получается соотно-

шение $-a_k^j - a_j^k = \sum_{\alpha=1}^m b_\alpha^j b_{n-\alpha+1}^k$. Для оператора T и векторов $\vec{e}_\alpha$, выписанных из (28), справедливо: $t_{kj} - \bar{t}_{jk} = t_{jk} - \bar{t}_{kj} = t_{kj} + t_{jk} = \frac{i}{V C_k L_j} b_\alpha^j b_{n-\alpha+1}^k$. Как нетрудно проверить, это доказывает справед-

ливость уравнения (11), которое при выбранном $J = \|J_{\alpha\beta}\|$ имеет вид
$$\vec{\Phi} \frac{T - T^*}{i} = \sum_{\alpha=1}^n (\vec{\Psi}, \vec{e}_\alpha) \vec{e}_{n-\alpha+1}. \text{ Теорема доказана.}$$

Пример (рис. 8).

Входное и выходное состояния определяются векторами $\vec{\Phi}^{(-)} = (u^{(-)}, I^{(-)})$, $\vec{\Phi}^{(+)} = (u^{(+)}, I^{(+)})$. Мультиграф $\vec{\Phi} = G = (X, \Gamma)$ имеет

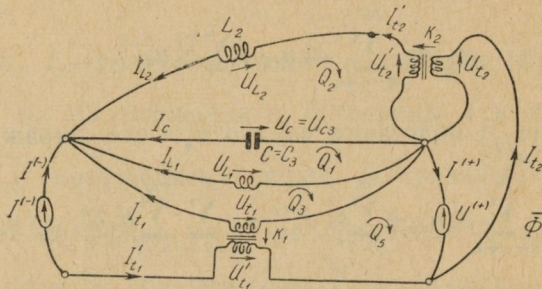


Рис. 8

$|X| = 5$; $|\Gamma| = 9$. Совокупность дуг $\Gamma = (q_1, q_2, \dots, q_9) = (q^{(-)}, q_{L_1}, q_{L_2}, q_c, q_{t_1}, q'_{t_1}, q_{t_2}, q'_{t_2}, q^{(+)})$. Цикломатическое число $M = |\Gamma| - |X| + 1 = 5$. Легко видеть, что стандартными являются следующие t -циклы:

$$\begin{aligned} \pi_{L_1} &= Q_1 & \vec{Q}_1 &= (0, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0); \\ \pi_{t_1} &= Q_3 & \vec{Q}_3 &= (0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0); \\ \pi_{t_2} &= \{Q_4, Q_3\} & \vec{Q}_4 &= (-1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0); \\ \pi_{L_2} &= \{Q_2, Q_3, Q_4\} & \vec{Q}_2 &= (0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0); \\ \pi &= \{Q_5, Q_3\} & \vec{Q}_5 &= (1, 0, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

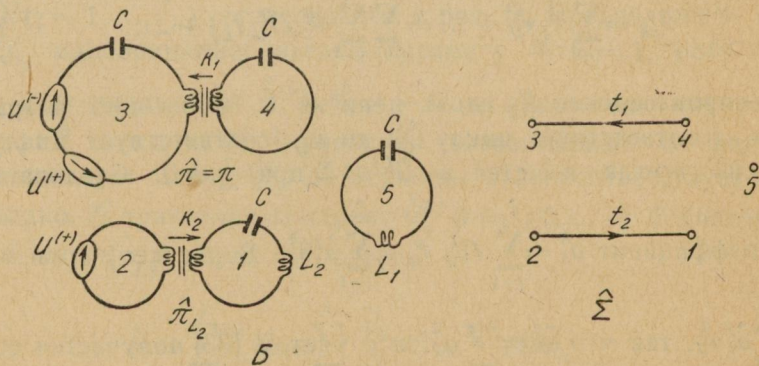


Рис. 9

Аналогично находятся сопряженные стандартные t -циклы $\hat{\pi}_{L_1}, \pi_{t_1}, \hat{\pi}_{t_2}, \hat{\pi}_{L_2}, \hat{\pi}$. Соответствующий базис B и граф $\hat{\Sigma}$ (теорема 1) изображены на рис. 9.

Далее, $m = 1$, $\chi = 2$, $\mu = 2$ и соотношение (20) выполнено. Непосредственно по рис. 8 устанавливается, что $S(\infty) = I$. Четырехполюсник Φ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.

Уравнения цепи G :

$$\{u\} \begin{cases} [Q_1]: u_c - u_{L1} = 0 \\ [Q_2]: u_c + u'_{t2} - u_{L2} = 0 \\ [Q_3]: u_c - u_{t1} = 0 \\ [Q_4]: -u^{(-)} - u_c + u'_{t1} - u_{t2} = 0 \\ [Q_5]: u^{(-)} + u_c - u_{t1} - u^{(+)} = 0 \end{cases}; \{I\} \begin{cases} I^{(-)} + I_{L1} + I_{L2} + I_c + I_{t1} = 0 \\ I^{(-)} + I'_{t1} = 0 \\ I'_{t1} + I_{t2} + I^{(+)} = 0 \\ I'_{t2} - I_{L2} = 0 \end{cases};$$

$$(5): u'_{t1} K_1 u_{t1}; u'_{t2} = K_2 u_{t2}; (6): I_{t1} = K_1 I'_{t1}; I_{t2} = K_2 I'_{t2};$$

$$(7): u_{L1} = i\omega I_{L1}; u_{L2} = j\omega I_{L2}; (8): I_c = i\omega u_c.$$

Из этих уравнений нетрудно получить (14), (17):

$$[\pi_{L1}]: u_{L1} = u_c; [\pi_{L2}]: u_{L2} = -K_2 u^{(-)} + (1 + K_1 K_2 - K_2) u_c;$$

$I_c = (K_1 - 1) I^{(-)} - I_{L1} - I_{L2}$. Подставляем их в (7), (8) полагая:

$$\vec{\psi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\sqrt{L_1} I_{L1}; \sqrt{L_2} I_{L2}; \sqrt{C} u_c);$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{i}{\sqrt{L_1 C}} \xi_3 - \omega \xi_1 &= 0 \\ -\frac{i(1 + K_1 K_2 - K_2)}{\sqrt{L_2 C}} \xi_3 - \omega \xi_2 &= -\frac{i K_2}{\sqrt{L_2}} u^{(-)} \\ \frac{i}{\sqrt{L_1 C}} \xi_1 + \frac{i}{\sqrt{L_2 C}} \xi_2 - \omega \xi_2 &= \frac{i(K_1 - 1)}{\sqrt{C}} I^{(-)} \end{aligned} \right\}.$$

Операторный комплекс:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{L_1 C}} \\ 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{L_2 C}} \\ -\frac{i}{\sqrt{L_1 C}} - \frac{i(1 + K_1 K_2 - K_2)}{\sqrt{L_2 C}} & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} \vec{e}_1 &= \left(0, -\frac{i K_2}{\sqrt{L_2}}, 0\right); \\ \vec{e}_2 &= \left(0, 0, \frac{i(K_1 - 1)}{\sqrt{C}}\right); \\ J &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Условие (11) выполняется, потому что

$$\frac{T - T^*}{i} \vec{\psi} = \left(0, -\frac{K_2(K_1 - 1)}{\sqrt{L_2 C}} \xi_3, -\frac{K_2(K_1 - 1)}{\sqrt{L_2 C}} \xi_2\right) = (\vec{\psi}, \vec{e}_1) \vec{e}_2 + (\vec{\psi}, \vec{e}_2) \vec{e}_1.$$

Из уравнений цепи выразим $u^{(+)}$, $I^{(-)}$ через $u^{(-)}$, $I^{(-)}$. Получим передаточную матрицу

$$S(\omega) = \begin{pmatrix} 1 - (K_1 - 1) K_1 V & -\frac{K_2^2(1 - L_1 C \omega^2) V}{i \omega L_1} \\ -i(K_1 - 1)^2 L_2 \omega V & 1 + K_2(K_1 - 1) [1 + K_2(K_1 - 1)] V \end{pmatrix},$$

где для краткости обозначено $\frac{1}{V} = 1 + \frac{L_2}{L_1} + K_2(K_1 - 1) - \omega^2 C L_2$.

Вычисления по формуле (13), с другой стороны, дают, такой же результат для характеристической матрицы — функции оператора T [2].

§ 5. Об условиях теоремы 2

Условия 1), 3) теоремы 2 являются необходимыми для того, чтобы решались задачи I, II и многополюснику Φ принадлежал операторный комплекс. Можно ли ослабить требование 2), сохраняя разрешимость задачи II, т. е. выражения (14) ÷ (19)? Здесь будет показано, что в общем случае этого сделать нельзя.

Введем вектор $\vec{K} = (K_1, K_2, \dots, K_z)$, где K_l — коэффициенты трансформации ($K_l \neq 0$). На основании леммы 1 в Φ для фиксированного $\vec{K}$ найдется набор $\{Q'_i\}_{i=1}^r = F(\vec{K})$ элементарных циклов, состоящих из ребер, напряжения которых входят в (14), и еще, может быть, ребер типа q_{t_l}, q'_{f_l} . Такую систему циклов $F(\vec{K})$ назовем *стандартной* для (14) по отношению к $\vec{K}$, а ее моделирующий мультиграф обозначим через $G(\vec{K})$.

Теорема 3. Если при любом $\vec{K}$ мультиграф $G(\vec{K})$ имеет попарно различные индексы ребер t_l , а задача IIa) разрешима при условии (20), то в Φ имеется стандартный t -цикл G_{π}^{Lj} .

Доказательство. Поскольку трансформаторные напряжения в (14) отсутствуют, то для системы $F(\vec{K})$ справедливы (22) и (23) — с той лишь разницей, что число трансформаторов из множества ν уже не обязательно равно $r - 1$. Допустим, при некотором $\vec{K}^0$ в $G(\vec{K}^0)$ есть цикл; в силу (22) коэффициенты $\vec{K}_l$ из $\vec{K}^0$ обращают в нуль некоторый полином от z переменных: $P_1(K_1 K_2, \dots, K_z) = P_1(\vec{K}^0) = 0$. Так, например, для рис. 12 должно быть $K_3 = K_1 K_2$. Можно найти такое $\vec{K}^1$, чтобы $P_1(\vec{K}^1) \neq 0$ и система $F(\vec{K}^0) = \{Q'_i\}_{i=1}^r$ не была стандартной для (14) по отношению к $\vec{K}^1$, являясь таковой по отношению к $\vec{K}^0$. Следовательно, стандартная по отношению к $\vec{K}^1$ система $F(\vec{K}^1)$ не совпадает с $F(\vec{K}^0)$. Если в $G(\vec{K}^1)$ есть циклы, то найдется полином $P_2: P_2(\vec{K}^1) = 0, P_2 \neq P_1$. Существует $\vec{K}^2$, для которого $P_1(\vec{K}^2) \neq 0, P_2(\vec{K}^2) \neq 0$, и т. д. Строится последовательность попарно различных систем $F(\vec{K}^i), i = 0, 1, \dots$. Она не может быть бесконечной, поэтому для некоторой системы $F(\vec{K}^n)$ моделирующий мультиграф $G(\vec{K}^n)$ не содержит циклов. Связность $G(\vec{K}^n)$ вытекает из единственности (14), так что $G(\vec{K}^n) \rightarrow \text{дерево}$.

Положим, $F(\vec{K}^n) = \{Q_i\}_{i=1}^r, q_{Lj} \in Q_{i_1}, Q_{i_2}, \dots, Q_{i_p} \subset \{Q_i\}_{i=1}^r$; имеют место (22), (23). При $p > 1$ можно подобрать такие коэффициенты $\alpha_i \neq 0$ в (22) и соответственно $\vec{K}$ с помощью (23), чтобы после подстановки уравнений $[Q_i]$ и приведения подобных членов в (22) коэф-

коэффициент при u_{Lj} был равен нулю. Получится нетривиальное уравнение без неизвестных в смысле задачи Па) — и последняя не решается. Отсюда $p=1$ и $F(\vec{K}^n)$ суть стандартный t -цикл π_{Lj} . Теорема доказана.

Таким образом, условия теоремы 2 являются не только достаточными, но и *необходимыми*, — если каждая стандартная система (соответственно сопряженная) обладает тем свойством*, что ее моделирующий мультиграф имеет попарно различные индексы ребер t_e .

Замечание. Условие нормировки на бесконечной частоте ($S(\infty) = I$) может быть всегда обеспечено несущественным изменением многополюсника Φ , если бесконечность — точка регулярности матрицы-функции $S(\omega)$. Образует многополюсник Φ из Φ и $\Phi(\infty)$: входы Φ и $\Phi(\infty)$ совмещены, вход Φ_1 устраивается на месте выхода $\Phi(\infty)$ выход Φ_1 совпадает с выходом Φ . Нетрудно показать, что Φ_1 осуществляет единичную передачу на бесконечной частоте. При этом индуктивности и емкости в Φ_1 и Φ одинаковы, условия 1), 2) теоремы 2 выполняются для Φ_1 и Φ одновременно, а $S_1(\omega) = S^{-1}(\infty) S(\omega)$.

§ 6. Метод малого параметра

Определим две элементарные операции над мультиграфом $G = \overline{\Phi} = (X, \Gamma)$.

1°. *Удаление ребра* q ($q \in G$): $G/q = G_1 = (X_1, \Gamma_1)$; $X_1 = X$, $\Gamma_1 = \Gamma/q$.

2°. *Стягивание ребра* q : q сначала удаляется, затем инцидентные ему вершины x_1 и x_2 сливаются в одну x_3 так, что вершина x_3 инцидентна тем же ребрам из множества Γ_1 , которые в свою очередь были инцидентными x_1 и x_2 .

Многополюсник Φ_1 назовем *элементарным расширением* Φ , если Φ получается из Φ_1 удалением или стягиванием некоторого ребра q_L ($q_L \in \Phi$) примем обозначение $\Phi < \Phi_1$. При $\Phi_2 > \Phi_1 > \Phi$ считаем Φ_2 расширением Φ (в данном случае неэлементарным) с сохранением обозначения $\Phi_2 > \Phi$. Покажем, что для произвольного многополюсника Φ существует расширение, удовлетворяющее условиям теоремы 2.

1. $\Phi_1 \geq \Phi$. Требуем, чтобы в Φ_1 было установлено взаимнооднозначное соответствие между $q_{\beta}^{(-)}$ и $q_{\beta}^{(+)}$ ($\beta = 1, 2, \dots, m$) так, что:

а) для каждого β имеется цикл Q_{β} , состоящий из пары внешних ребер $q_{\beta}^{(-)}$, $q_{\beta}^{(+)}$ и еще, может быть, емкостных ребер q_{ck} ;

в) Q_{β_1} и Q_{β_2} не имеют общих точек при $\beta_1 \neq \beta_2$. Очевидно, цикл Q_{β} является стандартным для $q_{\beta}^{(+)}$ и сопряженным стандартным одновременно ($Q_{\beta} = \pi_{\beta} = \hat{\pi}_{\beta}$). Для получения расширения Φ_1 по Φ достаточно сначала изолировать друг от друга каждые два ребра $q_{\beta_1}^{(-)}$, $q_{\beta_2}^{(-)}$ (соответственно $q_{\beta_1}^{(+)}$, $q_{\beta_2}^{(+)}$), как показано пунктиром на рис. 10. Если после этого для некоторых β нет указанных циклов Q_{β} , то их можно образовать добавлением емкостей q_{ck} , как на рис. 11. Система элементарных циклов $\{Q_{\beta}\}_{\beta=1}^m$ из $\overline{\Phi}_1$ линейно независима.

2. $\Phi_2 \geq \Phi_1$. Расширение Φ_2 определяется так:

с) $\{Q_{\beta}\}_{\beta=1}^m \subset \overline{\Phi}_2$ т. е. циклы Q_{β} не нарушены расширением.

д) Каждой индуктивности $q_{Lj} \in \Phi_2$ поставлен в соответствие цикл $Q_{Lj} \in \overline{\Phi}_2$ с единственным условием, что $q_{Lj} \in Q_{Lj}$, $q_{Lj} \in Q_{Li}$ ($i \neq j$). Си-

* По-видимому, это свойство вытекает из разрешимости задачи II при любых $\vec{K}$ и не является ограничением. Однако, доказательством мы не располагаем.

стема элементарных циклов $A = \{Q_\beta, Q_{Lj}\}$ ($\beta = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) из $\bar{\Phi}_2$ линейно независима. Если в $\bar{\Phi}_1$ нет цикла Q_{Lj} для какого-то j , то его можно получить присоединением нового ребра $q_{c\alpha}$ к вершинам, инцидентным q_{Lj} .

3. $\Phi_3 \geq \Phi_2$. Дополним систему A совокупностью циклов A_1 до базиса A_2 мультиграфа $\bar{\Phi}_2: A \cup A_1 = A_2 = \{Q_i\}_{i=1}^M$, где M — цикломатическое число $\bar{\Phi}_2$. Дополнение A_1 всегда можно выбрать так, чтобы

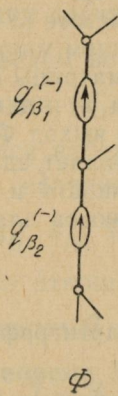


Рис. 10

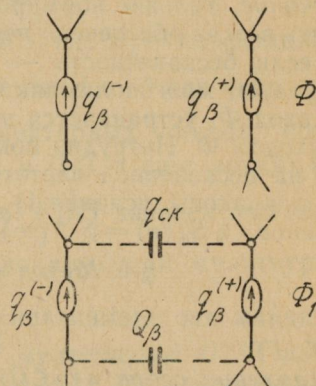
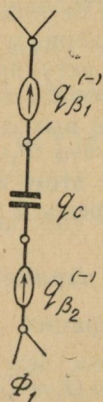


Рис. 11

ему не принадлежало ни одно ребро q_{Lj} . Для доказательства отправляемая от базиса $A'_2 = A + A'_1$, не удовлетворяющего последнему требованию. Пусть цикл $Q_i \subset A'_1$, и $Q_i \supset q_{L1}, \dots, q_{Lr}$. Существует линейная комбинация вектор-циклов $\vec{Q}_i + \sum_{j=1}^r \pm \vec{Q}_{Lj}$, в которой равны нулю

компоненты для ребер $q_{L1}, \dots, q_{Lr}$. В силу леммы 1 мультиграф $\bar{\Phi}_2$ содержит цикл Q' без индуктивных ребер, причем система циклов $\{A, Q'\}$ линейно независима. Исходя из последней (вместо A), построим цикл Q'' аналогично предыдущему и т. д., пока не получим базис $A_2 = A + A_1$.

Добавим к $\bar{\Phi}_2$ ряд емкостей, чтобы разомкнуть все циклы моделирующего мультиграфа Σ_2 системы A_2 и получить на месте Σ_2 граф Σ_3 , моделирующий некоторую систему A_3 со свойствами:

- е) Циклы Q_β ($\beta = 1, \dots, m$) из A сохраняются в A_3 .
- ф) Каждая индуктивность q_{Lj} входит лишь в один цикл Q'_{Lj} , $Q'_{Lj} \in A_3$, причем Q'_{Lj} более не содержит индуктивностей.
- г) На графе Σ_3 нет циклов, а все его ребра имеют попарно различные индексы t_i .

В качестве примера разомкнем цикл мультиграфа Σ_2 рис. 12. Здесь на месте вершин Q_1, Q_2, Q_3 из Σ_2 изображены соответствующие циклы из $A_2 \subset \bar{\Phi}_2$; x_i — вершины мультиграфа $\bar{\Phi}_2$. Достаточно ввести новую емкость q_c (рис. 13), чтобы цикл Q_1 распался на два цикла Q' и Q'' ($\vec{Q}_1 = \vec{Q}' + \vec{Q}''$) и разомкнулся цикл в Σ_2 — рис. 14. Подобным образом разомкнем все циклы в Σ_2 с попарно различными индексами t_i . Заменяя в системе A_2 циклы типа Q_i на Q' и Q'' , по-

лучаем базис A_2^0 последнего расширения $\bar{\Phi}_2^0$, удовлетворяющий е), f).

Пусть Σ_2^0 — моделирующий мультиграф системы A_2^0 и его ребра q_1, q_2 снабжены одним индексом t_l (см. рис. 15).

После добавления двух новых емкостей (пунктир на рис. 16) образуется шесть элементарных циклов: $Q'_1, \dots, Q'_6$, так что полученная электрическая цепь имеет базис $A_2^0 / (\bigcup_{i=1}^4 Q_i) \cup (\bigcup_{i=1}^6 Q'_i)$. Моделирую-

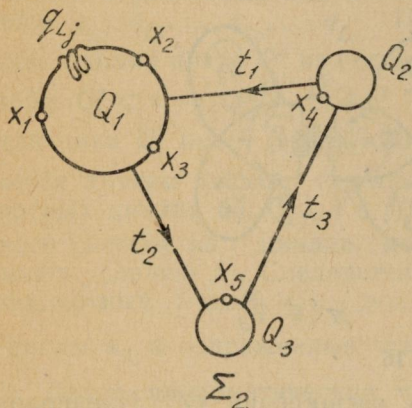


Рис. 12

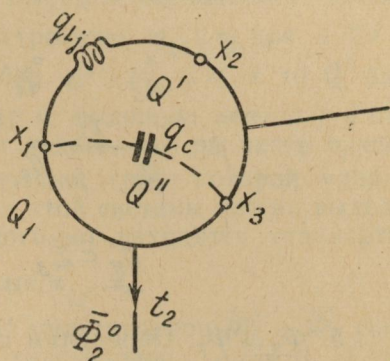


Рис. 13

щий мультиграф G'_π системы $\{Q'_i\}_{i=1}^6 = \pi$ содержит только одно ребро с индексом t_l (рис. 16) — в отличие от G_π (рис. 15). При $Q_2 = Q_4$ достаточно добавить одну емкость; тогда цикл Q'_6 отсутствует, а $Q'_2 = Q'_4 = Q_2 = Q_4$. Количество ребер $q \in \Sigma_2^0$ с одинаковым индексом t_l могло быть любым; после указанного расширения останется одно ребро с индексом t_l . Перебрав

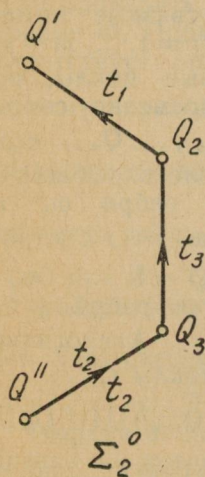


Рис. 14

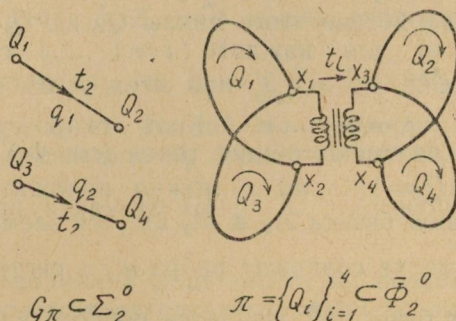


Рис. 15

все t_l ($l = 1, \dots, z$), получим расширение $\bar{\Phi}_3$ со свойствами е), f), g) для системы элементарных циклов A_3 и ее моделирующего графа Σ_3 , причем A_3 — базис мультиграфа $\bar{\Phi}_3$.

4. $\Phi_4 \geq \Phi_3$. Отберем связную компоненту Σ_0 из графа Σ_3 . Дерево Σ_0 является моделирующим графом некоторого t -цикла, $\pi_0 = \{Q_i\}_{i=1}^r \subset \bar{\Phi}_3$. Если π_0 содержит δ индуктивностей ($\delta > 1$), то благодаря свойству f) можно расширить $\bar{\Phi}_3$ емкостями так, чтобы на месте π_0 образовалось δ

связных компонент (деревьев) и в каждой компоненте — по одной индуктивности. Расширение проводится аналогично рис. 13, так что граф $\Sigma_3 \setminus \Sigma_0$ и система циклов из A_3 , которую он моделирует, не претерпевают изменений. После перебора всех компонент в Σ_3 получится моделирующий граф Σ_4 , соответствующий базису A_4 многополюсника $\bar{\Phi}_4$, причем в дополнение к свойствам а) ... д) справедливо еще одно: f_0) если некоторый t -цикл из A_4 содержит индуктивность q_{Lj} , то q_{Lj} не входит в другие t -циклы системы A_4 .

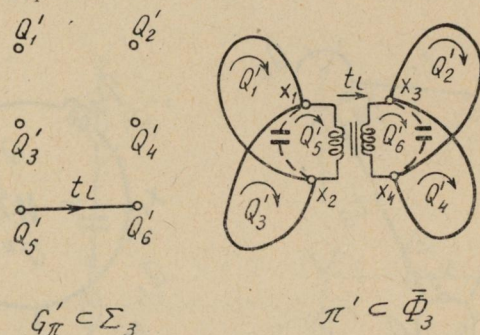


Рис. 16

5. $\Phi_5 \geq \Phi_4$. Определим сначала расширение Φ_4^0 . Предположим, в некоторой связной компоненте $\Sigma = (X, \Gamma)$ из Σ_4 число вершин больше единицы ($|X| > 1$) и Σ моделирует t -цикл π , не содержащий индуктивностей. Последовательно к одному из ребер $q_{ii} \in \pi$ добавляем в Φ_4 новую индуктивность. Полученное расширение $\bar{\Phi}_4^0$ имеет базис A_4^0 с неизменившимся моделирующим графом: $\Sigma_4^0 = \Sigma_4$.

Обозначим через $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \dots, \sigma_{m+\rho}$, связные компоненты графа Σ_4^0 , которые моделируют t -циклы π_i ($i = 1, \dots, m + \rho$) без индуктивностей. Здесь $\pi_i = Q_i$ суть элементарные циклы, причем первые m циклов — стандартные для $q_i^{(+)}$ и одновременно сопряженные стандартные (см. Φ_1). На базе циклов $Q_{m+1}, \dots, Q_{m+\rho}$ строятся линейно независимые циклы $Q'_1, \dots, Q'_\rho \subset \bar{\Phi}_4^0$, удовлетворяющие условию: к) для каждого $i = 1, \dots, \rho$ существует ребро q_i , такое, что $q_i \in Q'_i$, но $q_i \notin Q'_j$ при всех j из неравенства $i < j \leq \rho$; и еще $q_i \in Q_\beta$, $\beta = 1, \dots, m$. Коль скоро циклы Q_β ($\beta = 1, \dots, m$) попарно не имеют общих точек (см. Φ_1), то найдется ребро $q_1 \in Q_{m+1}$, $q_1 \in Q_\beta$ ($\beta = 1, \dots, m$) и можно положить $Q'_1 = Q_{m+1}$. Аналогично построению базиса A_2 в $\bar{\Phi}_2$ ищутся элементарные циклы $Q_{m+2}^0, \dots, Q_{m+\rho}^0$, которые не содержат ребра q_1 , а система $(A_4^0 \setminus \bigcup_{i=2}^{\rho} Q_{m+i}) \cup (\bigcup_{j=2}^{\rho} Q_{m+j}^0)$ образует базис $\bar{\Phi}_4^0$. Найдется ребро $q_2 \in Q_{m+2}^0$, $q_2 \in Q_\beta$ ($\beta = 1, \dots, m$); положим $Q'_2 = Q_{m+2}^0$. Исключаем ребро q_2 из Q_{m+j}^0 ($j > 2$) и т. д.

Чтобы получить окончательное расширение Φ_5 , в каждое из ребер $q_1, \dots, q_\rho$ многополюсника Φ_4^0 добавляется по одной новой индуктивности, соответственно $q_{L1}, \dots, q_{L\rho}$. Операция стягивания (2°) ребер $q_{L1}, \dots, q_{L\rho}$ превращает Φ_5 в Φ_4^0 ; при расширении моделирующий граф Σ_4^0 переходит в Σ_5 без изменения числа вершин, дуг и свойств а) ÷ к); базис A_4^0 — в базис A_5 . Для удобства сохраним обозначения циклов из A_4^0 для соответствующих циклов в A_5 .

Многополюсник Φ_5 удовлетворяет условиям теоремы 2. Действительно, для ребра $q_{\beta}^{(+)}$ стандартным и сопряженным стандартным является цикл $Q_{\beta} = \pi_{\beta} = \bar{\pi}_{\beta}$ (см. Φ_1). Как нетрудно видеть, с помощью леммы 1 для добавленных к Φ_4^0 индуктивностей $q_{L\rho}, q_{L(\rho-1)}, \dots, q_{L1}$, можно последовательно построить элементарные циклы $Q_{L\rho}, Q_{L(\rho-1)}, \dots, Q_{L1}$, которые будут стандартными: $\pi_{L\rho}, \dots, \pi_{L1}$.

Пусть указанные индуктивности стоят первыми в нумерации всех ребер $q_{Lj}, q_{L1}, \dots, q_{L\rho}, \dots, q_{L\mu}$. Индуктивность q_{Lj} ($j > \rho$) принадлежит лишь одному циклу Q_i^j из системы A_5 . Выберем наибольший t -цикл π_j , чтобы $Q_i^j \subset \pi_j = \{Q_{\gamma}^j\}_{\gamma=1}^r \subset A_5$. По построению $q_{Li} \in \pi_j$ при $\rho < i \neq j$. Если цикл Q_{γ}^j имеет среди своих ребер $q_{\beta}^{(+)}, q_{Li}$ ($i \leq \rho$), то Q_{γ}^j заменяется другим циклом, без этих ребер (с помощью леммы 1 и стандартных циклов Q_{β}, Q_{Lj} , $j \leq \rho$). Легко видеть, что на месте π_j получится система из r циклов, моделирующий граф которой удовлетворяет условию д). Следовательно, из этой системы можно выделить стандартный t -цикл π_{Lj} , $j > \rho$. Аналогично находятся стандартные t -циклы π_{Li} и сопряженные стандартные $\hat{\pi}_{Lj}, \hat{\pi}_{Li}$.

Далее, цикломатические числа M мультиграфов $\bar{\Phi}_4^0$ и $\bar{\Phi}_5$ совпадают. В обозначениях $\Sigma_4^0 = (X, \Gamma)$ справедливо $|X| = M, |\Gamma| = x$. Число p связных компонент из Σ_4^0 можно выразить через μ : $p = \mu + m$. Цикломатическое число графа Σ_4^0 равно нулю: $0 = |\Gamma| - |X| + p$, откуда $\mu = M - x - m$ и условие (20) выполнено для Φ_5 . Пусть для исходного многополюсника Φ разрешима задача I (т. е. $\Phi \in \Omega_r$). Легко проверить, что тогда и $\Phi_0 \in \Omega_r$, если Φ_0 — элементарное расширение Φ . Проверяется также, что операция 1° над ребром q из Φ_0 соответствует предельному переходу $Y_q \rightarrow 0$, а операция 2° — предельному переходу $Z_q \rightarrow 0$ в системе уравнений для $\bar{\Phi}_0$, где $Y_q = \frac{I_q}{u_q}$

называется проводимостью ребра q , $Z_q = \frac{u_q}{I_q}$ — его сопротивлением.

Например, когда q — индуктивность, то $Y_q = \frac{1}{i\omega L}$, $Z_q = i\omega L$, так что $Y_q \rightarrow 0$ при $L \rightarrow \infty$, $Z_q \rightarrow 0$ при $L \rightarrow 0$. Из той же проверки следует, что отображения $R_0(\omega), S_1(\omega)$ системы Φ_0 стремятся к отображениям $R(\omega), S(\omega)$ системы Φ , когда параметр $L\left(\frac{1}{L}, C, \frac{1}{C}\right)$ ребра q стремится к нулю. Доказана

Теорема 4. *Всякий многополюсник Φ из класса Ω_+ допускает расширение Φ_5 , которому принадлежит операторный комплекс; параметры расширения можно выбрать так, чтобы электрические состояния цепей $\bar{\Phi}_5$ и $\bar{\Phi}$ различались сколь угодно мало.*

§ 7. Применения операторного комплекса

Получение операторного комплекса $[T, e_a, J]$ описано в § 4; оно не требует почти никаких вычислений, если известны выражения (14), (17). Последние могут быть записаны по стандартным t -циклам.

1. Комплекс $[T, e_a, J]$ позволяет вычислить состояние многополюсника Φ из формул (12), (13). Однако, основная ценность комплекса за-

ключается не в этом. М. С. Лившиц построил специальную теорию, изучающую колебания общих открытых систем с помощью операторных комплексов [6, 7] и опирающуюся на спектральную теорию несамосопряженных операторов. В качестве примера рассмотрим представление открытой системы Φ в виде цепочки простейших открытых систем Φ_k , аналогичное разложению колебаний замкнутой системы по собственным («простейшим») колебаниям.

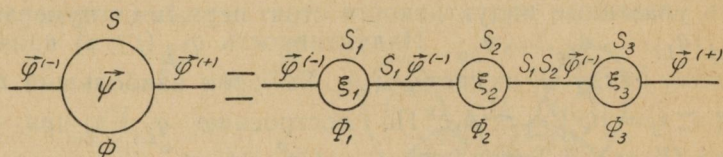


Рис. 17

Пусть Φ_k ($k = 1, \dots, N$) — открытые системы, у которых пространства входов (выходов) одинаковы: $E_1 = E_2 = \dots = E_N = E$. Этим системам соответствуют отображения $\vec{\psi}_k = R_k(\omega) \vec{\varphi}_k^{(-)}$, $\vec{\varphi}_k^{(+)} = S_k(\omega) \vec{\varphi}_k^{(-)}$, ($\vec{\varphi}_k^{(\pm)} \in E$, $\vec{\psi}_k \in H_k$). Построим новую открытую систему $\Phi = \Phi_1 \gamma \Phi_2 \gamma \dots \gamma \Phi_N$, полагая для нее пространство E прежним, пространство внутренних состояний

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_N, \quad \vec{\psi} = (R_1 + R_2 S_1 + \dots + R_N S_{N-1} \dots S_2 S_1) \vec{\varphi}^{(-)}$$

$$\vec{\varphi}^{(+)} = S_N S_{N-1} \dots S_1 \vec{\varphi}^{(-)} \vec{\psi} \in H, \quad \vec{\varphi}^{(\pm)} \in E.$$

Система Φ называется *цепным соединением* систем Φ_k : $\Phi = \bigcap_{k=1}^N \Phi_k$ [6, 7]. При $\dim H_k = 1$ система Φ_k называется одномерной, или простейшей. Справедлива теорема [6]:

Открытая система Φ , которой принадлежит операторный комплекс $[T, e_\alpha, J]$, разлагается в цепочку одномерных систем: $\Phi = \bigcap_{k=1}^N \Phi_k$, где $N = \dim H$, $\dim H = 1$. Это разложение можно изобразить в виде символического равенства рис. 17, ($N=3$), где вход Φ и выход Φ_{k-1} совпадают. Цепочка рис. 17 показывает, каким простейшим последовательным преобразованиям S подвергается входное состояние $\vec{\varphi}^{(-)}$, до тех пор, пока не будет получено выходное состояние $\vec{\varphi}^{(+)}$; передаточное отображение системы Φ равно $S(\omega) = S_N S_{N-1} \dots S_1$.

Цепочка рис. 17 выясняет не только передаточные свойства системы Φ . Из [6] внутреннее состояние $\vec{\psi}$ системы Φ равно сумме $\vec{\psi} = \sum_{k=1}^N \xi_k \vec{\psi}_k$, где число ξ_k — внутреннее состояние одномерной системы Φ_k в цепочке $\bigcap_{k=1}^N \Phi_k$; $\{\vec{\psi}_k\}$ — ортонормированный базис пространства H ,

в котором оператор T имеет треугольный вид $\vec{\psi}_k T = \sum_{j=k}^N T_{kj} \vec{\psi}_j$. Си-

система векторов $\{\vec{\psi}_k\}$ называется треугольным базисом оператора T . При этом

$$\xi_k = \frac{\varphi^{(-)} S_1 \dots S_{k-1} \vec{\Pi}_k^*}{\lambda_k - \omega}, \quad S_k(\omega) = I - \frac{i}{\lambda_k - \omega} \vec{\Pi}_k^* \vec{\Pi}_k J, \quad (34)$$

где λ_k — собственное число T_{kk} оператора T , $\vec{\Pi}_k = (d_{k1}, \dots, d_{kn})$ — вектор с компонентами $d_{kj} = (\vec{\psi}_k, e_j)$; e_j — каналовой вектор из комплекса $[T, e_a, J]$ ($k=1, \dots, N$; $j=1, \dots, n$).

Обратимся к примеру рис. 8, § 4. Из уравнения $\text{Det}(T - \lambda I) = -\lambda \left(\lambda^2 - \frac{b}{L_2 C_3} - \frac{1}{L_1 C_3} \right) = 0$ находим собственные числа оператора T : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{b}{L_2 C_3} + \frac{1}{L_1 C_3}}$ при $bL_1 + L_2 \geq 0$, где $b = 1 + K_1 K_2 - K_2$. Собственные векторы имеют вид: $\vec{h}_1 = (\sqrt{L_1}; -\sqrt{L_2}; 0)$;

$$\vec{h}_{2,3} = (-i\sqrt{L_2}; -ib\sqrt{L_1}; \lambda_{2,3} \sqrt{L_1 L_2 C_3}).$$

Перейдем к численному примеру на рис. 8: $L_1 = 4$, $L_2 = 16$, $C_3 = \frac{1}{4}$,

$K_1 = 3$, $K_2 = 2$. Тогда $b = 5$; $\lambda_1 = 0$; $\lambda_{2,3} = \pm \frac{3}{2}$;

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & \frac{i}{2} \\ -i & -\frac{5}{2}i & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{i}{2} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4i \end{pmatrix};$$

$$S(\omega) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\frac{9}{4} - \omega^2} & -\frac{1 - \omega^2}{4i\omega \left(\frac{9}{4} - \omega^2 \right)} \\ -\frac{16i\omega}{\frac{9}{4} - \omega^2} & 1 + \frac{5}{\frac{9}{4} - \omega^2} \end{pmatrix}.$$

К системе собственных векторов $\{\vec{h}_1 = (2; -4; 0); \vec{h}_{2,3} = (-4i; -10i; \pm 6)\}$ оператора T применяем процесс последовательной ортогонализации: $\vec{f}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}; 0 \right)$; $\vec{f}_2 = \left(-\frac{6}{\sqrt{70}}i; -\frac{3}{\sqrt{70}}i; \frac{5}{\sqrt{70}} \right)$; $\vec{f}_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}i; \frac{i}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$. Треугольный базис $\{\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_2, \vec{\psi}_3\}$ оператора T необходимо выбрать так: $\vec{\psi}_1 = \vec{f}_3$; $\vec{\psi}_2 = \vec{f}_2$; $\vec{\psi}_3 = \vec{f}_1$. Вспомогательные векторы $\vec{\Pi}_k$ из (34) равны: $\vec{\Pi}_1 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{14}}; -\frac{12i}{\sqrt{14}} \right)$; $\vec{\Pi}_2 = \left(\frac{3}{2\sqrt{70}}; -\frac{20i}{\sqrt{70}} \right)$; $\vec{\Pi}_3 = \left(-\frac{i}{\sqrt{5}}; 0 \right)$. Многополюсник Φ рис. 8 разлагается

в цепочку простейших систем Φ_k , изображенную на рис. 17, где из формулы (34)

$$S_1(\omega) = I + \frac{1}{\frac{3}{2} + \omega} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{1}{56}i \\ \frac{72}{7}i & \frac{3}{7} \end{pmatrix}; \quad S_2(\omega) = I - \frac{1}{\frac{3}{2} - \omega} \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{9}{280}i \\ \frac{40}{7}i & -\frac{3}{7} \end{pmatrix};$$

$$S_3(\omega) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{5i\omega} \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\xi_1 = \frac{1}{2\sqrt{14}\left(\frac{3}{2} + \omega\right)} u^{(-)} - 24iI^{(-)}; \quad \xi_3 =$$

$$= \frac{1}{i\sqrt{5}\omega} \left(\left[1 - \frac{1}{\frac{9}{4} - \omega^2} \right] u^{(-)} - \frac{16i\omega}{\frac{9}{4} - \omega^2} I^{(-)} \right);$$

$$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{70}\left(\frac{3}{2} - \omega\right)} \left(\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{\frac{3}{2} + \omega} \right] u^{(-)} + \left[20i + \frac{24i}{\frac{3}{2} + \omega} \right] I^{(-)} \right).$$

Непосредственным вычислением проверяется, что отображение $S(\omega)$ и внутреннее состояние $\vec{\psi}$ исходного многополюсника Φ рис. 8 связаны

с цепочкой следующим образом: $S(\omega) = S_1 S_2 S_3$, $\vec{\psi} = \sum_{k=1}^3 \xi_k \vec{\psi}_k$.

Открытая система Φ_3 физически реализуема в виде реактивного четырехполюсника [4, 8, 9]. Хотя каждая из систем Φ_1 , Φ_2 не реализуется многополюсником, однако, их цепное соединение — система $\Phi_4 = \Phi_1 \gamma \Phi_2$ — оказывается реализуемым. Физическое осуществление Φ_4 и Φ_3 можно выполнить по матрицам передачи $S_4 = S_1 S_2$ и S_3 согласно [4, 5, 11]. Каскадное соединение Φ_4 и Φ_3 дает четырехполюсник рис. 18, эквивалентный четырехполюснику рис. 8 (две открытые системы называются эквивалентными, если у них одинаковы передаточные отображения).

Как показывает пример, операторные комплексы могут применяться для синтеза передаточной матрицы $S(\omega)$ в виде цепочки многополюсников (ср. [4, 5, 8, 11]).

2. Рассмотрим неустановившиеся колебания многополюсника Φ с произвольным входным сигналом $\vec{\varphi}^{(-)}(t)$. Вместо (7), (8) надо использовать (3), (4); остальные уравнения цепи — (1), (2), (5), (6) — сохраняются. Будем говорить, что в неустановившемся режиме многополюснику Φ принадлежит операторный комплекс $[T, e_a, J]$, если выполнены соотношения (11), (35), (36):

$$i \frac{d\vec{\psi}}{dt} + \vec{\psi}(t) T = \sum_{\alpha=1}^n \vec{\varphi}_{\alpha}^{(-)}(t) \vec{e}_{\alpha}, \quad (35)$$

$$\vec{\varphi}_{\alpha}^{(+)}(t) = \vec{\varphi}_{\alpha}^{(-)}(t) - i \sum_{\alpha=1}^n (\vec{\psi}(t), \vec{e}_{\alpha} \vec{a}_{\alpha} j), \quad (36)$$

где $\vec{\psi}^{(-)}(t) = (\varphi_1^{(-)}(t), \dots, \varphi_n^{(-)}(t))$, $\vec{a}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $\vec{a}_n = (0, \dots, 0, 1)$.

Когда $\vec{\psi}$, $\vec{\varphi}^{(\pm)}$ не зависят от времени, (36) равносильно (13) [6, 7], поэтому операторные комплексы, принадлежащие Φ в установившемся и неустановившемся режиме колебаний, одновременно не существуют или существуют и совпадают. Применения комплекса $[T, e_a, J]$ для изучения произвольных колебаний Φ аналогичны рассмотренным выше. Так, решение (35) обычным путем дает

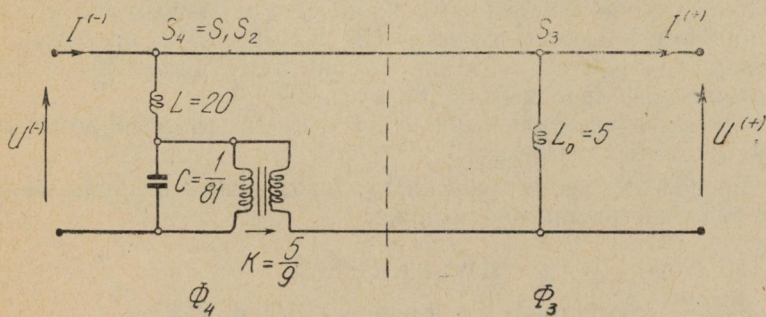


Рис. 18

внутреннее состояние $\vec{\psi}(t)$, удовлетворяющее начальному условию $\vec{\psi}(t_0)$:

$$\vec{\psi}(t) = \vec{\psi}(t_0) e^{iT(t-t_0)} - i \int_{t_0}^t \sum_{\alpha=1}^n \varphi_{\alpha}^{(-)}(s) \vec{e}_{\alpha} \cdot e^{iT(t-s)} ds.$$

Подставляя найденное $\vec{\psi}(t)$ в (36), получаем выходное состояние $\vec{\varphi}^{(+)}(t)$.

Разложение в цепочку остается справедливым, формулы состояний простейших систем из цепочки приобретают вид (ср. (34)):

$$\vec{\varphi}_k^{+}(t) = \vec{\varphi}_{k+1}^{-}(t) = \vec{\varphi}_k^{(-)}(t) S_k = \vec{\varphi}_k^{(-)}(t) - \int_0^t e^{i\lambda_k(t-s)} \cdot \vec{\varphi}_k^{(-)}(s) \vec{\Pi}_k^* \vec{\Pi}_k J ds,$$

$$\xi_k = \vec{\varphi}_k^{(-)}(t) R_k = -i \int_0^t e^{i\lambda_k(t-s)} \cdot \vec{\varphi}_k^{(-)}(s) \vec{\Pi}_k^* ds,$$

где $\varphi_k^{(-)} = \varphi_k^{(-)} S_1 S_2 \dots S_{k-1}$ — состояние, поданное на вход простейшей системы Φ_k из цепочки; λ_k — соответствующее собственное число оператора T ; векторы $\vec{\Pi}_k$ определяются по каналовым векторам и треугольному базису оператора T и совпадают с вычисленными $\vec{\Pi}_k$ для (34); начальные условия — нулевые ($\vec{\psi}(0) = 0$).

Для изучения одномерной системы Φ_k вне связи с цепочкой надо положить $\vec{\varphi}_k^{(-)} = \vec{\varphi}^{(-)}(t)$.

3. Представляет интерес изучение следующих вопросов.

а) Исследование многополюсника $\Phi_0 (\Phi_0 \in \Omega_t)$ с помощью последовательности операторных комплексов $[T_k, e_a^k, J]$, принадлежащих многополюсникам Φ_k , где $\Phi_k > \Phi_0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(\omega) = S_0(\omega)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k(\omega) = R_0(\omega)$; S_i, R_i — отображения системы Φ_i $i = 0, 1, 2, \dots$), см. теорему 4.

б) Переход от рассмотренного выше комплекса $[T, e_a, J]$, нормированного на бесконечно удаленную точку, к операторным комплексам, нормированным на произвольную точку ω . Такой комплекс должен существовать для любого многополюсника Φ из класса Ω_t .

в) Перечисление многополюсников с одинаковым отображением $S(\omega)$ — проблема эквивалентности (В. Кауэр). Эта проблема, столь важная для приложений, связана с понятием унитарной эквивалентности комплексов, введенным в [6].

г) Включение электрических цепей с омическими сопротивлениями в теорию открытых систем.

д) Определение геометрических условий существования комплекса для непередающего многополюсника.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Берж. Теория графов и ее применения. ИЛ, М., 1962.
2. М. С. Бродский, М. С. Лившиц. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы. УМН, 1958, 13, 1(79)3.
3. Э. В. Зелях. Основы общей теории линейных электрических схем. Изд-во АН СССР, М., 1951.
4. М. С. Лившиц, Э. С. Флексер. Разложение реактивного четырехполюсника в цепочку простейших четырехполюсников. ДАН СССР, 1960, 135, 3, 542.
5. М. С. Лившиц, Э. С. Флексер. Синтез передающей линии по заданным частотным характеристикам, Зап. мех.-матем. фак-та Харьковск. гос. ун-та и Харьковск. матем. об-ва, 1961, т. XXVIII, 4, 149—162.
6. М. С. Лившиц. О линейных физических системах, соединенных с внешним миром каналами связи. «Изв. АН СССР, серия матем.», 1963, 27, 5, 993—1030.
7. М. С. Лившиц. Открытые системы как линейные автоматы, «Изв. АН СССР, серия матем.», 1963, 27, 6, 1215—1228.
8. А. Г. Руткас. О цепочечном синтезе реактивного многополюсника. «Радиотехника и электроника», 1961, 11, 1889—1945.
9. А. Г. Руткас. Передаточная матрица пассивного многополюсника, Тр. Харьковского горного института, 1962, XI, 89—94.
10. С. Сешу, Н. Балабанян. Анализ линейных цепей. Госэнергоиздат, 1963.
11. A. Talbot. New method of synthesis of reactance networks, Proc. I. E. E., 1954, 101, pt. 4, Monograph N 77, p. 73.