

случаях, когда X и U — гильбертовы или конечномерные пространства, условие (5'') выполнено автоматически.

Список литературы: 1. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с. 2. Ли Э. В., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972. — 574 с. 3. Уонэм М. Линейные многомерные системы управления. — М.: Наука, 1980. — 375 с. 4. Lindenstauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces, Lecture Notes in Math. — Berlin — Heidelberg — New York: Springer — Verlag, 1973. — 684. 5. Stenrod M. A note on complete controllability and stabilizability for linear control systems in Hilbert space. — SIAM Journ. Contr., 1974, 12, № 3, p. 500 — 508. 6. Triggiani R. On the stabilizability in Banach space. — Journ. Math. Anal. and Appl., 1975, 52, № 9, p. 383 — 403. 7. Рабах Р. О точной управляемости и стабилизации в бесконечномерных пространствах. — Вестн. Харьк. ун-та. — Прикл. математика и механика, 1978, вып. 43, с. 43 — 50. 8. Коробов В. И., Рабах Р. Точная управляемость в банаховых пространствах. — Диф. уравнения, 1979, 15, № 12, с. 2142 — 2154.

Поступила в редколлегию 04. 01. 81

УДК 518:517

А. В. ФОМЕНКО

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ

Пусть Ω — открытая область евклидова пространства R^n с кусочно-гладкой границей S , t — время, удовлетворяющее условию $t \in [t_0, T]$. Пусть далее $V \subset L^2(\Omega) \subset V^1$ — оснащенное гильбертово пространство [1]; V — сепарабельное пространство такое, что $H_0^m(\Omega) \leq V \leq H^m(\Omega)$, где $H_0^m(\Omega)$, $H^m(\Omega)$ — пространства Соболева [2].

Обозначим через $A \in \mathcal{L}(V; V')$ эллиптический самосопряженный оператор порядка $2m$ и будем предполагать, что управляемый процесс упругих колебаний описывается слабо нелинейным уравнением гиперболического типа $u_{tt} + Au + \beta^1(u) + \beta^2(u_t) = p$, в $Q = (t_0, T] \times \Omega$ ($u \equiv u(t, x)$, $u_t \equiv \frac{\partial u}{\partial t}$) (10), с начальными условиями $u(t_0, x) = u_0(x) \in V$, $u_t(t_0, x) = u_1(x) \in L^2(\Omega)$ (2). Здесь $\beta^1(u)$, $\beta^2(u_t)$ — нелинейные дифференцируемые функции своих аргументов; $p = p(t, x)$ — управление. При $V = H_0^m(\Omega)$ управляемый процесс описывается задачей Дирихле, при $V = H^m(\Omega)$ — задачей Неймана и при строгом включении $H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)$ — смешанной задачей.

Введем обозначения: $|\cdot|$ — норма в $L^2(\Omega)$; $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L^2(\Omega)$ и скалярное произведение элементов из двойственных пространств V и V' ; $\|\cdot\|$ — норма в V .

Будем полагать, что билинейная непрерывная на $V \times V$ форма $a(u, v) = (Au, v)$ удовлетворяет неравенству $a(u, u) \geq \lambda \|u\|^2$, $\lambda >$

$> 0 - \text{const}$, $\forall u \in V$ (3), потенциал системы $U(u) = \frac{1}{2} a(u, u) + \int_0^u \beta^1(a) ds$ — выпуклый; $V \subset C(\Omega)$, $C(\Omega)$ — пространство непрерывных функций.

При $p \in L^\infty(Q)$ и некоторых дополнительных предположениях относительно функций $\beta^1(u)$, $\beta^2(u_t)$ существует единственное решение $u \in L^\infty(t_0, T; V)$ задачи (1) — (2) [3 — 5].

Задача. Найти управление $p \in L^\infty(Q)$, доставляющее минимум функционалу

$$J(p) = \frac{1}{2} |u_t(T, x)|^2 + U(u(T, x)), \quad (4)$$

при дифференциальных ограничениях на состояние системы (1) — (2) и изопериметрическом ограничении на управление

$$\int_{t_0}^T |p|^2 dt = l \quad (5).$$

Для вывода условий оптимальности вычислим приращение функционала $J(p)$ с присоединенным изопериметрическим условием (4) при вариации управления $\delta p \in L^\infty(Q)$ [6]. Согласно уравнению (1) вариация δp может быть представлена в виде $\delta p = \delta u_{tt} + A \delta u + \beta^1(u + \delta u) - \beta^2(u) + \beta^2(u_t + \delta u_t) - \beta^2(u_t)$, где δu — соответствующая δp вариация состояния.

Отметим, что формальные операции интегрирования по частям, проводимые далее, могут быть строго обоснованы регуляризацией и предельным переходом [7]. Имеем $\Delta J(p) = (u_t + 2\gamma p, \delta u_t)|_{t=T} +$

$$+ (A u + \beta^1 u) - 2\gamma p_t + 2\gamma \beta_{u_t}^2(u_t) \cdot p, \delta u)|_{t=T} + \int_{t_0}^T 2\gamma (p_{tt} + A p + \beta_u^1(u) p - (\beta_{u_t}^2(u_t) \cdot p)_t, \delta u) dt + Q(\delta u) + \int_{t_0}^T \gamma |\delta p|^2 dt.$$

Здесь γ — множитель Лагранжа; $Q(\delta u)$ — выражение, включающее члены выше первого порядка по δu , δu_t ; $\beta_v(v)$ — функциональная производная. Следуя [7] необходимое условие минимума функционала $J(p)$ запишем в виде $\Delta J(p) \geq 0$, $\forall \delta p \in L^\infty(Q)$. Вариацию состояния представим в виде $\delta u = \Theta \cdot u^*$, где $\Theta \in [0, 1]$, $u^* \in L^\infty(t_0, T; V)$. Тогда, в силу дифференцируемости функций $\beta^1(u)$, $\beta^2(u_t)$ будем

иметь $\lim_{\Theta \rightarrow 0} \frac{Q(\Theta u^*)}{\Theta} \rightarrow 0$. Отсюда следует (так как $\int_{t_0}^T \gamma |\delta p|^2 dt \geq 0$), что если найдется управление p , определяемое как решение краевой задачи

$$p_{tt} + A p + \beta_u^1(u) \cdot p - (\beta_{u_t}^2(u_t) \cdot p)_t = 0, \quad \text{в } Q, \quad (6)$$

$$2\gamma p_t = p - u_{tt} - \beta^2(u_t) + 2\gamma \beta_{u_t}^2(u_t) \cdot p, \quad (7)$$

$$2\gamma p = -u_t, \quad \text{при } t = T,$$

с граничными условиями исходной задачи (1) — (2), то это управление будет удовлетворять необходимым условиям минимума функционала (4) при накладываемых ограничениях. Назовем такие управления экстремальными.

Исследуем вначале случай, когда $\beta^2(u_t) \equiv 0$. Для этого случая полученные соотношения (6), (7) являются необходимыми условиями оптимальности управления p . Действительно, из энергетического равенства, составленного для уравнения (1), записанного в вариациях ($\delta p = \Theta p^*$, $p^* \in L^\infty(Q)$), $1/2 |\delta u_t|^2 + 1/2a (\delta u, \delta u) =$

$= \int_{t_0}^t \{ (\beta^1(u) - \beta^1(u + \delta u), \delta u_t) + (\Theta p^*, \delta u_t) \} dt$ в силу дифференцируемости функции $\beta^1(u)$ и предположения (3), применяя лемму

Гронуолла, получим $|\delta u_t|^2 + \|\delta u\|^2 \leq c \int_{t_0}^t |\Theta p^*|^2 dt$, $c = \text{const}$.

Из этого неравенства легко выводим дифференцируемость функционала $J(p)$ по p . Тогда необходимое условие минимума

$J(p)$ принимает вид $\delta J(p) = \Delta J(p) - Q(\delta u) - \int_{t_0}^T |\delta p|^2 dt = 0$, откуда,

в силу произвольности вариация δu (вариация $\delta J(p)$ не зависит явным образом от δp), получаем результат.

Приведенные условия оптимальности имеют форму двухточечной краевой задачи. Наша основная цель — найти начальные условия для сопряженной задачи (6) — (7). Преобразуем уравнение (1) к более удобному виду. Для этого продифференцируем это уравнение по t (производные понимаются в обобщенном смысле). Получим $v_{tt} + Av + \beta_u^1(u) v = p_t$, в Q (8), где $v = u_t$. Используя вид уравнения (1), найдем начальные условия для вновь полученного уравнения (8)

$$\begin{aligned} v_t &= p - Au - \beta^1(u) - \beta^2(u_2) \equiv p + u_2, \\ v &= u_t, \text{ при } t = t_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Применяя метод Фаето — Галеркина [3], можно представить решение задач (8) — (9), (6) — (7) в форме $p = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(t) X_i$, $v =$

$= \sum_{i=1}^{\infty} v_i(t) X_i$, $X_i \in V$. Если при этом в качестве базиса $\{X_i\}$ использовать систему обобщенных собственных векторов оператора A [1], то элементы $p_i(t)$, $v_i(t)$ будут определяться как решения систем

$$\dot{p}_i = q_i, \quad \dot{q}_i + \lambda_i^2 p_i + \sum_{k=1}^{\infty} f_{ik} p_k = 0, \quad (10)$$

$$\dot{v}_i = w_i, \quad \dot{w}_i + \lambda_i^2 v_i + \sum_{k=1}^{\infty} f_{ik} v_k = \dot{p}_i, \quad (11)$$

$$f_{ik} = (\beta_u^1(u) X_k, X_i), \quad p_i = (p, X_i), \quad v_i = (v, X_i)$$

с начальными условиями $p_i(t_0) = q_i^0$, $q_i(t_0) = q_i^0$, $v_i(t_0) = v_i^0$, $w_i(t_0) = w_i^0$, $i = 1, 2, 3, \dots$. При этом будут выполняться соотношения $\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t_0) X_k \rightarrow u_1$, в V , $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n w_k(t_0) X_k \rightarrow u_2 + p_0$, в $L^2(\Omega)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n p_k(t_0) X_k \rightarrow p_0$, в V , $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n q_k(t_0) X_k \rightarrow q_0$, в $L^2(\Omega)$, где p_0, q_0 — искомые начальные условия сопряженной задачи. Обозначим

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \bar{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \bar{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Системы (10), (11) можно рассматривать как линейные системы с неизвестными коэффициентами $f_{ik}(t)$. Используя фундаментальную матрицу $\Phi(t, t_0)$, решение этих систем запишем в виде [8]

$$\begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \end{bmatrix} = \Phi(t, t_0) \begin{bmatrix} \bar{p}^0 \\ \bar{q}^0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{w} \end{bmatrix} = \Phi(t, t_0) \begin{bmatrix} \bar{v}^0 \\ \bar{w}^0 \end{bmatrix} + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{q}(\tau) \end{bmatrix} d\tau.$$

Используя вид системы (10), (11), фундаментальную матрицу представим в форме

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_1(t, t_0) & \Phi_2(t, t_0) \\ \dot{\Phi}_1(t, t_0) & \dot{\Phi}_2(t, t_0) \end{bmatrix},$$

где $\Phi_1(t, t_0)$, $\Phi_2(t, t_0)$ — бесконечномерные блочные квадратные матрицы. Тогда второе из соотношений в (12) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_1(t, t_0) & \Phi_2(t, t_0) \\ \dot{\Phi}_1(t, t_0) & \dot{\Phi}_2(t, t_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{v}^0 \\ \bar{w}^0 \end{bmatrix} + \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} \Phi_1(t, \tau) & \Phi_2(t, \tau) \\ \dot{\Phi}_1(t, \tau) & \dot{\Phi}_2(t, \tau) \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{q}(\tau) \end{bmatrix} d\tau. \end{aligned} \quad (13)$$

Воспользуемся свойствами фундаментальной матрицы для вычисления правой части (13). Имеем [8]

$$\begin{aligned} \Phi(t_0, t_0) &= I, \quad \Phi(t, t_0) = \Phi(t, \tau) \cdot \Phi(\tau, t_0), \\ \Psi^T(t, t_0) &= \Phi(t_0, t), \quad \tau \in [t_0, t], \end{aligned} \quad (14)$$

где I — единичная матрица, значок T означает транспонирование; $\Psi(t, t_0)$ — фундаментальная матрица системы сопряженной к системе (10)

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\Psi}}_1 \\ \dot{\bar{\Psi}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & B^T(t) \\ -I & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_1 \\ \bar{\Psi}_2 \end{bmatrix}, \quad B(t) = - \begin{bmatrix} \lambda_1^2 + f_{11}f_{12}f_{13} \cdot \cdot \cdot \\ f_{21}\lambda_2^2 + f_{22}f_{23} \cdot \cdot \cdot \\ f_{31}f_{32}\lambda_3^2 + f_{33} \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{bmatrix}.$$

Согласно равенству $f_{ik}(t) = f_{ki}(t)$, $A^T(t) = A(t)$. Поэтому можно найти представление матрицы $\Psi^T(t, t_0)$ через блочные матрицы $\Phi_1(t, t_0)$, $\Phi_2(t, t_0)$

$$\Psi^T(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_2^T(t, t_0) & -\Phi_2^T(t, t_0) \\ -\Phi_2^T(t, t_0) & \Phi_1^T(t, t_0) \end{bmatrix}.$$

Покажем, каким образом вычисляется, например, интеграл $N(t, t_0) =$

$$= \int_{t_0}^t \Phi_2(t, \tau) \Phi_1(\tau, t_0) d\tau \text{ в формуле (13). Согласно второму равен-$$

$$\text{ству в (14), будем иметь } N(t, t_0) = \Phi_1(t, t_0)(t - t_0) - \int_{t_0}^t \Phi_1(t, \tau) \times \\ \times \Phi_1(\tau, t_0) d\tau.$$

Из третьего равенства в (14), интегрируя по частям, получим

$$N(t, t_0) = -\Phi_2^T(\tau, t) \cdot \Phi_1(\tau, t_0) \Big|_{t_0}^t + \int_{t_0}^t \Phi_1(t, \tau) \cdot \Phi(\tau, t_0) d\tau. \text{ Откуда}$$

имеем $N(t, t_0) = 1/2 \{ \Phi_1(t, t_0)(t - t_0) + \Phi_2(t, t) \cdot \Phi_1(t, t_0) - \\ - \Phi_2(t_0, t) \cdot \Phi_1(t_0, t_0) \}$. Проводя аналогичные выкладки для вычисления остальных интегралов и используя первое равенство в (14), получим

$$\bar{v}(t) = \Phi_1(t, t_0) \bar{v}^0 + \Phi_2(t, t_0) \bar{w}^0 + [\Phi_1(t, t_0)(t - t_0) - \\ - \Phi_2(t, t) \cdot \Phi_1(t, t_0) - \Phi_2(t, t_0)] \bar{p}^0/2 - \Phi_2(t, t_0) [t - t_0 + \Phi_2(t, t)] \times \\ \times \bar{q}^0/2, \quad (15)$$

$$\bar{w}(t) = \Phi_1(t, t_0) \bar{v}^0 + \Phi_2(t, t_0) \bar{w}^0 - 1/2 [\Phi_1(t, t_0)(t - t_0) - \\ - \Phi_1(t, t) \cdot \Phi_1(t, t_0) + \Phi_1(t, t_0)] \bar{p}^0 - [\Phi_2(t, t_0)(t - t_0) + \\ + \Phi_1(t, t) \Phi_2(t, t_0)] \bar{q}^0/2. \quad (16)$$

Такие формулы мало пригодны для практических расчетов, поскольку неизвестны блочные матрицы $\Phi_1(t, t_0)$, $\Phi_2(t, t_0)$. Для получения конструктивного решения предположим, что оптимальный процесс обладает следующими свойствами периодичности [11]:

$\Phi_2(\pi, t_0) = \Phi_2(\pi, \pi) = \Phi_2(t_0, t_0) = 0$, $\Phi_1(\pi, t_0) = \Phi_1(t_0, t_0) = 0$, $\Phi_1(\pi, \pi) = I$, где π — конечный интервал времени, и, кроме того, предположим, что $T - t_0 = \pi$. Тогда, с учетом конечных соотношений (7), получим

$$p_0 = -\frac{U_1}{T - t_0 + 4\gamma}, \quad p_1 = -\frac{U_2}{T - t_0 + 4\gamma}. \quad (17)$$

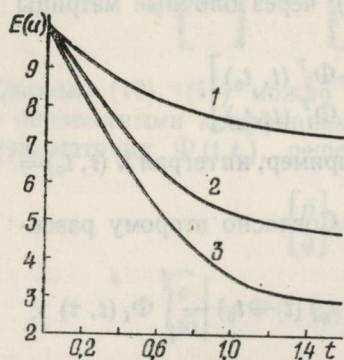
При выполнении предположений периодичности из соотношений (15), (16) следует $u_t(T, x) \rightarrow 0$, $u_{tt}(T, x) \rightarrow 0$, при $\gamma \rightarrow 0$. Если в области допустимых состояний имеется лишь одно стационарное положение $u = 0$, то при $\gamma = 0$ $u(T, x) = u_t(T, x) = 0$, т. е. имеем случай перехода системы в тривиальное состояние. Случай обращения в 0 множителя Лагранжа γ означает для исследуемой задачи достаточность энергетических затрат I на полное демпфирование энергии колебаний.

Для частного вида нелинейной функции $\beta^1(u) = u^3$ и оператора $A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ при $x \in [0, 1]$ в случае граничных условий Дирихле, эффективность экстремального управления, определяемого в соответствии с изложенным как решение краевой задачи

$p_{tt} - p_{xx} + 3u^2 p = 0$, в Q , $p(t_0, x) = \xi u_1$, $p_t(t_0, x) = -\xi u_2$, $\xi = 1/(T - t_0 + 4\gamma)$, $p(t, 0) = p(t, 1) = 0$, была проверена численным расчетом на ЭВМ ЕС-1022. Совместное решение соответствующих u и p краевых задач проводилось на основе метода прогонки [9]. Результаты расчета приведены на рисунке. Кривые характеризуют изменение энергии системы E во времени, при действии на систему экстремального управления p при различных значениях параметра ξ .

Для общего случая $\beta^2(u_t) \neq 0$ уравнение (8) и конечные условия (9) принимают вид $v_{tt} + Av + \beta_{u_t}^1(u) v + \beta_{u_t}^2(u_t) v_t = p_t$, в Q (8'), $v(t_0, x) = u_1(x)$, $v_t(t_0, x) = u_2 - \beta^2(u_1) + p(t_0, x)$ (9'). Так как изложенный прием здесь непосредственно не применим, то может быть предложен следующий численный алгоритм. При членах $\beta_{u_t}^2(u_t) v_t$ в (8'), $(\beta_{u_t}^2(u_t) p)_t$ в (6) и $2\gamma \beta_{u_t}^2(u_t) p$ в (7) введем малый параметр ϵ с областью значений $[0, 1]$. Тогда при $\epsilon = 0$, в соответствии с изложенным, получим решение задачи, удовлетворяющее конечному условию (7). При $\epsilon \neq 0$ применяем метод последовательных приближений [10] в пространстве конечных состояний. При $\epsilon = 1$ получим решение общей задачи.

Для случая $\beta^2(u_t) \equiv 0$, $u_2 \equiv 0$, применив метод расщепления [7], найдем решение задачи экстремального синтеза.



Будем искать решение задачи синтеза в виде $p = \alpha u_t + \eta u$, где $\alpha = \alpha(t)$, $\eta = \eta(t)$ — некоторые функции. Тогда, с учетом уравнения (1), уравнение (6) может быть записано $(\ddot{\alpha} + 3\alpha\dot{\alpha} + 2\ddot{\eta} + 2\alpha\dot{\eta} + \alpha^3)u_t + (\ddot{\eta} + \alpha\dot{\eta} + 2\dot{\alpha}\eta + \alpha^2\eta + \eta^2)u - (2\dot{\alpha} + \alpha^2)(\dot{A}u + \beta^1 u) = 0$, $(\alpha = d/(dt)\alpha)$. Так как последнее уравнение является тождеством относительно допустимых элементов u и u_t , то должны выполняться соотношения: $\ddot{\alpha} + 3\alpha\dot{\alpha} + 2\ddot{\eta} + 2\alpha\dot{\eta} + \alpha^3 = 0$, $(\ddot{\eta} + \alpha\dot{\eta} + 2\dot{\alpha}\eta + \alpha^2\eta + \eta^2)u - (2\dot{\alpha} + \alpha^2)(\dot{A}u + \beta^1 u) = 0$. Нетрудно убедиться, что этим равенствам и начальному условию (17) удовлетворяют функции $\alpha = -2/(T-t+4\gamma)$, $\eta = -2/(T-t+4\gamma)^2$. Следовательно, экстремальное синтезируемое управление имеет вид $p = -2/(T-t+4\gamma)[u_t + 1/(T-t+4\gamma)u]$.

Список литературы: 1. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. — М.: Физматгиз, 1961. — 230 с. 2. Лионс Ж.-Л., Мандженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971. — 168 с. 3. Lions J.—L., Straus W. A. Some non linear evolution equations, Bull. Soc. Math. France, 1965, 93, p. 43—96. 4. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 246 с. 5. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. — М.: Мир, 1977. — 240 с. 6. Егоров А. И. Необходимые условия оптимальности для систем с распределенными параметрами. — Мат. сб. новая серия, 69 (111), вып. 3, 1966, с. 20—25. 7. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 246 с. 8. Чики Ф. Современная теория управления. — М.: Мир, 1975. — 310 с. 9. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. — 360 с. 10. Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. — М.: Наука, 1973. — 280 с. 11. Фоменко А. В. Вариационный метод в задаче управления нелинейными колебаниями распределенной системы. — Тез. докл. конф. Проблемы нелинейных колебаний механических систем. — Киев, Наукова думка, 1978, с. 30—32.

Поступила в редколлегию 20. 11. 78.

УДК 517.948.3

А. С. СОХИН, канд. физ.-мат. наук

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В стационарной [1] и нестационарной [2] обратной задаче теории рассеяния существенное значение имеют преобразования, переводящие решения невозмущенного уравнения $L_0(z)=0$ в решения возмущенного уравнения $L_0(y) + Qy = 0$, обладающие той же асимптотикой, что и решения невозмущенного уравнения. Оператор L_0 имеет вид $-d^2/dx^2 + \lambda^2$ в стационарной задаче и $\partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2$ в нестационарной задаче, Q — оператор умножения на функцию.

Введем обозначения: $X = (-\infty, \infty)$, $T = [t_0, t_1]$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$, E_n — вещественное евклидовое n -мерное пространство векторов $f = \{f_i, i = 1, \dots, n\}$, нормированных по формуле $\|f\| = \left(\sum_{i=1}^n f_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$; M_n — пространство вещественных матриц $M = \{M_{ij}, i, j = 1, \dots, n\}$, нормированных по формуле $\|M\| = \left(\sum_{i,j=1}^n M_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$; $L_1(X; E_n)$ — пространство абсолютно суммируемых на всей оси вектор-функций $f(x)$, нормированных по формуле $\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$; $C_0(X; E_n)$ — пространство непрерывных на всей оси вектор-функций $f(x)$, подчиненных условию $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ и нормированных по формуле $\|f\|_c = \max_{x \in X} |f(x)|$; $L_\infty(T, X; E_n)$ — пространство почти всюду ограниченных вектор-функций $y(t, x)$, нормированных по формуле $\|y\|_\infty = \text{vrai max}_{t \in T, x \in X} |y(t, x)|$; $L_\infty(T, X, E_n)$ — пространство почти всюду ограниченных матриц-функций $Q(t, x)$, нормированных по формуле $\|Q\|_\infty = \text{vrai max}_{t \in T, x \in X} |Q(t, x)|$;

$L(M_n, M_n)$ — пространство линейных непрерывных операторов, отображающих пространство M_n в себя.

В данной работе построено преобразование, переводящее обобщенное решение $z(t, x) \in E_n, \forall t, x$ строго гиперболической системы уравнений $z_t + Az_x = P(t, x)z, -\infty \leq t_0 < t < t_1 \leq \infty, -\infty < x < \infty$ (1), удовлетворяющее финальному условию $\lim_{t \rightarrow t_1} G_{-t}^{(A)} z(t, x) = g(x)$ (2), в обобщенное решение $y(t, x)$ системы уравнений $y_t + Ay_x = Q(t, x)y, -\infty \leq t_0 < t < t_1 \leq \infty, -\infty < x < \infty$ (3), ведущее себя при $t \rightarrow t_1$ так же, как $z(t, x)$. Здесь $\{G_t^{(A)}, -\infty < t < \infty\}$ — семейство разрешающих операторов, порожаемое дифференциальным выражением $y_t + Ay_x = 0$, образующее, как известно [3], сильно непрерывную равномерно ограниченную группу операторов в пространстве $L_2(X; E_n)$. Существование преобразования доказано для матрицы A , имеющей простые вещественные не равные нулю собственные значения $a_i, i = 1, \dots, n$ (строгая гиперболичность) и матриц функций $P(t, x) = \{P_{ij}(t, x), i, j = 1, \dots, n\}$ и $Q(t, x) = \{Q_{ij}(t, x), i, j = 1, \dots, n\}$ из $L_\infty(T, X; E_n)$, равных нулю при $t \notin [t_0, t_1]$ и удовлетворяющих условиям:

1. $\hat{P}(t, x), \hat{Q}(t, x) \in K_n^0, \forall t, x$ (4), где $P = \Gamma(P) \equiv T^{-1}PT, \Gamma \in L(M_n, M_n), T$ — невырожденная матрица, приводящая матрицу A посредством преобразования Γ к диагональной форме: $\Gamma(A) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix}, K_n^0$ — кольцо матриц, содержащееся в подпространстве

матриц $M_n^0 = \{M \in M_n: M_{ij} = 0, a_j/a_i > 1\}$, и содержащее диагональные матрицы:

2. $\text{diag}(\hat{P}(t, x) - \hat{Q}(t, x)) = 0, \forall t, x$ (5), где $\text{diag } C$ означает диагональную матрицу, диагональ которой совпадает с диагональной частью матрицы C .

3. Интегралы от функций $\|P\|_\infty^+(\bar{t}) = \max_{x, t', i, j} |P_{ij}(t', x)|, x \in X, t' \in [\bar{t}, \infty], i, j \in N, \|P\|_\infty^-(\bar{t}) = \max_{x, t', i, j} |P_{ij}(t', x)|, x \in X, t' \in [-\infty, \bar{t}], i, j \in N, \|Q(\bar{t})\| = \max_{x, i, j} |Q_{ij}(\bar{t}, x)|, x \in X, i, j \in N$ (5'), соответ-

ственно, по промежуткам $[\bar{t}, \infty], [-\infty, \bar{t}], [-\infty, \infty]$ конечны при конечном $\bar{t}$. Решение $z(t, x)$ предполагается исчезающим при $\bar{t} \rightarrow \infty$. Для этого требуется, чтобы функция $g \in L_1(X; E_n) \cap C_0(X; E_n)$.

Построенное преобразование применяется для решения обратной задачи рассеяния для строго гиперболических систем порядка $n \geq 2$. Случай различных по знаку собственных значений при $n = 2$ изучен в работе [2].

Заметим, что оператор $G_t^{(A)}$ определяется по формуле $G_t^{(A)} = T G_t^{(\hat{A})} T^{-1}$, где $(G_t^{(\hat{A})} [g(x)])_i = g_i(x - a_i t)$. Полагая $T = \{t_{ij}, i, j \in N\}$ и $T^{-1} = \{t_{ij}^{(-1)}, i, j \in N\}$, находим компоненты $G_t^{(A)} g(x)$ по формуле $(G_t^{(A)} [g(x)])_i = \sum_{s, j=1}^n t_{is} t_{sj}^{(-1)} g_j(x - a_s t), i \in N$.

В дальнейшем считаем матрицу A диагональной. В противном случае полагая $\hat{z} = T^{-1}z, \hat{y} = T^{-1}y, \hat{A} = \Gamma(A), \hat{P} = \Gamma(P) = \{\hat{P}_{ij}, i, j \in N\}, \hat{Q} = \Gamma(Q) = \{\hat{Q}_{ij}, i, j \in N\}$ приходим к задачам (1), (2), (3) с диагональной матрицей $\hat{A}$ вместо A и функциям $\hat{z}, \hat{y}, \hat{P}, \hat{Q}$ вместо z, y, P, Q .

Назовем обобщенным решением задачи (1) — (2) решение ин-

тегрального уравнения $z(t, x) = G_t^{(A)} g(x) - \int_{\bar{t}}^{t_1} G_{t-t'}^{(A)} [P(t', x) z \times \times (t', x)] dt'$. Если функции $g(x)$ и $P(t, x)$ гладкие по x , то можно показать, что последнее интегральное уравнение эквивалентно уравнению (1) и условию (2). Считая пока их гладкими, будем искать решение $y(t, x)$ уравнения (3) в виде $y(t, x) =$

$= z(t, x) + \int_{\bar{t}}^{\infty} H(t, t', x) z(t', x) dt'$ (6), где $H(t, t', x) = \{H_{ij}(t, t', x),$

$i, j \in N\}$. Подставляя формально правую часть равенства (6) в уравнение (3) и учитывая, что функция $z(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1), получим после интегрирования по частям такое равенство

$$0 = P(t, x) - Q(t, x) - Q_A(H(t, t, x)) - AH(t, t', x) A^{-1} z(t', x)|_{t'=+\infty} + \\ + \int_t^\infty \{H_t' + AH_x' + AH_t' A^{-1} + AHA^{-1}P(t', x) - Q(t, x)H\} z(t', x) dt',$$

в котором $Q_A(H) \equiv H - AHA^{-1}$. Для того чтобы правая часть равенства (6) удовлетворяла уравнению (3) и условию (2), достаточно, чтобы матрица-функция $H(t, t', x)$ из K_n^0 была ограниченной и являлась решением задачи: $H_t' + AH_x' + AH_t' A^{-1} = -AHA^{-1}P(t', x) + Q(t, x)H, t < t'$ (7); $Q_A(H(t, t, x)) = P(t, x) - Q(t, x)$ (8); $\lim_{t \rightarrow t_1} H(t, t', x) = 0$ (9). Обратно, если существует ограниченная матрица-функция $H(t, t', x) \in K_n^0$, удовлетворяющая условиям (7)–(9), то формула (6) задает нужное преобразование, так как ее правая часть удовлетворяет уравнению (3) и равенству (2).

Сведем уравнение (7) с условиями (8)–(9) к интегральному уравнению. Введем обозначение $L(t, x, \tau) = H(t, t + \tau, x)$, тогда функция $L(t, x, \tau)$ удовлетворяет таким условиям:

$$L_t' + AL_x' - Q_A(L_\tau) = -ALA^{-1}P(t + \tau, x) + Q(t, x)L, \tau > 0, (7_1)$$

$$Q_A(L(t, x, 0)) = P(t, x) - Q(t, x), (8_1)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_1} L(t, x, \tau) = 0, \tau > 0. (9_1)$$

Пусть $a_i, M_{ij}, i, j \in N$ — компоненты матриц A и M , тогда компоненты

$$(Q_A(M))_{ij} = (1 - a_i/a_j) M_{ij}, (Q_A^{-1}(M))_{ij} = \frac{M_{ij}}{1 - a_i/a_j}.$$

Следовательно, $\text{diag } Q_A(M) = 0$. Из условия (8₁) получаем $\text{diag}(P(t, x) - Q(t, x)) = 0$. Обозначим $L_D = \text{diag } L, L_{CD} = L - L_D$, тогда задачу (7₁)–(9₁) можно записать так:

$$(L_D)_t' + A(L_D)_x' = \{-ALA^{-1}P(t + \tau, x) + Q(t, x)L\}_D, (10_1)$$

$$(L_{CD})_t' + A(L_{CD})_x' - Q_A((L_{CD})_\tau) = \{-ALA^{-1}P(t + \tau, x) + \\ + Q(t, x)L\}_{CD}, L_{CD}(t, x, 0) = Q_A^{-1}(P(t, x) - Q(t, x)), (10_2)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_1} L_D(t, x, \tau) = 0, \lim_{t \rightarrow t_1} L_{CD}(t, x, \tau) = 0, (10_3)$$

Последняя система дифференциальных уравнений эквивалентна такой системе интегральных уравнений

$$L_D(t, x, \tau) = - \int_t^\infty G_{t-t'}^{(A)} \{[-AL(t', x, \tau)A^{-1}P(t' + \tau, x) + \\ + Q(t', x)L(t', x, \tau)]_D\} dt', (11_1)$$

$$L_{CD}(t, x, \tau) = G_\tau^{(Q_A^{-1}, Q_A^{-1}A)} [Q_A^{-1}(\{P - Q\}(t, x))] - \int_0^\tau G_{\tau-\tau'}^{(Q_A^{-1}, Q_A^{-1}A)} \times$$

$\times [Q_A^{-1}(\{-AL(t, x, \tau')A^{-1}P(t + \tau', x) + Q(t, x)L(t, x, \tau')\}_{cD})] d\tau'$,
 где компоненты

$$\begin{aligned} (G_i^{(A)}[F_D(x)])_{ii} &= F_{ii}(x - a_i t), \quad i \in N, \\ (G_{\tau}^{(Q_A^{-1}, Q_A^{-1}A)}[Q_A^{-1}(F(t, x))])_{ij} &= \frac{1}{1 - a_i/a_j} F_{ij} \times \\ &\times t + \frac{\tau}{1 - a_i/a_j}, \quad x + \frac{a_i \tau}{1 - a_i/a_j}, \quad i, j \in N, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (12)$$

для $F(x)$, $F(t, x) \in M_n$ при $\forall t, x$. Действительно, из равенства (12) вытекает, что $G_{\tau}^{(Q_A^{-1}, Q_A^{-1}A)}[Q_A^{-1}(F(t, x))] = 0$ при $t > t_1$ тогда и только тогда, когда $F(t, x) \in M_n^0$, $\text{diag } F(t, x) = 0$ и $F(t, x) = 0$ при $t > t_1$. Функции $F(t, x) = \{-AL(t, x, \tau')A^{-1}P(t + \tau', x) + Q(t, x)L(t, x, \tau')\}_{cD}$ и $F_1(t, x) = P(t, x) - Q(t, x)$ этим условиям удовлетворяют, так как если $L, P, Q \in K_n^0 \subset M_n^0$, где K_n^0 — кольцо, содержащее диагональные матрицы, то $AL, LA^{-1}, -ALA^{-1}P + QL \in K_n^0$. Таким образом, условие (10₄) для L_{cD} выполнено. Выполнение условий (10₁)—(10₃) и условия (10₄) для L_D легко проверяется.

Введем обозначения: $n(i)$, $i \in N$ — некоторые множества индексов, содержащиеся в множестве $\{1, 2, \dots, n\} = N$, $M(i) = \{j : a_i/a_j \leq 1\}$, $K_n^0 = \{M \in M_n : M_{ij} = 0, j \notin n(i)\}$.

Лемма 1. Для того чтобы $K_n^0 \subset M_n^0$, необходимо и достаточно, чтобы $n(i) \subset M(i)$, $i \in N$.

Доказательство. Можно определить $M_n^0 = \{M \in M_n : M_{ij} = 0, j \notin M(i)\}$, тогда эквивалентность $n(i) \subset M(i) \leftrightarrow K_n^0 \subset M_n^0$ очевидна.

Лемма 2. Для того, чтобы множество матриц K_n^0 было кольцом, необходимо и достаточно, чтобы $n(i) \cap n^*(j) = \emptyset$, $i \notin n(i)$, где $n^*(j) = \{i' : j \in n(i')\}$.

Доказательство. Заметим, что множества $n(i)$ и $n^*(j)$ связаны соотношением $\sum_{i \in N} \sum_{j \in n(i)} = \sum_{j \in N} \sum_{i \in n^*(j)}$. Пусть $P, Q \in K_n^0$, тог-

да компоненты произведения PQ матриц вычисляются по формуле $(PQ)_{ij} = \sum_{s=1}^n P_{is}Q_{sj} = \sum_{s \in n(i) \cap n^*(j)} P_{is}Q_{sj}$. Из последнего равенства вытекает эквивалентность $(PQ)_{ij} = 0, \forall j \notin n(i) \leftrightarrow n(i) \cap n^*(j) = \emptyset, \forall j \notin n(i)$.

Кольцо K_n^0 из M_n^0 назовем максимальным кольцом в M_n^0 , если K_n^0 не содержится в другом кольце из M_n^0 .

Пусть кольцо K_n^0 из условия (4) определяется множествами $n(i)$, $i \in N$. Запишем уравнения (11₁), (11₂) для $L(t, x, \tau) = \{L_{ij}(t, x, \tau), i, j \in N\}$ в компонентной форме

$$L_{ii}(t, x, \tau) = - \int_t^\tau \sum_s \left[-a_i L_{is}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tau) \frac{1}{a_s} P_{si}(\tilde{t} + \tau, \tilde{x}) + Q_{is}(\tilde{t}, \tilde{x}) L_{is}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tau) \right] d\tilde{t}, \quad (13)$$

где $s \in n(i, j) \equiv n(i) \cap n^*(j)$, а в подынтегральном выражении $\tilde{x} = x + a_i(\tilde{t} - t)$, $L_{ij}(t, x, \tau) = 1/r_{ij} R_{ij}(t + \tau/r_{ij}, x + a_i \tau/r_{ij}) + \int_0^\tau 1/r_{ij} \sum_s [-a_i L_{is}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{\tau}) 1/a_s P_{sj}(\tilde{t} + \tilde{\tau}, \tilde{x}) + Q_{is}(\tilde{t}, \tilde{x}) L_{sj}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{\tau})] d\tilde{\tau}$, $j \in n(i)$, (14) где $r_{ij} = 1 - a_i/a_j$, $R_{ij} = P_{ij} - Q_{ij}$, а в подынтегральном выражении $\tilde{t} = t + \frac{\tau - \tilde{\tau}}{r_{ij}}$, $\tilde{x} = x + \frac{a_i(\tau - \tilde{\tau})}{r_{ij}}$. В последнем уравнении выполним замену переменной интегрирования $\tilde{\tau} = \tilde{t} = t + (\tau - \tilde{\tau})/r_{ij} \in [t + \tau/r_{ij}, t]$, тогда

$$L_{ij}(t, x, \tau) = \frac{1}{r_{ij}} R_{ij}(t + \tau/r_{ij}, x + a_i \tau/r_{ij}) - \int_t^{t+\tau/r_{ij}} \sum_s \left[-a_i L_{is}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{\tau}) \times \frac{1}{a_s} P_{is}(\tilde{t} + \tilde{\tau}, \tilde{x}) + Q_{is}(\tilde{t}, \tilde{x}) L_{sj}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{\tau}) \right] d\tilde{t}, \quad j \in n(i),$$

где в подынтегральном выражении $\tilde{x} = x + a_i(\tilde{t} - t)$, $\tilde{\tau} = \tau - r_{ij}(\tilde{t} - t)$. Полагая

$$D_{ij}(t, x, \tau) = \begin{cases} 0, & j \notin n(i), j = i, \\ \frac{1}{r_{ij}} R_{ij}(t + \tau/r_{ij}, x + a_i \tau/r_{ij}), & j \in n(i), j \neq i, \end{cases}$$

систему интегральных уравнений (13)–(14) можно записать в виде уравнения

$$L_{ij}(t, x, \tau) = D_{ij}(t, x, \tau) - \int_t^{t+\tau/r_{ij}} \sum_s \left[-a_i L_{is}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{\tau}) \frac{1}{a_s} P_{sj}(\tilde{t} + \tilde{\tau}, \tilde{x}) + Q_{is}(\tilde{t}, \tilde{x}) L_{sj}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{\tau}) \right] d\tilde{t}, \quad i \in N, \quad (15)$$

в подынтегральном выражении которого $\tilde{x} = x + a_i(\tilde{t} - t)$, $\tilde{\tau} = \tau - r_{ij}(\tilde{t} - t)$. Заметим, что $L_{ij}(t, x, \tau) = 0$, $j \notin n(i)$.

Введем банахово пространство E почти всюду ограниченных матриц-функций $F(x, \tau) = \{f_{ij}(x, \tau), i, j \in N, f_{ij} = 0, j \notin n(i)\}$, нормированных по формуле $\|F\|_E = \text{vrai max } |f_{ij}(x, \tau)/a_j|$, где максимум рассматривается по $i, j \in N, x \in X, \tau \in (0, \infty)$. Функции

$L(t) = L(t, x, \tau)$ и $D(t) = \{D_{ij}(t, x, \tau), i, j \in N\}$ будем рассматривать как функции переменной $t \in [t_0, t_1]$, принимающие значения в пространстве E . Интегральное уравнение (15) обозначим для краткости так: $L(t) = D(t) + R[L](t)$ (16). Формальным решением уравнения (16) является сумма ряда $D(t) + R[D](t) + \dots + R^n[D](t) + \dots$ (17). Оценим члены этого ряда. Введем обозначения для различных нормировок матрицы $V(t, x) = \{V_{ij}(t, x)$:

$$i, j \in N\} \text{ из } L_\infty(T, X; M_n): V_1(t, x) = \left\{ \frac{1}{a_j} V_{ij}(t, x), i, j \in N \right\},$$

$$V_2(t, x) = \left\{ \frac{V_{ij}(t, x)}{a_i - a_j}, i, j \in N \right\}, [V(t, x)] = \max_{i, j} |V_{ij}(t, x)|, \|V_r(t)\| =$$

$$= \text{vraimax}_{x \in X} [V_r(t, x)], \|V_r\|_1^+(t) = \int_t^\infty \|V_r(t')\| dt', \|V_r\|_\infty^+ = \text{vraimax}_{t \in [t, \infty]} \|V_r(t')\|,$$

$$r = 1, 2, \emptyset, c_1 = \max_i |a_i|, c_2 = \max_{i, j} |a_i - a_j|, f(t) = c_1 \|P_1\|_\infty^+(t) +$$

$\|Q(t)\|, F(t) = \int_t^\infty f(\tilde{t}) d\tilde{t}$ ($\emptyset$ — символ отсутствия индекса). Нетрудно видеть, что функция $\|D(t)\|_E$ не возрастает и справедливы такие неравенства $\|V(t)\| \leq c_1 \|V_1(t)\|, \|V(t)\| \leq c_2 \|V_2(t)\|,$

$$\|D(t)\|_E = \|P_2 - Q_2\|_\infty^+(t), \|R[D](t)\|_E \leq \int_t^\infty f(\tilde{t}) \|D(\tilde{t})\|_E d\tilde{t}. \quad (19)$$

Легко доказать методом индукции, что неравенство (19) приводит к такому неравенству:

$$\|R^m[D](t)\|_E \leq \int_t^\infty F'(\tilde{t}) \frac{F^{m-1}(\tilde{t})}{(m-1)!} \|D(\tilde{t})\|_E d\tilde{t}. \quad (20)$$

Из монотонности $\|D(t)\|_E$ и неравенства (20) окончательно получаем неравенство $\|R^m[D](t)\|_E \leq \|D(t)\|_E \frac{F^m(t)}{m!}, m = 1, 2, \dots$, указывающее на абсолютную и равномерную сходимость ряда (17) и справедливость для его суммы $L(t)$ неравенства $\|L(t)\|_E \leq$

$$\leq \|P_2 - Q_2\|_\infty^+(t) \exp \left[\int_t^\infty (c_1 \|P_1\|_\infty^+(\tilde{t}) + \|Q(\tilde{t})\|) d\tilde{t} \right] \quad (21)$$

Последнее неравенство означает ограниченность функций $H_{ij}(t, t', x) = L_{ij}(t, x, t' - t)$. Заметим, что

$$\|P_r\|_\infty^+(t) = \begin{cases} 0, & t > t_1, \\ \|P_r\|_\infty^+(t_0), & t < t_0. \end{cases}$$

Итак, существование преобразований (6) для гладких матриц-функций $P(t, x)$ и $Q(t, x)$ доказано.

Пусть теперь $P(t, x)$ и $Q(t, x)$ — произвольные, почти всюду ограниченные матрицы-функции, удовлетворяющие условиям (4)–(5'). Пусть $L(t, x, \tau)$ — решение интегрального уравнения (15). Аппроксимируем $P(t, x)$ и $Q(t, x)$ последовательностью гладких функций $P^{(m)}(t, x)$ и $Q^{(m)}(t, x)$ так, чтобы $\lim_{m \rightarrow \infty} \|P^{(m)}(t) - P_2(t)\| = 0$,

$\lim_{m \rightarrow \infty} \|Q^{(m)}(t) - Q_2(t)\| = 0$, тогда последовательность решений $L^{(m)}(t, x, \tau)$ интегрального уравнения (15) при $P = P^{(m)}$, $Q = Q^{(m)}$ сходится, как нетрудно видеть из неравенства (21), к функции $L(t, x, \tau)$ в смысле $\lim_{m \rightarrow \infty} \|L^{(m)}(t) - L(t)\|_E = 0$, $t \in [t_0, t_1]$. Отсюда

следует, что матрица-функция $H(t, t', x) = L(t, x, t' - t)$ порождает преобразование (6) в случае почти всюду ограниченных функций P и Q , подчиненных условиям (4), (5), (5').

Совершенно аналогично нетрудно доказать, что ряд (16) сходится в банаховом пространстве G измеримых абсолютно суммируемых по $\tau > 0$ матриц-функций $F(x, \tau) = \{f_{ij}(x, \tau), i, j \in N, f_{ij} = 0, j \notin n(i)\}$, нормированных по формуле

$$\|F\|_G = \max_{x \in X, i \in N} \int_0^\infty \sum_{j \in n(i)} |f_{ij}(x, \tau)/a_j| d\tau,$$

и для его суммы справедливо неравенство $\|L(t)\|_G \leq \|P_1 - Q_1\|_1^+(t) \exp[F(t)]$ (21').

Принимая во внимание обозначения (18), заключаем, что справедлива

Теорема 1. Пусть $P(t, x)$ и $Q(t, x)$ — почти всюду ограниченные матрицы, удовлетворяющие условиям (4)–(5') и равные нулю при $t \notin [t_0, t_1]$, тогда уравнение (3) при финальном условии (2) имеет обобщенное решение $y(t, x)$, представимое в виде

$$y(t, x) = z(t, x) + \int_t^\infty H^+(t, t', x) z(t', x) dt', \text{ где } z(t, x) \text{ — исчезающее}$$

при $t \rightarrow +\infty$ обобщенное решение уравнения (1) при финальном условии (2). Матрица-функция $H^+(t, t', x)$ почти всюду ограничена, $H^+(t_1, t', x) = 0$ при $t' > t_1$ и определяется из равенства $H^+ \times \times (t, t', x) = T \hat{H}^+(t, t', x) T^{-1}$, где функция $\hat{H}^+(t, x, \tau) = \{\hat{H}_{ij}^+(t, t', x), i, j \in N\} = H^+(t, t + \tau, x) \in K_n^0$ почти везде ограничена, удовлетворяет интегральному уравнению (15) с $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ вместо P и Q и, следовательно, равенствам

$$\hat{H}_{ij}^+(t, t, x) = \begin{cases} (\hat{P}_{ij}(t, x) - \hat{Q}_{ji}(t, x))/r_{ij}, & j \in n(i), \quad j \neq i, \\ 0 & j \notin n(j), \quad j = i \end{cases}$$

где $n(i) \subset M(i) = \{j : a_i/a_j \leq 1\}$, $n^*(j) = \{i : j \in n(i)\}$, $n(i) \cap n^*(j) = \emptyset$ при $j \notin n(i)$, $H^+(t_1, t', x) = 0$ при $t' > t_1$ и неравенствам

$$|\hat{H}_{ij}^+(t, t', x)/a_j| \leq \|\hat{P}_2 - \hat{Q}_2\|_{\infty}^+(t) \exp[F^+(t)],$$

$$\int_t^{\infty} \sum_j |\hat{H}_{ij}^+(t, t', x)/a_j| dt' \leq \|\hat{P}_1 - \hat{Q}_1\|_1^+(t) \exp[F^+(t)],$$

где $F^+(t) = \int_t^{\infty} (c_1 \|\hat{P}_1\|_{\infty}^+(\tilde{t}) + \|\hat{Q}(\tilde{t})\|) d\tilde{t}, \quad j \in n(i).$

Рассматривая вместо финального условия (2) начальное условие $\lim_{t \rightarrow t_0} G_{-i}^{(A)}(t, x) = f(x) \in C_0(X; E_n) \cap L_1(X; E_n)$ (22), совершенно аналогично можно доказать существование преобразования, исчезающего при $t \rightarrow -\infty$ решения уравнения (1) в решении уравнения (3).

Теорема 2. Пусть $P(t, x)$ и $Q(t, x)$ — почти всюду ограниченные матрицы-функции, удовлетворяющие условиям (4) — (5') и равные нулю при $t \notin [t_0, t_1]$, тогда уравнение (3) при начальном условии (22) имеет обобщенное решение $y(t, x)$, представимое в виде

$$y(t, x) = z(t, x) + \int_{-\infty}^t H^-(t, t', x) z(t', x) dt', \quad \text{где}$$

$z(t, x)$ — исчезающее при $t \rightarrow -\infty$ решение уравнения (1) при начальном условии (22). Матрица-функция $H^-(t, t', x)$ почти везде ограничена, $H^-(t_0, t', x) = 0$ при $t' < t_0$ и определяется из равенства $H^-(t, t', x) = T \hat{H}^-(t, t', x) T^{-1}$, где функция $L^-(t, x, \tau) = \{\hat{H}_{ij}^-(t, t', x), i, j \in N\}$ почти везде ограничена и удовлетворяет интегральному уравнению $\hat{L}_{ij}^-(t, x, \tau) = D_{ij}^-(t, x, \tau) +$

$$+ \int_{t-\tau/r_{ij}}^t \sum_s \left[-a_i L_{is}^-(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{\tau}) \frac{1}{a_s} P_{sj}(\tilde{t} - \tilde{\tau}, \tilde{x}) + Q_{is}(\tilde{t}, \tilde{x}) L_{is}^-(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{\tau}) \right] d\tilde{t}, \quad j \in n(i),$$

где в подынтегральном выражении $\tilde{x} = x + a_i(t - \tilde{t})$,

$$\tilde{\tau} = \tau - r_{ij}(t - \tilde{t}), \quad s \in n(i) \cap n^*(j), \quad D_{ij}^-(t, x, \tau) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{r_{ij}} (\hat{P}_{ij} - \hat{Q}_{ij}) \left(t - \frac{\tau}{r_{ij}}, x - \frac{a_i}{r_{ij}} \right), & j \in n(i), j \neq i, \\ 0, & j \notin n(i), j = i, \end{cases}$$

и следовательно, равенствам

$$\hat{H}_{ij}^-(t, t, x) = \begin{cases} -\frac{1}{r_{ij}} (\hat{P}_{ij}(t, x) - \hat{Q}_{ij}(t, x)), & j \in n(i), j \neq i, \\ 0, & j \notin n(i), j = i, \end{cases}$$

$$\hat{H}^-(t_0, t', x) = 0 \quad \text{при } t' < t_0$$

и неравенствам $-|\hat{H}_{ij}^-(t, t', x)/a_j| \leq \|P_- - \hat{Q}_2\|_{\infty}^-(t) \exp[F^-(t)],$

$$\int_{-\infty}^t \sum_{j \in n(i)} |\hat{H}_{ij}^-(t, t', x)/a_j| dt' \leq \|P_1 - Q_1\|_1^-(t) \exp[F^-(t)],$$

$$\text{где } F^-(t) = \int_{-\infty}^t (c_1 \|\hat{P}_1\|_{\infty}^-(\tilde{t}) + \|\hat{Q}(\tilde{t})\|) d\tilde{t}, \quad \|\hat{P}_r\|_{\infty}^-(t) = \text{vrai max}_{t' \in [-\infty, t]} \times \\ \times \|\hat{P}_r(t')\|, \quad \|\hat{P}_r\|_1^-(t) = \int_{-\infty}^t \|\hat{P}_r(\tilde{t})\| d\tilde{t}, \quad r=1, 2, \emptyset, \quad \text{причем,} \\ \|\hat{P}_r\|_{\infty}^-(t) = 0, \quad \|\hat{P}_r\|_1^-(t) = 0, \quad t < t_0.$$

В заключение приведем примеры некоторых колец K_n^0 из подпространства M_n^0 для $n=3$ и $n=4$.

Пример 1. Пусть числа $-2, -1, -3$ есть собственные значения матрицы A , тогда $M_3^0 = \{M \in M_3 : M_{12} = 0\}$. Кольца:

$$K_{3,1}^0 = \{M \in M_3^0 : M_{32} = 0\}, \quad K_{3,2}^0 = \{M \in M_3^0 : M_{13} = 0\}, \quad K_{3,3}^0 = \\ = \{M \in M_3 : M_{32} = M_{13} = 0\}, \quad K_{3,4}^0 = \{M \in M_3^0 : M_{31} = M_{32} = M_{13} = 0\}.$$

Кольца $K_{3,1}^0$ и $K_{3,2}^0$ — максимальны.

Пример 2. Пусть числа $-3, -1, 1, 2$ есть собственные значения матрицы A , тогда $M_4^0 = \{M \in M_4 : M_{12} = M_{43} = 0\}$. Кольца:

$$K_{4,1}^0 = \{M \in M_4^0 : M_{13} = M_{42} = 0\}, \quad K_{4,2}^0 = \{M \in M_4^0 : M_{32} = M_{34} = \\ = M_{14} = 0\}. \quad \text{Кольцо } K_{4,1}^0 \text{ — максимально.}$$

Список литературы: 1. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма—Лиувилля. — Киев: Наук. думка, 1972. — 219 с. 2. Нижник Л. П. Обратная нестационарная задача рассеяния. — Киев: Наук. думка, 1973. — 182 с. 3. Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

Поступила в редколлегию 29.12.80.

УДК 517.9 + 517.4

В. Д. ЕРМАКОВА

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ НА ВСЕЙ ОСИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С НЕУБЫВАЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Рассмотрим дифференциальное уравнение $-y'' + q(x)y = \lambda y$, $-\infty < x < \infty$ (1), с вещественной функцией $q(x)$, удовлетворяющей условиям

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |q(x) - q_0(x)| = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 0; \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^0 (x^2 + 1) |q(x) - q_0(x)| dx < \infty, \quad \int_0^{\infty} (x^2 + 1) |q(x)| dx < \infty,$$

где $q_0(x)$ — вещественный периодический конечнзонный потенциал с периодом 1. Как известно [1], уравнение (1) при $\lambda > 0$

имеет линейно независимые решения, представимые в виде

$$\varphi_1(x, \lambda) = e^{iV\bar{\lambda}x} + \int_x^{\infty} K^+(x, y) e^{iV\bar{\lambda}y} dy,$$

$$\varphi_2(x, \lambda) = e^{-iV\bar{\lambda}x} + \int_x^{\infty} K^+(x, y) e^{-iV\bar{\lambda}y} dy, \quad \operatorname{Im} V\bar{\lambda} \geq 0, \quad (3)$$

и $q(x) = -2 \frac{d}{dx} K^+(x, x)$. Функция $\varphi_1(x, \lambda)$ допускает аналитическое продолжение в комплексную плоскость с разрезом по полуоси $\lambda > 0$.

Пусть σ — спектр оператора $-\frac{d^2}{dx^2} + q_0(x)$, а $\tilde{\psi}_{1,2}(x, \lambda)$ — функции Флоке [2]. Согласно [3] при $\lambda \in \operatorname{Int} \sigma$ фундаментальную систему решений уравнения (1) образуют функции

$$\psi_1(x, \lambda) = \tilde{\psi}_1(x, \lambda) + \int_{-\infty}^x K^-(x, y) \tilde{\psi}_1(y, \lambda) dy, \quad (4)$$

$$\psi_2(x, \lambda) = \tilde{\psi}_2(x, \lambda) + \int_{-\infty}^x K^-(x, y) \tilde{\psi}_2(y, \lambda) dy,$$

причем $\psi_1(x, \lambda)$ — мероморфна в плоскости λ с разрезами по σ . Кроме того, $q(x) = q_0(x) + 2 \frac{d}{dx} K^-(x, x)$. Функции $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ связаны соотношениями $\psi_1(x, \lambda) = c_{11}(\lambda) \varphi_1(x, \lambda) + c_{12}(\lambda) \varphi_2(x, \lambda)$, $\lambda > 0$ (5), $\varphi_1(x, \lambda) = c_{22}(\lambda) \psi_1(x, \lambda) + c_{21}(\lambda) \psi_2(x, \lambda)$, $\lambda \in \operatorname{Int} \sigma$ (6). Таблицу $C = \|c_{ij}\|_{ij=1,2}$ называют матрицей перехода уравнения (1).

В настоящей работе изучаются свойства матрицы C и решается задача восстановления потенциала $q(x)$ по матрице C и некоторым характеристикам точечного спектра; получены основные интегральные уравнения для решения обратной задачи. В теоремах 1, 2 приведен ряд свойств элементов матрицы C . Теорема 3 утверждает, что найденные свойства элементов некоторой матрицы C являются достаточными для того, чтобы она была матрицей перехода для уравнения (1) с потенциалом, удовлетворяющим условиям (2).

Везде в дальнейшем используются следующие обозначения:

$L: -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$; $L_0: -\frac{d^2}{dx^2} + q_0(x)$; $\theta(x, \lambda), \varphi(x, \lambda)$ — фундаментальная система решений уравнения $L_0[y] = \lambda y$, определенная начальными условиями $\theta(0, \lambda) = \varphi'(0, \lambda) = 1$, $\theta'(0, \lambda) = \varphi(0, \lambda) = 0$; $\varphi(\lambda) = \varphi(1, \lambda)$, $\varphi'(\lambda) = \varphi'(1, \lambda)$, $\theta(\lambda) = \theta(1, \lambda)$, $\theta'(\lambda) = \theta'(1, \lambda)$; $F(\lambda) = [\theta(\lambda) + \varphi'(\lambda)]/2$ — дискриминант Хилла; $m_{1,2} = \frac{\varphi' - \theta}{2\varphi} \pm \frac{\sqrt{F^2 - 1}}{\varphi}$. Спектр $\sigma = \{\lambda: \operatorname{Im} \lambda = 0, |F(\lambda)| \leq 1\}$

оператора L_0 есть множество отрезков (зон) $s_n = [s_{n1}, s_{n2}]$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Интервалы $\Delta_0 = (-\infty, s_{01})$, $\Delta_n = (s_{(n-1)2}, s_{n1})$, $n = 1, 2, \dots, N$ называются лакунами; $\Delta = \bigcup_{n=0}^N \Delta_n$. Ветвь радикала $\sqrt{F^2 - 1}$ выбирается из условия $\sqrt{F^2 - 1} > 0$ при $\lambda \in \Delta_0$.

Отрицательными (положительными) зонами будем называть сегменты $S_n^- = [S_{n1}, S_{n2}] = s_n \cap (-\infty, 0]$ ($S_n^+ = s_n \cap [0, \infty)$). Отрицательными (положительными) лакунами — интервалы $\Delta_n^- = \Delta_n \cap (-\infty, 0)$ ($\Delta_n^+ = \Delta_n \cap (0, \infty)$). Для функций $c_{ij}(\lambda)$ ($i, j = 1, 2$) имеем выражения через вронскианы

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{\{\psi_1, \varphi_2\}}{2i\sqrt{\lambda}} = \frac{\psi_1(x, \lambda)\varphi_2(x, \lambda) - \psi_1'(x, \lambda)\varphi_2(x, \lambda)}{2i\sqrt{\lambda}}, \\ c_{12} &= -\frac{\{\psi_1, \varphi_1\}}{2i\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda > 0; \\ c_{22} &= \frac{\{\varphi_1, \psi_2\}}{m_2 - m_1}, \quad c_{21} = -\frac{\{\varphi_1, \psi_1\}}{m_2 - m_1}, \quad \lambda \in \text{Int } \sigma. \end{aligned} \quad (7)$$

Стандартными методами, используя формулы (7) и (3)–(6), устанавливаются свойства элементов матрицы C . А именно, справедливы.

Теорема 1. Пусть $C = \|c_{ij}(\lambda)\|$ ($i, j = 1, 2$) матрица перехода уравнения (1) и $M = \frac{m_2 - m_1}{2i\sqrt{\lambda}}$. Тогда

I. При $\lambda \in (0, \infty) \cap \text{Int } \sigma$, $|c_{12}|^2 - |c_{11}|^2 = M$, $|c_{21}|^2 - |c_{22}|^2 = M^{-1}$, $c_{12} = M c_{21}$, $c_{11} = -M \overline{c_{22}}$; при $\lambda \in (0, \infty) \cap \Delta$, $c_{12} = \overline{c_{11}}$; при $\lambda \in (-\infty, 0] \cap \text{Int } \sigma$, $c_{22} = \overline{c_{21}}$.

II. $c_{12}(\lambda^B) = \overline{c_{12}(\lambda^H)}$, $c_{11}(\lambda^B) = \overline{c_{11}(\lambda^H)}$, $\lambda > 0$; $c_{22}(\lambda^B) = \overline{c_{22}(\lambda^H)}$, $c_{21}(\lambda^B) = \overline{c_{21}(\lambda^H)}$, $\lambda \in \text{Int } \sigma$; $c_{21}(\lambda) = \overline{c_{21}(\bar{\lambda})}$, $\lambda \in (-\infty, 0] \cap \Delta$. (Здесь и далее λ^B, λ^H — точки верхнего и нижнего, соответственно, берегов разрезов).

III. Функции $c_{21}(\lambda)$ и $c_{12}(\lambda)$ являются предельными значениями функций аналитической и мероморфной, соответственно, в плоскости с разрезами по положительной полуоси и отрицательным зонам спектра оператора L_0 .

IV. Функции $c_{21}\sqrt{F^2 - 1}$ и $c_{12}\varphi \cdot \sqrt{\lambda}$ непрерывны в замкнутой плоскости λ с разрезами по полуоси $\lambda > 0$ и отрицательным зонам спектра оператора L_0 , причем

$$\begin{aligned} &\text{если } \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi(\lambda) \tilde{\psi}_1(x, \lambda) \neq 0, \text{ то } \lim_{\lambda \rightarrow 0} c_{12}(\lambda) \varphi(\lambda) \sqrt{\lambda} \left[\frac{c_{11}(\lambda)}{c_{12}(\lambda)} + 1 \right] = \\ &= 0; \text{ если } \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi(\lambda) \tilde{\psi}_1(x, \lambda) = 0, \text{ то } \lim_{\lambda \rightarrow 0} c_{12}(\lambda) \sqrt{\lambda} \cdot \left[\frac{c_{11}(\lambda)}{c_{12}(\lambda)} + 1 \right] = 0; \\ &\lim_{\lambda \rightarrow s_{nj}} c_{21}(\lambda) \sqrt{\lambda - s_{nj}} \left[\frac{c_{22}(\lambda)}{c_{21}(\lambda)} + 1 \right] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Функции $\frac{1}{c_{21}(\lambda)}$ и $\frac{\tilde{\psi}_1(x, \lambda)}{c_{12}(\lambda)}$ ограничены, соответственно, в окрестностях границ зон и на полуоси $\lambda = 0$.

V. $c_{12}(\lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$, $c_{21}(\lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$, $|\lambda| \rightarrow \infty$;

$$c_{11}(\lambda) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad c_{22}(\lambda) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

VI. Оператор L имеет конечное число собственных чисел λ_n , $n = 1, 2, \dots, l$.

А. Если $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \varphi(\lambda) \tilde{\psi}_1(x, \lambda) = 0$, то λ_n — простой корень функции $c_{12}(\lambda)$ и, может быть, двукратный корень функции $c_{21}(\lambda)$, принадлежащий отрицательным лакунам; $\varphi_1(x, \lambda_n) = c_n^+ \tilde{\psi}_1(x, \lambda_n)$, $\tilde{\psi}_1(x, \lambda_n) = c_n^- \varphi_1(x, \lambda_n)$;

$$\begin{aligned} (m_n^+)^{-2} &= \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_1(x, \lambda_n)|^2 dx = c_n^+ 2i \sqrt{\lambda} \frac{d}{d\lambda} c_{12}(\lambda) \Big|_{\lambda = \lambda_n}; \\ (m_n^-)^{-2} &= \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_1(x, \lambda_n)|^2 dx = c_n^- 2i \sqrt{\lambda} \frac{d}{d\lambda} c_{12}(\lambda) \Big|_{\lambda = \lambda_n}; \\ (m_n^+)^{-2} &= (m_n^-)^2 (-4\lambda) \left[\frac{d}{d\lambda} c_{12}(\lambda) \right]^2 \Big|_{\lambda = \lambda_n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Б. Если $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \varphi(\lambda) \tilde{\psi}_1(x, \lambda) \neq 0$, то λ_n — простой корень функции $c_{21}(\lambda)$, принадлежащий отрицательным лакунам; решения $\varphi_1(x, \lambda_n)$ и $\tilde{\psi}_1(x, \lambda_n) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \frac{\psi_1(x, \lambda)}{m_2(\lambda) - m_1(\lambda)}$ — линейно зависимы: $\varphi_1(x, \lambda_n) = c_n^+ \tilde{\psi}_1(x, \lambda_n)$, $\tilde{\psi}_1(x, \lambda_n) = c_n^- \varphi_1(x, \lambda_n)$, а нормировки m_n^+ , m_n^- , связаны с элементами матрицы C соотношениями

$$\begin{aligned} (m_n^+)^{-2} &= \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_1(x, \lambda_n)|^2 dx = c_n^+ \frac{d}{d\lambda} c_{21}(\lambda) \Big|_{\lambda = \lambda_n}; \\ (m_n^-)^{-2} &= \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}_1(x, \lambda_n)|^2 dx = c_n^- \frac{d}{d\lambda} c_{21}(\lambda) \Big|_{\lambda = \lambda_n}; \\ (m_n^+)^{-2} &= (m_n^-)^2 \left[\frac{d}{d\lambda} c_{21}(\lambda) \right]^2 \Big|_{\lambda = \lambda_n}, \end{aligned} \quad (9)$$

Используя свойства элементов матрицы C , сформулированные в теореме 1, и соотношения (3)–(6), можно получить приводимые ниже основные интегральные уравнения для ядер $K^+(x, y)$, $K^-(x, y)$ операторов преобразования, позволяющие

восстанавливать потенциал $q(x)$ по матрице C и наборам чисел $\{\lambda_n, m_n^+, m_n^- | n = 1, 2, \dots, l\}$,

$$K^+(x, y) + F^+(x + y) + \int_x^\infty K^+(x, t) F^+(t + y) dt = 0, \quad y > x, \quad (10)$$

$$K^-(x, y) + F^-(x, y) + \int_{-\infty}^x K^-(x, t) F^-(t, y) dt = 0, \quad y < x, \quad (11)$$

где

$$F^+(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{c_{11}(k)}{c_{12}(k)} e^{ikx} dk + \sum_{n=1}^l (m_n^+)^2 e^{ik_n x} + \quad (12)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_n \int_{\Gamma_n} e^{ikx} \frac{m_2(k) - m_1(k)}{2ik |c_{12}(k)|^2} dk, \quad k = V\bar{\lambda}, \quad \Gamma_n = [iV|\overline{S_{n2}}|, iV|\overline{S_{n1}}|];$$

$$F^-(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{c_{22}(\tilde{k})}{c_{21}(\tilde{k})} \tilde{\psi}_1(x, \tilde{k}) \tilde{\psi}_1(y, \tilde{k}) \rho(\tilde{k}) d\tilde{k} + \quad (13)$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \sum_n \int_{\Delta_n^+} \frac{\tilde{\psi}_1(x, \lambda) \tilde{\psi}_1(y, \lambda)}{|c_{12}(\lambda)|^2} \frac{d\lambda}{V\bar{\lambda}} + \sum_{n=1}^l (m_n^-)^2 \hat{\tilde{\psi}}_1(x, \lambda_n) \hat{\tilde{\psi}}_1(y, \lambda_n),$$

$$\tilde{k} = \arcsin(i\sqrt{F^2 - 1}), \quad \rho(\tilde{k}) = -\varphi(\tilde{k})/F'(\tilde{k});$$

$$\hat{\tilde{\psi}}_1(x, \lambda) = \begin{cases} \tilde{\psi}_1(x, \lambda), & \text{если } \lambda \text{ — регулярная точка функции } \tilde{\psi}_1(x, \lambda); \\ \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{\tilde{\psi}_1(x, \mu)}{m_2(\mu) - m_1(\mu)}, & \text{если } \lambda \text{ — особая точка функции } \tilde{\psi}_1(x, \lambda). \end{cases}$$

Аналогично тому, как это сделано в [1], используя уравнения (10), (11), можно установить следующие свойства функций F^+ , F^- и их производных. Пусть $g(x, y) = \max_{t_1 < x, t_2 < y} |F^-(t_1, t_2)|$

и $g_i(t_1, t_2) = \left| \frac{\partial F^-}{\partial t_i}(t_1, t_2) \right| \quad i = 1, 2$. Тогда при любом a , $(a < \infty)$

имеем

$$\int_{-\infty}^x g(x, y) dy = \tilde{g}(x) \in L_1(-\infty, a), \quad \int_{-\infty}^a tg(t, t) dt < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^x g_i(x, y) dy = \tilde{g}_i(x) \in L_1(-\infty, a), \quad \int_{-\infty}^a g_i(t, t) t dt < \infty,$$

$$i = 1, 2; \quad (14)$$

$$\int_{-\infty}^a t^2 \left| \frac{dF^-}{dt}(t, t) \right| dt < \infty. \quad (15)$$

Функция $F^+(x)$ — абсолютно непрерывна и

$$\int_a^\infty (x^2 + 1) \left| \frac{dF^+}{dx}(x) \right| dx < \infty, \quad a > -\infty. \quad (16)$$

Перечисленные выше факты формулируем в виде теоремы.

Теорема 2. Функции $F^+(x)$, $F^-(x, y)$, определяемые через элементы матрицы C и наборы чисел $\{\lambda_k, m_k^+, m_k^- | k=1, 2, \dots, l\}$ по формулам (12), (13) имеют производные $\frac{dF^+}{dx}$, $\frac{\partial F^-}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial F^-}{\partial y}(x, y)$, причем справедливы оценки (14) — (16). Ядра $K^+(x, y)$ и $K^-(x, y)$ связаны с коэффициентами $c_{ij}(\lambda)$ ($i, j=1, 2$) соотношениями (8) — (13).

Следующая теорема дает решение обратной задачи.

Теорема 3. Пусть элементы некоторой матрицы $C = \|c_{ij}(\lambda)\|$ ($i, j=1, 2$) обладают свойствами, перечисленными в теореме 1, а функции $F^+(x)$, $F^-(x, y)$, построенные по элементам матрицы C и наборам $\{\lambda_n, m_n^+, m_n^- | n=1, 2, \dots, l\}$, по формулам (12), (13) удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда

VII. Уравнения

$$K^+(x, y) + F^+(x + y) + \int_x^\infty K^+(x, t) F^+(t + y) dt = 0, \quad y > x, \quad (17)$$

$$K^-(x, y) + F^-(x, y) + \int_{-\infty}^x K^-(x, t) F^-(t, y) dt = 0, \quad y < x, \quad (18)$$

при каждом фиксированном x имеют единственные решения $K^+(x, y) \in L_1(x, \infty)$, $K^-(x, y) \in L_1(-\infty, x)$.

VIII. При $\lambda > 0$ функции

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, \lambda) &= e^i V^{\bar{\lambda}x} + \int_x^\infty K^+(x, t) e^i V^{\bar{\lambda}t} dt, \\ \varphi_2(x, \lambda) &= e^{-i} V^{\bar{\lambda}x} + \int_x^\infty K^+(x, t) e^{-i} V^{\bar{\lambda}t} dt \end{aligned}$$

удовлетворяют уравнению $-y'' + q^+(x)y = \lambda y$, где $q^+(x) = -2 \frac{d}{dx} K^+(x, x)$. При $\lambda \in \text{Int } \sigma$ функции $\psi_1(x, \lambda) = \tilde{\psi}_1(x, \lambda) + \int_{-\infty}^x K^-(x, t) \tilde{\psi}_1(t, \lambda) dt$, $\psi_2(x, \lambda) = \tilde{\psi}_2(x, \lambda) + \int_{-\infty}^x K^-(x, t) \times \tilde{\psi}_2(t, \lambda) dt$ являются решениями уравнения $-y'' + q^-(x)y =$

$= \lambda y$, где $q^-(x) = q_0(x) + 2 \frac{d}{dx} K^-(x, x)$. При этом справедливы оценки $\int_{-\infty}^0 (x^2 + 1) |q^-(x) - q_0(x)| dx < \infty$, $\int_0^{\infty} (x^2 + 1) |q^+(x)| dx < \infty$.

IX. Потенциалы $q^+(x)$, $q^-(x)$ совпадают: $q^+(x) = q^-(x) = q(x)$ и матрица C является матрицей перехода уравнения $-y'' + q(x)y = \lambda y$.

Доказательство. Пункты VII, VIII доказываются подобно аналогичным в [1, теорема 3.3.1., лемма 3.5.3].

Для доказательства IX достаточно показать, что функции φ_1 , φ_2 , ψ_1 , ψ_2 связаны равенствами

$$\psi_1(x, \lambda) = c_{11}(\lambda) \varphi_1(x, \lambda) + c_{12}(\lambda) \varphi_2(x, \lambda), \quad \lambda > 0, \quad (19)$$

$$\varphi_1(x, \lambda) = c_{22}(\lambda) \psi_1(x, \lambda) + c_{21}(\lambda) \psi_2(x, \lambda), \quad \lambda \in \text{Int } \sigma \quad (20)$$

$$\text{и, кроме того, } (m_n^+)^{-2} = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_1(x, \lambda_n)|^2 dx,$$

$$(m_n^-)^{-2} = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_1(x, \lambda_n)|^2 dx \quad (21).$$

При установлении связей (19)–(21) будем следовать [1, теорема 3.5.1]. Рассмотрим функции $R^+(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r^+(k) e^{ik(x+y)} dk$,

$$k = V\tilde{\lambda}, \quad r^+(k) = c_{11}(k)/c_{12}(k); \quad R^-(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r^-(\tilde{k}) \tilde{\psi}_1(x, \tilde{k}) \times \\ \times \tilde{\psi}_1(y, \tilde{k}) \rho(\tilde{k}) d\tilde{k}, \quad \tilde{k} = \arcsin(i\sqrt{F^2 - 1}), \quad r^-(\tilde{k}) = c_{22}(\tilde{k})/c_{21}(\tilde{k}); \\ \Phi^+(x, y) = R^+(x, y) + \int_x^{\infty} R^+(t, y) K^+(x, t) dt; \quad \Phi^-(x, y) = R^-(x, y) +$$

$+ \int_{-\infty}^x R^-(t, y) K^-(x, t) dt$. Функции R^+ , R^- , Φ^+ , Φ^- при каждом фиксированном x принадлежат пространству $L_2(-\infty, \infty)$ и

$$1. \text{ i. m. } \int_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \Phi^+(x, y) e^{-iky} dy = r^+(k) \varphi_1(x, k), \quad -\infty < k < \infty, \quad \rho - \\ - 1. \text{ i. m. } \int_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \Phi^-(x, y) \tilde{\psi}_2(y, \tilde{k}) dy = r^-(\tilde{k}) \psi_1(x, \tilde{k}) = r^-(\lambda) \psi_1(x, \lambda), \\ \lambda \in \sigma. \text{ Для рассмотренных выше интегралов можно получить другие выражения, а именно,}$$

$$1. \text{ i. m. } \int_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \Phi^+(x, y) e^{-iky} dy = 1. \text{ i. m. } \int_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^x \Phi^+(x, y) e^{-iky} dy +$$

$$+ e^{-ikx} - \varphi_2(x, k) + \sum_{n=1}^l (m_n^+)^2 \frac{e^{i(k_n-k)x}}{i(k_n-k)} \varphi_1(x, k_n) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_n \int_{\Gamma_n} \frac{e^{ivx} \varphi_1(x, v)}{c_{21}(v) c_{12}(v)} \frac{dv}{v-k} e^{-ikx}, \quad -\infty < k < \infty;$$

$$\rho - 1. \text{ i. m. } \int_{N \rightarrow \infty}^N \Phi^-(x, y) \tilde{\psi}_2(y, \lambda) dy = \rho - 1. \text{ i. m. } \int_{N \rightarrow \infty}^{\infty} \Phi^-(x, y) \tilde{\psi}_2(y, \lambda) \times$$

$$\times dy - \psi_2(x, \lambda) + \tilde{\psi}_2(x, \lambda) - \sum_{n=1}^l (m_n^-)^2 \hat{\psi}_1(x, \lambda_n) \times$$

$$\times \left[\frac{\tilde{\psi}_2'(x, \lambda) \tilde{\psi}_1(x, \lambda_n)}{\lambda_n - \lambda} - \frac{\tilde{\psi}_2(x, \lambda) \tilde{\psi}_1'(x, \lambda_n)}{\lambda_n - \lambda} \right] - \frac{1}{4\pi} \sum_n \int_{\Delta_n^+} \psi_1(x, v) \times$$

$$\times \frac{\tilde{\psi}_2'(x, \lambda) \tilde{\psi}_1(x, v) - \tilde{\psi}_1'(x, \lambda) \tilde{\psi}_2(x, v)}{|c_{12}(v)|^2 (v - \lambda)} \frac{dv}{\sqrt{v}}.$$

Сопоставляя полученные выражения для интегральных преобразований функций $\Phi^\pm(x, y)$, приходим к равенствам

$$r^+(k) \varphi_1(x, k) + \varphi_2(x, k) = \frac{h^-(x, -k)}{c_{12}(k)}, \quad -\infty < k < \infty; \quad (22)$$

$$r^-(\lambda) \psi_1(x, \lambda) + \psi_2(x, \lambda) = \frac{h^+(x, \lambda)}{c_{21}(\lambda)}, \quad \lambda \in \sigma, \quad (23)$$

где

$$h^-(x, -k) = c_{12}(k) \left[e^{-ikx} + 1. \text{ i. m. } \int_{N \rightarrow \infty}^N \Phi^+(x, y) e^{-iky} dy + \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^l (m_n^+)^2 \frac{e^{i(K_n-k)x}}{i(k_n-k)} \varphi_1(x, k_n) -$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi i} e^{-ikx} \sum_n \int_{\Gamma_n} \frac{e^{ivx} \varphi_1(x, v)}{c_{21}(v) c_{12}(v)} \frac{dv}{k-v} \right];$$

$$h^+(x, \lambda) = c_{21}(\lambda) \left[\psi_2(x, \lambda) + \rho - 1. \text{ i. m. } \int_{N \rightarrow \infty}^N \Phi^-(x, y) \tilde{\psi}_2(y, \lambda) dy - \right.$$

$$- \sum_{n=1}^l (m_n^-)^2 \hat{\psi}_1(x, \lambda) \frac{\tilde{\psi}_2'(x, \lambda) \tilde{\psi}_1(x, \lambda_n) - \psi_2(x, \lambda) \tilde{\psi}_1'(x, \lambda_n)}{\lambda_n - \lambda} -$$

$$\left. - \frac{1}{4\pi} \sum_n \int_{\Delta_n^+} \frac{\psi_1(x, v) [\tilde{\psi}_2'(x, \lambda) \tilde{\psi}_1(x, v) - \tilde{\psi}_2(x, \lambda) \tilde{\psi}_1'(x, v)] dv}{|c_{12}(v)|^2 (\gamma - \lambda) \sqrt{\lambda}} \right].$$

Перечислим используемые в дальнейшем свойства функций h^+ , h^- .

1) Функция $h^-(x, -k)$ непрерывна при вещественных $k \neq 0$, кроме, быть может, точек, в которых $\varphi(k) = 0$, но $F'_\lambda(k) \neq 0$; 2) функция $h^+(x, \lambda)$ непрерывна при $\lambda \in \text{Int } \sigma$; 3) $h^-(x, -k) = h^-(x, k)$, k — вещественно, $k \neq 0$; $h^-(x, -k) = h^-(x, k)$, $k^2 \in \Delta \cap \cap (0, \infty)$; 4) $h^+(x, \lambda^B) = h^+(x, \lambda^H)$, $\lambda \in (0, \infty) \cap \text{Int } \sigma$; $h^+(x, \lambda^B) = h^+(x, \lambda^H)$, $\lambda \in (-\infty, 0) \cap \text{Int } \sigma$; 5) $\{\varphi_1, h^-(x, k)\} = 2ikc_{12}(k)$, k — вещественно, $k \neq 0$; $\{\varphi_1, h^+(x, \lambda)\} = 2i\sqrt{\lambda}c_{12}(\lambda)$, $\lambda \in \text{Int } \sigma$; 6) $\sup_{-\infty < k < \infty} \left| \frac{h^-(x, -k)}{c_{12}(k)} \right| < \infty$, $\sup_{\lambda \in \sigma} \left| \frac{h^+(x, \lambda)}{c_{21}(\lambda)} \right| < \infty$; 7) если $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi(\lambda) \times \times \tilde{\varphi}_1(x, \lambda) = 0$, то $\lim_{k \rightarrow 0} kh^-(x, -k) = 0$; если $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi(\lambda) \tilde{\varphi}_1(x, \lambda) \neq 0$, то $\lim_{k \rightarrow 0} \varphi(k) kh^-(x, -k) = 0$. 8) $\lim_{\lambda \rightarrow s_{nj}} (m_2(\lambda) - m_1(\lambda)) h^+(x, \lambda) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$; $j = 1, 2$.

Функция $h^-(x, -k)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость с разрезами по отрезкам Γ_n , причем 5') $\{\varphi_1, h^-(x_1 - k)\} = 2ic_{12}(k)$; 9) $\lim_{|k| \rightarrow \infty} h^-(x, -k) i^{kx} = 1$; 10) $\lim_{k \rightarrow 0} kh^-(x, -k) = 0$, если $\lim_{k \rightarrow 0} \varphi(k) \tilde{\varphi}_1(x, k) = 0$; $\lim_{k \rightarrow 0} k\varphi(k) h^-(x, -k) = 0$, если $\lim_{k \rightarrow 0} \varphi(k) \tilde{\varphi}_1 \times \times (x, k) \neq 0$.

Функция $h^+(x, k)$ ($k = \sqrt{\lambda}$) — аналитична в верхней полуплоскости и 11) $\lim_{|k| \rightarrow \infty} h^+(x, k) e^{-ikx} = 1$; 12) $\lim_{k^2 \rightarrow s_{nj}} (k^2 - s_{nj}) h^+(x, k) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$; $j = 1, 2$; 13) $\lim_{k^2 \rightarrow s_{nj}} \frac{h^-(x, -k)}{c_{12}(k)} (k^2 - s_{nj}) = 0$, $n = 0, 1, \dots, N$; $j = 1, 2$; 14) если λ_n — корень функции $c_{12}(\lambda)$, то $h^-(x, -k_n) = 2ik_n\varphi_1(x, k_n) (m_n^+)^2 \frac{d}{d\lambda} c_{12}(\lambda_n)$; $h^+(x, \lambda_n) = 2i\sqrt{\lambda}\varphi_1(x, \lambda) \times \times (m_n^-)^2 \frac{d}{d\lambda} c_{12}(\lambda) | \lambda = \lambda_n$; если λ_n — корень $c_{21}(\lambda)$, но $c_{12}(\lambda_n) \neq 0$, то $\lim_{k \rightarrow k_n} \frac{h^-(x, -k)}{m_2(k) - m_1(k)} = 2ik_n\varphi_1(x, k_n) (m_n^+)^2 \frac{dc_{21}}{d\lambda}(\lambda_n)$; $h^+(x, \lambda_n) = (m_n^-)^2 \frac{dc_{21}}{d\lambda} \tilde{\varphi}_1(x, \lambda) | \lambda = \lambda_n$. Поступая так же, как в [1, с. 273], получим два тождества, справедливые при вещественных k : $k \neq 0$, $k^2 \in \text{Int } \sigma$:

$$\begin{aligned} h^-(x, k) \varphi_1(x, k) - h^-(x, -k) \varphi_1(x, -k) &= g(k), \\ h^+(x, -k) \varphi_1(x, k) - h^+(x, k) \varphi_1(x, -k) &= g(k), \end{aligned} \quad (24)$$

$$g(k) = \frac{\varphi_1(x, k) \varphi_1(x, k) - h^+(x, k) h^-(x, -k)}{c_{12}(k)}.$$

Учитывая свойство 14) функций $h^+(x, k)$, $h^-(x, -k)$ и соотношения (8), (9), можно доказать, что $g(k)$ — голоморфная в верхней полуплоскости с разрезами по Γ_n функция.

Покажем, что функция $g(k)$ непрерывна на разрезах Γ_n . Для этого подсчитаем скачки первого и второго слагаемых $g(k)$ при переходе через Γ_n , помня, что функции $\varphi_1(x, k)$, $h^+(x, k)$ анали-

тичны в верхней полуплоскости. В силу 4) и связей между $c_{12}(k)$ и $c_{21}(k)$ имеем

$$\varphi_1(x, k) \left[\frac{\psi_1(x, k_n)}{c_{12}(k_n)} - \frac{\psi_1(x, k_n)}{c_{12}(k_n)} \right] = - \frac{\varphi_1(x, k) h^+(x, k)}{c_{21}(k_n) c_{12}(k_n)}.$$

(Здесь и далее в статье k_n — точка правого берега разреза, а k_n — точка левого берега разреза). Так как у функции $\frac{h^-(x, -k)}{c_{12}(k)}$ все слагаемые, кроме $\int_{\Gamma_n} \frac{e^{ivx} \varphi_1(x, v) dv}{c_{21}(v) c_{12}(v) (v-k)} e^{-ikx}$, регулярны на разрезе

Γ_n , то из свойств интегралов типа Коши следует, что

$$h^+(x, k) \left[\frac{h^-(x_1 - k_n)}{c_{12}(k_n)} - \frac{h^-(x, -k_n)}{c_{12}(k_n)} \right] = - \frac{\varphi_1(x, k) h^+(x, k)}{c_{21}(k_n) c_{12}(k_n)}.$$

Отсюда вытекает непрерывность $g(k)$ на Γ_n . Следовательно, границы Γ_n могут быть лишь изолированными особыми точками функций $g(k)$. Но из условий 12), 13) следует, что $\lim_{k \rightarrow i\sqrt{|S_{nj}|}} g(k) (k -$

$-i\sqrt{|S_{nj}|}) = 0$, т. е. это устранимые особые точки функции $g(k)$ и, значит, $g(k)$ голоморфна в верхней полуплоскости. Согласно 9), 11) функция $g(k)$ стремится к 0 при $|k| \rightarrow \infty$, $\text{Im } k \geq 0$.

Левая часть тождества (24) является нечетной функцией k и, следовательно, $g(k) = -g(-k)$ при вещественных $k: k \neq 0$, $k^2 \in \text{Int } \sigma$. Продолжив функцию $g(k)$ нечетным образом в нижнюю полуплоскость, получим функцию $\tilde{g}(k)$. Она однозначна и голоморфна всюду, кроме точки $k=0$ и отрезков вещественной оси, соответствующим положительным лакунам при отображении $k = \sqrt{\lambda}$.

Поступая аналогично предыдущему, учитывая свойства 6), 12), 13) функций h^+ , h^- , c_{12} , c_{21} , можно показать, что $\tilde{g}(k)$ голоморфна в комплексной плоскости, стремится к 0 при $|k| \rightarrow \infty$, а значит, в силу теоремы Лиувилля, $\tilde{g}(k) \equiv 0$ и

$$\varphi_1(x, k) \psi_1(x, k) - h^+(x, k) h^-(x, -k) \equiv 0; \quad (25)$$

$$h^-(x, k) \psi_1(x, k) - h^-(x, -k) \psi_1(x, -k) = 0, \quad h^+(x, -k) \varphi_1(x, k) - h^+(x, k) \varphi_1(x, -k) = 0, \quad k: \text{Im } k = 0, \quad k^2 \in \text{Int } \sigma. \quad (26)$$

Пусть O — множество тех значений x , в которых выполняется хотя бы одно из равенств: $\varphi_1(x, 0) = 0$, $\varphi_1(x, k_n) = 0$ ($k_n = \sqrt{\lambda_n}$, $n = 1, 2, \dots, l$), $\varphi_1(x, \sqrt{S_{nj}}) = 0$, $j = 1, 2$. Известно, что это множество дискретно. Покажем, что при любом $x \in O$ функция $p(k) = \frac{h^+(x, k)}{\varphi_1(x, k)}$ голоморфна в верхней полуплоскости. Для этого, вследствие простоты нулей функции $\varphi_1(x, k)$, достаточно проверить, что каждый ее нуль является нулем функции $h^+(x, k)$.

Но если $x \in O$ и $\varphi_1(x, z) = 0$, то $2izc_{12}(z) \neq 0$ и согласно 5') $h^-(x, -z) \neq 0$. Из тождества (25) получаем, что $h^+(x, z)h^-(x, -z) = 0$, и, значит, $h^+(x, z) = 0$. Из (25) следует, что $\psi_1(x, k) = \frac{h^+(x, k)}{\varphi_1(x, k)}h^-(x, -k)$ при $x \in O$, откуда заключаем, что при $x \in O$ корень функции $h^-(x, -k)$ является корнем функции $\psi_1(x, k)$, а значит, $p(k) = \frac{h^+(x, k)}{\varphi_1(x, k)} = \frac{\psi_1(x, k)}{h^-(x, -k)}$.

Из тождества (25) вытекает, что при вещественных $k: k \neq 0$, $k^2 \in \text{Int } \sigma(p(k) = p(-k))$. Из того, что $\psi_1(x, k) = \psi_1(x, -k)$, $h^-(x, -k) = h^-(x, k)$ при $k: k^2 \in \bigcup_n \Delta_n^+$ следует, что $p(k) = p(-k)$ уже на всей вещественной оси, $k \neq 0$. Продолжая функцию $p(k)$ четным образом в нижнюю полуплоскость, видим, что она голоморфна и однозначна при всех значениях $k \neq 0$. Но $\lim_{k \rightarrow 0} kp(k) = 0$.

Следовательно, точка $k = 0$ является устранимой особой точкой $p(k)$ и по теореме Лиувилля $p(k) \equiv \text{const}$. Так как при $|k| \rightarrow \infty$ $p(k) \rightarrow 1$, то $p(k) \equiv 1$, и $h^+(x, k) = \varphi_1(x, k)$, $h^-(x, -k) = \psi_1(x, k)$ при $x \in O$. Продолжаем $h^+(x, k)$, $h^-(x, -k)$ по непрерывности на $x \in O$. Получаем $\varphi_1(x, k) \equiv h^+(x, k)$, $\psi_1(x, k) \equiv h^-(x, -k)$. Доказательство того, что

$$(m_n^+)^{-2} = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_1(x, \lambda_n)|^2 dx, \quad (m_n^-)^{-2} = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}_1(x, \lambda_n)|^2 dx$$

проводится так же, как в [1, с. 278]. Доказательство теоремы 3 завершено.

Автор выражает искреннюю благодарность Е. Я. Хруслову за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы: 1. Марченко В. А. Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения.— Киев: Наук. думка, 1977.— 332 с. 2. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.— с. 556. 3. Фирсова Н. Е. Обратная задача рассеяния для возмущенного оператора Хилла.— Мат. заметки, т. 18, вып. 6, с. 831—843.

Поступила в редколлегию 05.01.81.

УДК 7.974

Е. А. КОГУТ, А. А. ЯНЦЕВИЧ

О ЛИНЕЙНОЙ ПРЕДСТАВИМОСТИ СОСТОЯНИЙ ДИСКРЕТНЫХ ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ОПЕРАТОРНЫМИ J-УЗЛАМИ

I. Пусть задан J-узел $J = (T, H, \Phi, E, K)$, т. е. задана пара гильбертовых сепарабельных пространств H, E и линейные ограниченные операторы $T \in [H, H]$, $(\mathcal{E}T^{-1})$, $K \in [E, E]$ и $\Phi \in [E, H]$, удовлетворяющие узловым соотношениям:

1. $I - TT^* = \Phi\Phi^+$, где $\Phi^+ = J\Phi^*$ (1.1), $J \in [E, E]$, $J^2 = I$, $J^* = J$.

2. $I - K^+K = \Phi^+\Phi$. (1.2)

И пусть имеется открытая система, ассоциированная с заданным J -узлом [1], т. е. пара отображений R и $S \in [H \dot{+} E, H \dot{+} E]$, задаваемых соотношениями $x_{n+1} = Tx_n + \Phi u_n$ (1.3), $v_n = \Psi x_n + Ku_n$ (1.4), где $x_n \in H$; $u_n \in E$, $v_n \in E$, $n = 0, 1, 2, \dots$; $x_n|_{n=0} = x_0$ и $\Psi = -(K^+)^{-1} \cdot \Phi^+ \cdot T$.

Рассмотрим частные решения системы (1.3) — (1.4), отвечающие входам $u_n = u\xi^n$, где ξ — некоторое комплексное число, и определим в этом случае отображение входа системы на выход. Представляя аналогичным образом внутреннее состояние и выход системы $x_n = x\xi^n$; $v_n = v\xi^n$, получаем $x = R(\xi)u$, где $R(\xi) = (\xi I - T)^{-1}\Phi$; $v = W(\xi)u$, где $W(\xi) = K + \Psi(\xi I - T)^{-1}\Phi$ (1.5).

Пусть L — некоторый гильбертовозначный линейный функционал из E в H , действующий на функциях $u(t_n) \in E$, $u(t_n) = u_n$; $n = 0, 1, 2, \dots$. Построим пару отображений $[\hat{R}_J(L)u]_{n+1} = T \times [\hat{R}_J(L)u]_n + \Phi u_n$ (1.6); $[\hat{S}_J(L)u]_n = \Psi [\hat{R}_J(L)u]_n + Ku_n$ (1.7), определив $[\hat{R}_J(L)u]_0 = x_0$.

Возникает вопрос, в каком случае, подав на вход системы сигнал u_n , получим линейно представимое внутреннее состояние [2], т. е. $[R_J(L)u]_n = A^n x_0$ (1.8), где $A \in [H, H]$; x_0 — некоторый элемент из H , $n = 0, 1, 2, \dots$?

Теорема 1. Для того чтобы выполнялось соотношение (1.6), необходимо и достаточно, чтобы было $(A - T)A^n h = \Phi u_n$; $n = 0, 1, 2, \dots$ (1.9).

Доказательство. $A^{n+1}h = TA^n h + \Phi u_n$, $(A - T)A^n h = \Phi u_n$.

Доказательство достаточности также очевидно. Обозначим через $\mathfrak{M}(E, H)$ множество всех ограниченных невырожденных линейных операторов, действующих из E в H , а через $\xi(T)$ — множество операторов $A \in [H, H]$, для которых $(A - T) \in \mathfrak{M}(H) = \mathfrak{M}(H, H)$.

Пусть теперь $A \in \xi(T)$ и выполняется (1.7), тогда $[\hat{R}_J(L)u]_n = (A - T)^{-1}\Phi u_n$, в частности при $n = 0$, получим $x_0 = (A - T)^{-1}\Phi u_0$ и для отображения $\hat{S}_J(L)$ получаем $[S_J(L)u]_n = [K + \Psi(A - T)^{-1}\Phi]u_n$.

Поставим теперь в соответствие J -узлу две оператор-функции: $R_J(A) = (A - T)^{-1}\Phi$ (1.10); $W_J(A) = K + \Psi(A - T)^{-1}\Phi$ (1.11). Областью определения этих функций является $\xi(T)$ и их значениями являются линейные ограниченные операторы, действующие соответственно из E в H и из E в E . Заметим, что при $A = \xi I$, где ξ принадлежит резольвентному множеству оператора T , оператор-функция (1.11) совпадает с характеристической оператор-функцией данного J -узла (1.5).

Следовательно, $W_J(A)$ является продолжением (1.5) на все $\xi(T)$. Легко проверить, что $A^n R_J(A)u_0 = R_J(A)u_n$ (1.12).

Элементы u_n , ($n = 1, 2, \dots$), удовлетворяющие (1.12), существуют тогда и только тогда, когда $A^n R_J(A) u_0$ принадлежит множеству значений оператора $R_J(A)$.

Если $\Phi \in \mathfrak{M}(E, H)$, то и $R_J(A) \in \mathfrak{M}(E, H)$, и тогда $u_n = R_J^{-1}(A) A^n R_J(A) u_0$ для любого $u_0 \in E$.

Теперь рассмотрим вопрос о линейной представимости входа открытой системы, дающего линейную представимость внутреннего состояния, т. е. когда существует оператор B_e , такой, что $u_n = B_e^n u_0$ и выполняется (1.12).

Очевидно, что должно выполняться равенство

$$A^n R_J(A) u_0 = R_J(A) B_e^n u_0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.13)$$

Если последнему равенству удовлетворяют все $u_0 \in E$, то имеем операторное уравнение $A^n R_J(A) = R_J(A) B_e^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (1.14)

Введем теперь ряд определений для J -узлов и ассоциированных с ними открытых систем.

Определение. Всякую пару $\langle u_n, [\hat{R}_J(L) u]_n \rangle$ и всякую тройку $\langle u_n, [\hat{R}_J(L) u]_n, [\hat{S}_J(L) u]_n \rangle$, где $u_n \in E$ при $n = 0, 1, 2, \dots$ и только такую будем называть допустимой для системы (1.6) — (1.7).

Из предыдущих рассмотрений и последнего определения вытекает следующая

Лемма 1. 1) Пара вида $\langle B_e^n u_0, A x_0^n \rangle$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где $A \in \xi(T)$ допустима для системы (1.6) — (1.7) тогда и только тогда, когда $x_0 = R_J(A) u_0$ и выполняется (1.13).

2) Все пары вида $\langle B_e^n u, A^n x \rangle$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где $A \in \xi(T)$; $u \in E$ допустимы для системы (1.6) — (1.7) тогда и только тогда, когда $x = R_J(A) u$ и выполняется (1.14).

Теперь о возможности линейной представимости выхода открытой системы, т. е. допустим, что кроме (1.13) выполняется $[\hat{S}_J(L) u]_n = B_{av}^n v_0$ (1.15). Учитывая, что $v_0 = W_J(A) u_0$, находим $B_{av}^n W_J(A) u_0 = W_J(A) B_e^n u_0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (1.16). Если (1.16) выполняется для всех $u_0 \in E$, то имеем операторное уравнение $B_{av}^n W_J(A) = W_J(A) B_e^n$ (1.17). Тем самым доказана следующая

Лемма 2. 1) Тройка вида $\langle B_e^n u_0, A x_0^n, B_{av}^n v_0 \rangle$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где $A \in \xi(T)$ допустима для системы (1.6) — (1.7) тогда и только тогда, когда $x_0 = R_J(A) u_0$; $v_0 = W_J(A) u_0$ и выполняются (1.13) и (1.16). 2) Все тройки вида $\langle B_e^n u, A x_0^n, B_{av}^n v \rangle$, где $A \in \xi(T)$; $u \in E$, допустимы для системы (1.6) — (1.7) тогда и только тогда, когда $x = R_J(A) u$; $v = W_J(A) u$ и выполняются (1.14) и (1.17).

Здесь следует сразу отметить, что достаточно требовать выполнение условий (1.14) и (1.17) при $n = 1$, а при $n = 2, 3, \dots$ они будут выполняться автоматически.

Определение. Пару операторов $\langle B_e, A \rangle$ или тройку операторов $\langle B_e, A, B_a \rangle$ будем называть допустимыми для J -узла, если $B_e \in [E, E]$; $B_a \in [E, E]$; $A \in \xi(T)$ и выполняются соотношения (1.14) и (1.17) при $n = 1$.

Определение. J -узел называется сильно неунитарным, если $\Phi \in \mathfrak{M}(E, H)$. Можно доказать, что, если J -узел сильно неунитарен, то $\dim E = \dim H$ и $(I - TT^*) \in \mathfrak{M}(H)$.

Если J -узел сильно неунитарен, то:

1. Для всех $A \in \xi(T)$ существует единственный оператор $B_e \in [E, E]$ такой, что пара $\langle B_e, A \rangle$ допустима для J -узла.

2. Для всех $A \in \xi(T)$ таких, что $W_J(A) \in \mathfrak{M}(E)$ существуют однозначно определенные операторы $B_e \in [E, E]$, $B_a \in [E, E]$ такие, что тройка $\langle B_e, A, B_a \rangle$ допустима для J -узла.

Доказательства этих утверждений следуют из (1.14) и (1.17).

II. Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о линейной представимости в двойственной по отношению к данной открытой системе, которая задается двумя следующими отображениями: $x_n = T^*x_{n+1} + \Psi^+v_n$ (2.1), $u_n = \Phi^+x_{n+1} + K^+v_n$ (2.2).

Ясно, что как только входные сигналы двойственной системы совпадут с выходами исходной открытой системы, то уравнения (2.1) и (2.2) опишут тот же процесс в обратном направлении.

Проанализируем случай, когда входные сигналы двойственной системы не являются выходами исходной открытой системы.

Пусть $\tilde{L}: E \rightarrow H$ некоторый гильбертовозначный линейный функционал, действующий на функциях $v(t_n) \in E$ $v(t_n) = v_n$; $n = N, N-1, \dots, 0$ при $N = 1, 2, \dots$. Аналогично случаю исходной системы построим пару отображений $[\tilde{R}_J(\tilde{L})v]_n = T^*[\tilde{R}_J \times \times (\tilde{L})v]_{n+1} + \Psi^+v_n$ (2.3), $[S_J(\tilde{L})v]_n = \Phi^+[\tilde{R}_J(\tilde{L})v]_{n+1} + K^+v_n$ (2.4) и зададим начальное условие $[\tilde{R}_J(\tilde{L})v]_N = x_N$, $n = N-1, N-2, \dots, 0$; $N = 1, 2, \dots$.

Рассмотрим линейно представимые элементы внутреннего состояния. Из самого вида двойственной системы ясно, что мы должны видоизменить определение линейной представимости, а именно $x_n = A^{N-n}x_N$, $n = N, N-1, \dots, 0$. И возникает прежний вопрос, когда, подав на вход двойственной системы сигнал $v(t_n)$, мы получим линейно представимое внутреннее состояние $[R_J(\tilde{L}) \times \times v]_n = A^{N-n}x_N$ (2.5), $n = N, N-1, \dots, 0$, где $x_N \in H$.

Как легко видеть, для того чтобы выполнялось соотношение (2.5), необходимо и достаточно, чтобы $(A - T^*)A^{N-n-1}x_N = \Psi^+v_n$, где $n = N-1, N-2, \dots, 0$ (2.6).

Обозначим через $\eta(T)$ множество операторов A , для которых существует $(A - T^*) \in \mathfrak{M}(H)$. Заметим, что $\eta(T) = \xi(T^*)$. Допустим, что $A \in \eta(T)$, тогда $[\tilde{R}_J(\tilde{L})v]_n = A[R_J(\tilde{L})v]_{n+1} = A(A - T^*)^{-1}\Psi^+v_n$ (2.7). В частности, при $n = N$ получим $x_N = A \times \times (A - T^*)^{-1}\Psi^+v_N$ (2.8).

Для отображения $[\tilde{S}_J(\tilde{L})v]_n$ имеем $[\tilde{S}_J(\tilde{L})v]_n = [K^+ + \Phi^+(A - T^*)^{-1}\Psi^+]v_n$. Теперь введем две оператор-функции $\tilde{R}_J(A) = A \times (A - T^*)^{-1}\Psi^+$ (2.9), $\tilde{W}_J(A) = K^+ + \Phi^+(A - T^*)^{-1}\Psi^+$ (2.10).

Предполагая линейную представимость внутреннего состояния и учитывая равенства (2.5), (2.7), (2.8), (2.9) находим $A^{N-n} \times \tilde{R}_J(A)v_N = \tilde{R}_J(A)v_n$ (2.11). Вопрос, в каком случае существует оператор $B_e \in [E, E]$ такой, что $v_n = B_e^{N-n}v_N$, удовлетворяющий (2.11), решается аналогично случаю исходной системы.

Как и в случае исходной открытой системы, сформулируем два утверждения, которые легко проверяются.

Лемма 3. 1) Пара вида $\langle B_e^{N-n}v_N; A^{N-n}x_N \rangle$, $n = N-1, N-2, \dots, 0$, $A \in \eta(T)$ допустима для двойственной системы тогда и только тогда, когда $x_N = \tilde{R}_J(A)v_N$ и выполняется $A^{N-n}\tilde{R}_J(A)v_N = \tilde{R}_J(A)B_e^{N-n}v_N$ (2.12).

2. Все пары вида $\langle B_e^{N-n}v, A^{N-n}x \rangle$, $n = N-1, N-2, \dots, 0$; $A \in \eta(T)$; $v \in E$; $x \in H$ допустимы для двойственной системы тогда и только тогда, когда $x = \tilde{R}_J(A)v$ и выполняется $A^{N-n} \times \tilde{R}_J(A) = \tilde{R}_J(A)B_e^{N-n}$ (2.13), $n = N-1, N-2, \dots, 0$; $N=1, 2, 3, \dots$.

Лемма 4. 1) Тройка вида $\langle B_e^{N-n}v_N; A^{N-n}x_N; B_a^{N-n}u_N \rangle$, $A \in \eta(T)$; $n = N-1, N-2, \dots, 0$ допустима для двойственной системы тогда и только тогда, когда $x_N = \tilde{R}_J(A)v_N$, выполняется (2.12) и $B_a^{N-n}\tilde{W}_J(A)v_N = \tilde{W}_J(A)B_e^{N-n}v_N$, причем $u_N = \tilde{W}_J(A)v_N$.

2) Все тройки вида $\langle B_e^{N-n}v, A^{N-n}x, B_a^{N-n}u \rangle$, где $A \in \eta(T)$; $x \in H$; $u \in E$; $v \in E$; $n = N-1, N-2, \dots, 0$, допустимы для двойственной системы тогда и только тогда, когда $x = \tilde{R}_J(A)v$; $u = \tilde{W}_J(A)v$ и выполняются условия (2.13) и $B_a^{N-n} \times \tilde{W}_J(A) = \tilde{W}_J(A)B_e^{N-n}$ (2.14).

III. Примеры открытых систем, имеющих линейно представимые решения.

Рассмотрим случай, когда $E = H$ и $\dim H = 2$.

Пусть $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ действует в H . В качестве $\mathcal{U}$ возьмем матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Как нетрудно видеть, $\mathcal{U}^2 = I$ и $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}$. Включим эти операторы в некоторый J -узел и рассмотрим ассоциированную с ним открытую систему. Используя соотношения (1.2), (1.3) находим операторы Φ и K . Легко проверить, что в качестве указанных операторов могут быть взяты следующие матрицы $\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, а в качестве $\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, открытая система имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}^{(1)} \\ x_{n+1}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n^{(1)} \\ u_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_n^{(1)} \\ v_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n^{(1)} \\ u_n^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Введем в рассмотрение матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, потребовав, чтобы $\det(A - T) \neq 0$.

Допустим, что A дает линейную представимость внутреннего состояния. Найдем условия, при которых существует матрица B_e такая, что выполняется равенство (1.14) при $n = 1$. Как уже отмечалось, выполнение (1.14) при $n = 2, 3, \dots$ будет следовать из выполнения его при $n = 1$.

Для определения элементов матрицы B_e получим неоднородную линейную систему с определителем $[\det(A - T)]^2$, который отличен от 0, а значит B_e определяется по A единственным образом.

Заметим, что правая часть равенства $R_J(A) B_e = AR_J(A)$ не обращается в 0, за исключением, конечно, тривиального случая, когда $A = 0$.

Используя то же условие (1.14), можно по уже заданной матрице B_e , дающей линейную представимость входа, найти матрицу A , дающую линейную представимость внутреннего состояния открытой системы, ассоциированной с J -узлом. Например, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, то $B_e = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Характеристическая оператор-функция $W_J(A)$ будет в этом случае равна $W_J(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, а оператор B_a , дающий линейную представимость выхода, $B_a = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Двойственная система по отношению к заданной будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1}^{(1)} \\ x_{n+1}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_n^{(1)} \\ v_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_n^{(1)} \\ u_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1}^{(1)} \\ x_{n+1}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_n^{(1)} \\ v_n^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Используя формулы (2.13), (2.14), аналогично можно решить вопрос линейной представимости входа, внутреннего состояния и выхода двойственной системы.

Рассмотрим еще один пример J -узла и открытой системы, ассоциированной с ним, допускающей линейную представимость входа заданной системы и двойственной с ней одним оператором A .

Пусть $H = E$, $\dim H = 4$, оператор $T = \begin{pmatrix} 0 & \lambda I \\ \nu I & 0 \end{pmatrix}$, где I — дву-

мерные единичные матрицы, λ и v — вещественные числа, причем $|\lambda| > 1$; $|v| < 1$ и $v \neq 0$. Инволюция $J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$.

Используя соотношения (1.2), (1.3), находим

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & V\sqrt{\lambda^2 - 1}I \\ \sqrt{1 - v^2}I & 0 \end{pmatrix} \text{ и } K = \begin{pmatrix} vI & 0 \\ 0 & \lambda I \end{pmatrix}.$$

А в качестве оператора A возьмем следующую матрицу: $A = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma \\ \Gamma & 0 \end{pmatrix}$, где Γ — произвольная унитарная двумерная матрица. Оказывается, что все такие операторы, дающие линейную представимость внутреннего состояния открытой системы (1.4) — (1.5), дают и линейную представимость входов данной и двойственной с ней открытых систем: $B_e = \tilde{B}_e$;

$$B_e = \begin{pmatrix} 0 & V\sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - v^2}}(\Gamma - vI)\Gamma(\Gamma - \lambda I)^{-1} \\ V\sqrt{\frac{1 - v^2}{\lambda^2 - 1}}(\Gamma - \lambda I)\Gamma(\Gamma - vI)^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

И хотя $R_J(A) \neq \tilde{R}_J(A)$, равными оказываются характеристические оператор-функции $W_J(A)$ и $\tilde{W}_J(A)$, а значит совпадают и операторы B_a и $\tilde{B}_a$, дающие линейную представимость выходов указанных открытых систем. Характеристическая оператор-функция в этом случае является унитарной матрицей и равна $W_J(A) = \begin{pmatrix} \omega(v) & 0 \\ 0 & \omega(\lambda) \end{pmatrix}$, где $\omega(t) = (t^2 - 1)(\Gamma - tI)^{-1} + tI$.

Список литературы: 1. Янцевич А. А. Операторные J -узлы и ассоциированные открытые системы. — Теория функций, анализ и их приложения, 1973, вып. 17, с. 215—220. 2. Маркус И. А., Цекановский Э. Р., Янцевич А. А. Линейно представимые решения дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах. — Математические методы в кибернетике, 1980, вып. 1, с. 17—28.

Поступила в редколлегию 27.01.81.

УДК 7.974

Е. А. КОГУТ, А. А. ЯНЦЕВИЧ

О СЦЕПЛЕНИИ ОПЕРАТОРНЫХ УЗЛОВ И АССОЦИИРОВАННЫХ С НИМИ ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим J -узел $J = (T, H, \Phi, E, K)$, т. е. пару сепарабельных гильбертовых пространств H, E и линейные ограниченные операторы $T \in [H, H]$, $(\exists T^{-1})$; $K \in [E, E]$; $\Phi \in [E, H]$ связанные между собой узловыми соотношениями $I - TT^* = \Phi\Phi^+$; $I - K^+K = \Phi^+\Phi$, где $\Phi^+ = \mathcal{J}\Phi^*$; $K^+ = \mathcal{J}K^*\mathcal{J}$ и $\mathcal{J} = \mathcal{J}^*$; $\mathcal{J}^2 = I$. Введем оператор $\Psi = -(K^+)^{-1}\Phi^+T$ и открытую систему ассоциированную с данным J -узлом, т. е. пару отображений в простран-

ствах H и E [1]: $x_{n+1} = Tx_n + \Phi u_n$, $v_n = \Psi x_n + Ku_n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$; $x_n \in H$; $u_n, v_n \in E$.

Исследуя вопрос о линейной представимости внутреннего состояния, входа и выхода открытой дискретной системы, получаем две оператор-функции [1]: $R_J(A) = (A - T)^{-1}\Phi$ (1); $W_J(A) = K + \Psi(A - T)^{-1}\Phi$ (2), где оператор $A \in \xi(T)$, т. е. $(A - T) \in \mathfrak{M}(H)$, и который дает линейную представимость внутреннего состояния открытой системы.

Тот факт, что $W_J(A)$ является продолжением характеристической оператор-функции $W_J(\xi)$ на $\xi(T)$ и вызвал интерес к дальнейшему его изучению.

В настоящей работе рассматривается сцепление J -узлов и ассоциированных с ними дискретных открытых систем и определение характеристической оператор-функции для соответствующих сцеплений.

Пусть T_1, T_2 — два оператора, определенных в гильбертовых пространствах H_1 и H_2 . Сцеплением этих операторов называется всякий оператор T , действующий в $H = H_1 \oplus H_2$ и представимый в виде $T = T_1P_1 + T_2P_2 + C_T$, где P_1 и P_2 проекторы H на H_1 и H_2 соответственно, а оператор C_T , который называется коэффициентом сцепления, отображает H_1 в H_2 и аннулирует H_2 . Сцепление операторов T_1 и T_2 будем обозначать: $T = T_1 \curlywedge T_2$.

Если $T_1, A_1 \in [H_1, H_1]$ и $T_2, A_2 \in [H_2, H_2]$ и $T = T_1 \curlywedge T_2$ и $A = A_1 \vee A_2$, то очевидно $A - T = (A_1 - T_1) \curlywedge (A_2 - T_2)$ (3), причем $C_{A-T} = C_A - C_T$.

Определение. Пусть $J_i = (T_i, H_i, \Phi_i, E, K_i)$ ($i = 1, 2$) — два операторных J -узла с одинаковыми внешними пространствами E и одинаковой инволюцией $\mathcal{J}$; $J = (T, H, \Phi, E, K)$ называется сцеплением J -узлов J_1 и J_2 , ($J = J_1 \curlywedge J_2$), если выполняются условия: 1) $T = T_1P_1 + T_2P_2 + \Phi_2\Psi_1P_1$; 2) $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2K_1$; 3) $\Psi = K_2\Psi_1P_1 + \Psi_2P_2$; 4) $K = K_2 \cdot K_1$. Используя узловые соотношения J -узлов J_1 и J_2 , легко доказать следующее утверждение: сцепление двух операторных J -узлов является J -узлом [2].

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $J_i = (T_i, H_i, \Phi_i, E, K_i)$, ($i = 1, 2$) два J -узла и $J = J_1 \curlywedge J_2$. Если $A = A_1 \curlywedge A_2$, где $A_1 \in \xi(T_1)$, $A_2 \in \xi(T_2)$, то

1. $A \in \xi(T)$;
2. $R_J(A) = R_{J_2}(A_2)W_{J_1}(A_1) + [I - (A_2 - T_2)^{-1}C_A]R_{J_1}(A_1)$; (4)
3. $W_J(A) = W_{J_2}(A_2)W_{J_1}(A_1) - \Psi_2(A_2 - T_2)^{-1}C_AR_{J_1}(A_1)$. (5)

Доказательство. Как нетрудно видеть, оператор $\Omega = (A_1 - T_1)^{-1}P_1 + (A_2 - T_2)^{-1}P_2 - (A_2 - T_2)^{-1}C_{A-T}(A_1 - T_1)^{-1}P_1$ (6)

является обратным по отношению к $A - T$ и, в силу ограниченности Ω , $A \in \xi(T)$. Согласно (1), (6), находим

$$R_J(A) = (A - T)^{-1}\Phi = (A_1 - T_1)^{-1}P_1\Phi + (A_2 - T_2)^{-1}P_2\Phi - \\ - (A_2 - T_2)^{-1}C_A(A_1 - T_1)^{-1}P_1\Phi + (A_2 - T_2)^{-1}C_T(A_1 - \\ - T_1)^{-1}P_1\Phi = R_{J_1}(A_1) + R_{J_2}(A_2)K_1 - (A_2 - T_2)^{-1}C_A R_{J_1}(A_1) + \\ + R_{J_2}(A_2)\Psi_1 R_{J_1}(A_1) = R_{J_2}(A_2)W_{J_1}(A_1) + [I - (A_2 - \\ - T_2)^{-1}C_A]R_{J_1}(A_1);$$

$$W_J(A) = K + \Psi R_J(A) = K_2K_1 + K_2\Psi R_{J_1}(A_1) + \\ + \Psi_2 R_{J_2}(A_2)W_{J_1}(A_1) - \Psi_2(A_2 - T_2)^{-1}C_A R_{J_1}(A_1) = \\ = K_2W_{J_1}(A_1) + \Psi_2 R_{J_2}(A_2)W_{J_1}(A_1) - \Psi_2(A_2 - T_2)^{-1}C_A R_{J_1}(A_1) = \\ = W_{J_2}(A_2)W_{J_1}(A_1) - \Psi_2(A_2 - T_2)^{-1}C_A R_{J_1}(A_1)$$

и теорема доказана.

Следствие 1. Заметим, что в условиях теоремы 1 имеют место равенства $R_J(A_1P_1 + A_2P_2) = R_{J_1}(A_1) + R_{J_2}(A_2)W_{J_1}(A_1)$; $W_J(A_1P_1 + A_2P_2) = W_{J_2}(A_2)W_{J_1}(A_1)$. Для доказательства этих соотношений нужно взять коэффициент сцепления $C_A = 0$.

Следствие 2. Если в теореме 1 положить $A_1 = \xi I$, где $\xi \in \sigma(T_1)$ и $A_2 = zI$, где $z \in \sigma(T_2)$ и $C_A = 0$, то получим «теорему умножения» для характеристических оператор-функций $R_J(A) = R_{J_2}(z)W_{J_1}(\xi) + R_{J_1}(\xi)$; $W_J(A) = W_{J_2}(z)W_{J_1}(\xi)$.

В работе [1] было введено понятие допустимых двоек и троек операторов для J -узла и операторы B_e и B_a , дающие линейную представимость входа и выхода открытой системы соответственно.

Для сцеплений J -узлов оказывается справедлива следующая **Теорема 2.** Пусть $J = J_1 \Upsilon J_2$ — сцепление узлов $J_i = (T_i, H_i, \Phi_i, E, K_i)$, где $i = 1, 2$ и пусть двойка $\langle D, A_2 \rangle$ допустима для J_2 и тройка $\langle B_e, A_1, D \rangle$ допустима для J_1 . Если $A = A_1 \Upsilon A_2$, то для того чтобы двойка операторов $\langle B_e, A \rangle$ была допустима для J , необходимо и достаточно выполнение соотношения

$$[(A_2 - T_2)^{-1}C_A A_1 - A_2(A_2 - T_2)^{-1}C_A + C_A]R_{J_1}(A_1) = 0. \quad (7)$$

Для доказательства необходимости, используя (4) и соотношение $R_{J_2}(A_2)D = A_2R_{J_2}(A_2)$, $R_{J_1}(A_1)B_e = A_1R_{J_1}(A_1)$, $DW_{J_1}(A_1) = W_{J_1}(A_1)B_e$, имеем $0 = R_J(A)B_e - AR_J(A) = A_2R_{J_2}(A_2)W_{J_1} \times \times (A_1) + [I - (A_2 - T_2)^{-1}C_A]A_1R_{J_1}(A_1) - AR_{J_2}(A_2)W_{J_1}(A_1) - A \times \times [I - (A_2 - T_2)^{-1}C_A]R_{J_1}(A_1) = [A_2(A_2 - T_2)^{-1}C_A - (A_2 - T_2)^{-1} \times \times C_A A_1 - C_A]R_{J_1}(A_1)$. Доказательство достаточности после проведенных выкладок очевидно.

Теорема 3. Пусть $J = J_1 \Upsilon J_2$ — сцепление узлов $J_i = (T_i, H_i, \Phi_i, E, K_i)$, где $i = 1, 2$ и пусть тройка операторов $\langle D, A_2, B_a \rangle$ допустима для J_2 и тройка $\langle B_e, A_1, D \rangle$ допустима для J_1 . Если $A = A_1 \Upsilon A_2$, то для того чтобы тройка $\langle B_e, A, B_a \rangle$ была допустима для J , необходимо и достаточно одновременное выполнение условий (7) и (8)

$$[\Psi_2(A_2 - T_2)^{-1}C_A A_1 - B_a \Psi_2(A_2 - T_2)^{-1}C_A]R_{J_1}(A_1) = 0, \quad (8)$$

Для доказательства необходимости кроме соотношений, использованных для доказательства теоремы 2, имеем еще два $B_a W_{J_2}(A_2) = W_{J_2}(A_2) D$, $B_a W_J(A) = W_J(A) B_e$, $0 = B_a W_J(A) - W_J(A) B_e = B_a W_{J_2}(A_2) W_{J_1}(A_1) - B_a \Psi_2(A_2 - T_2)^{-1} C_A R_{J_1}(A_1) - W_{J_2}(A_2) W_{J_1}(A_1) B_e + \Psi_2(A_2 - T_2)^{-1} C_A R_{J_1}(A_1) B_e = [\Psi_2(A_2 - T_2)^{-1} C_A A_1 - B_a \Psi_2(A_2 - T_2)^{-1} C_A] R_{J_1}(A_1)$. Доказательство достаточности, как и в случае теоремы 2, не вызывает трудностей.

Следствия. 1. Если $J = J_1 \vee J_2$ и тройка операторов $\langle B_e, A_1, D \rangle$ допустима для J_1 и тройка $\langle D, A_2, B_a \rangle$ допустима для J_2 , то тройка операторов $\langle B_e, A_1 P_1 + A_2 P_2, B_a \rangle$ допустима для узла J .

Следствие 2. Если операторы A_2 и T_2 коммутируют, то соотношения (7), (8) принимают вид $(C_A A_1 - T_2 C_A) R_{J_1}(A_1) = 0$, $(\Psi_2 T_2 - B_a \Psi_2)(A_2 - T_2)^{-1} C_A R_{J_1}(A_1) = 0$.

Следствие 3. Если узел J_1 сильно неунитарен, то в (7), (8) можно опустить $R_{J_1}(A_1)$ и $(A_2 - T_2)^{-1} C_A A_1 - A_2 (A_2 - T_2)^{-1} \times \times C_A + C_A = 0$, $\Psi_2 (A_2 - T_2)^{-1} C_A A_1 - B_a \Psi_2 (A_2 - T_2)^{-1} C_A = 0$.

Список литературы: 1. Козут Е. А., Янцевич А. А. О линейной представимости состояний дискретных открытых систем, ассоциированных с операторными J -узлами. См. статью в настоящем сборнике, с. 60—66. 2. Бродский В. М. Теоремы умножения и деления характеристических функций обратимого оператора. — Acta Scientiarum Mathematicarum, 1971, 32, p. 165—175.

Поступила в редколлегию 27.01.81.

УДК 624.07:534.1

И. Н. ГИНЗБУРГ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Решается нелинейная задача устойчивости упруго защемленного абсолютно твердого стержня, нагруженного двумя силами, одна из которых — P действует вдоль оси стержня, а другая — Q — перпендикулярна к оси. Силы P и Q изменяются независимо.

Такая задача рассматривалась А. Р. Ржаницыным [2] как пример, на котором удобно иллюстрировать различные подходы к исследованию устойчивости. Эта задача чрезвычайно наглядно иллюстрирует метод [1], позволяющий находить нагрузки, при которых имеет место ветвление решений, и устанавливать зависимость этих решений от нагрузок при силах, превышающих критические.

При решении задачи будем считать, так же как и в [2], что силы P , Q не изменяют линии действия. Уравнение равновесия стержня, изображенного на рис. 1, имеет вид $\alpha \theta - P l \sin \theta = Q l \cos \theta$ (1), где θ — угол поворота стержня относительно первоначального положения; α — коэффициент жесткости заделки.

Поделив обе части уравнения (1) на α и обозначив $\frac{Pl}{\alpha} = p$, $\frac{Ql}{\alpha} = q$, перепишем (1) в виде $F(\theta, p, q) = \theta - p \sin \theta - q \cos \theta = 0$ (2). Заменяя $\sin \theta$ и $\cos \theta$ соответствующими рядами, получим

$$\theta(1-p) = p \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + q \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}. \quad (3)$$

При $p=1$ и $q=0$ уравнение (3) имеет тривиальное решение. Будем разыскивать всевозможные локальные продолжения по па-

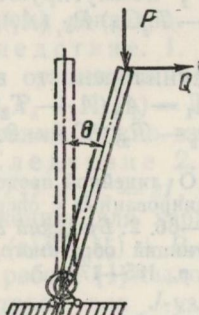


Рис. 1

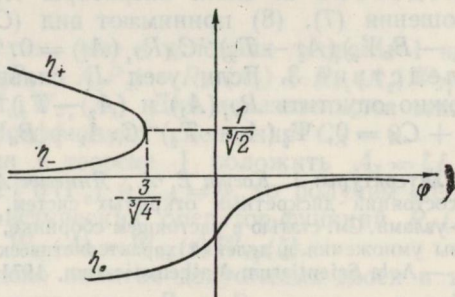


Рис. 2

раметрам p и q решения $\theta=0$. Положим $p=1+\lambda$ и запишем уравнение (3) в виде

$$L(\theta, \lambda, q) = -\lambda\theta - q + \frac{1}{6}\theta^3 - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} - q \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} = 0. \quad (4)$$

Согласно терминологии, принятой в работе [1], (4) — это уравнение разветвления в случае двух числовых параметров. Число малых решений, ответвляющихся от нулевого, определяется наименьшим показателем степени переменной θ и равно 3. Ниже будет показано, что все эти решения вещественные.

Для того чтобы точка (θ, λ, q) была точкой ветвления решения θ уравнения (4), должно выполняться следующее условие: $\partial L(\theta, \lambda, q) / \partial \theta = 0$ (5). С точки зрения механики уравнение (5) является условием, при котором система находится в состоянии безразличного равновесия (равенство нулю второй производной от потенциальной энергии системы).

В результате исключения θ из системы уравнений (4), (5) получаем в окрестности точки $(0, 0)$ плоскости (λ, q) дискриминантную кривую, которая может состоять из нескольких ветвей. Кри-

вой разветвления малых решений уравнения (4) согласно работе [1] называется совокупность тех ветвей дискриминантной кривой, при переходе через которые действительно меняется число малых решений уравнения (4).

Для нахождения дискриминантной кривой поступают следующим образом. На основании подготовительной теоремы Вейерштрасса [1] задачу отыскания малых решений уравнения (4) можно заменить эквивалентной задачей разыскания малых решений уравнения $P(\theta, \lambda, q) = 0$, где $P(\theta, \lambda, q)$ — многочлен степени k , причем $P_0(\theta, 0, 0) \neq 0$ в некоторой окрестности точки $\theta = 0$. Далее составляется результат $R(\lambda, q)$ многочленов $P(\theta, \lambda, q)$ и $P_0(\theta, \lambda, q)$.

Уравнение $R(\lambda, q) = 0$ и есть искомое уравнение дискриминантной кривой. Итак, $P(\theta, \lambda, q) = -\lambda\theta - q + (1/6)\theta^3 = 0$ (6); $P_0(\theta, \lambda, q) = -\lambda + (1/2)\theta^2 = 0$ (7). Результат многочленов $R(\lambda, q) = 4\lambda^3 + \frac{9}{2}q^2$, а приближенное уравнение дискриминантной кривой — $8\lambda^3 + 9q^2 = 0$ (8). Для исследования количества малых решений уравнения (6) удобно перейти от двух параметров λ и q в (6) к одному параметру, принимающему произвольные вещественные значения. Для этого введем новые переменные

$$-\sqrt[3]{6\lambda q}^{-\frac{2}{3}} = \varphi, \quad \sqrt[3]{-6q\eta} = \theta, \quad (9)$$

тогда уравнение (6) примет вид $1 + \varphi \cdot \eta + \eta^3 = 0$ (10). График η как функции φ изображен на рис. 2. Точка $\left(-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ является точкой ветвления. Существует три однозначные ветви: * ветвь $\eta = \eta_0(\varphi)$, определенная при всех значениях φ , и ветви $\eta = \eta_-(\varphi)$ и $\eta = \eta_+(\varphi)$, определенные при $\varphi < -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ и совпадающие при $\varphi = -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. Таким образом, кривая (8), из уравнения которой

следует $\sqrt[3]{6\lambda q}^{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, является приближенной кривой разветвления.

Определяя из уравнения (10) с нужной степенью точности $\eta_0(\varphi)$, $\eta_-(\varphi)$, $\eta_+(\varphi)$, с помощью формул (9) с той же степенью точности находим малые решения приближенного уравнения разветвления (6), а значит и малые решения исходной задачи.

Чтобы получить асимптотику решений вблизи дискриминантной кривой, положим

$$\varphi = -\frac{3}{\sqrt[3]{4}} - \tau, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \sigma$$

* Такой же результат был получен другим методом проф. М. Д. Дольбергом в неопубликованной работе.

и, подставляя в (10), перейдем к уравнению

$$\sigma^3 + \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \sigma^2 - \sigma \tau - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \tau = 0. \quad (11)$$

С помощью диаграммы Ньютона [1] получаем, что от нулевого решения уравнения (11) ответвляются два малых решения, которые при $\tau \rightarrow 0$ имеют вид $\sigma = \pm \sqrt[3]{\frac{\tau}{3}} + 0\left(\frac{1}{\tau^2}\right)$ (12). Следовательно,

но, $\eta_{\pm} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \pm \sqrt[3]{-\frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{\varphi}{3}}$, что позволяет дать асимптотику для угла поворота стержня в виде

$$\theta_{\pm} \sim -\sqrt[3]{6q} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \pm \sqrt[3]{\lambda q^{-\frac{2}{3}} \frac{\sqrt[3]{6}}{3} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}} \right] \quad (13)$$

при $\lambda q^{-\frac{2}{3}} \rightarrow \frac{3}{\sqrt[3]{24}}$. Для того чтобы получить асимптотику решения

θ_0 при условии (13), положим $\varphi = -(3/\sqrt[3]{4}) - \tau$, $\eta = -(2/\sqrt[3]{2}) + \sigma$ и, проделав аналогичные преобразования, найдем, что $\sigma = -(2\sqrt[3]{2}/9)\tau + 0(\tau)$. Тогда $\eta_0 \sim -2\sqrt[3]{4}/3 + (2\sqrt[3]{2}/9)\varphi$, а $\theta_0 \sim \sqrt[3]{6q} [2\sqrt[3]{4}/3 + 2\sqrt[3]{12/9}\lambda q^{-\frac{2}{3}}]$. Легко устанавливается асимптотика при $\varphi \rightarrow \pm \infty$.

Так при $\varphi \rightarrow \infty$ $\eta_0 \rightarrow 0$ и из уравнения (10) находим, что $\eta_0 \sim -\varphi^{-1}$ при $\varphi \rightarrow \infty$. Переходя к старым переменным по формулам (9), получаем $\theta_0 \sim q/\lambda$ при $\lambda q^{-\frac{2}{3}} \rightarrow -\infty$. Аналогично при $\varphi \rightarrow -\infty$ $\eta_- \sim -\varphi^{-1}$, т. е. $\theta_- \sim q/\lambda$ при $\lambda q^{-\frac{2}{3}} \rightarrow \infty$, далее при $\varphi \rightarrow -\infty$ по уравнению (10) (см. рис. 2) $\eta_0 \sim -\sqrt[3]{-\varphi}$, $\varphi_+ \sim \sqrt[3]{-\varphi}$, откуда с помощью формул (9) находим $\theta_0 \sim \sqrt[3]{6\lambda}$, $\theta_+ \sim -\sqrt[3]{6\lambda}$ при $\lambda q^{-\frac{2}{3}} \rightarrow \infty$.

Таким образом, установлено, что при комбинации продольной и поперечной нагрузок меньше критической имеет место одна форма равновесия, которая определяется углом поворота стержня θ_0 , при комбинации указанных нагрузок больше критической — три формы равновесия θ_0 , θ_- , θ_+ , а в критическом случае — две (θ_- и θ_+ сливаются).

В заключение следует отметить, что использованный в работе метод может быть применен для определения критических нагрузок и закритических деформаций при решении и более сложных задач, в которых напряженно-деформированное состояние описывается нелинейными дифференциальными уравнениями.

Список литературы: 1. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений.— М.: Наука, 1969.— 527 с. 2. Ржаницын А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем.— М.: ГИТТЛ, 1955.— 475 с.

Поступила в редколлегию 12.12.78.

УДК 519.4+519.1

В. Н. КАЛЮЖНЫЙ

ОБОБЩЕННЫЕ ГАУССОВЫ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Гауссовыми коэффициентами называются величины

$$\binom{n}{k}_\alpha = \frac{(\alpha^n - 1)(\alpha^{n-1} - 1) \dots (\alpha^{n-k+1} - 1)}{(\alpha^k - 1)(\alpha^{k-1} - 1) \dots (\alpha - 1)}. \quad (1)$$

Они удовлетворяют соотношениям

$$\binom{n}{k}_\alpha = \alpha^k \binom{n-1}{k}_\alpha + \binom{n-1}{k-1}_\alpha, \quad (2)$$

$$\binom{n}{0}_\alpha = \binom{n}{n}_\alpha = 1 \quad (3)$$

и связаны с биномиальными коэффициентами $\binom{n}{k}$ предельным соотношением $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \binom{n}{k}_\alpha = \binom{n}{k}$. В определении α может быть эле-

ментом какого-нибудь поля, имеющим бесконечный порядок по умножению, хотя обычно α — комплексное число, $|\alpha| \neq 1$. Наша

задача — дать определение величины $\binom{n}{k}_\alpha$, которое допускало бы

в качестве α элемент конечного порядка и приводило бы к формуле (1), когда последняя имеет смысл. Отметим, что принято вместо α писать q , а тождества с гауссовыми коэффициентами называть q -тождествами. Построению q -аналогов для соотношений с биномиальными коэффициентами посвящены работы Карлица, Гулда, Роты, Гольдмана и других авторов. Мы вводим новое обозначение в связи с изменением природы индекса. Будет показано, что некоторые тождества допускают и « α -формулировку».

Пусть α — элемент некоторого поля K . Обозначим через w порядок элемента α в мультипликативной группе поля K . Допускаются случаи $w = 1$, т. е. $\alpha = 1$ и $w = \infty$. Определим обобщенные гауссовы коэффициенты $\binom{n}{k}_\alpha$ рекуррентным соотношением

(2) и начальными условиями (3). Если $n < k$ или хотя бы одно из чисел $n, k < 0$, считаем, что $\binom{n}{k}_\alpha = 0$. При $\alpha = 1$ это опреде-

ление приводит к биномиальным коэффициентам $\binom{n}{k}$, причем без использования предельного перехода. Рассмотрим полиномы $P_0(X) = 1$, $P_n(X) = (X-1)(X-\alpha) \dots (X-\alpha^{n-1})$ ($n \geq 1$); $Q_n(X) = P_n(X)/P_n(\alpha^n)$ ($0 \leq n < \omega$). Отметим для дальнейшего, что $P_w(X) = X^w - 1$ ($w < \infty$).

Найдем явный вид обобщенных гауссовых коэффициентов.

Лемма 1. Если $k < \omega$, то для любого n выполняется равенство $\binom{n}{k}_\alpha = Q_k(\alpha^n)$ или, что то же самое, соотношение (1).

Доказательство проводится по индукции с использованием соотношения $Q_k(\alpha X) = \alpha^k Q_k(X) + Q_{k-1}(X)$.

Следующее утверждение и его следствия являются специфическими для случая $1 < \omega < \infty$.

Лемма 2. Если $k + n \leq \omega$, $0 < n < \omega$, то $\binom{\omega-n}{k}_\alpha = (-1)^k \alpha^{-kn - \binom{k}{2}} \binom{k+n-1}{k}_\alpha$.

Доказательство. Преобразуем выражение $\prod_{i=\omega-n-k+1}^{\omega-n} (\alpha^i - 1) = (-1)^k \prod_{i=\omega-n-k+1}^{\omega-n} (\alpha^{\omega-n} - \alpha^i) = (-1)^k \alpha^{\frac{2\omega-2n-k+1}{2}k} \prod_{i=\omega-n-k+1}^{\omega-n} \alpha^{\frac{k+n-1-i}{2}} \times \times (\alpha^{\omega-i} - 1) = (-1)^k \alpha^{-kn - \binom{k}{2}} \prod_{j=n}^{k+n-1} (\alpha^j - 1)$. Деля это равенство на $\prod_{j=1}^k (\alpha^j - 1)$, получим требуемое.

Следствие 1. При $0 \leq k < \omega$ имеем $\binom{\omega-1}{k}_\alpha = (-1)^k \alpha^{-\binom{k+1}{2}}$.

Следствие 2. Если $1 < k \leq \omega - 1$, то $\binom{\omega}{k}_\alpha = 0$.

Доказательство: $\binom{\omega}{k}_\alpha = \alpha^k \binom{\omega-1}{k}_\alpha + \binom{\omega-1}{k-1}_\alpha = \alpha^k (-1)^k \alpha^{-\binom{k+1}{2}} + + (-1)^{k-1} \alpha^{-\binom{k}{2}} = 0$.

Теорема 1. Пусть $n = a\omega + r$ ($a = \left\lfloor \frac{n}{\omega} \right\rfloor$, $0 \leq r < \omega$) $k = b\omega + s$ ($b = \left\lfloor \frac{k}{\omega} \right\rfloor$, $0 \leq s < \omega$). Тогда $\binom{n}{k}_\alpha = \binom{a}{b} \binom{r}{s}_\alpha = \binom{a}{b} Q_s(\alpha^r)$.

Доказательство проведем индукцией по n . В индуктивном переходе рассмотрим четыре случая.

1) $0 \leq r < \omega - 1$, $0 < s \leq \omega - 1$. Имеем $\binom{n+1}{k}_\alpha = \alpha^k \binom{n}{k}_\alpha + \binom{n}{k-1}_\alpha = \alpha^s \binom{a}{b} \binom{r}{s}_\alpha + \binom{a}{b} \binom{r}{s-1}_\alpha = \binom{a}{b} [\alpha^s \binom{r}{s}_\alpha + \binom{r}{s-1}_\alpha] = \binom{a}{b} \binom{r+1}{s}_\alpha$.

2) $r = w - 1$, $0 < s \leq w - 1$. Пользуясь предыдущим случаем и следствием 2, получаем

$$\binom{n+1}{k}_{\alpha} = \binom{a}{b} \binom{w}{s}_{\alpha} = 0 = \binom{a+1}{b} \binom{0}{s}_{\alpha}$$

3) $0 \leq r < w - 1$, $s = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k}_{\alpha} &= \alpha^k \binom{n}{k}_{\alpha} + \binom{n}{k-1}_{\alpha} = \binom{a}{b} \binom{r}{0}_{\alpha} + \\ &+ \binom{a}{b-1} \binom{r}{w-1}_{\alpha} = \binom{a}{b} + 0 = \binom{a}{b} \binom{r+1}{0}_{\alpha}. \end{aligned}$$

4) $r = w - 1$, $s = 0$. Как и выше, получаем

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k}_{\alpha} &= \binom{a}{b} \binom{w-1}{0}_{\alpha} + \binom{a}{b-1} \binom{w-1}{w-1}_{\alpha} = \\ &= \binom{a}{b} + \binom{a}{b-1} = \binom{a+1}{b} = \binom{a+1}{b} \binom{0}{0}_{\alpha}. \end{aligned}$$

Следствие. Выполняются соотношения симметрии

$$\binom{n}{k}_{\alpha} = \binom{n}{n-k}_{\alpha}.$$

Доказательство. Если $n < k$, то обе части равны нулю. Далее будем считать, что $n \geq k$, а значит $a \geq b$.

Предположим вначале, что $r \geq s$. Тогда $n - k = (a - b)w + (r - s)$, $0 \leq r - s < w$. Поэтому

$$\binom{n}{k}_{\alpha} = \binom{a}{b} \binom{r}{s}_{\alpha} = \binom{a}{a-b} \binom{r}{r-s}_{\alpha} = \binom{n}{n-k}_{\alpha}.$$

Пусть теперь $r < s$. Тогда $0 \leq r < r + w - s < w$, $n - k = (a - b - 1)w + (w + r - s)$. Следовательно,

$$\binom{n}{k}_{\alpha} = \binom{a}{b} \binom{r}{s}_{\alpha} = 0 = \binom{a}{a-b-1} \binom{r}{r+w-s}_{\alpha} = \binom{n}{n-k}_{\alpha}.$$

Лемма 3. Для всех n , i , k справедливо равенство

$$\binom{n}{i}_{\alpha} \binom{i}{k}_{\alpha} = \binom{n}{k}_{\alpha} \binom{n-k}{n-i}_{\alpha}. \quad (4)$$

Доказательство. Пусть $n = \alpha w + r$, $k = \beta w + s$, $i = \gamma w + t$ ($0 \leq r, s, t < w$).

Предположим вначале, что $r < t$. Тогда $\binom{n}{i}_{\alpha} = 0$. Если при этом $r < s$, то $\binom{n}{k}_{\alpha} = 0$. Если же $r \geq s$, то $\binom{n-k}{n-i}_{\alpha} = \binom{a-b}{a-c-1} \times \times \binom{r-s}{w+r-t}_{\alpha} = 0$, поскольку, $0 \leq r - s < w + r - t$.

Теперь можем считать, что $t \leq r$. Если к тому же $r < s$, то $\binom{i}{k}_\alpha = \binom{n}{k}_\alpha = 0$. Если же $t < s < r$, то $\binom{i}{k}_\alpha = 0$, $\binom{n-k}{n-i}_\alpha = \binom{a-b}{a-c} \binom{r=s}{r=t}_\alpha = 0$, так как $0 \leq r-s < r-t$.

Таким образом, в каждом из рассмотренных случаев обе части равенства обращаются в нуль.

Наконец, можно считать, что $s \leq t \leq r$. Требуемое равенство получается перемножением соотношений

$$\binom{a}{c} \binom{c}{b} = \binom{a}{b} \binom{a-b}{a-c}, \quad \binom{r}{t}_\alpha \binom{t}{s}_\alpha = \binom{r}{s}_\alpha \binom{r-s}{r-t}_\alpha.$$

Лемма доказана.

При любом w остается справедливым классическое соотношение

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \alpha \binom{n-k}{2} \binom{n}{k}_\alpha X^k \quad (n \geq 0) \quad (5)$$

и его обращение

$$X^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_\alpha P_k(X) \quad (n \geq 0), \quad (6)$$

поскольку их индуктивные доказательства используют только формулы (2), (3). Полагая в тождестве (5) $X=1$, получаем равенство

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \alpha \binom{n-k}{2} \binom{n}{k}_\alpha = \delta_{n,0}.$$

Пользуясь формулой (4), его можно преобразовать в следующее:

$$\sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \alpha \binom{i-k}{2} \binom{n}{i}_\alpha \binom{i}{k}_\alpha = \delta_{n,k}.$$

В пространстве полиномов $K[X]$ рассмотрим линейный оператор $(\Delta_\alpha F)(X) = (F(\alpha X) - F(X))/X$. С точностью до числового множителя он введен в работах Джексона [1,2]. В статье [3] этот оператор назван эйлеровой производной. В его использовании исключался случай $w < \infty$. Нам понадобится также оператор $(T_\beta F)(X) = F(\beta X)$. Можно показать, что

$$(\Delta_\alpha^n F)(X) = \alpha^{-\binom{n}{2}} X^{-n} (P_n(T_\alpha) F)(X); \quad (7)$$

$$(T_\alpha^n F)(X) = \sum_{k=0}^n \alpha^{\binom{k}{2}} \binom{n}{k}_\alpha X^k (\Delta_\alpha^k F)(X);$$

$$\alpha^{\binom{k}{2}} \Delta_\alpha^k P_n = P_k(\alpha^k) \binom{n}{k}_\alpha P_{n-k}. \quad (8)$$

Предположим, что $\omega < \infty$. Тогда оператор Δ_α нильпотентен. Действительно, $P_\omega(T_\alpha) = T_\alpha^\omega - 1 = 0$. Из формулы (7) следует, что $\Delta_\alpha^\omega = 0$. В результате формула Джексона [1] (записанная в несколько иных обозначениях)

$$F = \sum_{k=0}^{\omega-1} \alpha^{\binom{k}{2}} (\Delta_\alpha^k F)(1) Q_k \quad (9)$$

справедлива только для многочленов степени ниже ω .

Теорема 2. При $0 \leq r < \omega < \infty$ выполняется равенство

$$\frac{1}{\omega} \sum_{i=k}^{\omega-1} \alpha^{-ri} \binom{i}{k}_\alpha = (-1)^{k-r} \alpha^{\binom{k-r}{2}} \binom{k}{r}_\alpha \frac{1}{P_k(\alpha^k)}.$$

Доказательство. Рассмотрим многочлен $U_r(X) = \frac{1}{\omega} \times \sum_{i=0}^{\omega-1} \alpha^{-ri} X^i$. Из соотношения $U_r(\alpha^t) = \frac{1}{\omega} \sum_{i=0}^{\omega-1} \alpha^{(t-r)i} = \delta_{r,t}$ ($0 \leq t < \omega$) по формуле (7) находим $\alpha^{\binom{k}{2}} (\Delta_\alpha^k u_r)(1) = (-1)^{k-r} \alpha^{\binom{k-r}{2}} \times \binom{k}{r}_\alpha$. На основании равенства (9) имеем

$$U_r = \sum_{k=0}^{\omega-1} (-1)^{k-r} \alpha^{\binom{k-r}{2}} \binom{k}{r}_\alpha \frac{P_k}{P_k(\alpha^k)}.$$

С другой стороны, в силу (6) получаем

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{1}{\omega} \sum_{i=0}^{\omega-1} \alpha^{-ri} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k}_\alpha P_k = \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-1} \frac{1}{\omega} \left(\sum_{i=k}^{\omega-1} \alpha^{-ri} \binom{i}{k}_\alpha \right) P_k. \end{aligned}$$

Остается приравнять коэффициенты при P_k в разложениях для U_r . Приведем без доказательства аналог формулы Лейбница, справедливый в случае $1 < \omega \leq \infty$ (ср. [4])

$$\Delta_\alpha^n(FG) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_\alpha (\Delta_\alpha^k F)(T_\alpha^k \Delta_\alpha^{n-k} G). \quad (10)$$

Легко видеть, что при $\omega = \infty$ в ядро оператора Δ_α входят только константы. В противоположном случае, как видно из следующей теоремы, оно бесконечномерно.

Теорема 3. При $1 < \omega < \infty$ справедливо равенство $\text{Ker } \Delta_\alpha = K[P_\omega(X)]$.

Доказательство. Для $n=1$ формула (10) имеет вид: $\Delta_\alpha(FG) = F(\Delta_\alpha G) + (\Delta_\alpha F)(T_\alpha G)$ (11). Отсюда следует, что $\text{Ker } \Delta_\alpha$ подалгебра в $K[X]$. Очевидно, что $X^\omega - 1 \in \text{Ker } \Delta_\alpha$, откуда $K[P_\omega] \subset \text{Ker } \Delta_\alpha$.

Проверим обратное включение. Произвольный полином F из $\text{Ker } \Delta_\alpha$ запишем в виде $F(X) = \sum_{n \geq 0} F_n(X) P_\omega^n(X)$, где

$$F_n(X) = \sum_{k=0}^m a_n^{(k)} Q_k(X), \quad (12)$$

а в качестве m может быть взято $\omega - 1$. Из формулы (8) вытекает, что $\Delta_\alpha^m Q_m = \alpha^{-\binom{m}{2}}$, $\Delta_\alpha^m Q_k = 0$ ($k < m$). Поэтому $\Delta_\alpha^m F_n = \alpha^{-\binom{m}{2}} a_n^{(m)}$. Равенство (11) показывает также, что если $\Delta_\alpha G = 0$, то $\Delta_\alpha(FG) = \Delta_\alpha(F) T_\alpha(G)$. Следовательно, $0 = \Delta_\alpha^m F = \sum_{n \geq 0} \Delta_\alpha^m(F_n) \times P_\omega^n = \alpha^{-\binom{m}{2}} \sum_{n \geq 0} a_n^{(m)} P_\omega^n$. Отсюда $a_n^{(m)} = 0$ ($n \geq 0$). Таким образом, равенства (12) выполняются с заменой m на $m-1$ и т. д. Наконец, они справедливы при $m=0$, тем самым $F_n(X) = a_n^{(0)}$. Значит, $F = \sum_{n \geq 0} a_n^{(0)} P_\omega^n \in K[P_\omega]$.

Теорема 4. Для любого многочлена степени $n < \omega$ имеет место соотношение

$$F(\lambda X) = \sum_{k=0}^n \alpha^{\binom{k}{2}} \lambda^k (\Delta_\alpha^k F)(\lambda) Q_k(X). \quad (13)$$

Доказательство. Можно проверить, что $\Delta_\alpha^k T_\lambda = \lambda^k T_\lambda \Delta_\alpha^k$, откуда $(\Delta_\alpha^k T_\lambda F)(1) = \lambda^k (\Delta_\alpha^k F)(\lambda)$. Применяя формулу (9) к многочлену $T_\lambda F$, получаем нужное равенство.

Следствие. При $n < \omega$ выполняется

$$P_n(\lambda Y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_\alpha \lambda^k P_{n-k}(\lambda) P_k(Y).$$

Это соотношение вытекает из (13) и (8). Придавая λ значения $1, \alpha, \dots, \alpha^{\omega-1}$, видим, что справедлива

Теорема 5. Для любого $n < \omega$ выполняется тождество

$$P_n(XY) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_\alpha X^k P_{n-k}(X) P_k(Y).$$

Это небольшое видоизменение « q -биномиальной теоремы», комбинаторно доказанной в работе [5]. Запишем ее для многочленов Q_n :

$$Q_n(XY) = \sum_{k=0}^n \alpha^{-(n-k)k} X^k Q_{n-k}(X) Q_k(Y). \quad (14)$$

Полагая здесь $X = \alpha^u$, $Y = \alpha^v$, получаем обобщение q -аналога теоремы сложения Вандермонда [4,6]:

$$\begin{aligned} \binom{u+v}{n}_{\alpha} &= \sum_{k=0}^n \alpha^{k(u-n+k)} \binom{u}{n-k}_{\alpha} \binom{v}{k}_{\alpha} = \\ &= \sum_{i=0}^n \alpha^{(n-i)(u-i)} \binom{u}{i}_{\alpha} \binom{v}{n-i}_{\alpha} \quad (0 \leq n < w). \end{aligned} \quad (15)$$

Введем следующие величины:

$$\binom{i, j}{k}_{\alpha} = \binom{j}{k-i}_{\alpha} P_{i+j-k}(\alpha^i) = \binom{i+j}{i+k}_{\alpha} P_{i+j-k}(\alpha^i).$$

Очевидно, что $\binom{i, j}{k}_{\alpha} = 0$, если выполняется хотя бы одно из неравенств $i > k$, $j > k$, $i+j-k < 0$, $i+j-k \geq w$. Если же $0 \leq i+j-k < w$, то $\binom{i, j}{k}_{\alpha} = \frac{P_{i+j-k}(\alpha^i) P_{i+j-k}(\alpha^j)}{P_{i+j-k}(\alpha^{i+j-k})}$. Отсюда вытекает симметричность: $\binom{i, j}{k}_{\alpha} = \binom{j, i}{k}_{\alpha}$.

Лемма 4. Выполняется соотношение

$$\binom{i, j}{k-1}_{\alpha} + (\alpha^k - \alpha^i) \binom{i, j}{k}_{\alpha} = \binom{i, j}{k}_{\alpha} \alpha^i.$$

Доказательство. $\binom{i, j}{k-1}_{\alpha} + (\alpha^k - \alpha^i) \binom{i, j}{k}_{\alpha} = \binom{i, j}{k-1-i}_{\alpha} \times$
 $\times P_{i+j-k+1}(\alpha^i) + (\alpha^i - \alpha^{i+j-k}) P_{i+j-k}(\alpha^i) \alpha^{k-i} \binom{j}{k-i}_{\alpha} = \left[\binom{j}{k-i-1}_{\alpha} + \right.$
 $\left. + \alpha^{k-i} \binom{j}{k-i}_{\alpha} \right] P_{i+j-k+1}(\alpha^i) = \binom{j+1}{k-i}_{\alpha} P_{i+j+1-k}(\alpha^i) = \binom{i, j+1}{k}_{\alpha}.$

Теорема 6. Имеет место равенство

$$P_i P_j = \sum_{k=0}^{i+j} \binom{i, j}{k}_{\alpha} P_k. \quad (16)$$

Доказательство. Проведем индуктивный переход по j :
 $P_i(X) P_{j+1}(X) = P_i(X) P_j(X) (X - \alpha^j) = \sum_{k=0}^{i+j} \binom{i, j}{k}_{\alpha} P_k(X) (X - \alpha^k) +$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=0}^{i+j} \binom{i, j}{k}_{\alpha} P_k(X) (\alpha^k - \alpha^j) = \sum_{k=0}^{i+j+1} \left[\binom{i, j}{k-1}_{\alpha} + (\alpha^k - \alpha^j) \binom{i, j}{k}_{\alpha} \right] \times \\
& \times P_k(X) = \sum_{k=0}^{i+j+1} \binom{i, j+1}{k}_{\alpha} P_k(X).
\end{aligned}$$

Приравнявая в (16) коэффициенты при одинаковых степенях X , можно получить еще одно равенство, которое превращается при $\alpha = 1$ в теорему сложения для биномиальных коэффициентов. Мы не станем его выписывать. Полагая в (16) $X = \alpha^n$ ($0 \leq n < \omega$) и преобразовывая, получаем равенство, двойственное

$$\text{к (15): } \binom{n}{i}_{\alpha} \binom{n}{j}_{\alpha} = \sum_{k=0}^n \alpha^{(k-i)(k-j)} \binom{k}{i}_{\alpha} \binom{i}{k-j}_{\alpha} \binom{n}{k}_{\alpha}.$$

Лемма 5. *Выполняется равенство*

$$X^k P_n(X) = \sum_{i=n}^{n+k} \alpha^{n(n+k-i)} \binom{k}{i-n}_{\alpha} P_i(X).$$

Доказательство проводится индукцией по k . Переходя в этом равенстве к многочленам Q_n , получаем

$$\begin{aligned}
X^k Q_n(X) &= \alpha^{nk} \sum_{i=n}^{n+k} \binom{k}{i-n}_{\alpha} P_{i-n}(\alpha^i) Q_i(X) = \\
&= \alpha^{nk} \sum_{i=n}^{n+k} \binom{i, k}{k+n}_{\alpha} Q_i(X),
\end{aligned}$$

откуда

$$X^k Q_{n-k}(X) = \alpha^{(n-k)k} \sum_{i=n-k}^n \binom{i, k}{n}_{\alpha} Q_i(X). \quad (17)$$

Из тождеств (14), (17) вытекает следующая теорема умножения.

Теорема 7. *Справедливо равенство*

$$Q_n(XY) = \sum_{\substack{i, k < n \\ i+k > n}} \binom{i, k}{n}_{\alpha} Q_i(X) Q_k(X).$$

Полагая здесь $X = \alpha^u$, $Y = \alpha^v$, запишем еще одну формулу сложения для гауссовых коэффициентов

$$\binom{u+v}{n}_{\alpha} = \sum_{\substack{i, k < n \\ i+k > n}} \binom{i, k}{n}_{\alpha} \binom{u}{i}_{\alpha} \binom{v}{k}_{\alpha} \quad (n < \omega).$$

Обобщим разложение (9) на случай многочлена произвольной степени. В пространстве $K[X]$ введем линейный оператор D_w ($w < \infty$), задав его действие на одночленах равенством

$$D_w(X^n) = [n/w] X^{n-w}.$$

Здесь, как и выше, $[t]$ обозначает целую часть числа t . В обозначениях $n = aw + r$ ($a = [n/w]$, $0 \leq r < w$) можем также написать $D_w(X^n) = aX^{n-w}$. Легко видеть, что для любых многочленов H, R ($\deg R < w$) выполняется: $D_w(H(X^w)R(X)) = (DH) \times \times (X^w)R(X)$. Поэтому $D_w(P_n(X)) = D_w((X^w - 1)^a P_r(X)) = a(X^w - 1)^{a-1} P_r(X) = aP_{(a-1)w+r}(X) = aP_{n-w}(X)$. Учитывая равенство (8), получаем при $b \geq 0$, $0 \leq s < w$

$$\frac{D_w^b}{b!} \cdot \frac{\alpha \binom{s}{2} \Delta_\alpha^s}{P_s(\alpha^s)} P_n = \binom{a}{b} \binom{r}{s} P_{n-bw-s};$$

$$\left(\frac{D_w^b}{b!} \cdot \frac{\alpha \binom{s}{2} \Delta_\alpha^s}{P_s(\alpha^s)} P_n \right) (1) = \delta_{a,b} \delta_{r,s}.$$

Это дает возможность найти коэффициенты разложения произвольного полинома по базису $(P_n)_{n \geq 0}$. А именно, справедлива

Теорема 8. Для любого многочлена F имеет место равенство

$$F = \sum_{b \geq 0} \sum_{s=0}^{w-1} \left(\frac{D_w^b \alpha \binom{s}{2} \Delta_\alpha^s}{b! P_s(\alpha^s)} F \right) (1) P_{bw+s}.$$

В случае $\alpha = 1$ оператор D_w становится оператором дифференцирования D , а написанное разложение превращается в формулу Тейлора.

Отметим также, что операторы Δ_α и D_w коммутируют.

Применим теорему 8 к многочлену X^n :

$$X^n = \sum_{b \geq 0} \sum_{s=0}^{w-1} \binom{a}{b} \binom{r}{s}_\alpha P_{bw+s}(X).$$

Сравнивая это разложение с (6), получим еще один вывод явной формулы для $\binom{n}{k}_\alpha$.

Список литературы: 1. Jackson F. H. q -Form of Taylor's theorem.— Messenger of Math., 1909, 38, p. 62—64. 2. Jackson F. H. q -Difference equations.— Amer. Journ. Math., 1910, 32, p. 305—314. 3. Goldman J., Rota G.—C. The number of subspaces of a vector space.— In: Recent progress in combinatorics. Ed. by Tutte, Acad. Press, 1969, p. 75—83. 4. Carlitz L. A q -identity.— Monatshefte Math., 1963, 67, N 4, p. 305—310. 5. Goldman J., Rota G.—C. On the foundations of combinatorial theory, IV: finite vector spaces and Eulerian

generating functions.—Studies Appl. Math., 1970, 49, N 3, p. 239—258. 6. Gould H. W. A new symmetrical combinatorial identity.—Journ. Combin. Theory, 1972, A13, N 2, p. 278—286.

Поступила в редколлегию 08.12.80.

УДК 513.838

В. Д. ГОЛОВИН, канд. физ.-мат. наук

ГИПЕРФУНКЦИИ И ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИЙ

В статье предложен новый подход к теории гиперфункций, основанный на теории гомологий аналитических пучков. Гиперфункции на вещественном аналитическом пространстве X определяются как нульмерные классы гомологий структурного пучка $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ комплексификации $\tilde{X}$ с носителями в X . Этот подход имеет ряд преимуществ, так как позволяет более просто и в наиболее общей ситуации получить все основные свойства гиперфункций, включая теорему о том, что пучок ростков гиперфункций является инъективным модулем над пучком ростков аналитических функций. По поводу определений и основных свойств гомологий аналитических пучков отсылаем читателя к работе [1].

1. Пусть M — (вещественное) аналитическое множество в области G пространства R^n , совпадающее по определению с множеством общих нулей конечного числа вещественных аналитических функций в G . Множество M превращается в кольцо пучков над пространством путем наделения его структурным пучком $A_M = A_G/I|_M$, где A_G — пучок ростков аналитических функций в G , принимающих комплексные значения; I — когерентный подпучок идеалов в A_G (порожденный конечным числом аналитических функций на G), множество нулей которого совпадает с M .

Вещественным аналитическим пространством называется делимое топологическое пространство X , наделенное пучком комплексных алгебр A_X так, что каждая точка в X имеет открытую окрестность, изоморфную, как кольцо пучков, пространству M в области G пространства R^n .

Комплексное аналитическое пространство $\tilde{X}$ называется комплексификацией вещественного аналитического пространства X , если пространство X изоморфно, как кольцо пучков, некоторому замкнутому множеству пространства $\tilde{X}$, наделенному пучком, индуцированным пучком $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$. Например, пространство C^n является комплексификацией пространства R^n при канониче-

ском вложении (ср. [2]). Если X — комплексное аналитическое пространство, рассматриваемое как вещественное аналитическое пространство, то комплексификацией для X является произведение $X \times \bar{X}$, причем X изоморфно, как кольцованное пространство, «диагонали» этого произведения (ср. [3]). По существу Х. Уитни и Ф. Брюа [4] доказали, что для каждого вещественного аналитического пространства существует по крайней мере одна комплексификация.

2. Пусть X — вещественное аналитическое пространство, счетное в бесконечности. Пусть $\tilde{X}$ — комплексное аналитическое пространство, счетное в бесконечности, являющееся комплексификацией пространства X . Будем считать, что X — замкнутое множество в $\tilde{X}$, и что пучок A_X совпадает с пучком, индуцированным на X пучком $O_{\tilde{X}}$.

Если U — произвольное открытое множество в X , то в $\tilde{X}$ существует фундаментальная система голоморфно полных открытых окрестностей $\tilde{U}$ множества U , для которых $\tilde{U} \cap X = U$ (см. [5]). Отсюда следует, в частности, что $H^k(U; F) = 0$ при $k \neq 0$ для любого когерентного аналитического пучка F на $\tilde{X}$.

Лемма 2.1. Пусть $\tilde{U}$ — произвольное относительно компактное открытое множество в $\tilde{X}$. Тогда для любого когерентного аналитического пучка F на $\tilde{X}$ $H_k^X(\tilde{U}; F) = 0$ при $k \neq 0$ и, в частности, $H_k^X(F) = 0$ при $k \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим относительно компактное открытое множество $U = \tilde{U} \cap X$ в X . Тогда имеет место точная последовательность гомологий

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_k^{\partial U}(\tilde{X}; F) \rightarrow H_k^{\bar{U}}(\tilde{X}; F) \rightarrow H_k^X(\tilde{U}; F) \rightarrow \\ \rightarrow H_{k-1}^{\partial U}(\tilde{X}; F) \rightarrow \dots \rightarrow H_0^X(\tilde{U}; F) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Каждое из компактных множеств ∂U и $\bar{U}$ обладает фундаментальной системой голоморфно полных открытых окрестностей в $\tilde{X}$. В силу двойственности между гомологиями и когомологиями, отсюда следует, что $H_k^{\partial U}(\tilde{X}; F) = 0$ и $H_k^{\bar{U}}(\tilde{X}; F) = 0$ при $k \geq 1$, а векторные пространства $H_0^{\partial U}(\tilde{X}; F)$ и $H_0^{\bar{U}}(\tilde{X}; F)$ канонически изоморфны соответственно сопряженным к топологическим векторным пространствам $\Gamma(\partial U; F)$ и $\Gamma(\bar{U}; F)$. Так как отображение ограничения $\Gamma(\bar{U}; F) \rightarrow \Gamma(\partial U; F)$ имеет всюду плотный образ (см. [6, с. 308]), то сопряженное отображение

$$H_0^{\partial U}(\tilde{X}; F) \rightarrow H_0^{\bar{U}}(\tilde{X}; F)$$

инъективно. Отсюда следует утверждение.

Следствие 2.2. Контравариантный функтор

$$F \rightarrow H_0^X(\tilde{U}; F)$$

на категории когерентных аналитических пучков над $\tilde{X}$, со значениями в категории комплексных векторных пространств, точен.

Лемма 2.3. Пусть L — локально тонкий аналитический пучок на комплексном пространстве $\tilde{X}$. Тогда для любого семейства носителей Φ в $\tilde{X}$ имеет место канонический изоморфизм

$$\Gamma_\Phi(\tilde{X}; H_0(L)) = H_0^\Phi(\tilde{X}; L).$$

Доказательство. Воспользуемся спектральной последовательностью

$$E_{p,q}^2 = H_\Phi^{-p}(\tilde{X}; H_q(L)) \Rightarrow H_{p+q}^\Phi(\tilde{X}; L)$$

(см. [1], с. 42). Так как $H_q(L) = 0$ при $q \neq 0$, то эта спектральная последовательность вырождается. Отсюда утверждение получается непосредственно.

3. Следующая ниже теорема является вариантом теоремы 6 работы [1].

Теорема 3.1. Пусть F — произвольный аналитический пучок на комплексном пространстве $\tilde{X}$. Тогда для любых замкнутых множеств S и T в $\tilde{X}$ существует спектральная последовательность $E_{p,q}^2 = H_S^{-p}(\tilde{X}; H_q^T(F)) \Rightarrow H_{p+q}^S \cap T(\tilde{X}; F)$.

Доказательство. Выберем произвольную локально тонкую резольвенту $0 \rightarrow F \rightarrow L^0 \rightarrow L^1 \dots$ аналитического пучка F . Построим инъективную резольвенту в смысле Картана — Эйленберга (см. [7, с. 437]) $0 \rightarrow H_0^T(L^*) \rightarrow L_{0,*} \rightarrow L_{-1,*} \rightarrow \dots$ комплекса $H_0^T(L^*)$ и рассмотрим двойной комплекс $K_{p,q} = \Gamma_S(\tilde{X}; L_{p,q})$. Для первой спектральной последовательности этого двойного комплекса $'E_{p,q}^1 = \Gamma_S(\tilde{X}; H_q L_{p,*})$. Так как при фиксированном q имеем инъективную резольвенту $0 \rightarrow H_q H_0^T(L^*) \rightarrow H_q L_{0,*} \rightarrow H_q L_{-1,*} \rightarrow \dots$ аналитического пучка $H_q H_0^T(L^*) = H_q({}_T H_0^T(L^*)) = H_q^T(F)$ (по лемме 2.3), то $'E_{p,q}^2 = H_S^{-p}(\tilde{X}; H_q^T(F))$. С другой стороны, для второй спектральной последовательности двойного комплекса $(K_{p,q})$ $"E_{p,q}^1 = H_S^{-q}(\tilde{X}; H_0^T(L^p))$. Так как пучок $H_0^T(L^p) = {}_T H_0^T(L^p)$ является вялым, то $"E_{p,q}^1 = 0$ при $q \neq 0$; $"E_{p,0}^1 = \Gamma_S(\tilde{X}; H_0^T(L^p)) = \Gamma_S \cap T(\tilde{X}; H_0(L^p))$. Таким образом, вторая спектральная последовательность вырождается: $"E_{p,q}^2 = 0$ при $q \neq 0$; $"E_{p,0}^2 = H_p \Gamma_S \cap T(\tilde{X}; H_0(L^*)) = H_p^S \cap T(\tilde{X}; F)$. Теорема доказана.

Следствие 3.2. Пусть $\tilde{X}$ — комплексное многообразие размерности n , и F — локально свободный аналитический пучок

чок на $\tilde{X}$, Тогда существует канонический изоморфизм $H_k^s(\tilde{X}; F) = H_S^{n-k}(\tilde{X}; H_n(F))$, причем $H_n(F) = \text{Hom}_{\hat{O}_X}(F, \Omega_{\tilde{X}}^n)$.

Доказательство. При сделанных предложениях $H_q(F) = 0$ для $q \neq n$. Поэтому спектральная последовательность теоремы 3.1 вырождается. Утверждение доказано.

Следствие 3.2 является аналогом закона двойственности Лефшеца (ср. [8, с. 270]).

4. Исходным пунктом в предлагаемом подходе к теории гиперфункций является следующая теорема.

Теорема 4.1. Пусть F — когерентный аналитический пучок на комплексном пространстве $\tilde{X}$. Тогда для любого открытого множества $\tilde{U}$ в $\tilde{X}$ $H_k^X(\tilde{U}; F) = 0$ при $k \neq 0$; $H_0^X(\tilde{U}; F) = \Gamma(\tilde{U}; H_0^X(F))$.

Доказательство. Воспользовавшись теоремой 3.1, получим спектральную последовательность $E_{p,q}^2 = H^{-p}(\tilde{U}; H_q^X(F)) \Rightarrow H_{p+q}^X(\tilde{U}; F)$. Так как по лемме 2.1 $H_q^X(F) = 0$ при $q \neq 0$, то эта спектральная последовательность вырождается. Отсюда непосредственно следует утверждение.

Следствие 4.2. Для каждого когерентного аналитического пучка F на $\tilde{X}$ предпучок $\tilde{U} \rightarrow H_0^X(\tilde{U}; F)$ является пучком на $\tilde{X}$.

Теорема 4.3. Для каждого когерентного аналитического пучка F на $\tilde{X}$ пучок $H_0^X(F)$ является вялым.

Доказательство. Пусть $\tilde{U}$ — произвольное открытое множество в $\tilde{X}$. Воспользуемся точной последовательностью групп гомологий $\dots \rightarrow H_0^{X/U}(\tilde{X}; F) \rightarrow H_0^X(\tilde{X}; F) \rightarrow H_0^X(\tilde{U}; F) \rightarrow 0$, где $U = \tilde{U} \cap X$. Получаем, что отображение ограничения $H_0^X(\tilde{X}; F) \rightarrow H_0^X(\tilde{U}; F)$ сюръективно. Ввиду теоремы 4.1 отсюда следует утверждение.

5. Пусть, как и выше, X — вещественное аналитическое пространство, счетное в бесконечности, и $\tilde{X}$ — его комплексификация.

Определение 5.1. Пучок $B_X = H_0^X(O_{\tilde{X}})|_X$ назовем пучком ростков гиперфункций на X , сечения пучка B_X гиперфункциями.

По теореме 4.1 для каждого открытого множества U в X имеет место канонический изоморфизм $\Gamma(U; B_X) = H_0^X(\tilde{U}; O_{\tilde{X}})$, где $\tilde{U}$ — произвольное открытое множество в $\tilde{X}$, для которого $\tilde{U} \cap X = U$. По теореме 4.3 пучок B_X является вялым.

Аналогично теореме 4.1 можно доказать, что для любого замкнутого множества S в X $\Gamma_S(X; B_X) = H_0^S(\tilde{X}; O_{\tilde{X}})$. Если S — компактное множество в X , то в силу двойственности между гомологиями и когомологиями получаем канонический изоморфизм векторных пространств $\Gamma_S(X; B_X) = \{\Gamma(S; A_X)\}'$, т. е. гиперфункции с носителями в S отождествляются с аналитическими функциями на X . Тем самым определение 5.1 в случае $X = \mathbb{R}^n$ согласуется с определением гиперфункций по Мартино — Шапира (ср. [9, с. 62]).

Если X — вещественное аналитическое многообразие размерности n , то $\tilde{X}$ — комплексное многообразие (комплексной) размерности n . По следствию 3.2 $\Gamma(X; B_X) = H_X^n(X; \Omega_X^n)$. Кроме того, имеет место канонический изоморфизм $\Gamma(U; B_X) = H_X^n(\tilde{U}; \Omega_{\tilde{X}}^n) = H_{\tilde{U}}^n(\tilde{U}; \Omega_{\tilde{X}}^n)$ для произвольного открытого множества U в X . Этот изоморфизм совпадает с определением гиперфункций по Сато (ср. [9, с. 115]).

6. Пусть M — вещественное аналитическое множество в области G пространства R , совпадающее с множеством общих нулей вещественных аналитических функций $f_i(x_1, \dots, x_n)$ ($1 \leq i \leq p$) в G . Определим на M пучок комплексных алгебр $A_M = A_G/I|M$, где A_G — пучок ростков (вещественных) аналитических функций в G , принимающих комплексные значения, а $I = (f_1, \dots, f_p) A_G$ — подпучок идеалов в A_G , порожденный функциями $f_1, \dots, f_p$. Считая, что R^n естественным образом вложено в C^n , обозначим через $\tilde{G}$ область в C^n такую, что $\tilde{G} \cap R^n = G$, и каждую функцию $f_1, \dots, f_p$ можно продолжить до голоморфной функции на $\tilde{G}$. Пусть $\tilde{M}$ — (комплексное) аналитическое множество в $\tilde{G}$, совпадающее с множеством общих нулей голоморфных функций $\tilde{f}_i(z_1, \dots, z_n)$ ($1 \leq i \leq p$) в $\tilde{G}$. Определим на множестве $\tilde{M}$ пучок комплексных алгебр $O_{\tilde{M}} = O_{\tilde{G}}/J|\tilde{M}$, где $O_{\tilde{G}}$ — пучок ростков голоморфных функций на $\tilde{G}$, а $J = (f_1, \dots, f_p) O_{\tilde{G}}$ — подпучок идеалов в $O_{\tilde{G}}$, порожденный функциями $f_1, \dots, f_p$. Так как пучок $O_{\tilde{M}}$ индуцирует на множестве M пучок A_M , то $\tilde{M}$ является комплексификацией для M . В области G определен пучок ростков гиперфункций $B_G = H_0^G(O_{\tilde{G}})|G$, а на множестве M — пучок ростков гиперфункций $B_M = H_0^M(O_{\tilde{M}})|M = H_0^G(O_{\tilde{G}}/J)|M$. Из точной последовательности $O_{\tilde{G}} \xrightarrow{(f_1, \dots, f_p)} O_{\tilde{G}} \rightarrow O_{\tilde{G}}/J \rightarrow 0$ получаем, в силу точности функтора $F \rightarrow H_0^G(F)$, точную последовательность $0 \rightarrow H_0^G(O_{\tilde{G}}/J) \rightarrow H_0^G(O_{\tilde{G}}) \xrightarrow{(f_1, \dots, f_p)} H_0^G(O_{\tilde{G}}^p)$. Иначе говоря, на M точна последовательность $0 \rightarrow B_M \rightarrow B_G \xrightarrow{(f_1, \dots, f_p)} B_G^p$, или, что то же самое, имеют место канонические изоморфизмы пучков $B_M = JB_G = \text{Hom}_{A_G}(A_M, B_G)$. Тем самым доказана следующая

Теорема 6.1. Пусть M — аналитическое множество в области G пространства R^n , определяемое как множество общих нулей аналитических функций $f_1, \dots, f_p$ в G . Тогда векторное пространство $\Gamma(M; B_M)$ всех гиперфункций на M есть подпространство в $\Gamma(G; B_G)$, состоящее из тех и только тех гиперфункций α на G , которые аннулируются функциями $f_1, \dots, f_p$, т. е. $f_i \alpha = 0$ ($i = 1, \dots, p$).

7. Следующее ниже предложение есть теорема о делении гиперфункций Ж.-М. Кантора [10] (ср. [9, с. 107]).

Теорема 7.1. Пусть заданы аналитические функции $f_1, \dots, f_p \in \Gamma(X; A_X)$ на вещественном аналитическом пространстве X и гиперфункции $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \Gamma_s(X; B_X)$ с носителями в замкнутом множестве $S \subset X$. Для того чтобы существовала гиперфункция $\alpha \in \Gamma_s(X; B_X)$, удовлетворяющая равенствам $f_i \alpha = \alpha_i$ ($1 \leq i \leq p$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: для каждой точки $x \in S$ любое аналитическое соотношение между функциями $f_1, \dots, f_p$ в x является соотношением между гиперфункциями $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, т. е. если $\theta_1, \dots, \theta_p$ — аналитические функции в окрестности точки x , для которых $\theta_1 f_1 + \dots + \theta_p f_p = 0$, то $\theta_1 \alpha_1 + \dots + \theta_p \alpha_p = 0$ в окрестности точки x .

Доказательство. Пусть $\tilde{X}$ — комплексификация пространства X , на которую функции $f_1, \dots, f_p$ допускают голоморфное продолжение. Функции $f_1, \dots, f_p$ определяют тогда гомоморфизм пучков $O_{\tilde{X}}^{p(f_1, \dots, f_p)} \rightarrow O_{\tilde{X}}$, ядро которого обозначим через R . Получаем точную последовательность групп гомологий $H_0^S(\tilde{X}; O_{\tilde{X}}) \xrightarrow{(f_1, \dots, f_p)} H_0^S(\tilde{X}; O_{\tilde{X}}^p) \rightarrow H_0^S(\tilde{X}; R) \rightarrow 0$. Поскольку каноническое отображение $H_0^S(\tilde{X}; R) = \Gamma(\tilde{X}; H_0^S(R)) \rightarrow \prod_{x \in S} H_0^S(R)_x$ инъективно,

получаем следующую точную последовательность $\Gamma_s(X; B_X) \xrightarrow{(f_1, \dots, f_p)} \Gamma_s(X; B_X)^p \rightarrow \prod_{x \in S} H_0^S(R)_x$. Наконец, в окрестности каждой точки

$x \in S$ определен эпиморфизм пучков $O_{\tilde{X}}^q \rightarrow R$, где q зависит от x . Следовательно, отображение групп гомологий $H_0^S(R) \rightarrow H_0^S(O_{\tilde{X}}^q)$ инъективно в окрестности точки x , а последовательность пучков $O_{\tilde{X}}^q \rightarrow O_{\tilde{X}}^p \rightarrow O_{\tilde{X}}$ точна. Тем самым имеет место точная последовательность $\Gamma_s(X; B_X) \rightarrow \Gamma_s(X; B_X)^p \rightarrow \prod_{x \in S} B_{X,x}^q$. Теорема доказана.

8. Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 8.1. Пучок B_X ростков гиперфункций на вещественном аналитическом пространстве X является инъективным A_X -модулем.

Доказательство. Так как инъективность пучка является локальным свойством, то можно считать, что X — это аналитическое множество M в области G пространства R^n , определяемое вещественными аналитическими уравнениями $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ ($i = 1, \dots, p$) в G . Нужно доказать, что пучок ростков гиперфункций B_M является инъективным A_M -модулем. Так как $A_M = A_G/I$ и $B_M = JB_G$ (по теореме 6.1), то достаточно доказать, что пучок B_G является инъективным A_G -модулем (см. [11, с. 592]). Пусть $\tilde{G}$ — область C^n , являющаяся комплексификацией области G . Продолжим тривиально пучок B_G на область $\tilde{G}$ и будем рассматривать его как $O_{\tilde{G}}$ -модуль. Так как $O_{\tilde{G}}|G = A_G$, то достаточно доказать, что B_G есть инъективный $O_{\tilde{G}}$ -модуль. Но это следует из критерия

инъективности аналитических пучков [11, с. 593], поскольку B_G — вялый пучок, для которого слои $sB_{G,x}$ являются инъективными $A_{G,x}$ — модулями (по теореме 7.1). Тем самым теорема доказана.

Замечание 8.2. Из теоремы 8.1 непосредственно получаем следующее усиление теоремы о делении гиперфункций.

Пусть для каждого открытого множества $U \subset X$ задана гиперфункция $\alpha_U \in \Gamma(U; B_X)$ и аналитическая функция $f_U \in \Gamma(U; A_X)$. Предположим, что каждое соотношение вида $\theta_1 f_{U_1} + \dots + \theta_r f_{U_r} = 0$ с аналитическими $\theta_1, \dots, \theta_r$ влечет соотношение $\theta_1 \alpha_{U_1} + \dots + \theta_r \alpha_{U_r} = 0$. Тогда существует такая гиперфункция $\alpha \in \Gamma(X; B_X)$, что $e_U \alpha = \alpha_U$ при каждом U .

Результаты этой работы были доложены автором на научной конференции сотрудников механико-математического факультета Харьковского университета 28 октября 1977 г.

Список литературы: 1. Головин В. Д. Гомологии аналитических пучков. — Докл. АН СССР, 1975, 225, № 1, с. 41 — 43. 2. Cartan H. Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes. — Bulletin de la Société mathématique de France, 1957, 85, № 1, p. 77 — 99. 3. Головин В. Д. Аналитические дифференциальные формы на комплексных пространствах. — Теория функций, функц. анализ и их приложения, 1971, вып. 14, с. 17 — 26. 4. Whitney H., Bruhat F. Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques — réels. — Commentarii Mathematici Helvetici, 1959, 33, № 2, p. 132 — 160. 5. Грауэрт Г. О проблеме Леви и вложении вещественно-аналитических многообразий. — Сб. Математика, 1960, 4: 3, с. 29 — 40. 6. Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. — М.: Мир, 1969. — 395 с. 7. Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960. — 510 с. 8. Лефшец С. Алгебраическая топология. — М.: Изд-во иностр. лит. 1949. — 220 с. 9. Шапиро П. Теория гиперфункций. — М.: Мир, 1972. — 141 с. 10. Kantor J. — M. Hyperfonctions cohérentes. — Comptes rendus Acad sci. Paris, 1969, 269, № 1, p. 18 — 20. 11. Головин В. Д. Критерии инъективности аналитических пучков. — Мат. заметки, 1975, 18, № 4, с. 589 — 596.

Поступила в редколлегию 25. 11. 79.

СОДЕРЖАНИЕ

Тарапов И. Е., Иевлев И. И. Предельное уравнение баланса полной энергии на тангенциальном разрыве	3
Ермаков В. И. Об устойчивости плоской поверхности раздела жидкостей в тангенциальном электрическом поле	7
Терехов Л. П. Задача о смазке вибрирующих подшипников	12
Вовна С. И., Подольский Е. Н. Исследование накопления погрешностей при рекуррентных движениях одной следящей системы	18
Синяков В. А. К обоснованию кинематической модели самоходной машины	23
Приходько А. П. О единственности оптимального быстрого действия в банаховом пространстве	28
Скляр Г. М. Задача о возмущении элемента банаховой алгебры прямым идеалом и ее применение к вопросу о стабилизации линейных систем в банаховых пространствах	32
Фоменко А. В. Вариационный метод в задаче управления нелинейными колебаниями распределенной системы	35
Сохин А. С. Преобразование решений гиперболической системы уравнений первого порядка	41
Ермакова В. Д. Обратная задача рассеяния на всей оси для уравнения Шредингера с неубывающим потенциалом специального вида	50
Когут Е. А., Янцевич А. А. О линейной представимости состояний дискретных открытых систем, ассоциированных с операторными j -узлами	60
Когут Е. А., Янцевич А. А. О сцеплении операторных узлов и ассоциированных с ними открытых систем	66
Гинзбург И. Н. Об устойчивости абсолютно твердого стержня при двухпараметрическом нагружении	69
Калужный В. Н. Обобщенные гауссовы коэффициенты	73
Головин В. Д. Гиперфункции и теория гомологий	82

ВЕСТНИК
ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 230

Механика, теория управления и математическая физика

Редактор Л. Ф. Кизилова
Художественный редактор В. Е. Петренко
Технический редактор Л. Т. Момот
Корректоры В. В. Николаева, В. Л. Максименко

Информ. бланк № 7389

Сдано в набор 4. 09. 81. Подп. в печать 7.05.82. БЦ 09164. Формат 60×90/16. Бумага типогр. № 1. Лит. гарн. Вис. печать. 6 усл. печ. л. 6,25 усл. кр. отт. 7,7 уч.-изд. л. Тираж 1000 экз. Изд. № 948. Зак. 1-349. Цена 1 р. 10 к

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа», 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16

Отпечатано с матриц книжной ф-ки имени М. В. Фрунзе в Харьковской городской типографии № 16, 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16 Зак. 920.

РЕФЕРАТЫ

УДК 536.25

Предельное уравнение баланса полной энергии на тангенциальном разрыве. Тарапов И. Е., Иевлев И. И. — Вестн. Харьк. ун-та, 1982, № 230. Механика, теория управления и математическая физика, с. 3—7.

Получено предельное соотношение баланса экстенсивной величины, обладающей объемной и поверхностной плотностью распределения в сплошной среде с тангенциальным разрывом. В уравнении баланса учитываются наличие объемных и поверхностных кондуктивных потоков и источников величины. Полученное соотношение применяется для получения предельного уравнения баланса полной энергии на свободной границе жидкости при наличии поверхностного натяжения, зависящего от температуры. В качестве примера рассмотрена задача о термокапиллярной конвективной неустойчивости бесконечного горизонтального слоя с учетом дополнительных тепловых затрат на изменение площади свободной поверхности. Отмечается влияние последнего фактора на термокапиллярную устойчивость при коротковолновых возмущениях.

Ил. 3. Библиогр.: 11 назв.

УДК 538.3:532:538.4

Об устойчивости плоской поверхности раздела жидкостей в тангенциальном электрическом поле. Ермаков В. И. — Вестн. Харьк. ун-та, 1982, № 230. Механика, теория управления и математическая физика, с. 7—12.

Показано, что находящиеся в равновесии два слоя несмешивающихся жидкостей с горизонтальной плоскостью раздела могут быть дестабилизированы внешним касательным электрическим полем. Указаны соотношения параметров жидкостей, при которых возможна неустойчивость и приводится критерий абсолютной устойчивости.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 532.516

Задача о смазке вибрирующих подшипников. Терехов Л. П. — Вестн. Харьк. ун-та, 1982, № 230. Механика, теория управления и математическая физика, с. 12—18.

Исследуется плоское нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в узком зазоре, обусловленное вибрацией одной из смазываемых поверхностей. Получены выражения для основных характеристик гидродинамической опоры, зависящие от частот колебаний граничной скорости.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.934.1 + 517.929

Исследование накопления погрешностей при рекуррентных движениях одной следящей системы. Вовна С. И., Подольский Е. Н. — Вестн. Харьк. ун-та, 1982, № 230. Механика, теория управления и математическая физика, с. 18—23.

Изучается движение самоходной машины с автоматом вождения, состоящее в последовательных отслеживаниях ряда кривых, каждая из которых определяется при отслеживании предыдущей кривой, с учетом возникающих автоколебаний. Получено необходимое и достаточное условие существования предельной кривой и приближенно определена ее форма.

Ил. 1. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.928 + 517.934

К обоснованию кинематической модели самоходной машины. Синяков В. А. — Вестн. Харьк. ун-та, 1982, № 230. Механика, теория управления и математическая физика, с. 23—28.

Получены уравнения движения самоходной машины в виде сингулярно возмущенной системы двух дифференциальных уравнений с регулярным возмущением. Для приближенного решения в виде разложения по степеням малого параметра дана оценка остаточного члена. Показано, что наличие регулярного возмущения позволяет упростить зависимость углов увода колес от угла поворота передних колес за счет отбрасывания малых величин, в частности, стабилизирующих моментов.

Ил. 1. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.919.2

О единственности оптимального быстродействия в банаховом пространстве. Приходько А. П. — Вестн. Харьк. ун-та, 1982, № 230. Механика, теория управления и математическая физика, с. 28—32.

В банаховом пространстве рассматриваются условия единственности оптимального управления в задаче на скорейшее попадание из начального множества P на подвижное целевое множество M_t для управляемого уравнения $dx/dt = A(t)x + B(t)u + v(t)$ при «геометрических» ограничениях на управление $u(t) \in \Omega_t$ п.в. В автономном случае приводится бесконечномерный аналог условия общности положения.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.977.1

Задача о возмущении элемента банаховой алгебры правым идеалом и ее применение к вопросу о стабилизации линейных систем в банаховых пространствах. Скляр Г. М. — Вестн. Харьк. ун-та, 1982, № 230. Механика, теория управления и математическая физика, с. 32—35.

Рассмотрен алгебраический подход к задаче стабилизации линейной автономной системы в банаховом пространстве, связанный с изучением спектра

элемента банаховой алгебры правым идеалом. Получены необходимые условия стабилизируемости системы. В частности, показано, что точная управляемость системы (в отличие от конечномерного случая и случая системы в гильбертовом пространстве) не является достаточным условием ее стабилизируемости. Приводится пример точно управляемой, но не стабилизируемой системы.

Библиогр.: 8 назв.

УДК 518:517

Вариационный метод в задаче управления нелинейными колебаниями распределенной системы. Фоменко А. В. — Вестн. Харьк. ун-та, 1982, № 230. Механика, теория управления и математическая физика, с. 35—41.

Рассматривается процесс упругих колебаний, описываемый слабо нелинейным уравнением гиперболического типа с распределенным управлением в правой части. Ставится задача минимизации функционала энергии системы, соответствующей этому процессу, взятого в конечный момент времени T при ограничении на управление изопериметрического типа. Вариационным методом получены необходимые условия оптимальности в форме краевой задачи для функции управления.

Для общего вида нелинейной функции предлагается итерационная схема решения задачи с применением малого параметра и последовательным приближением в пространстве конечных состояний,

Ил. 1. Библиогр.: 11 назв.

УДК 517.948.3

Преобразование решений гиперболической системы уравнений первого порядка. Сохин А. С. — Вестн. Харьк. ун-та, 1982, № 230. Механика, теория управления и математическая физика, с. 41—50.

Построено преобразование, переводящее обобщенное решение $z(t, x)$ строго гиперболической системы уравнений с потенциальной матрицей $P(t, x)$: $z_t^* + Az_x^* - P(t, x)z = 0$, $-\infty \leq t_0 < t < t_1 \leq \infty$, $-\infty < x < \infty$ (1), удовлетворяющее условию

$$\lim_{t \rightarrow t_1} G_{-t}^{(A)} z(t, x) = g(x),$$

в обобщенное решение системы уравнений вида (1) с потенциальной матрицей $Q(t, x)$, ведущее себя при $t \rightarrow t_1$ так же, как вектор $z(t, x)$. A — вещественная матрица размерности $n \times n$, имеющая различные простые вещественные собственные значения, $\{G_t^{(A)}, -\infty < t < \infty\}$ — сильно непрерывная группа операторов в $L_2(-\infty, \infty; E_n)$ (E_n — евклидово n -мерное пространство) с производящим оператором $-A\partial/(\partial x)$. Матрицы $P(t, x)$ и $Q(t, x)$ подчинены условиям в форме принадлежности их к некоторому кольцу матриц и в форме ограничений на величину убывания по переменной t при $t \rightarrow \infty$.

Библиогр.: 3 назв.

Обратная задача рассеяния для уравнения Шредингера на всей оси с неубывающим потенциалом специального вида. Ермакова В. Д. — Вестн. Харьк. ун-та, 1982, № 230. Механика, теория управления и математическая физика, с. 50—60.

Рассмотрено уравнение Шредингера $-y'' + q(x)y = \lambda y$, $-\infty < x < \infty$ (1), где $q(x)$ — вещественная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |q(x) - q_0(x)| = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} |q(x)| = 0,$$

$$\int_{-\infty}^0 (x^2 + 1) |q(x) - q_0(x)| dx < \infty, \quad \int_0^{\infty} (x^2 + 1) |q(x)| dx < \infty \quad (2),$$

а $q_0(x)$ — вещественный периодический (с периодом l) конечнзонный потенциал. С уравнением (1) естественным образом (аналогично матрице рассеяния) связывается «матрица перехода». Найдены необходимые и достаточные условия, при которых определенная матрица будет матрицей перехода некоторого уравнения типа (1). Получены интегральные уравнения, позволяющие восстановить потенциал $q(x)$ по матрице перехода и некоторым характеристикам точечного спектра.

Библиогр.: 3 назв.

О линейной представимости состояний дискретных открытых систем, ассоциированных с операторными j -узлами. Когут Е. А., Янцевич А. А. — Вестн. Харьк. ун-та, 1982, № 230. Механика, теория управления и математическая физика, с. 60—66.

Получены необходимые и достаточные условия линейной представимости состояний как открытых систем, ассоциированных с j -узлами, так и двойственных по отношению к ним открытых систем. Из условия линейной представимости естественно возникает характеристическая оператор-функция операторного аргумента, которая является продолжением на множество $\xi(T)$, где $\xi(T)$ — множество операторов A , таких что $A - T$ невырожденные операторы. Рассмотрены два примера j -узлов и ассоциированных с ними открытых систем, для которых решена задача линейной представимости.

Библиогр.: 2 назв.

О сцеплении операторных узлов и ассоциированных с ними открытых систем. Когут Е. А., Янцевич А. А. — Вестн. Харьк. ун-та, 1982, № 230. Механика, теория управления и математическая физика, с. 66—69.

Получены соотношения связи для характеристических оператор-функций операторного аргумента сцепляемых j -узлов и их сцепления. Определены условия для существования допустимых двоек и троек операторов сцепления j -узлов по имеющимся допустимым двойкам и тройкам операторов сцепляемых j -узлов, дающим линейную представимость состояний дискретных открытых систем, ассоциированных со сцепляемыми j -узлами.

Библиогр.: 2 назв.

Об устойчивости абсолютно твердого стержня при двухпараметрическом нагружении. Гинзбург И. Н. — Вестн. Харьк. ун-та, 1982, № 230. Механика, теория управления и математическая физика, с. 69—73.

Для исследования нелинейной задачи устойчивости упругозащемленного абсолютно твердого стержня, нагруженного продольной и поперечной силами, используется метод, позволяющий находить критические нагрузки, число решений и их зависимость от нагрузок при силах, превышающих критические.

Устанавливается, что при комбинации нагрузок меньше критической имеет место одна форма равновесия, в критическом случае — две формы, а при комбинации нагрузок больше критической — три. Дана асимптотика этих решений.

Ил. 2. Библиогр.: 2 назв.

УДК 519.4

Обобщенные гауссовы коэффициенты. К а л ю ж н ы й В. Н. — Вестн. Харьк. ун-та, 1982, № 230. Механика, теория управления и математическая физика, с. 73—82.

Изучаются решения возвратного уравнения $\binom{n}{k}_\alpha = \alpha^k \binom{n-1}{k}_\alpha + \binom{n-1}{k-1}_\alpha$, удовлетворяющие условиям $\binom{n}{0}_\alpha = \binom{n}{n}_\alpha = 1$, где α — элемент некоторого поля с порядком $w \leq \infty$ по умножению. Найдено разложение произвольного полинома по многочленам Ньютона, построенным по периодической последовательности узлов $1, \alpha, \alpha^2, \dots (w < \infty)$.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 513.838

Гиперфункция и теория гомологий. Головин В. Д. — Вестн. Харьк. ун-та, 1982, № 230. Механика, теория управления и математическая физика, с. 82—88.

В статье предложен новый подход к теории гиперфункций, основанный на теории гомологий аналитических пучков.

Библиогр.: 11 назв.

К СВЕДЕНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ

В Издательстве при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа»
в I кв. 1983 г.

выходит в свет справочник «Таблицы неопределенных интегралов от высших трансцендентных функций» Ю. Ф. Филиппова. Объем 10 л. Цена 70 к.

В справочнике изложен новый конструктивный метод вычисления неопределенных интегралов от высших трансцендентных функций. Найденные решения позволили получить рекуррентные соотношения для интегралов, которые применяются не только для вычисления массивов интегралов, но и для приведения их к стандартным, табулируемым на ЭВМ.

Приведены отсутствующие в справочной литературе неопределенные интегралы, вычисленные этим методом. Преимуществом развитого автором метода по сравнению с другими является большая информативность, охват большого количества высших трансцендентных функций и простота вычисления интегралов. Читатель, знакомый с элементами высшей математики, не найдя нужного ему соотношения, во многих случаях может получить его сам.

Книга будет полезной научным работникам, инженерам различных специальностей, а также студентам вузов технического профиля.

Заказы просим присылать по адресу: 310003, Харьков - 3, ул. Университетская, 16, Издательство при Харьковском государственном университете.

Центральна наукова
бібліотека ХДУ

Інв. № 305106

губ-1