ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVIII. Серия 4 1961

О СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ВО ВСЕМ ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЯХ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА

В. С. Азарин

Исследованиями Б. Я. Левина и А. Пфлюгера ([1] гл. II) было установлено, что известная правильность в распределении корней целой функции конечного порядка влечет регулярность ее роста по всем направлениям. Основной целью настоящей работы является получение аналогичных результатов для функций, субгармонических в пространстве любого числа измерений. Попутно в работе переносятся на субгармонические функции некоторые теоремы об оценке снизу.

Введение. Начнем с перечня обозначений и определений, а также некоторых фактов, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

I. Обозначения.

E_m — пространство m измерений. Точки этого пространства будем обозначать прописными буквами латинского алфавита, радиусы-векторы — соответствующими строчными буквами (например, P — точка, $\bar{p}$ — ее радиус-вектор);

$\|\bar{p}\|$ — длина вектора $\bar{p}$;

r_{PQ} — расстояние между точками P и Q;

$r_P = r_{OP}$ — где O — начало координат;

S_R — сфера радиуса R с центром в O;

σ_R — площадь сферы S_R;

σ_1 — площадь единичной сферы S_1;

K_R — шар с центром в O радиуса R;

$K_{R,r}$ — шаровой слой с центром в O, ограниченный сферами S_R и S_r;

$K_{R,\beta}$ — шаровой слой $K_{(1+\beta)R,(1-\beta)R}$;

$\omega(G) = \frac{\mathrm{mes}G}{R^{m-1}}$, где G — множество, расположенное на сфере S_R. (Эту величину мы будем называть в дальнейшем угловой мерой). Точку Q, для которой $r_Q = R$ и $\frac{\bar{q}}{R} = \bar{x}\ (\in S_1)$, мы будем часто обозначать $R\bar{x}$.

$$f^+(Q) = \max\{O, f(Q)\}; \quad f^-(Q) = f^+(Q) - f(Q),$$

где $f(Q)$ — вещественная функция;

$M_f(r)$ — максимум $f^+(Q)$ на сфере S_r;

μ_Q — неотрицательное распределение масс;
$\mu(\{S\})$ — масса множества S;
$\mu(R)$ — масса шара K_R;
K_R^G — сектор, образованный пересечением конуса с вершиной в начале координат, определенного множеством $G \subset S_1$ и шара K_R;
$\mu(K_R^G)$ — масса сектора K_R^G.

II. Определения и некоторые предложения

Субгармонической функцией в области D пространства E_m называется полунепрерывная сверху функция $u(Q)$, удовлетворяющая условию: какова бы ни была замкнутая подобласть $G \subset D$, всякая гармоническая функция, мажорирующая $u(Q)$ на границе G, будет ее мажорантой и внутри области.

В дальнейшем, если противное не будет оговорено, под субгармонической функцией мы будем понимать функцию, субгармоническую во всем пространстве.

По известной теореме Ф. Рисса, всякой субгармонической в области D функции $u(Q)$ однозначно отвечает неотрицательное распределение масс μ_Q такое, что для любой замкнутой подобласти $G \subset D$ имеет место представление:

$$u(Q) = -\int_G \frac{d\mu_P}{r_{QP}^{m-2}} + H(Q), \text{ если } m > 2,$$

$$u(Q) = \int_G \ln r_{QP} d\mu_P + H(Q), \text{ если } m = 2,$$

где r_{QP} — расстояние между точками Q и P, а $H(Q)$ — функция, гармоническая в G.

Порядком субгармонической функции называется величина

$$\rho = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln^+ M_u(r)}{\ln r}.$$

Если $\rho < \infty$, то $u(Q)$ называется субгармонической функцией конечного порядка.

Типом субгармонической функции $u(Q)$ конечного порядка ρ называется величина

$$\sigma = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{M_u(r)}{r^\rho}.$$

Если $\sigma = 0$, то $u(Q)$ называется функцией минимального типа, если $0 < \sigma < \infty$ — функцией нормального типа, если $\sigma = \infty$ — функцией максимального типа.

Показателем сходимости ρ_1 распределения масс μ_Q называется точная нижняя грань положительных чисел κ, для которых сходится интеграл

$$\int_{r_{PQ}>1} \frac{d\mu_Q}{r_{PQ}^{m-2+\kappa}},$$

где P — какая-нибудь точка пространства.

Верхней (нижней) плотностью распределения масс называется величина

$$\overline{\Delta} = \varlimsup_{R\to\infty} \frac{\mu(R)}{R^{m-2+\rho_1}} \left(\underline{\Delta} = \varliminf_{R\to\infty} \frac{\mu(R)}{R^{m-2+\rho_1}}\right).$$

Если верхняя плотность совпадает с нижней, то будем говорить, что распределение масс имеет плотность, равную $\Delta = \overline{\Delta} = \underline{\Delta}$.

Пусть

$$H(v,\gamma,p) = -(1 - 2v\cos\gamma + v^2)^{-\frac{m-2}{2}} + \sum_0^p Y_n(\gamma)\, v^n, \qquad (0,1)$$

где $Y_n(\gamma)$ — коэффициенты разложения $(1 - 2v\cos\gamma + v^2)^{-\frac{m-2}{2}}$ по степеням v. Каждому неотрицательному распределению масс, удовлетворяющему условию

$$\int\limits_{r_Q > 1} \frac{d\mu_Q}{r_Q^{p+m-1}} < \infty$$

может быть поставлен в соответствие канонический интеграл — аналог канонического произведения Вейерштрасса:

$$I(M) = \int\limits_{r_Q > 1} H\left(\frac{r_M}{r_Q}, \gamma, p\right) \frac{d\mu_Q}{r_Q^{m-2}},$$

который сходится равномерно в любой ограниченной части пространства и представляет некоторую субгармоническую функцию.

Этот интеграл и субгармонические функции конечного порядка изучаются в работе Брело [3], из результатов которого вытекают ([3] стр. 145, 147, теоремы 1, 2) следующие аналоги теорем Адамара, Линделефа и Бореля для целых функций:

Теорема А (аналог теоремы Адамара). Для любой субгармонической функции конечного порядка ρ имеет место представление:

$$u(Q) = \int\limits_{r_M > \varepsilon} H\left(\frac{r_Q}{r_M}, \gamma, p\right) \frac{d\mu_M}{r_M^{m-2}} + H_q(Q) + \int\limits_{r_M < \varepsilon} \frac{d\mu_M}{r_{QM}^{m-2}}, \qquad (0.2)$$

где $p \leqslant \rho$, $H_q(Q)$ — гармонический полином степени $q \leqslant p$, ε — произвольное положительное число.

Теорема Б (аналог теоремы Бореля). Показатель сходимости распределения масс не превосходит порядка роста субгармонической функции, а если порядок — нецелое число, то совпадает с ним. Если порядок $\rho > 0$ субгармонической функции не равен целому числу, σ — ее тип, а $\overline{\Delta}$ — верхняя плотность, то при $\overline{\Delta} = 0$ также и $\sigma = 0$, при $0 < \overline{\Delta} < \infty$ будем иметь $0 < \sigma < \infty$, при $\overline{\Delta} = \infty$ — $\sigma = \infty$.

Для субгармонических функций целого порядка тип не определяется плотностью, а зависит еще от величины

$$\delta_R(\overline{x}) = X_q(\overline{x}) + \int\limits_{r_Q < R} Y_p(\gamma) \frac{d\mu_Q}{r_Q^{p+m-2}}, \qquad (0.3)$$

в которой $X_q(\overline{x})$ — коэффициент при старшей степени r_Q гармонического полинома, фигурирующего в представлении (0.2), $Y_p(\gamma)$ — коэффициент при v^p в (0.1), а $\overline{x}$ — вектор единичной сферы S_1. А именно, если положить

$$\delta_R = \max_{\overline{x} \in S_1} \delta_R(\overline{x}), \quad \delta = \overline{\lim_{R \to \infty}} \delta_R, \quad \beta = \max(\delta, \overline{\Delta}),$$

то имеет место

Теорема В (аналог теоремы Линделефа). Если в (0.2) $\rho = p$, то при $\beta = 0$ будет $\sigma = 0$, при $0 < \beta < \infty$ — также $0 < \sigma < \infty$, при $\beta = \infty$ и $\sigma = \infty$. Если $\rho = p + 1$, то

$$\sigma = \max_{\overline{x} \in S_1} X_q(\overline{x}).$$

В настоящей работе мы более подробно изучаем связь роста субгармонической функции с распределением ее масс.

Определение. Верхней (нижней) угловой плотностью распределения масс μ_Q называется функция множества G, определенная равенством

$$\overline{\Delta}(G) = \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{\mu(K_R^G)}{R^{m-2+\rho_1}} \quad \left(\underline{\Delta}(G) = \underline{\lim_{R\to\infty}} \frac{\mu(K_R^G)}{R^{m-2+\rho_1}}\right).$$

Наиболее точным образом удается охарактеризовать связь роста субгармонической функции с распределением ее масс в случае, когда массы распределены регулярно в смысле следующего определения.

Определение. Если для любого открытого множества $G \subset S_1$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\widetilde{G} \subset G$ такое, что расстояние между их границами не превосходит ε, и такое, что

$$\overline{\Delta}(\widetilde{G}) = \underline{\Delta}(\widetilde{G}),$$

то распределение масс называется регулярным.

Мы покажем в этой работе, что регулярность распределения масс влечет за собой известную регулярность роста субгармонической функции, и дадим асимптотическое представление для таких функций через угловую плотность масс, справедливое вне некоторого исключительного множества.

Этот результат является аналогом результата Б. Я. Левина о целых функциях с правильным распределением корней (см. [1] гл. II).

В настоящей работе мы предполагаем, ради единства формулировок и простоты записи, что размерность пространства не меньше трех, хотя наши рассуждения после некоторой модификации применимы и к случаю плоскости.

§ 1. Некоторые общие оценки для субгармонических функций.

В теории роста целых функций большое значение имеют оценки логарифма модуля целой функции снизу вне некоторого множества. Эти оценки основываются на оценках снизу модуля полинома, принадлежащих Картану * и Валирону **.

Как показывает пример субгармонической функции с массами, распределенными по лучу, уже для субгармонических функций в E_3 нет не только оценки снизу типа Картана, т. е. вне некоторого множества шаров, но даже и оценки вне некоторых шаровых слоев с центром в начале координат, которую естественно было бы ожидать в качестве обобщения оценки Валирона.

Однако оказалось, что оценки снизу для субгармонических функций все-таки существуют, если иначе обобщить на случай $m \geqslant 3$ исключительные множества Валирона.

Лемма 1. Пусть $\widetilde{\mu}_Q$ — распределение масс в области S, гиперплоскости *** Γ, проходящей через начало координат 0, и мера области S в этой гиперплоскости равна σ. Пусть

$$\pi(P) = \int_S \frac{d\,\widetilde{\mu}_Q}{r_{PQ}^{m-2}}$$

— потенциал распределения $\widetilde{\mu}_Q$ в точке $P \in S$. Тогда для любого $H > 0$

---

* Оценка Картана ([1] стр. 31) имеет место вне множества кружков с произвольно малой суммой радиусов.

** Оценка Валирона ([4] стр. 79) имеет место вне некоторого множества концентрических колец с относительно малой общей шириной.

*** При $m = 3$ — плоскости.

мера σ_H множества S_H точек области S, где $\pi(P) > H$ удовлетворяет неравенству

$$\sigma_H < \alpha_m \frac{\sqrt[m-1]{\sigma}}{H} \cdot \tilde{\mu}(\{S\})$$

где α_m зависит только от m.

Доказательство. Оценим сверху интеграл

$$I = \int\limits_S \pi(P)\, d\sigma_P = \int\limits_S d\tilde{\mu}_Q \int\limits_S \frac{d\sigma_P}{r_{PQ}^{m-2}}.$$

Обозначим через C_Q сферу размерности $m-1$, лежащую в гиперплоскости Г, имеющую центр в точке Q и площадь σ, равную $\operatorname{mes} S$. Легко видеть, что

$$\int\limits_S \frac{d\sigma_P}{r_{PQ}^{m-2}} \leqslant \int\limits_{C_Q} \frac{d\sigma_P}{r_{PQ}^{m-2}} = \tilde{\sigma}_1 \rho_\sigma,$$

где ρ_σ — радиус C_Q, а $\tilde{\sigma}_1$ — площадь единичной $(m-1)$-мерной сферы. Так как

$$\rho_\sigma = \sqrt[m-1]{\frac{\sigma\,(m-1)}{\tilde{\sigma}_1}},$$

то

$$I \leqslant \tilde{\sigma}_1^{\frac{m-2}{m-1}} \cdot \sigma^{\frac{1}{m-1}} \cdot \mu(\{S\});$$

откуда, принимая $[\tilde{\sigma}_1(m-1)^{-1}]^{\vee}$

$$\alpha_m = \cancel{\tilde{\sigma}_1^{\frac{m-2}{m-1}}}, = [\tilde{\sigma}_1(m-1)^{-1}]^{\frac{m-2}{m-1}}$$

получаем утверждение леммы.

Доказанная нами лемма дает оценку потенциала в предположении, что массы распределены в гиперплоскости.

Перейдем к оценке потенциала для случая общего распределения масс. Предварительно введем некоторые определения.

Пусть γ — произвольное подпространство $(m-2)$ измерений, а Φ — ортогональное ему подпространство 2-х измерений (плоскость). Выберем в плоскости Φ некоторый орт e_0. Пусть e_φ — единичный орт в плоскости Φ, образующий угол φ с e_0.

Определение. Множество векторов вида $\bar{q}_\gamma + \lambda e_\varphi$, где λ пробегает полуось $0 < \lambda < \infty$, а $\bar{q}_\gamma$ — подпространство γ, назовем полугиперплоскостью R_φ^γ.

Покажем, что через любой вектор $\bar{q} \in E_m$ и подпространство γ можно провести полугиперплоскость. Пусть $\bar{q}_\Phi$ — проекция $\bar{q}$ на Φ, $\bar{q}_\gamma$ — проекция $\bar{q}$ на γ. Единичный вектор

$$e = \frac{\bar{q}_\Phi}{\|\bar{q}_\Phi\|}$$

принадлежит Φ и образует некоторый угол ψ с нулевым направлением. Тогда полугиперплоскость R_ψ^γ проходит через $\bar{q}$, так как

$$\bar{q} = \bar{q}_\gamma + \bar{q}_\Phi = \bar{q}_\gamma + e \cdot \|\bar{q}_\Phi\| = \bar{q}_\gamma + e_\psi \|\bar{q}_\Phi\|. \tag{1.1}$$

Определение. Вектор

$$\bar{q}_\varphi^\gamma = \bar{q}_\gamma + \|\bar{q}_\Phi\| e_\varphi,$$

полученный заменой в (1.1) e_ψ на e_φ, назовем γ-проекцией $\bar{q}$ на полугиперплоскость R_φ^γ. Множество γ-проекций точек множества G будем называть γ-проекцией множества G на R_φ^γ и обозначать G_φ^γ.

Нетрудно видеть, что

а) мера G_φ^γ не зависит от φ; мы будем называть ее γ-мерой множества G и обозначать $m_\gamma(G)$.

Докажем, что

б) $r_{PQ} \geqslant r_{PQ_\varphi^\gamma}$ для любой точки $Q \in G$ и для $P \in R_\varphi^\gamma$. Легко убедиться в справедливости утверждения б) для $m=3$. В этом случае γ — прямая, проходящая через начало координат, R_ψ^γ — полуплоскость, проходящая через Q и γ, Q_φ^γ — точка, в которую перейдет Q, если R_ψ^γ вместе с Q повернуть вокруг γ до совмещения с R_φ^γ.

Пусть теперь $m \geqslant 3$. Нам нужно показать, что

$$\|\bar{p}-\bar{q}\| \geqslant \|\bar{p}-\bar{q}_\varphi^\gamma\|$$

для $\bar{p} \in R_\varphi^\gamma$. Имеем:

$$\bar{p}=\bar{p}_\gamma+\|\bar{p}_\Phi\| e_\varphi, \quad \bar{q}=\bar{q}_\gamma+\|\bar{q}_\Phi\| e_\psi, \quad \bar{q}_\varphi^\gamma=\bar{q}_\gamma+\|\bar{q}_\Phi\| e_\varphi,$$

следовательно,

$$\|\bar{p}-\bar{q}\|^2=\|\bar{p}_\gamma-\bar{q}_\gamma\|^2+\|\|\bar{p}_\Phi\| e_\varphi-\|\bar{q}_\Phi\| e_\psi\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant\|\bar{p}_\gamma-\bar{q}_\gamma\|^2+(\|\bar{p}_\Phi\|-\|\bar{q}_\Phi\|)^2=\|\bar{p}-\bar{q}_\varphi^\gamma\|^2,$$

тем самым требуемое соотношение доказано.

Оценку потенциала пространственного распределения масс дает следующая

Теорема 1. Пусть μ_Q — распределение масс в E_m, функция

$$\Psi_{R,\beta}(P)=\int\limits_{K_{R,\beta}} \frac{d\mu_Q}{r_{PQ}^{m-2}}$$

— потенциал масс шарового слоя $K_{R,\beta}$ $(0 \leqslant \beta<1)$, а α — произвольное положительное число. Тогда $\Psi_{R,\beta}$ в этом шаровом слое удовлетворяет неравенству

$$\Psi_{R,\beta}(P) \leqslant \beta^\alpha \frac{\mu(\{K_{R,\beta}\})}{R^{m-2}} \tag{1.2}$$

вне некоторого исключительного множества G, γ-мера которого относительно любого γ удовлетворяет неравенству

$$m_\gamma(G) \leqslant k_m \cdot R^{m-1} \cdot \beta^{\alpha+\frac{1}{m-1}},$$

где k_m — постоянная, зависящая только от m.

Доказательство. Для наглядности будем считать $m=3$, хотя это не уменьшает общности рассуждений. Построим исключительное множество G. Пусть γ — произвольная ось и R_φ^γ — полуплоскость, проходящая через нее. Определим распределение масс в этой полуплоскости равенством

$$d\mu_Q^{\gamma,\varphi}=\int d\mu'_Q,$$

где интеграл берется по тем Q', для которых $Q'^\gamma_\varphi=Q$. Таким образом, все массы сносятся в R_φ^γ поворотом вокруг γ; масса всего слоя $K_{R,\beta}$ переносится на кольцо $K_{R,\beta} \cap R_\varphi^\gamma$.

Обозначим через π_φ^γ потенциал $\mu_Q^{\gamma,\varphi}$:

$$\pi_\varphi^\gamma(M)=\int\limits_{K_{R,\beta}}\frac{d\mu_Q^{\gamma,\varphi}}{r_{MQ}^{m-2}}$$

Полагая в лемме 1 (для $m=3$)

$$H=\frac{\beta^{-\alpha}}{R}\cdot\int\limits_{K_{R,\beta}}d\mu_Q^{\gamma,\varphi}=\frac{\beta^{-\alpha}}{R}\mu(\{K_{R,\beta}\}),$$

получим после несложных преобразований неравенство

$$\pi_\varphi^\gamma(M)\leqslant\frac{\beta^{-\alpha}}{R}\cdot\mu(\{K_{R,\beta}\}),$$

справедливое для всех $M\in R_\varphi^\gamma$, за исключением множества G_φ^γ, мера которого удовлетворяет условию

$$\operatorname{mes}G_\varphi^\gamma<\pi R^2\cdot k\cdot\beta^{\alpha+\frac{1}{2}},$$

где k — абсолютная постоянная.

Положим $G^\gamma=\bigcup\limits_\varphi G_\varphi^\gamma$ и $G=\bigcap G^\gamma$. Для любого γ γ-мера G не превосходит $\operatorname{mes}G_\varphi^\gamma$, т. е.

$$m_\gamma(G)\leqslant\pi R^2\cdot k\cdot\beta^{\alpha+\frac{1}{2}}.$$

Покажем теперь, что вне G выполняется соотношение ~~(2.1)~~ (12). Пусть $P\,\overline{\in}\,G$. Тогда найдется такое γ_1, что $P\,\overline{\in}\,G^{\gamma_1}$, т. е. $P\,\overline{\in}\,G_\varphi^{\gamma_1}$ ни для какого φ. Проведем полуплоскость $R_{\varphi_1}^{\gamma_1}$ через γ_1 и P. Так как $r_{PQ}\geqslant r_{PQ_{\varphi_1}^{\gamma_1}}$ и $P\,\overline{\in}\,G_{\varphi_1}^{\gamma_1}$, то для потенциала $\pi_{\varphi_1}^{\gamma_1}$ в точке P выполняются неравенства

$$\Psi_{R,\beta}(P)=\int\limits_{K_{R,\beta}}\frac{d\mu_Q}{r_{PQ}^{m-2}}\leqslant\int\limits_{K_{R,\beta}\cap R_{\varphi_1}^{\gamma_1}}\frac{d\mu_Q^{\gamma_1,\varphi_1}}{r_{PQ}^{m-2}}=\pi_{\varphi_1}^{\gamma_1}(P)$$

и

$$\pi_{\varphi_1}^{\gamma_1}(P)\leqslant\frac{\beta^{-\alpha}}{R}\cdot\mu(\{K_{R,\beta}\}).$$

Этим доказывается утверждение леммы.

Установим еще одну оценку субгармонической функции снизу.

Лемма 2. Пусть $u(Q)$ — субгармоническая в E_m функция, равная нулю в начале координат и не имеющая масс в его окрестности. Пусть $M_1(R)$ — произвольная положительная функция от R. Тогда угловая мера $\omega(G)$ множества точек $G\subset S_R$, где выполняется неравенство

$$u(Q)<-M_1(R),$$

удовлетворяет соотношению

$$\omega(G)\leqslant\frac{M_u(R)}{M_1(R)}\cdot\sigma_1.$$

Доказательство. По свойству субгармонической функции

$$\frac{1}{\sigma_R}\cdot\int\limits_{S_R}u(Q)\,d\sigma_Q\geqslant u(O)=0.$$

Следовательно,

$$M_u(R) > \frac{1}{\sigma_R} \cdot \int\limits_{S_R} u^+(Q)\, d\sigma_Q > \frac{1}{\sigma_R} \int\limits_{S_R} u^-(Q)\, d\sigma_Q > \frac{1}{\sigma_R} \int\limits_{G} u^-(Q)\, d\sigma_Q >$$

$$> \frac{1}{\sigma_1} \cdot M_1(R) \cdot \omega(G).$$

Отсюда получаем утверждение леммы.

Приведем еще некоторые вспомогательные неравенства, необходимые в дальнейшем.

Лемма 3. Функция $H(v, \gamma, p)$, определенная равенством (0.1), удовлетворяет следующей оценке:

$$|H(v, \gamma, p)| < C_{p,\,m} \cdot v^{p+1} \quad \text{для } 0 < v < \frac{p+1}{p+2}$$

$$H(v, \gamma, p) < C_{p,\,m} \cdot \frac{v^{p+1}}{1+v} \quad \text{для } 0 < v < \infty,$$

где $C_{p,\,m}$ зависит только от p и m.

Доказательство аналогично доказательству соответствующего неравенства для первичного множителя Вейерштрасса (см. [1] стр. 21).

Лемма 4. Пусть $u(Q)$ — субгармоническая функция в шаре K_{2R} и μ_Q — ее распределение масс. Тогда имеет место неравенство

$$\frac{\mu(R)}{R^{m-2}} \leqslant C_m \cdot M_u(2R),$$

где C_m зависит только от m.

Доказательство использует формулу Привалова-Иенсена для функции, субгармонической в шаре (см. [2] стр. 165):

$$\frac{1}{\sigma_R} \cdot \int\limits_{S_R} u(Q)\, d\sigma_Q = (m-2) \int\limits_0^R \frac{\mu(t) - \mu(0)}{t^{m-1}} - \mu(0) \cdot \frac{1}{R^{m-2}} + C,$$

где C — постоянная, и проводится аналогично доказательству соответствующей леммы в [1] (стр. 26).

§ 2. Пусть $u(Q)$ — субгармоническая функция нецелого порядка ρ. Тогда рост ее определяется ростом канонического интеграла в представлении (0.2), и показатель сходимости масс ρ_1 равен порядку (Введение, теорема Б).

При нецелом ρ_1 мы будем называть распределение масс правильным, если оно регулярно.

Введем в пространстве E_m сферические координаты:

$$\begin{aligned} x_1 &= R \sin\theta_1 \ \ldots\ \sin\theta_{m-1} \\ x_2 &= R \cos\theta_1 \ \ldots\ \sin\theta_{m-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= R \cos\theta_{m-1} \end{aligned}$$

и рассмотрим простейший случай — распределение масс по лучу. В этом случае асимптотику канонического интеграла дает теорема, аналогичная соответствующей теореме для целых функций (см. [1] стр. 88).

Теорема 1. Пусть на луче $\theta_{m-1} = 0$ вне некоторой окрестности начала координат распределены массы $\mu(x)$ с плотностью

$$\Delta = \lim_{R \to \infty} \frac{\mu(R)}{R^{m-2+\rho}},$$

где ρ — нецелое число, и пусть

$$v(Q)=\int_0^\infty H\left(\frac{r_Q}{x}, \theta_{m-1}, p\right)\frac{d\mu(x)}{x^{m-2}}.$$

Тогда имеет место равенство

$$\lim_{R\to\infty}\frac{v(R\bar{x})}{R^\rho}=\Delta\cdot(\rho+m-2)\cdot\int_0^\infty z^{\rho-1}\cdot H\left(\frac{1}{z}, \theta_{m-1}, p\right)dz$$

равномерно для всех $\bar{x}$ из единичной сферы, сферическая координата которых θ_{m-1} удовлетворяет условию:

$$\theta_{m-1}\geqslant\eta>0.$$

Для доказательства этой теоремы понадобятся две леммы, аналогичные соответствующим леммам для целых функций (см. [1] стр. 86, леммы 7 и 8).

Лемма 5. Пусть распределение масс μ_Q оставляет свободной некоторую окрестность начала координат и таково, что при $c>0$ и $\rho>0$

$$\mu(R)<cR^{\rho+m-2} \tag{2.1}$$

Положим

$$u_\sigma(Q)=\int_{r_M<\sigma r_Q} H\left(\frac{r_Q}{r_M}, \gamma, p\right)\frac{d\mu_M}{r_M^{m-2}},$$

тогда асимптотически

$$|u_\sigma(Q)|<C_p\sigma^{\rho-p}r_Q^\rho,$$

где C_p не зависит от σ и r_Q.

Лемма 6. Пусть распределение масс μ_Q удовлетворяет условию (2.1) и пусть

$${}_\tau u(Q)=\int_{r_M>\tau r_Q} H\left(\frac{r_Q}{r_M}, \gamma, p\right)\frac{d\mu_M}{r_M^{m-2}},$$

где $\tau>2$ и $\rho<p+1$. Тогда асимптотически

$$|{}_\tau u(Q)|<C'_p\tau^{\rho-p-1}r_Q^\rho,$$

причем C'_p не зависит от τ и r_Q.

Леммы доказываются применением оценки леммы 4 подобно тому, как леммы 7 и 8 доказываются применением известной оценки первичного множителя Вейерштрасса.

Доказательство теоремы. Из лемм 6 и 7 следует, что при произвольном $\varepsilon>0$, достаточно малом σ и достаточно большом τ выполняется асимптотическое неравенство

$$\left|v(R\bar{x})-\int_{\sigma R}^{\tau R} H\left(\frac{R}{x}, \theta_{m-1}, p\right)\frac{d\mu(x)}{x^{m-2}}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}R^\rho.$$

Интегрируя по частям, будем иметь

$$\int_{\sigma R}^{\tau R} H\left(\frac{R}{x}, \theta_{m-1}, p\right)\frac{d\mu(x)}{x^{m-2}}=\frac{\mu(x)}{x^{m-2}}\cdot H\left(\frac{R}{x}, \theta_{m-1}, p\right)\Bigg|_{\sigma R}^{\tau R}-$$

$$-\int_{\sigma R}^{\tau R}\mu(x)\frac{d}{dx}\left\{H\left(\frac{R}{x}, \theta_{m-1}, p\right)\cdot\frac{1}{x^{m-2}}\right\}dx.$$

С помощью асимптотического неравенства

$$|\mu(x) - \Delta \cdot x^{\rho+m-2}| < \varepsilon_1 x^{\rho+m-2},$$

где ε_1 произвольно мало, получаем:

$$\begin{aligned}
&\left| v(R\bar{x}) + \Delta \cdot R^{\rho} \cdot \int_0^{\infty} x^{\rho+m-2} \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x^{m-2}} \cdot H\left(\frac{1}{x}, \theta_{m-1}, p\right)\right\} dx \right| \leqslant \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4} \cdot R^{\rho} + \left| \frac{\mu(x)}{x^{m-2}} \cdot H\left(\frac{R}{x}, \theta_{m-1}, p\right) \Big|_{\sigma R}^{\tau R} \right| + \\
&+ \varepsilon_1 \int_{\sigma R}^{\tau R} x^{\rho+m-2} \left| \frac{d}{dx}\left\{H\left(\frac{R}{x}, \theta_{m-1}, p\right) \frac{1}{x^{m-2}}\right\} \right| dx + \\
&+ \Delta \left| \int_{\sigma R}^{\tau R} x^{\rho+m-2} \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x^{m-2}} H\left(\frac{R}{x}, \theta_{m-1}, p\right)\right\} dx - \right. \\
&\left. - R^{\rho} \cdot \int_0^{\infty} x^{\rho+m-2} \cdot \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x^{m-2}} \cdot H\left(\frac{1}{x}, \theta_{m-1}, p\right)\right\} dx. \right|
\end{aligned} \tag{2.2}$$

С помощью леммы 3 находим, что

$$\left| \frac{\mu(x)}{x^{m-2}} \cdot H\left(\frac{R}{x}, \theta_{m-1}, p\right) \Big|_{\sigma R}^{\tau R} \right| < \frac{\varepsilon}{4} R^{\rho}$$

при достаточно малом σ и достаточно большом τ. Далее имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{\sigma R}^{\tau R} x^{\rho+m-2} \left| \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x^{m-2}} \cdot H\left(\frac{R}{x}, \theta_{m-1}, p\right)\right\} \right| dx = \\
&= R^{\rho} \cdot \int_{\sigma}^{\tau} t^{\rho+m-2} \left| \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{t^{m-2}} \cdot H\left(\frac{1}{t}, \theta_{m-1}, p\right)\right\} \right| dt \leqslant \\
&\leqslant R^{\rho} \cdot \int_0^2 t^{\rho+m-2} \left| \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{t^{m-2}} \cdot H\left(\frac{1}{t}, \theta_{m-1}, p\right)\right\} \right| dt + \\
&+ R^{\rho} \cdot \int_2^{\infty} t^{\rho+m-2} \left| \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{t^{m-2}} \cdot H\left(\frac{1}{t}, \theta_{m-1}, p\right)\right\} \right| dt.
\end{aligned} \tag{2,3}$$

Для $0 < t < 2$

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{t^{m-2}} \cdot H\left(\frac{1}{t}, \theta_{m-1}, p\right)\right\} \right| = \left| \frac{m-2}{2} \cdot (t^2 - 2t\cos\theta_{m-1} + 1)^{-\frac{m}{2}} - \right. \\
&\left. - \sum_0^{p} Y_n(\theta_{m-1}) \cdot \frac{n+m-2}{t^{n+m-1}} \right| \leqslant k \cdot \frac{1}{t^{p+m-1}},
\end{aligned}$$

где k зависит только от m и η. Для $2 \leqslant t < \infty$

$$\left| \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{t^{m-2}} \cdot H\left(\frac{1}{t}, \theta_{m-1}, p\right)\right\} \right| = \left| \sum_{p+1}^{\infty} Y_n(\theta_{m-1}) \cdot \frac{n+m-2}{t^{n+m-1}} \right| \leqslant k' \cdot \frac{1}{t^{p+m}},$$

где k' зависит только от m.

Из этих неравенств следует сходимость обоих интегралов в (2.3) и оценка

$$\int_{\sigma R}^{\tau R} x^{\rho+m-2}\left|\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x^{m-2}}\cdot H\left(\frac{R}{x},\, \theta_{m-1}, p\right)\right\}\right| dx \leqslant k''\cdot R^{\rho},$$

где k'' зависит только от m и η.

Для оценки четвертого слагаемого в (2.2) заметим, что

$$\int_{\sigma R}^{\tau R} x^{\rho+m-2}\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x^{m-2}}\cdot H\left(\frac{R}{x},\theta_{m-1}, p\right)\right\} dx =$$

$$= R^{\rho}\cdot\int_{\sigma}^{\tau} t^{\rho+m-2}\cdot\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{t^{m-2}}\cdot H\left(\frac{1}{t},\, \theta_{m-1}, p\right)\right\} dt.$$

Следовательно, это слагаемое по модулю не превосходит

$$R^{\rho}\cdot\left(\int_{0}^{\sigma}+\int_{\tau}^{\infty}\right) x^{\rho+m-2}\cdot\left|\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x^{m-2}}\cdot H\left(\frac{1}{x},\, \theta_{m-1}, p\right)\right|dx \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\cdot R^{\rho},$$

если выбрать τ и $\frac{1}{\sigma}$ достаточно большими.

Кроме того, полагая в (2.2) $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{4k_1}$, найдем окончательно:

$$\left|v(R\bar{x})+\Delta\cdot R^{\rho}\cdot\int_{0}^{\infty} x^{\rho+m-2}\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x^{m-2}}\cdot H\left(\frac{1}{x},\, \theta_{m-1}, p\right)\right\} dx\right| \leqslant \varepsilon\cdot R^{\rho}.$$

Применяя к интегралу, стоящему слева, формулу интегрирования по частям, получим:

$$\left|v(R\bar{x})-\Delta\cdot R^{\rho}\cdot(\rho+m-2)\int_{0}^{\infty} x^{\rho-1}\cdot H\left(\frac{1}{x},\, \theta_{m-1}, p\right) dx\right| \leqslant \varepsilon\cdot R^{\rho},$$

что и доказывает утверждение теоремы.

Для случая целого порядка имеет место

Теорема 2′. Пусть на луче $\theta_{m-1}=0$ вне некоторой окрестности начала координат распределены массы $\mu(x)$ с плотностью

$$\Delta=\lim_{R\to\infty}\frac{\mu(R)}{R^{\rho+m-2}},\quad (\rho\geqslant 1,\ \rho\text{ — целое}).$$

Пусть

$$v_R(R\bar{x})=\int_{0}^{R} H\left(\frac{R}{t},\, \theta_{m-1},\, \rho-1\right)\frac{d\mu(t)}{t^{m-2}}+$$

$$+\int_{R}^{\infty} H\left(\frac{R}{t},\theta_{m-1},\rho\right)\frac{d\mu(t)}{t^{m-2}}.$$

Тогда

$$\lim_{R\to\infty}\frac{v_R(R\bar{x})}{R^\rho}=$$

$$=\Delta(\rho+m-2)\cdot\left\{\int_0^1 t^{\rho-1}\cdot H\left(\frac{1}{t},\ \theta_{m-1},\ \rho-1\right)dt+\right.$$

$$\left.+\int_1^\infty t^{\rho-1}\cdot H\left(\frac{1}{t},\ \theta_{m-1},\ \rho\right)dt\right.$$

равномерно для всех $\bar{x}$ из единичной сферы, сферическая координата которых θ_{m-1} удовлетворяет условию

$$\theta_{m-1}\geqslant\eta>0.$$

Это утверждение доказывается применением к каждому интегралу в отдельности рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве предыдущей теоремы, подобно тому, как это делается в [1] при доказательстве леммы 9 (стр. 91).

Перейдем к общему случаю распределения масс. Определим для любого открытого множества G на единичной сфере аддитивную неотрицательную функцию

$$m(G)=\sup\Delta(\widetilde{G}),\tag{2.4}$$

где $\Delta(\widetilde{G})$ —угловая плотность и sup берется по тем $\widetilde{G}\subset G$, для которых $\Delta(\widetilde{G})$ существует. $m(G)$ совпадает с $\Delta(G)$ для множеств, у которых $\Delta(G)$ существует. Функция $m(G)$ определена для любого открытого множества, аддитивна, монотонна и полунепрерывна снизу. $m(G)$ мы будем обозначать в дальнейшем $\Delta(G)$, $d\Delta(G)$ — через $d\Delta_{\bar{x}}$.

Легко видеть, что для любой функции $f(\bar{x})$, непрерывной в области G единичной сферы, существует интеграл Стилтьеса

$$\int_G f(\bar{x})\,d\Delta_{\bar{x}}.$$

Можно определить интеграл и от функции $u(\bar{x})\geqslant 0$, обращающейся в ∞. Для этого полагаем

$$u_n(\bar{x})=\left\{\begin{matrix} n & \text{там, где } u(\bar{x})>n\\ u(\bar{x}) & \text{там, где } u(\bar{x})\leqslant n\end{matrix}\right\}.$$

Так как $u_n(\bar{x})$ монотонно возрастает, то существует конечный или бесконечный предел $I=\lim\limits_{n\to\infty}I_n$ интегралов

$$I_n=\int u_n(\bar{x})\,d\Delta_{\bar{x}}.$$

Этот предел мы и обозначим

$$\int u(\bar{x})\,d\Delta_{\bar{x}}.$$

Затем можно известным образом расширить это определение на функции любого знака.

§ 3. Для формулировки основных теорем работы введем следующие определения.

Пусть G — множество в пространстве m-измерений. Обозначим через $m_\gamma^R(G)$ меру γ-проекции пересечения G с шаром K_R, а через $\omega^R(G)$ — угловую меру пересечения G со сферой S_R радиуса R.

Определение. Верхней γ-плотностью множества G называется величина

$$\bar{\rho}_\gamma(G) = \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{m_\gamma^R(G)}{R^{m-1}}.$$

Верхней ω-плотностью назовем величину

$$\bar{\omega}(G) = \overline{\lim_{R\to\infty}} \omega^R(G).$$

Множество нулевой верхней ω-плотности и нулевой верхней γ-плотности при любом γ — мы будем называть C_0-множеством.

Определение*. Под асимптотическим равенством порядка ρ двух функций $f(r)$ и $\varphi(r)$ мы будем понимать соотношение

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\rho}[f(r) - \varphi(r)] = 0.$$

Теорема 3. Пусть ρ — нецелое число и распределение масс в E_m регулярно с показателем ρ. Тогда при Q, не принадлежащем некоторому C_0-множеству, субгармоническая функция

$$u(Q) = \int_{E_m} H\left(\frac{r_Q}{r_M}, \gamma, p\right)\frac{d\mu_M}{r_M^{m-2}} + H_q(Q)$$

($H_q(Q)$ — гармонический полином степени $q \leqslant \rho$) удовлетворяет асимптотическому равенству порядка ρ

$$u(R\bar{x}) \approx h(\bar{x}) \cdot R^\rho,$$

в котором

$$h(\bar{x}) = \int_{S_1} K_p(\gamma)\, d\Delta_{\bar{y}},$$

где

$$K_p(\gamma) = (\rho + m - 2) \cdot \int_0^\infty z^{\rho+m-1} \cdot H\left(\frac{1}{z}, \gamma, p\right) dz,$$

а γ — угол между $\bar{x}$ и $\bar{y}$.

При этом функция

$$h_{u,R}(\bar{x}) = R^{-\rho} \cdot u(R\bar{x})$$

стремится к пределу равномерно по $\bar{x} \in S_1$.

Докажем предварительно две леммы (леммы 7 и 8), необходимые при доказательстве теоремы 3.

Пусть e_j — разбиение единичной сферы на области диаметра $d < \delta$ и $\bar{x}_j$ — единичные векторы внутри каждой из областей. Пусть каждому множеству e_j поставлено в соответствие некоторое множество $\varepsilon_j \subset (0, \infty)$. Обозначим через $K(\varepsilon_j)$ множество точек вида $\lambda\bar{x}$, где $\lambda \in \varepsilon_j$, $\bar{x} \in e_j$. Назовем δ-смещением распределения масс μ_Q для разбиения e_j, $\bar{x}_j$ новое распределение масс по лучам $\bar{x}_j$, определенное равенством

$$\mu^\delta(G) = \mu(\{\bigcup_g K(\varepsilon_j)\}),$$

где ε_j — множество тех $\lambda \in (0, \infty)$, для которых $\lambda\bar{x}_j \in G$; иначе говоря, новое распределение получается из старого снесением всех масс, лежащих в конусе, определяемом e_j, на луч $\bar{x}_j$.

* Определение заимствовано из [1] стр. 120.

Лемма 7. Пусть μ_Q — распределение масс в E_m, оставляющее свободным некоторую окрестность начала координат, имеющее плотность Δ при нецелом ρ, и пусть

$$J(Q) = \int\limits_{E_m} H\left(\frac{r_Q}{r_M}, \gamma, p\right) \frac{d\mu_M}{r_M^{m-2}}$$

— канонический интеграл этого распределения. Пусть μ_Q^δ — любое δ-смещение μ_Q и $J^\delta(Q)$ — его канонический интеграл. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ можно так найти $\delta > 0$, что неравенство

$$|J(Q) - J^\delta(Q)| < \varepsilon r_Q^\rho$$

выполняется для всех Q, не принадлежащих исключительному множеству C_η, верхние γ- и ω-плотности которого удовлетворяют условиям

$$\overline{\omega}(C_\eta) < \eta, \quad \overline{\rho}_\gamma(C_\eta) < \eta$$

для любого γ.

Доказательство. Фиксируем положительное число $\delta < \frac{1}{2}$, число $\tau > 2$ и положительное β, не превосходящее τ^{-1}, и представим интеграл $J(Q)$ в виде суммы следующих пяти функций:

$$J_\sigma(Q) = \int\limits_{r_M < \sigma r_Q} H\left(\frac{r_Q}{r_M}, \gamma, p\right) \frac{d\mu_M}{r_M^{m-2}};$$

$$_\tau J(Q) = \int\limits_{r_M > \tau r_Q} H\left(\frac{r_Q}{r_M}, \gamma, p\right) \frac{d\mu_M}{r_M^{m-2}};$$

$$J_{\sigma,\beta}(Q) = \int\limits_{K_{\sigma r_Q, (1-\beta) r_Q}} H\left(\frac{r_Q}{r_M}, \gamma, p\right) \frac{d\mu_M}{r_M^{m-2}};$$

$$_{\tau,\beta}J(Q) = \int\limits_{K_{(1+\beta) r_Q, \tau r_Q}} H\left(\frac{r_Q}{r_M}, \gamma, p\right) \frac{d\mu_M}{r_M^{m-2}};$$

$$\Phi_\beta(Q) = \int\limits_{K_{r_Q,\beta}} H\left(\frac{r_Q}{r_M}, \gamma, p\right) \frac{d\mu_M}{r_M^{m-2}}.$$

Соответствующим образом можно представить $J^\delta(Q)$ в виде суммы функций J_σ^δ; $_\tau J^\delta$; $J_{\sigma,\beta}^\delta$; $_{\tau,\beta}J^\delta$; Φ_β^δ. Очевидно,

$$|J^\delta - J| \leqslant |J_\sigma^\delta - J_\sigma| + |_\tau J^\delta - {}_\tau J| + |J_{\sigma,\beta}^\delta - J_{\sigma,\beta}| + |_{\tau,\beta}J^\delta - {}_{\tau,\beta}J| + |\Phi_\beta^\delta - \Phi_\beta|.$$

Из лемм 5 и 6 вытекает, что асимптотически

$$|J_\sigma(Q) - J_\sigma^\delta(Q)| \leqslant |J_\sigma(Q)| + |J_\sigma^\delta(Q)| < \frac{\varepsilon}{5} r_Q^\rho$$

$$|_\tau J(Q) - {}_\tau J^\delta(Q)| \leqslant |_\tau J(Q)| + |_\tau J^\delta(Q)| < \frac{\varepsilon}{5} r_Q^\rho.$$

Приблизим интегралы $J_{\sigma,\beta}(Q)$ и $J_{\sigma,\beta}^\delta(Q)$ интегральными суммами $\sum_{\sigma,\beta}$ и $\sum_{\sigma,\beta}^\delta$ с точностью до произвольного ε, производя разбиение области интегрирования с помощью сфер с центром в O и конусов с вершиной в O. Из равномерной непрерывности $H(v, \gamma, p)$ по γ в областях (в обеих суммах фигурирует одно и то же разбиение)

$$(1-\beta)^{-1} \leqslant u < \sigma^{-1}; \ \tau^{-1} < u < \frac{1}{1+\beta}; \ 0 \leqslant \gamma < \pi$$

следует, что δ можно взять настолько малым, что

$$\left|\sum\nolimits_{\sigma,\,\beta} - \sum\nolimits_{\sigma,\,\beta}^{\delta}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{5}\,\frac{\mu(r_Q)}{r_Q^{m-2}} < \frac{\varepsilon}{5}\, r_Q^{\rho},$$

отсюда вытекает неравенство

$$|J_{\sigma,\,\beta}(Q) - J_{\sigma,\,\beta}^{\delta}(Q)| < \frac{\varepsilon}{5}\, r_Q^{\rho}$$

при достаточно малом δ.

Аналогично доказывается, что

$$|{}_{\tau,\,\beta}J(Q) - {}_{\tau,\,\beta}J^{\delta}(Q)| < \frac{\varepsilon}{5}\, r_Q^{\rho}.$$

Приведенное рассуждение аналогично рассуждению из [1] (стр. 135).

Для оценки пятой разности существенную роль играют наши новые оценки для потенциала в пространстве m измерений, полученные в § 1.

Сначала оценим Φ_β сверху. С помощью неравенства леммы 3 получим

$$\Phi_\beta(Q) \leqslant C_{p,\,m}\cdot\frac{1+\beta}{(2+\beta)(1-\beta)^{p+m-1}}\cdot\left(\frac{\mu(\{K_{(1+\beta)\,r_Q}\})}{r_Q^{m-2}} - \frac{\mu(\{K_{(1-\beta)\,r_Q}\})}{r_Q^{m-2}}\right).$$

Учитывая существование плотности, имеем при $\beta < \frac{1}{2}$ асимптотически:

$$\Phi_\beta(Q) \leqslant K_{m,\,p}\cdot\Delta\cdot[(1+\beta)^{\rho} - (1-\beta)^{\rho}]\, r_Q^{\rho}, \tag{3.1}$$

где $K_{m,\,p}$ — постоянная, зависящая только от m и p.

Кроме того, величина

$$\int\limits_{K_{r_Q,\,\beta}} \sum_{0}^{p} Y_n(\gamma)\left(\frac{r_Q}{r_M}\right)^{n}\frac{d\mu_M}{r_M^{m+2}} = \widetilde{M}_\beta(Q)$$

оценивается по модулю следующим образом:

$$|\widetilde{M}_\beta(Q)| \leqslant \max_{\gamma,\,k} Y_k(\gamma)\cdot\frac{1+\beta}{(1-\beta)^{m-2}}\cdot\left(\frac{\mu(\{K_{(1+\beta)\,r_Q}\})}{r_Q^{m-2}} - \frac{\mu(\{K_{(1-\beta)\,r_Q}\})}{r_Q^{m-2}}\right), \tag{3.2}$$

откуда, учитывая существование плотности и взяв $\beta < {}^1/_2$, получаем

$$|\widetilde{M}_\beta(Q)| \leqslant k'_{m,\,p}\cdot\Delta\,[(1+\beta)^{\rho} - (1-\beta)^{\rho}]\cdot r_Q^{\rho},$$

где $k'_{m,\,p}$ зависит только от m и p.

Из неравенства (3.1) следует, что субгармоническая функция

$$\Phi_{R,\,\beta}(Q) = \int\limits_{K_{R,\,\beta}} H\left(\frac{r_Q}{r_M},\,\gamma,\,p\right)\frac{d\mu_M}{r_M^{m-2}} \tag{3.3}$$

удовлетворяет на сфере $r_Q = R$ неравенству

$$\Phi_{R,\,\beta}(Q) \leqslant k_{m,\,p}\cdot\Delta\,[(1+\beta)^{\rho} - (1-\beta)^{\rho}]\, r_Q^{\rho}.$$

Применяя к ней лемму 2, в которой

$$M_1(R) = k_{m,\,p}\cdot\Delta\cdot[(1+\beta)^{\rho} - (1-\beta)^{\rho}]\cdot R^{\rho}\cdot\beta^{-\alpha},$$

получим, что неравенство

$$\Phi_{R,\,\beta}(Q) > -k_{m,\,p}\cdot\Delta\cdot[(1+\beta)^{\rho} - (1-\beta)^{\rho}]\, r_Q\cdot\beta^{-\alpha}$$

выполняется вне множества точек $\Omega_{\beta,\,R}$ на сфере S_R, угловая мера которого не превосходит β^{α}. Полагая $\Omega_\beta = \bigcup\limits_{R}\Omega_{\beta,\,R}$, найдем что неравенство

$$|\Phi_\beta(Q)| < k_{m,\,p}\cdot\Delta\,[(1+\beta)^{\rho} - (1-\beta)^{\rho}]\, r_Q^{\rho}\cdot\beta^{-\alpha}$$

выполняется для всех Q, не принадлежащих множеству Ω_β, верхняя ω-плотность которого удовлетворяет условию

$$\overline{\omega}(\Omega_\beta) \leqslant \beta^\alpha.$$

Оценим теперь величину γ-плотности исключительного множества. Разобьем пространство на сумму шаровых слоев:

$$R_j \cdot (1-\beta) \leqslant r_Q < R_j(1+\beta),$$

где

$$R_j = \frac{(1+\beta)^j}{(1-\beta)^j}.$$

Для каждой функции из последовательности

$$\Psi_{R_j,\,2\beta}(Q) = -\int\limits_{K_{R_j,\,2\beta}} \frac{d\mu_M}{r_{QM}^{m-2}}$$

найдем по теореме 1 множество $G_{j,\,\beta}$, вне которого $\Psi_{R_j,\,2\beta}(Q)$ удовлетворяет в шаровом слое $K_{R_j,\,2\beta}$ неравенству

$$\Psi_{R_j,\,2\beta}(Q) \geqslant -(2\beta)^{-\alpha} \frac{\mu[(1+2\beta)R_j] - \mu[(1-2\beta)R_j]}{R_j^{m-2}},$$

причем

$$m_\gamma(G_{j,\,\beta}) \leqslant AR_j^{m-1} \cdot (2\beta)^{\alpha+\frac{1}{m-1}},$$

где A зависит только от m, а γ любое.

Положим

$$G_{\beta,\,R} = \bigcup_1^n G_{j,\,\beta},$$

где n таково, что

$$R_{n-1} < R < R_n,$$

γ-мера $G_{\beta,\,R}$ для любого γ удовлетворяет неравенству:

$$m_\gamma(G_{\beta,\,R}) \leqslant \sum_1^n m_\gamma(G_{j,\,\beta}) \leqslant A \cdot (2\beta)^{\alpha+\frac{1}{m-1}} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{(m-1)j} \leqslant$$

$$\leqslant A \cdot (2\beta)^{\alpha+\frac{1}{m-1}} \frac{(1-\beta)^{3(m-1)}}{(1+\beta)^{2(m-1)}} \cdot \frac{R_{n-1}^{m-1}}{(1+\beta)^{(m-1)} - (1-\beta)^{m-1}},$$

откуда

$$m_\gamma(G_{\beta,\,R}) \leqslant k_m \cdot \beta^{\alpha-1+\frac{1}{m-1}} \cdot R^{m-1}, \tag{3.4}$$

где k_m зависит только от m.

Из неравенства (3.4) следует, что верхняя γ-плотность множества

$$G_\beta = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_{j,\,\beta}$$

удовлетворяет условию

$$\overline{\rho}_\gamma(G_\beta) < k_m \cdot \beta^{\alpha-1+\frac{1}{m-1}} \tag{3.4}$$

для любого γ.

Пусть теперь Q не принадлежит G_β и

$$R_n < r_Q < R_{n+1}.$$

Тогда

$$\Psi_{r_Q,\,\beta}(Q) \geqslant \Psi_{R_{n+1},\,2\beta}(Q) \geqslant -(2\beta)^{-\alpha}\cdot\frac{\mu[(1+2\beta)R_{n+1}]-\mu[(1-2\beta)R_{n+1}]}{R_{n+1}^{m-2}} >$$

$$> -(2\beta)^{-\alpha}\cdot\frac{\mu[(1+2\beta)r_Q]-\mu[(1-2\beta)r_Q]}{r_Q^{m-2}}.$$

Учитывая существование плотности, получим:

$$\Psi_{r_Q,\,\beta}(Q) \geqslant -k\cdot\beta^{-\alpha+1}\cdot\Delta\cdot r_Q^{\rho},$$

где k не зависит от β и r_Q. Вместе с (3.2) это неравенство дает, что

$$|\Phi_\beta(Q)| < k'_m\beta^{1-\alpha}r_Q^{\rho} \tag{3.5}$$

для Q, не принадлежащих множеству G_β, причем k'_m зависит только от m.

Положим $C_\beta = \Omega_\beta \cap G_\beta$. Тогда неравенство (3.4) выполняется вне C_β, верхняя ω-плотность которого удовлетворяет условию

$$\overline{\omega}(C_\beta) < \beta^{\alpha} \tag{3.6}$$

а верхняя γ-плотность которого для любого γ удовлетворяет условию

$$\overline{\rho}_\gamma(C_\beta) < k_m\cdot\beta^{\alpha-1+\frac{1}{m-1}}. \tag{3.7}$$

Выберем теперь $1-\frac{1}{m-1} < \alpha < 1$. Из неравенств (3.5), (3.6) и (3.7) следует, что для произвольно малых ε и η можно найти такое β_0, что при $\beta < \beta_0$ верхние плотности множества C_β, вне которого

$$|\Phi_\beta(Q)| < \frac{\varepsilon}{10}\cdot r_Q^{\rho},$$

удовлетворяют соотношениям

$$\overline{\omega}(C_\beta) < \eta/2;\quad \overline{\rho}_\gamma(C_\beta) < \eta/2$$

для любого γ.

Так как аналогичная оценка имеет место и для $\Phi_\beta^{\delta}(Q)$ вне некоторого множества C_β^{δ}, такого, что

$$\overline{\omega}(C_\beta^{\delta}) < \eta/2,\quad \overline{\rho}_\gamma(C_\beta^{\delta}) < \eta/2,$$

то неравенство

$$|\Phi_\beta(Q)-\Phi_\beta^{\delta}(Q)| < |\Phi_\beta(Q)| + |\Phi_\beta^{\delta}(Q)| < \frac{\varepsilon}{5}r_Q^{\rho}$$

выполняется вне множества

$$C_\eta = C_\beta^{\delta} \cup C_\beta,$$

верхние плотности которого удовлетворяют неравенствам

$$\overline{\omega}(C_\eta) < \eta,$$
$$\overline{\rho}_\gamma(C_\eta) < \eta$$

для всех γ.

Лемма доказана.

Лемма 8. Пусть μ_Q — регулярное распределение масс и $\delta > 0$ произвольно мало. Тогда найдется такое разбиение сферы S_1 на непересекающиеся открытые множества диаметра $d < \delta$, что для каждого из них существует плотность.

Доказательство. Будем снова обозначать через $\Delta(G)$ угловую плотность, если она существует, а через $m(G)$ — меру на сфере, определенную равенством (2.4).

Положим

$$\overline{m}(G) = \inf m(\tilde{\gamma}),$$

где inf берется по всем областям $\tilde{\gamma} \supset G$.

Покажем, что если область G удовлетворяет условию

$$\overline{m}(G) = m(G), \tag{3.8}$$

то G имеет плотность.

Действительно, вследствие регулярности μ_Q существует последовательность областей $\gamma_j \subset G$, имеющих плотности, причем

$$\lim_{j \to \infty} \Delta(\gamma_j) = m(G).$$

Из условия (3.8) следует, что существует последовательность областей $\tilde{\gamma}_j \supset G$, имеющих плотности, причем

$$\lim_{j \to \infty} \Delta(\tilde{\gamma}_j) = m(G),$$

А так как

$$\Delta(\gamma_j) = \underline{\Delta}(\gamma_j) \leqslant \underline{\Delta}(G) \leqslant \overline{\Delta}(G) \leqslant \overline{\Delta}(\tilde{\gamma}_j) = \Delta(\tilde{\gamma}_j),$$

то в результате предельного перехода получим

$$\underline{\Delta}(G) = \overline{\Delta}(G) = m(G).$$

Можно показать (см., например, [2], стр. 146), что сумма и пересечение множеств, удовлетворяющих условию (3.8), также удовлетворяет этому условию.

Рассмотрим теперь на сфере S_1 множества

$$e_t = E\{\theta_j < t \ \ j = 1, \ldots m-1\}.$$

Функция

$$m(e_t) = g(t)$$

— монотонная и, следовательно, имеет не более чем счетное множество разрывов. А так как легко видеть, что для точек непрерывности $g(t)$

$$\overline{m}(e_t) = m(e_t),$$

то для всех t, кроме, быть может, счетного множества, области e_t удовлетворяют условию (3.8). Это утверждение верно и для множеств

$$\tilde{e}_t = E\{\theta_j > t \ \ j = 1, \ldots m-1\}.$$

Очевидно, пересечениями множеств $\tilde{e}_t$ и e_t, удовлетворяющих условию (3.8), можно разбить сферу на области сколь угодно малого диаметра.

Теперь мы можем приступить к доказательству теоремы 3.

Так как гармонический полином H_q в представлении (0.2) растет как $o(r_Q^\rho)$, то он существенно не влияет на рост субгармонической функции. Поэтому нам нужно получить лишь асимптотику канонического интеграла $J(Q)$ для функции $u(Q)$. Эта асимптотика нами уже получена в случае, когда все массы лежат на одном луче (теорема 2). Если массы расположены на конечном числе лучей $\bar{x}_j$ и на каждом луче $\{\lambda \bar{x}_j\}$ $(0 < \lambda < \infty,\ j = 1, \ldots n)$ имеется плотность

$$\Delta_j = \lim_{R \to \infty} \frac{\mu(\{K_R \cap \{\lambda \bar{x}_j\}\})}{R^{\rho+m-2}},$$

то $u(Q)$ является суммой n функций, к каждой из которых применима теорема 2, так что

$$\lim_{R\to\infty}\frac{u(R\bar{x})}{R^{\rho}}=\sum_{1}^{n}\Delta_j\cdot K_{\rho}(\gamma_j),\tag{3.9}$$

где γ_j — угол между $\bar{x}$ и $\bar{x}_j$, и представление имеет место для

$$\gamma_j\geqslant\eta>0.$$

Если записать (3.9) в виде интеграла Стилтьеса, то для этого случая получим как раз теорему 3.

Переход к общему случаю основан на лемме 7. Разобьем единичную сферу на открытые множества e_j, диаметра $d<\delta$, имеющие плотность (такое разбиение возможно по лемме 8), и выберем $\bar{x}_j\in e_j$. Тогда можно найти δ так, чтобы интегральная сумма

$$S_n(\bar{x})=\sum_{j=1}^{n}\Delta(e_j)K_{\rho}(\gamma_j)$$

удовлетворяла неравенству

$$|h(\bar{x})-S_n(\bar{x})|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть $I^{\delta}(Q)$ — канонический интеграл, распределение масс которого μ_Q^{δ} является δ-смещением распределения μ_Q функции $u(Q)$ при системе открытых множеств e_j и лучах $\{\bar{x}_j\}$. По лемме 7, $I^{\delta}(Q)$ при любых $\varepsilon>0$ и $\eta>0$ и достаточно малом $\delta>0$ удовлетворяет неравенству

$$|I(Q)-I^{\delta}(Q)|<\frac{\varepsilon}{3}r_Q^{\rho},$$

где Q не принадлежат множеству C_{η} с верхними плотностями

$$\bar{\omega}(C_{\eta})<\eta,\quad \bar{\rho}_{\gamma}(C_{\eta})<\eta\tag{3.10}$$

при любом γ.

Так как массы на каждом из лучей имеют плотность, то с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в ([1] стр. 132), получим, что неравенство

$$|r_Q^{-\rho}u(Q)-h(\bar{x})|<\varepsilon\tag{3.11}$$

выполняется всюду вне множества точек C_{η}, верхние γ и ω-плотности которого удовлетворяют (3.10).

Построим множество C_0, вне которого выполняется (3.11). Пусть $\{\varepsilon_p\}$ и $\{\eta_p\}$ — две последовательности положительных чисел, стремящихся к нулю и таких, что

$$|r^{-\rho}u(r\bar{x})-h(\bar{x})|<\varepsilon_p\tag{3.12}$$

для точек, не принадлежащих множеству C_{η_p}.

Пусть R_p — последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию

$$R_{p+1}=R_p(p+1)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Обозначим

$$C'_{\eta_p}=K_{R_{p+1},\quad R_p}\bigcap C_{\eta_p}$$

и образуем множество

$$C=\bigcup_{p=1}^{\infty}C'_{\eta_p}.$$

Оно является C_0-множеством, так как для $R_p < R < R_{p+1}$

$$\frac{1}{R^{m-1}} \cdot \sum_{k=1}^{p} m_\gamma (C'_{\eta k}) \leqslant \frac{1}{R^{m-1}} \{\eta_1 R_1^{m-1} + \ldots + \eta_p \cdot R_p^{m-1}\} \leqslant \frac{\eta_1 e}{p} + \eta_p$$

и, следовательно,

$$\bar{\rho}_\gamma (C) = 0.$$

Кроме того, очевидно, $\bar{\omega}(C) = 0$. Вследствие (3.12) при $R\bar{x} \overline{\in} C$ величина $u(R\bar{x}) \cdot R^{-\rho}$ равномерно стремится к $h(\bar{x})$. Теорема доказана.

Аналогичная теорема может быть доказана для случая целого порядка, однако при этом от распределения масс недостаточно потребовать регулярности, необходимо еще требовать и существования предела

$$\delta_u(\bar{x}) = \lim \delta_R(\bar{x}), \tag{3.13}$$

где $\delta_R(\bar{x})$ определено равенством (0.3).

Определение. Распределение масс μ_Q, имеющее целый показатель сходимости, называется правильным, если оно регулярно и для него существует предел (3.13).

Теорема 3. Пусть распределение масс субгармонической функции $u(Q)$ правильное при целом показателе ρ и удовлетворяет условию (3.13). Тогда при Q, не принадлежащем некоторому C_0-множеству C, имеет место асимптотическое равенство порядка ρ

$$u(Q) \approx h(\bar{x}) \cdot R^\rho,$$

в котором

$$h(\bar{x}) = \int_{S_1} K_\rho(\gamma)\, d\Delta_{\bar{y}} + \delta_u(\bar{x}),$$

где

$$K_\rho(\gamma) = (\rho + m - 2)\left\{\int_0^1 t^{\rho-1} H\left(\frac{1}{t}, \gamma, \rho - 1\right) dt + \int_1^\infty t^{\rho-1} H\left(\frac{1}{t}, \gamma, \rho\right) dt\right\},$$

а γ — угол между $\bar{x}$ и $\bar{y}$.

При этом функция

$$h_{u,R}(\bar{x}) = R^{-\rho} u(R\bar{x})$$

стремится к пределу равномерно по $\bar{x} \in S_1$, если $R\bar{x} \overline{\in} C$.

Доказательство. Представим функцию $u(Q)$ в виде суммы двух функций:

$$u(Q) = \delta_{r_Q}(\bar{x})\, r_Q^\rho + u_{r_Q}(Q),$$

где

$$u_{r_Q}(Q) = \int_{r_M \leqslant r_Q} H\left(\frac{r_Q}{r_M}, \gamma, \rho - 1\right) \frac{d\mu_M}{r_M^{m-2}} + \int_{r_M > r_Q} H\left(\frac{r_Q}{r_M}, \gamma, \rho\right) \frac{d\mu_M}{r_M^{m-2}}.$$

Из условия (3.13) следует, что первое слагаемое удовлетворяет асимптотическому равенству порядка ρ

$$\delta_{r_Q}(\bar{x}) \cdot r_Q^\rho \approx \delta_u(\bar{x})\, r_Q^\rho,$$

так что задача сводится к нахождению асимптотики второго слагаемого.

Для этого нам понадобится теорема 2' и следующая лемма, аналогичная лемме 7.

Лемма 9. Пусть μ_Q — правильное распределение масс при целом $\rho \geqslant 1$, а $\overset{\delta}{\mu}_Q$ — любое δ-смещение μ_Q. Положим

$$\overset{\delta}{u}_{r_Q}(Q) = \int\limits_{r_M \leqslant r_Q} H\left(\frac{r_Q}{r_M},\ \gamma,\ \rho - 1\right)\frac{d\overset{\delta}{\mu}_Q}{r_M^{m-2}} + \int\limits_{r_M > r_Q} H\left(\frac{r_Q}{r_M},\ \gamma,\ \rho\right)\frac{d\overset{\delta}{\mu}_Q}{r_M^{m-2}}.$$

Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ можно так найти $\delta > 0$, что неравенство

$$|u_{r_Q}(Q) - \overset{\delta}{u}_{r_Q}(Q)| < \varepsilon r_Q^{\rho}$$

выполняется для всех Q, не принадлежащих исключительному множеству C_η, верхние плотности которого удовлетворяют условиям

$$\bar{\omega}(C_\eta) < \eta, \quad \bar{\rho}_\gamma(C_\eta) < \eta$$

для любого γ.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 7 и основано на оценке снизу величины

$$\Phi_{\beta,\, r_Q}(Q) = \int\limits_{K_{r_Q,\beta}} H\left(\frac{r_Q}{r_M},\ \gamma,\ \rho - 1\right)\frac{d\mu_M}{r_M^{m-2}}.$$

Оно использует следующее утверждение, уже полученное в процессе доказательства леммы 7.

Если распределение масс μ_Q в пространстве имеет плотность Δ с показателем ρ, то для произвольно малых $\xi > 0$ и $\varsigma > 0$ можно найти такое множество C_ξ с верхними плотностями, не превосходящими ξ и число β, что при $R \to \infty$, $Q \in K_{R,\beta}$ и $Q \bar{\in} C_\xi$ функция $\Phi_{R,\,\beta}(Q)$, определенная равенством (3.13), удовлетворяет асимптотическому неравенству

$$|\Phi_{R,\,\beta}(Q)| < \varsigma r_Q^{\rho}.$$

В заключение автор приносит глубокую благодарность своему учителю Б. Я. Левину за постановку задачи и И. В. Островскому за ряд замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, М, 1956.

2. И. И. Привалов. Субгармонические функции, М., 1937.

3. M. Brelot. Étude des fonctions sous — harmoniques au voisinage d'un point singulier, Annales de l'institut Fourier 1950, I.

4. G. Valiron. Lectures on the general theory of integral functions. Privat, Toulouse 1923.