

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ
В.Н. КАРАЗІНА ННІ «ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ
ФАКУЛЬТЕТ» КАФЕДРА ФІЗИКИ ЯДРА ТА ВИСОКИХ
ЕНЕРГІЙ ІМЕНІ О.І. АХІЄЗЕРА

Пояснювальна записка

до дипломного проекту (роботи)

МАГІСТРА

на тему

укр. Дослідження параметрів хвилі ядерного горіння за допомогою
автомодельного розв'язку рівнянь дифузії нейтронів у наближенні баклінга та
вигорання ядерного палива

англ. Investigation of nuclear burning wave parameters using self-similar solution
of equations of neutron diffusion in buckling approximation and nuclear fuel
burnup

Виконав: студент 2 курсу навчання
за ОНП магістр
напряму підготовки 105 "Прикладна фізика та наноматеріали"

Рудчик В.С.

Керівник: PhD Малошиця М.С

Рецензент: к.ф.-м.н., с.н.с. Фомін С.П.

Харків - 2025

АНОТАЦІЯ

У цій роботі використовувався автомоделний підхід до опису розповсюдження хвилі ядерного горіння (ХЯГ) у реакторі циліндричної геометрії. Використано одногрупове рівняння дифузії нейтронів у наближенні геометричного баклінга та систему рівнянь трансмутації основних нуклідів U–Pu паливного циклу, де продукти поділу замінено одним ефективним ядром. За допомогою переходу до системи координат, пов'язаної з рухом хвилі, отримано систему автомоделних рівнянь, у якій швидкість поширення хвилі виступає як власне значення. Для чисельного розв'язку запропоновано триступеневу ітераційну схему: послідовне визначення швидкості V , просторового розподілу концентрацій і оновлення нейтронного потоку до досягнення збіжності. Досліджено вплив радіуса активної зони та початкових умов на параметри хвилі, що підтверджує стійкість її руху в розглянутій конфігурації.

ABSTRACT

In this study, a self-similar (automodel) formulation is used to model the propagation of a nuclear burning wave (NBW) in a reactor with cylindrical geometry. The model couples the one-group neutron diffusion equation in the geometric buckling approximation with a set of transmutation equations for the primary U–Pu fuel-cycle nuclides, in which all fission products are represented by a single effective nucleus. By transforming to a coordinate frame moving with the wave front, the governing equations reduce to an automodel system in which the propagation velocity appears as an eigenvalue. For numerical solution, a three-stage iterative scheme is employed: (1) computation of the wave velocity v , (2) solution of the spatial nuclide-concentration profiles, and (3) update of the neutron flux, repeated until convergence. The influence of the active-zone radius and of various initial conditions on the wave parameters is examined, demonstrating the robustness of NBW propagation in the configuration studied.

ЗМІСТ

ЗМІСТ	4
ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ХВИЛІ ЯДЕРНОГО ГОРІННЯ	8
1.1 Базові теоретичні дослідження та розв’язок суттєво спрощеної моделі Л. П. Феоктістова..	9
1.2 Розв’язок рівняння з фіксованою залежністю коефіцієнту розмноження від флюенса Хьюго ван Дама.	13
1.3 Послідовний розв’язок рівнянь на власне значення рівнянь дифузії та рівнянь вигорання, CANDLES X. Секімото.....	17
1.4 Дослідження стійкості ХЯГ за допомогою підходу малих збурень В. М. Хотяїнцева.	19
1.5 Дослідження перехідних процесів у реакторі з ХЯГ та розв’язок нестационарного рівняння та рівнянь вигорання одночасно у роботах С. П. Фоміна..	20
1.6 Висновок огляду літератури	22
РОЗДІЛ 2. АВТОМОДЕЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЩО ОПИСУЮТЬ ХВИЛЮ ЯДЕРНОГО ГОРІННЯ.....	24
2.1 Перехід до системи автотодельних рівнянь	26
2.2. Схема пошуку швидкості ХЯГ	27
2.3. Ітераційна схема розв’язання автотодельних рівнянь	29
РОЗДІЛ 3. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВОГО РОЗРАХУНКУ РОЗВ’ЯЗКУ РІВНЯНЬ ДИФУЗІЇ НЕЙТРОНІВ У НАБЛИЖЕННІ БАКЛІНГА ТА ВИГОРЯННЯ ЯДЕРНОГО ПАЛИВА.....	31
3.1. Аналіз результатів автотодельних розрахунків	31
3.2. Спрощена схема пошуку автотодельного розв'язку	33
ВИСНОВКИ	39
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	41

ВСТУП

Глобальний енергетичний контекст і мотивація

Упродовж наступної чверті століття очікується, що світовий попит на електроенергію зростатиме швидше, ніж загальне споживання первинних енергоресурсів. Це зумовлено електрифікацією транспорту, промисловості й опалення, а також прагненням замінити технології спалювання більш чистими альтернативами. Дослідження ринку передових енергетичних технологій дійшло висновку, що для досягнення кліматичних цілей без загрози енергетичній безпеці потрібно суттєво розширити низьковуглецеві базові потужності, і значну частку цього приросту можуть забезпечити нові реакторні концепції.

Ядерний поділ генерує приблизно десяту частину світової електроенергії з рівнем викидів парникових газів на життєвому циклі співставним з вітровою енергетикою, і має один із найменших впливів на оточуюче середовище серед керованих джерел електроенергії.

Крім того, атомні електростанції відзначаються високою надійністю та стабільністю в постачанні електроенергії. Вони здатні працювати без перерви на тривалий період часу, що дозволяє забезпечувати стабільну постачання електроенергії для споживачів. Також, атомні електростанції мають велику потужність, що дозволяє їм задовольняти високі енергетичні потреби великих міст та промислових комплексів.

Водночас чинний парк, у якому домінують водо-водяні реактори на збагаченому U-235, стикається з трьома стратегічними обмеженнями:

- (i) обмежені природні запаси ізотопу U-235;
- (ii) накопичення довгоживучих радіотоксичних відходів;
- (iii) суспільне занепокоєння через аварії масштабу Чорнобиля й Фукусіми. Подолання цих бар'єрів є критично важливим для масштабування атомної енергетики на порядок у XXI столітті.

Швидкі реактори «breed-and-burn» і концепція хвилі ядерного горіння

Реактори із замкненим паливним циклом давно вважаються найперспективнішим шляхом до сталої ядерної енергетики, оскільки здатні відтворювати новий діловий матеріал з поширених ізотопів (U-238 або Th-232) і одночасно спалювати його. Серед різних ліній швидких реакторів – це Реактор з Хвилею Ядерного Горіння.

Реактор з Хвилею Ядерного Горіння (ХЯГ) – це тип реактора четвертого покоління, який має потенціал вирішити питання безпечності атомних електростанцій та зменшення кількості радіоактивних відходів. Реактор з ХЯГ використовує передову концепцію пасивної безпеки. Замість залежності від активних систем охолодження та подачі палива, у реакторі з ХЯГ використовуються природні фізичні властивості матеріалів для регулювання реакції. Це знижує ризик аварій та спрощує експлуатацію.

Одна з ключових переваг реактора з ХЯГ полягає в його здатності використовувати відпрацьоване паливо в якості палива для реактора, він забезпечує одночасне відтворення й спалювання всередині активної зони, формуючи повільну хвилю ядерного горіння, що просувається крізь переважно збіднений уран.

Традиційні атомні реактори використовують лише невелику частину палива, а решта стає відпрацьованим паливом. Завдяки використанню відпрацьованого палива і більш ефективного використання ядерного матеріалу, реактор з ХЯГ може утворювати енергію з палива на протязі тривалого періоду часу без необхідності зупинки для заміни палива. Це сприяє зниженню обсягів радіоактивних відходів, що утворюються.

Теоретичні й чисельні дослідження 1990-х — 2000-х років (роботи Feoktistov L., Van Dam H., Sekimoto H.) підтвердили можливість одномірного просування такої хвилі за ідеалізованих умов. Згодом українська група під керівництвом С. П. Фоміна отримала двовимірні розв'язки у циліндричній геометрії й виконала аналіз паливного циклу у ХЯГ. Паралельні роботи в

Японії (стратегія CANDLE), Китаї та США уточнили концепцію й розробили свої методи розрахунків ХЯГ.

Актуальність для України та світової ядерної галузі

Україна отримує близько 60 % електроенергії з АЕС, проте залежить від імпортованого збагаченого палива й зарубіжних послуг з переробки ВЯП. Реактор, який працює переважно на збідненому чи природному урані й генерує значно менше трансуранових відходів, підвищить енергетичну безпеку країни, сприятиме глобальній декарбонізації й зменшить довгострокові витрати. Режим хвилі ядерного горіння, що характеризується «внутрішньою безпекою» (відсутність запасу реактивності, дуже повільний період, визначуваний β -розпадом Np-239), відповідає сучасним вимогам безпеки й може розширити суспільне прийняття реакторів нового покоління.

Мета роботи

Розробити та перевірити метод швидкого аналізу параметрів хвилі ядерного горіння, на основі автомоделного підходу, для стаціонарної системи, для подальшого використання у нестаціонарних розрахунках.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ХВИЛІ ЯДЕРНОГО ГОРІННЯ

У 1958 році в рамках обговорення перспектив швидких реакторів С. М. Фейнберг [6] уперше запропонував ідею безпосереднього напрацювання й вигорання нуклідів у швидкому реакторі без попередньої хімічної переробки відпрацьованого палива та виокремлення ізотопів для подальшого використання. Практична реалізація цієї концепції обіцяла б істотно спростити й здешевити весь ядерно-паливний цикл, дозволяючи працювати на природному або навіть збідненому урані, а також на торії. Це відкривало б шлях до практично невичерпного енергозабезпечення людства на сотні й тисячі років. Втім, Фейнберг зазначав, що на той час складності розрахунків та обмеженість ядерних даних не дозволяли провести детальне моделювання такого реактора. Згодом ця ідея набула в науковій літературі назви “Breed and Burn” (B&B) — «Напрацьовуй та Спалюй» — і стала предметом численних досліджень інших авторів [7–9].

У 1988 році Л. П. Феоктістов у своїх роботах [1] запропонував суттєву модифікацію концепції B&B, зосередивши увагу на самопідтримному поширенні нейтронної хвилі в зоні бридингу. На відміну від попередньої версії, ця модель не вимагає зовнішнього регулювання реактивності й може працювати в автоматичному режимі, що суттєво підвищує безпеку й надійність системи. Феоктістов не лише довів можливість існування такого самопідтримного режиму на основі спрощеної теоретичної моделі, а й сформулював чіткі критерії його стабільності. Ці результати стали важливим поштовхом для подальшого розвитку концепції ХЯГ і сьогодні залишаються актуальними в контексті пошуку високоефективних і екологічно безпечних рішень у ядерній енергетиці.

У цьому розділі наведено стислий опис і критичний аналіз основних теоретичних підходів, які різні наукові колективи застосовували для вивчення

Хвилі Ядерного Горіння на основі концепції запропонованих Фейнбергом та Феоктістом.

1.1 Базові теоретичні дослідження та розв’язок суттєво спрощеної моделі Л. П. Феоктістова.

Л.П. Феоктістов першим запропонував концепцію Хвилі Ядерного Горіння — самопідтримної хвилі поділу у сировинному матеріалі, яка здатна підтримувати себе без зовнішнього керування. У своїх теоретичних дослідженнях 1988–1989 років він уявив реактор, у якому зона реакції повільно просувається крізь блок сировинного палива (наприклад, природного урану), безперервно напрацьовуючи власне розщеплюване паливо на передньому краї хвилі та спалюючи його позаду [1].

Феоктістов назвав це явище «нейтронно-подільна хвиля», описуючи, як активна зона реактора поступово зміщується в ще не використане сировинне середовище в міру утворення плутонію, у той час як виснажена область позаду хвилі згасає. Попереду хвилі формується зона напрацювання, де під дією нейтронного опромінення ізотоп U-238 перетворюється на Pu-239; щойно концентрація плутонію досягає критичного порогу — ця область «займається», утворюючи нову зону поділу.

Тим часом, попередня активна область позаду фронту лишається зі «спаленим» паливом (виснажений уран і продукти поділу), які поглинають нейтрони та глушать ланцюгову реакцію в цій зоні «золи». Така безперервна регенерація зони реакції призводить до виникнення хвилі ядерного горіння, що рухається крізь сировинне середовище.

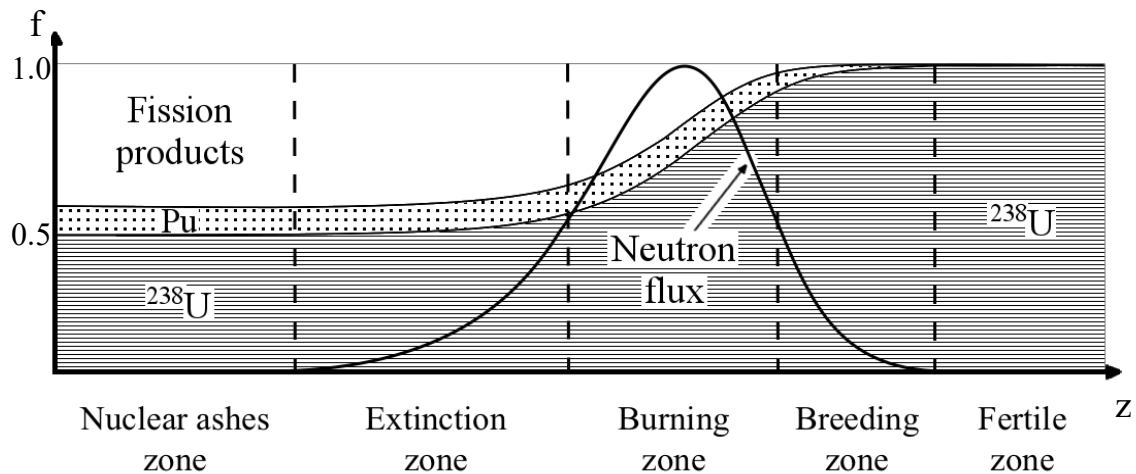
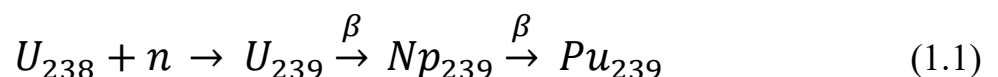


Рис. 1.1 Розповсюдження хвилі ядерного горіння (зліва направо) у середовищі заповненому U-238. f – об’ємна частка паливних нуклідів: U-238 (область заповнена горизонтальними лініями), плутоній (область заповнена точками) та продукти ядерного поділу (біла область). Суцільна чорна лінія – нормований на одиницю потік нейтронів. Форми розподілів отримані з розрахунків одновимірної моделі [46]

Спрощена одновимірна модель типу “напрацювання і спалювання” (Breed-and-Burn)

Щоб дослідити цю концепцію аналітично, Феоктістов значно спростив задачу. Він розглядав одновимірне, практично нескінченне середовище, що складається з чистого U-238, із зовнішнім джерелом нейтронів на одному кінці для ініціації хвилі. У моделі враховувалися лише основні нукліди циклу уран–плутоній: сировинний U-238, проміжний U-239 (який швидко бета-розпадається до Np-239 і далі до Pu-239), та сам плутоній Pu-239 як паливо.



Усі інші ізотопи Np-239, продукти поділу або малі актиноїди — були проігноровані або зведені до мінімального впливу, щоб зосередитися на ключових процесах напрацювання і спалювання. Також було прийнято

одногрупову дифузійну апроксимацію для нейтронів — усі реакції вважались такими, що відбуваються при середній енергії нейтрона.

Феоктістов використав ідеалізовані перерізи реакцій — наприклад, усі поглиначі нейтронів мали однаковий ефективний переріз захоплення — щоб звести ядерну фізику реакції до кількох параметрів. Завдяки таким сміливим спрощенням вдалося побудувати аналітичну модель, яка передає основну фізику хвилі без необхідності складного чисельного моделювання [1].

На основі цієї мінімальної моделі він записав систему дифузійних та кінетичних рівнянь: дифузійне рівняння для густини нейтронів із джерелами від поділу і втратами через поглинання, а також кінетичні рівняння для концентрацій нуклідів. Наприклад, рівняння балансу для Pu-239 виглядало так:

$$\frac{dN_{Pu}}{dt} = \nu n \left(\sigma_{a8} N_8 - (\sigma_a + \sigma_f)_{Pu} N_{Pu} \right) \quad (1.2)$$

де N_{Pu} — концентрація плутонію; ν — швидкість нейтронів; n — концентрація нейтронів; σ_{a8} — переріз поглинання нейтронів U-238; N_8 — концентрація U-238; σ_a та σ_f — перерізи поглинання та поділу Pu-239.

Аналогічні рівняння були записані для виснаження U-238 і утворення/розпаду U-239. Дифузійне рівняння нейтронів враховувало утворення нейтронів від поділу Pu-239 і поглинання всіма ізотопами.

Мета — знайти стаціонарне розв'язання у вигляді хвилі: фіксований за формою фронт, який рухається крізь середовище зі швидкістю $\square$.

Самоподібне розв'язання. Припустивши існування стаціонарної хвилі, Феоктістов перейшов до рухомої системи координат:

$$\zeta = x - V * t \quad (1.3)$$

В якій фронт реакції стає нерухомим. У такій системі всі величини (нейтронний потік, концентрація Pu тощо) стають функцією лише ζ , описуючи профіль, що переміщується з постійною швидкістю.

Задавши граничні умови — «свіже» паливо попереду ($+\zeta$) та «вигоріле» позаду ($-\zeta$) — Феоктістов знайшов аналітичне рішення для стабільної хвилі в нескінченному середовищі U-238. Профіль хвилі включав пік нейтронного потоку в зоні поділу, область накопичення Pu попереду цього піку (зона напрацювання) та різке зменшення U-238 позаду хвилі [1].

Критерій Феоктістова

Один із головних теоретичних результатів — виведення умов для існування самопідтримної хвилі. Феоктістов визначив дві характеристики для концентрації Pu:

1) Рівноважна концентрація — коли швидкість утворення Pu дорівнює швидкості його спалювання:

$$N_{Pu}^{eq} = \frac{\sigma_{a8}}{\sigma_a^{Pu} + \sigma_f^{Pu}} N_8 \quad (1.3)$$

2) Критична концентрація — мінімально необхідна концентрація Pu для підтримки критичності реактора (тобто $k_\infty = 1$):

$$N_{Pu}^c = \frac{\sum_i \sigma_{a,i} N_i}{(\nu - 1) \sigma_f^{Pu}} \quad (1.4)$$

де $\square$ — середня кількість нейтронів на один поділ Pu.

Якщо $N_{Pu}^{eq} > N_{Pu}^c$, то утворений плутоній забезпечує критичність без зовнішнього джерела нейтронів — хвиля може самостійно поширюватися. Якщо ж навпаки, — реакція згасає. Феоктістов показав, що це співвідношення виконується лише у реакторах на швидких нейтронах. У тепловому спектрі

$N_{Pu}^{eq} < N_{Pu}^c$ отже, хвиля там самостійно не підтримується.

Вбудована безпека і часові масштаби

Ключовим інсайтом стало те, що така хвиля — надзвичайно повільна і саморегульована. Хоча локально концентрація Pu може перевищувати критичну, процес її утворення дуже повільний ~ 2.4 доби (β -розпад). Натомість ланцюгова реакція поділу — надзвичайно швидка ($\sim 10^{-8}$ с).

Тому при надлишку Pu , реакція його швидко «спалює», зменшуючи потік нейтронів і не дозволяючи системі вийти з-під контролю. Отже, швидкість хвилі та потужність обмежуються не можливостями реакції, а швидкістю напруцювання палива. Це створює природний негативний зворотний зв'язок, що гарантує внутрішню безпечну поведінку [1].

Висновок

Таким чином, Феоктістов заклав теоретичний фундамент концепції ядерної горючої хвилі. Його спрощена 1D-модель показала, що при швидкому нейтронному спектрі й достатній кількості сировинного матеріалу можлива самопідтримувана хвиля поділу. Найважливіше — він сформулював критерій існування хвилі.

Його підхід також вперше поєднав поняття рухомої координати, взаємодії дифузії нейтронів і перетворення палива, а також безпеки, зумовленої повільним напруцюванням нового пального. Усі подальші дослідження концепції реакторів типу “breed-and-burn” спираються на роботу Феоктістова 1989 року.

1.2 Розв'язок рівняння з фіксованою залежністю коефіцієнту розмноження від флюенса Хьюго ван Дама.

У 2000 році Хьюго ван Дам розробив спрощену аналітичну модель для вивчення ХЯГ. Його робота була зосереджена на одномірному, стаціонарному рівнянні дифузії нейтронів у поєднанні з вигоранням палива в рухомій системі координат. Застосувавши ключові спрощення — замінивши докладні рівняння

вигорання ефективною функцією вигорання та увівши агрегований коефіцієнт зворотного зв'язку – ван Дам отримав розв'язки, які дозволяють якісно змодельовати поведінку хвилі ядерного горіння [11-13].

Аналітична модель із функцією вигорання та зворотним зв'язком

Модель ван Дама відходить від стандартних рівнянь вигорання багатьох нуклідів, вводячи єдину функцію $k_{\infty}(\psi)$ що описує залежність нескінченного коефіцієнта розмноження від змінної вигорання ψ (пов'язаної з локальною флюенцією нейтронів), а також коефіцієнт зворотного зв'язку γ , який враховує агреговану реактивність системи (наприклад, розширення резонансів при нагріванні палива).

Використовуючи ці припущення, він сформулював одомірне рівняння дифузії нейтронів у системі координат, що рухається з хвилею зі швидкістю V . У цій рухомій системі координат рівняння набуває вигляду звичайного диференціального рівняння для ψ :

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + \frac{1}{L_0^2} [k_{\infty}(\psi(\xi)) + \gamma\varphi(\xi) - 1]\varphi(\xi) = 0 \quad (1.5)$$

де L_0 – довжина дифузії нейтронів, а вираз у дужках описує надлишкову реактивність.

Завдяки значній різниці в часових масштабах (дифузія нейтронів – мілісекунди, вигорання – дні чи роки), ψ розглядається як функція лише від координати ξ , що дозволяє отримати стаціонарний профіль хвилі [11].

Параболічна функція вигорання

Для отримання аналітичного розв'язку ван Дам припустив, що $k_{\infty}(\psi(\xi))$ має параболічну форму: спочатку зростає до максимуму (через напруження ділильних ізотопів, наприклад Pu-239), а потім знижується (через вигорання та накопичення шлаків). У результаті цього він отримав точний розв'язок із формою профілю потоку нейтронів, що має вигляд локалізованої “дзвоноподібної” хвилі. Цей розв'язок є математичним підтвердженням можливості самопідтримної хвилі.

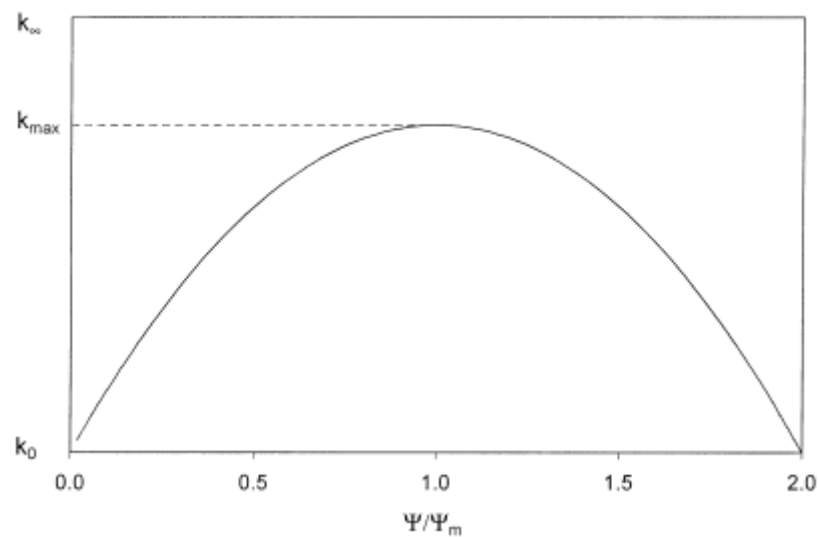


Рис. 1.2. Коефіцієнт розмноження, як функція нормалізованого нейтронного потоку у випадку параболічної функції вигорання в моделі Хьюго ван Дама [11]

Важливо, що ван Дам назвав цей режим “хвилею критичності”, оскільки лише фронт хвилі знаходиться у критичному стані – попереду паливо ще сировинне і підкритичне, позаду – вже вигорало, також підкритичне [11, 12].

Критерій існування хвилі

З аналітичної моделі ван Дам вивів умову існування (або запуску) стаціонарної хвилі: пік реактивності палива під час вигорання має перевищувати початкову реактивність на достатню величину. Іншими словами, функція $k_{\infty}(\psi(\xi))$ повинна мати "горбисту" форму з достатньо вираженою надкритичною ділянкою, яка дозволяє подолати втрати нейтронів.

Ще однією критичною умовою є знак коефіцієнта зворотного зв'язку: хвиля можлива лише за $\gamma < 0$. Це гарантує, що при зростанні потоку нейтронів реактивність знижується, тим самим стабілізуючи хвилю.

Швидкість хвилі та характеристики потужності

Ван Дам показав, що швидкість просування хвилі V прямо пропорційна максимальному потоку нейтронів у фронті. Чим вищий потік – тим швидше народжуються та вигорають ділильні ізотопи, тим швидше рухається хвиля. Швидкість залежить від значення k_{∞}^{max} та сили зворотного зв'язку γ . Це створює механізм саморегуляції: якщо хвиля прискорюється – зростає зворотний зв'язок, який її сповільнює, і навпаки.

Профіль потужності реактора в цьому випадку сконцентрований у фронті хвилі. Повільна хвиля дозволяє більш повно вигорати паливу в кожному об'ємі, швидка – розподіляє енерговиділення ширше.

Чисельні дослідження: запуск і перехідні процеси

Аналітичні розв'язки описують стаціонарну хвилю в нескінченному середовищі, але ван Дам також досліджував практичні умови запуску. Його чисельні моделювання показали, що для ініціації хвилі необхідне зовнішнє джерело нейтронів або область з ділильним матеріалом. Якщо реактор починає роботу лише з U-238, він спочатку сильно підкритичний. Зовнішнє джерело повинно мати оптимальні інтенсивність і тривалість – занадто слабе не запустить хвилю, занадто сильне може призвести до неконтрольованого спалаху.

Також було показано, що форма функції $k_{\infty}(\psi(\xi))$ впливає на стабільність та запуск хвилі: “вища” парабола сприяє швидшому старту, але може викликати сильні перехідні процеси, натомість “плоска” форма потребує сильнішого поштовху, але забезпечує стабільнішу хвилю [12].

Контроль потужності через керування зворотним зв'язком

Ван Дам також запропонував концепцію керування реактором через зміну коефіцієнта зворотного зв'язку γ . Замість традиційних регулюючих стрижнів, регулювання може досягатися зміною сили зворотного зв'язку (наприклад, через температуру модератора або інжекцію поглиначів). Його

чисельні експерименти підтвердили, що збільшення γ знижує пік потоку та потужність, а зменшення – навпаки.

Висновки роботи ван Дама

Дослідження Хьюго ван Дама 2000–2003 років заклали теоретичну основу для розуміння хвиль ядерного горіння. Основні досягнення:

1. Існування хвиль – хвиля можлива за умови достатнього напруцювання матеріалу та наявності негативного зворотного зв'язку.
2. Самостабілізація хвилі – завдяки $\gamma < 0$ хвиля підтримує критичність і не “вибухає”.
3. Аналітичний розв'язок та швидкість хвилі – знайдено замкнутий розв'язок для профілю потоку і залежність швидкості від параметрів реактора.
4. Умови запуску – показано необхідність зовнішнього джерела для ініціації хвилі.
5. Можливість регулювання потужності – продемонстровано, що шляхом зміни γ можна керувати потужністю без порушення хвилі.

1.3 Послідовний розв'язок рівнянь на власне значення рівнянь дифузії та рівнянь вигорання, CANDLE X. Секімото.

У 2001 р. під керівництвом Хіроші Секімото в Токійському технологічному інституті було запропоновано стратегію CANDLE (англ. Constant Axial shape of Neutron flux, Nuclide Densities and Local Energy production) – концепцію реактора з «хвилею вигорання», у якому форма профілів нейтронного потоку, концентрацій нуклідів і щільності потужності залишається незмінною в часі, а сама хвиля вигорання поволі просувається уздовж нерухомого стовпа палива зі сталою швидкістю. Це дозволяє досягнути надзвичайно високого відсотка вигорання урану чи торію, відмовитися від звичайних операцій перезаряджання та підтримувати

$k_{eff} \approx 1$ без зайвого запасу надкритичності під час нормальної експлуатації [19–25].

Теоретична концепція й постановка задачі

1. Константні профілі в системі, що рухається

У координатній системі, що рухається разом з хвилею зі швидкістю V , профілі нейтронного потоку та концентрацій нуклідів стають стаціонарними (стан стійкої хвилі).

2. Перетворення Галілея та власна задача

Замінивши змінну x на $\zeta = x - V * t$, часові похідні у рівняннях вигорання зникають, з'являється конвективний член $-V \frac{dN}{d\zeta}$. Потрібно знайти таке V , при якому сумарний нейтронний добуток врівноважує втрати, забезпечуючи $k_{eff} \approx 1$.

Для спрощення враховано:

- a. одномірність уздовж стовпа;
- b. нескінченно довгий стовп $\rightarrow$ межі віддалені;
- c. фіксована потужність, що змінює лише V , але не форму профілів.

Фактично потужність реактора у підході Х. Секімото є зовнішнім параметром, який призначається та визначає швидкість ХЯГ.

Висновки роботи

За результатами чисельних розрахунків було отримано двовимірні профілі нейтронного потоку та розподілу нуклідів у реакторі з однорідною активною зоною й радіальним відбивачем; при цьому максимальне вигорання палива досягало 40 %.

У подальших публікаціях групи Секімото та їхніх послідовників (див., наприклад, [40–45]) на базі цього підходу розглядали різні варіанти реалізації стратегії CANDLE, зокрема для Th–U циклу та навіть теплових реакторів. Для останніх доводилося попередньо збагачувати бридінгову зону діленими нуклідами й застосовувати гадоліній як поглинач з підвищеним ступенем “вигорання”. Водночас слід зауважити, що в цих моделях усі нестационарні

явища враховуються лише через зміни складу палива, тому вони не дозволяють детально описати перехідні процеси в системі та оцінити стабільність режиму хвильового горіння.

1.4 Дослідження стійкості ХЯГ за допомогою підходу малих збурень В. М. Хотяїнцева.

Щоб проаналізувати, як різні параметри реактора впливають на швидкість хвилі горіння, В. М. Хотяїнцев із колегами [34–36] розробили спрощену одновимірну модель нескінченного циліндра палива з U–Pu циклом. У цій моделі вони поєднали дифузійне рівняння, доповнене загальним коефіцієнтом зворотного зв'язку та ефективною густиною поглинач, з системою рівнянь вигорання, що враховує сім нуклідів основного ланцюга і ще одну умовну доміш, яка вміщує сумарний вплив продуктів поділу.

Температурні ефекти введені через додатковий безрозмірний коефіцієнт у члені дифузії, хоча джерела цих ефектів у роботі прямо не деталізовані. Пошук рішення проводився в тому ж ключі, що й у Феоктістова: шукали стаціонарну хвилю, що рухається вздовж нескінченно довгої осі реактора зі сталою швидкістю.

Після перетворення в безрозмірні змінні автори отримали узагальнене дифузійне рівняння:

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + g\varphi = 0, \quad g = \sum_i c_i N_i - p + \gamma w \varphi (\sum_i c_{ai} N_i + p) \quad (1.6)$$

де N_i – безрозмірні щільності ядер, які знаходяться з рівнянь вигорання; c_i та c_{ai} – безрозмірні коефіцієнти, які відповідають перерізам поглинання та поділу; γ – безрозмірний параметр зворотного зв'язку обумовлений тепловими явищами; p – безрозмірна ефективна густина поглинач; w – безрозмірна швидкість хвилі.

Інтегрувавши це рівняння вздовж усієї осі, дослідники вивели умови існування стаціонарного рішення. Застосувавши чисельні методи до системи рівнянь дифузії разом із рівняннями вигорання для заданих значень та, можна отримати просторові профілі потоку та складу палива.

В околиці малого значення, використовуючи розклад за теорією збурень, В. М. Хотяїнцев і співавтори вивели аналітичні формули, що зв'язують швидкість хвилі з параметрами теплового зворотного зв'язку та густини поглинача. У цьому наближенні вони порівняли вплив двох механізмів зворотного зв'язку — теплового та пов'язаного зі зміною складу палива — і дослідили стійкість хвилі при низьких швидкостях, виявивши характерне роздвоєння рішення, яке пояснюють нестабільністю накопичення Pu-241.

1.5 Дослідження перехідних процесів у реакторі з ХЯГ та розв'язок нестационарного рівняння та рівнянь вигорання одночасно у роботах С. П. Фоміна.

Група С. П. Фоміна [2, 26–33] зосередила свої дослідження на механізмах запуску, поширення та стабільності ядерної хвилі, а також на динаміці перехідних режимів у ХЯГ. Для опису нейтронно-ядерних процесів вони розв'язували нестационарні багатогрупові рівняння дифузії нейтронів спільно з рівняннями вигорання і кінетики запізнених нейтронів, застосовуючи 26-групове енергетичне наближення. Необхідні макроскопічні перерізи запозичували з бібліотеки БНАБ [55, 56], а всі чисельні обчислення виконувалися на оригінальному коді, розробленому авторами. Моделювання проводили як у плоскій одновимірній постановці, так і в двовимірній циліндричній геометрії з виділенням двох фізичних зон: «зони запалу» та «зони бридінгу».

У роботах [12, 14–17] основні результати отримано за допомогою апроксимації радіального баклінгу, яка перетворює 2D-задачу на еквівалентну 1D-модель із додатковим витоком. У цьому підході рівняння дифузії набуває вигляду:

$$\frac{1}{v} \frac{\delta \Phi}{\delta t} - \frac{\delta}{\delta z} D \frac{\delta \Phi}{\delta z} + D B_r^2 \Phi + \Sigma_a \Phi - (1 - \bar{\beta})(\nu_f \Sigma_f) \Phi = \sum_i \sum_l \lambda_l^i C_l^i \quad (1.7)$$

де Φ – скалярний потік нейтронів; Σ_f та Σ_a – ефективні макроскопічні перерізи поділу та поглинання нейтронів; $D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}}$ – коефіцієнт дифузії; ν_f –

середня кількість нейтронів на поділ; l – індекс ядер, що поділяються; C – концентрація ядер попередників нейтронів, що запізнюються та λ – постійна напіврозпаду ядер попередників нейтронів, що запізнюються.

На відміну від плоских аналітичних моделей, радіальне баклінг-наближення враховує поперечний витік нейтронів і вплив радіусу активної зони на ключові характеристики: потужність та швидкість поширення хвилі. Порівняння результатів із точними 2D-розрахунками [30] показало якісну згодженість із розбіжністю близько 15 % у величинах швидкості хвилі, потужності та критичного радіусу, нижче якого хвиля не формується.

Завдяки застосуванню баклінг-наближення вдається скоротити час обчислень приблизно в 10 разів порівняно з повномасштабними 2D-моделями, що робить його зручним для попереднього аналізу нестабільних процесів. Проте цей метод не здатен адекватно відобразити радіальну неоднорідність вигорання палива та вплив зовнішнього нейтронного відбивача.

Дослідження групи Фоміна виявили важливий внутрішній механізм негативного зворотного зв'язку за реактивністю, який забезпечує пасивну безпеку ХЯГ. Як показано в [2], зовнішнє підвищення потоку (наприклад, опромінення ззовні) призводить до надшвидкого вигорання активних нуклідів і тимчасового переходу в підкритичний стан. Проте завдяки нейтронам від достатньо тривалого розпаду проміжних нуклідів (період напіврозпаду $\text{Np-239} \approx 2,4$ доби для U–Pu циклу, $\text{Pa-233} \approx 27$ діб для Th–U) процес вигорання продовжується, після чого реактор самовідновлює критичність і стійкий режим відновлюється. У разі перевищення концентрації нуклідів понад критичне значення надкритичність швидко знищується таким «надлишком», що повертає систему до стану критичності.

Застосування нестационарного підходу також дозволило вивчити ініціалізацію хвилі та оптимізувати склад стартової зони для плавного запуску [32], а також проаналізувати поведінку реактора під час вимушеного відключення та подальшого перезапуску [33].

Ще одним суттєвим внеском стало обґрунтування в [2] використання торій-уранового палива в ХЯГ. Розрахунки довели технічну здійсненність і показали, що зміна співвідношення Th-232/U-238 дає додаткові можливості регулювання щільності тепловиділення та швидкості поширення хвилі.

1.6 Висновок огляду літератури

1. Феоктістов — Рівняння дифузії суттєво спростили до трьох–чотирьох компонент, щоб можна було знайти аналітичний розв’язок, подібний до хвильового рівняння. Напрямку не вирішували рівняння вигорання, а вводили $k_{\infty}(\psi)$ в кожній точці простору, та за допомогою неї характеризували розмноження нейтронів і зміну нуклідів. І далі досліджували параметри хвилі в залежності від просторового розподілу $k_{\infty}(\psi)$, виводячи критичні значення для існування хвилі.

2. Секімото — Модифікував готові коди для реальних реакторів під хвилю ядерного горіння, нормував нейтронний потік за потужністю, використовуючи потужність як зовнішній параметр, обчислював вигорання палива й зміну складу виходячи з отриманого потоку, а далі знаходив швидкість руху хвилі.

Але він вирішував задачу на k_{eff} , що для ХЯГ не зовсім коректно, так як k_{eff} у хвилі дорівнює 1, і як результат ми повинні нормувати потік за допомогою потужності, а потужність для реального використання реактору повинна бути в внутрішніх, а не зовнішніх параметрах системи.

3. Група Хотяїнцева — Використала одноступеневе рівняння зі врахуванням вигорання нуклідів та підхід малих збурень (через те, що швидкість хвилі значно менша за швидкість нейтронів), теоретично вивівши залежності параметрів.

4. Хьюго ван Дама — теоретично вирішує спрощену та неповну систему, де вважає залежність $k_{\infty}(\psi)$ та потоку відомою.

5. Група Фоміна — вважається досить повним вирішенням задачі з урахуванням рівнянь дифузії та вигорання в нестатичному наближенні для 2D

системи. Але для чисельного вирішення системи потрібно дуже багато ресурсів та часу. А також в реальному використанні, не завжди можливо підібрати параметру реактору так, щоб в ньому була хвиля і розрахунок таких систем також втрачається багато ресурсів.

Тому на практиці потрібно мати методи, які будуть більш точними та наближеними до реальності ніж методи Феоктістова, Хьюго ван Дама та Секімото, але більш швидкими ніж метод групи Фоміна. І цього можна досягти за допомогою методу автомодельного розв'язання системи для ХЯГ, що є темою нашої роботи та те що ми будемо описувати у наступному розділі.

РОЗДІЛ 2

АВТОМОДЕЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЩО ОПИСУЮТЬ ХВИЛЮ ЯДЕРНОГО ГОРІННЯ

Явище розповсюдження ХЯГ у швидкому реакторі є набором нестационарних процесів зміни нуклідного складу активної зони, що супроводжується відповідною зміною розподілу нейтронного потоку. Числове моделювання нестационарних процесів у швидкому реакторі є задачею витратною з точки зору часу необхідного для розрахунку розподілу потоку нейтронів на кожному наступному часовому кроці. Тому для пришвидшення розрахунків для розрахунку транспорту нейтронів скористаємося наближенням дифузії нейтронів. Окрім того, для опису характеристик ХЯГ у циліндричній геометрії досить зручно використовувати наближення геометричного баклінга [29], яке дозволяє значно спростити задачу. Отже, для нашої задачі маємо одноступене рівняння дифузії нейтронів у наближенні баклінга:

$$\frac{1}{v} \frac{d\Phi_z}{dt} - \frac{d}{dz} D \frac{d}{dz} \Phi_z + DB_r^2 \Phi_z + \Sigma_a \Phi_z = \Phi_z \sum_j (\nu_f \Sigma_f)_j \quad (2.1)$$

де $\Phi_z(z)$ це потік нейтронів на осі $r = 0$, $D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}}$ це коефіцієнт дифузії нейтронів, $B_r = \frac{2.405}{R_0}$ – радіальний коефіцієнт баклінга, R_0 – радіус циліндричного реактора, v – середня швидкість нейтронів, $\Sigma_a = \Sigma_c + \Sigma_f$ – макроскопічний переріз поглинання нейтронів, Σ_c – макроскопічний переріз радіаційного захоплення нейтронів, Σ_f – макроскопічний переріз поділу, $(\nu_f \Sigma_f)_j$ – переріз утворення нейтронів поділу ядра з індексом j . Для реактору задання граничних умов будемо розглядати реактор кінцевих розмірів довжиною $2L$, відповідно $-L < z < L$. На кінцях реактора вводимо умови відкритих границь:

$$\Phi_z(\pm L) = 0, \quad (2.2)$$

Для моделювання зміни нуклідного складу активної зони розглянемо ланцюг перетворення нуклідів у U-Pu паливному циклі, основні нукліди та

шляхи перетворення зображені на Рис. 2.1. Окрім нуклідів зображених на Рис. 2.1 у процесі поділу ядер утворюються продукти поділу. Розраховувати весь набір можливих продуктів поділу та їх вторинних розпадів та перетворень є задачею не тривіальною тому, для виконання завдань поставлених у дипломній роботі, усі продукти поділу замінюються одним ефективним ядром FP, характеристики якого є усередненими по продуктам поділу з відповідними ваговими коефіцієнтами характеристиками. Зазначимо, що переходом $^{239}\text{Np} \rightarrow ^{240}\text{Np}$, який відбувається за рахунок захоплення нейтрону ядром ^{239}Np , ми нехтуємо у наших розрахунках. В результаті, у даній дипломній роботі розраховується зміна нуклідів які перелічені у таблиці 2.1, у якій також записані характеристики, які використовувалися для моделювання.

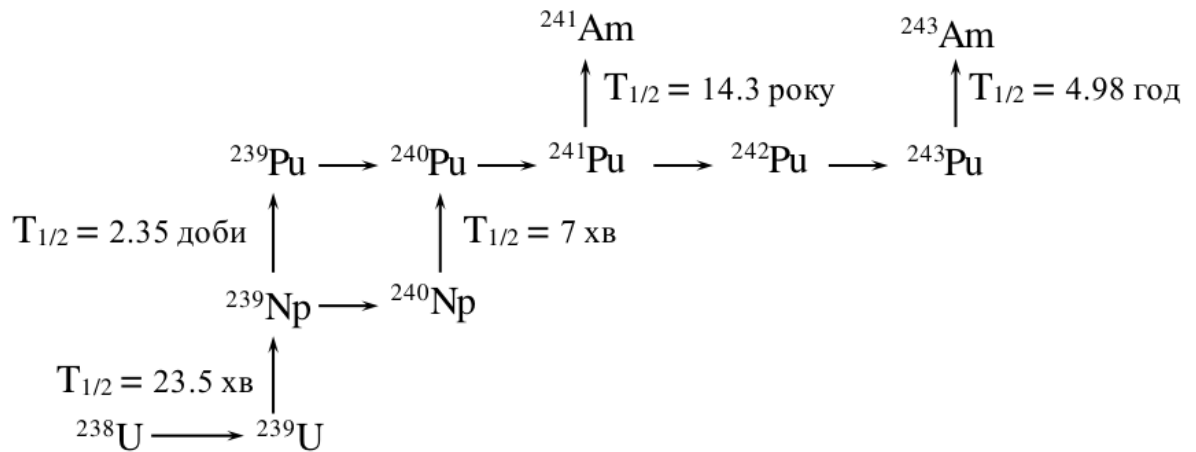


Рис. 2.1 Ланцюг перетворення нуклідів активної зони

Для такого списку нуклідів і схеми перетворень зображеної на Рис. 2.1 зміна нуклідного складу буде описуватися системою рівнянь визначених у кожній просторові точці активної зони:

$$dN_1/dt = -\sigma_{a1}N_1\Phi \quad (2.3)$$

$$dN_2/dt = -\lambda_2N_2 + \sigma_{c1}N_1\Phi \quad (2.4)$$

$$dN_3/dt = -\lambda_3N_3 + \lambda_2N_2 \quad (2.5)$$

$$dN_4/dt = -\sigma_{a4}N_4\Phi + \lambda_3N_3 \quad (2.6)$$

$$dN_5/dt = -\sigma_{a5}N_5\Phi + \sigma_{c4}N_4\Phi \quad (2.7)$$

$$dN_6/dt = -(\sigma_{a6}\Phi + \lambda_6)N_6 + \sigma_{c5}N_5\Phi \quad (2.8)$$

$$dN_7/dt = -\sigma_{a7}N_7\Phi + \sigma_{c6}N_6\Phi \quad (2.9)$$

$$dN_8/dt = -\sigma_{a8}N_8\Phi + \lambda_6N_6 \quad (2.10)$$

$$dN_9/dt = -\sigma_{a9}N_9\Phi + \sigma_{c7}N_7\Phi \quad (2.11)$$

$$dN_{10}/dt = \sum_{j=1}^9 \sigma_{fj}N_j\Phi \quad (2.12)$$

Тут і далі для спрощення записів Φ_z будемо позначати як Φ . Рівняння (2.3) – (2.12) можна узагальнити одним рівнянням:

$$dN_i/dt = -\Lambda_i N_i + \sum_j \Lambda_j^i N_j \quad (2.12)$$

Де $\Lambda_i = \sigma_{ai}\Phi + \lambda_i$ - швидкість реакції трансмутації нукліда i , а Λ_j^i – швидкість реакції перетворення нукліда j у нуклід i .

Таблиця 2.1 Нукліди активної зони концентрація яких змінюється з часом

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ядро	^{238}U	^{239}U	^{239}Np	^{239}Pu	^{240}Pu	^{241}Pu	^{242}Pu	^{241}Am	^{243}Am	FP
σ_c , барн	0.1926	0.0866	0.6912	0.2341	0.3269	0.3110	0.2854	1.2003	1.0196	0.3790
σ_f , барн	0.0284	0.3795	0.0000	1.6021	0.3475	1.9554	0.2437	0.2407	0.1694	0.0000
ν_f	0.0775	0.9000	0.0000	4.7326	1.0431	5.8474	0.7496	0.8058	0.5869	0.0000

2.1 Перехід до системи автомоделних рівнянь

Рівняння (2.1) та (2.12) утворюють систему, що описує основні нестационарні процеси, що характеризують розповсюдження ХЯГ у швидкому реакторі: зміну нуклідного стану та зміну розподілу потоку нейтронів. Варто зазначити, що ці два процеси мають характерні часи, що суттєво відрізняються. Характерний час зміни нейтронного потоку – час вільного прольоту нейтрону $\tau_n \sim 10^{-11}$ с, а характерний час зміни нуклідного складу – час утворення ^{239}Pu $\tau_{Pu} \sim 2.35$ доби, що робить систему рівнянь (2.1) та (2.12) жорсткою і призводить до необхідності використання особливих методів розрахунків.

У даній роботі для розв'язку системи рівнянь (2.1) та (2.12) використовувався автомоделний підхід розв'язання рівнянь, що описують

системи з постійною швидкістю аналогічно до підходу Л. Феоктістова [4]. Робимо припущення, що розподіли потоку нейтронів та нуклідних складів без зміни їх форми рухається з постійною швидкістю V вздовж осі z , тоді ми можемо перейти у систему пов'язану з ХЯГ:

$$x = z + Vt, \quad (2.13)$$

$$\frac{d}{dt} = V \frac{d}{dx}, \quad \frac{d}{dz} = \frac{d}{dx}. \quad (2.14)$$

Відповідно рівняння (2.1) та (2.12) у новій системі координат трансформуються у :

$$\frac{V}{v} \frac{d\Phi}{dx} - \frac{d}{dx} D \frac{d}{dx} \Phi + DB_r^2 \Phi + \Sigma_a \Phi = \Phi \sum_j (v_f \Sigma_f)_j \quad (2.15)$$

$$V dN_i/dx = -\Lambda_i N_i + \sum_j \Lambda_j^i N_j \quad (2.16)$$

Зазначимо, що у рівнянні (2.15) швидкість руху хвилі V значно менша за середню швидкість нейтронів v , тому першим членом рівняння можемо знехтувати. Таким чином, ми отримали систему рівнянь (2.15) та (2.16) розв'язок якої дає нам розподіли потоку нейтронів та нуклідних складів, що характеризують сталий режим ХЯГ.

Система рівнянь (2.15) та (2.16) є аналогом рівняння дифузії нейтронів з ефективним коефіцієнтом розмноження нейтронів, який є власним значенням такого рівняння. У нашому випадку власним значенням системи рівнянь буде швидкість руху ХЯГ, за якої можливий розв'язок системи рівнянь (2.15) та (2.16). Проте, система рівнянь (2.16) у якій явно знаходиться швидкість суттєво відрізняється від рівняння дифузії нейтронів, тому неможливо використовувати ітераційну схему пошуку коефіцієнту ефективного розмноження нейтронів до нашого випадку.

2.2. Схема пошуку швидкості ХЯГ

Для розробки методу пошуку швидкості руху ХЯГ V скористаємося тим фактом, що ми виконали перехід до системи, що пов'язана з ХЯГ але не вказали до якої точки хвилі ми прив'язалися. Виберемо точку прив'язки таким чином щоб одна з похідних системи (2.16) дорівнювала 0. Найперше рівняння

з системи (2.16) у якому ми можемо знайти таку точку – це рівняння (2.4), що описує зміну концентрації нукліду ^{239}U :

$$V dN_2/dx = 0 = -\lambda_2 N_2 + \sigma_{c1} N_1 \Phi. \quad (2.17)$$

Відповідно, якщо ми прив'яжемо початок координат до точки, що задовільняє умовам (2.17) ми отримуємо рівняння:

$$-\lambda_2 N_2(0) + \sigma_{c1} N_1(0) \Phi(0) = 0. \quad (2.18)$$

У рівняння (2.18) входять концентрації N_1 та N_2 у точці $x = 0$, які є невідомими величинами, але ми можемо виразити їх через флюенс у точці $x = 0$ шляхом розв'язання системи рівнянь:

$$\begin{cases} V dN_1/dx = -\sigma_{a1} N_1 \Phi \\ V dN_2/dx = -\lambda_2 N_2 + \sigma_{c1} N_1 \Phi \end{cases} \quad (2.19)$$

кожне з цих рівнянь є диференціальним лінійним рівнянням першого порядку виду $dy/dx + P(x)y = Q(x)$ і має розв'язок:

$$y = e^{-\int P dx} (C_1 + \int Q e^{\int P dx} dx). \quad (2.20)$$

Відповідно, система рівнянь (2.19) буде мати розв'язок:

$$N_1(x) = N_1^0 e^{\left[-\frac{\sigma_{a1}}{V} \Psi(x)\right]}. \quad (2.21)$$

де $\int_{-L}^x \Phi(x') dx' \equiv \Psi(x)$ – флюенс, $N_1^0 \equiv N_1(-L)$.

$$N_2(x) = e^{\left[-\frac{\lambda_2(x+L)}{V}\right]} \left(C_1 + \frac{\sigma_{a1} N_1^0}{V} \int_{-L}^x \Phi(x') e^{\left[-\frac{\sigma_{a1}}{V} \Psi(x')\right]} e^{\left[\frac{\lambda_2(x'+L)}{V}\right]} dx' \right) \quad (2.22)$$

враховуючи, що хвиля рухається ліворуч, концентрація ^{239}U у точці $x = 0$ буде $N_2^0 \equiv N_2(-L) = 0$, відповідно $C_1 = 0$:

$$N_2(x) = \frac{\sigma_{a1} N_1^0}{V} \int_{-L}^x \Phi(x') e^{\left[\frac{1}{V}(\lambda_2(x'-x) - \sigma_{a1} \Psi(x'))\right]} dx'. \quad (2.23)$$

Підставимо вирази (2.21) та (2.23) у (2.18):

$$-\frac{\lambda_2}{V} \int_{-L}^0 \Phi(x') e^{\left[\frac{1}{V}(\lambda_2 x' - \sigma_{a1} \Psi(x'))\right]} dx' + e^{\left[-\frac{\sigma_{a1}}{V} \Psi(0)\right]} \Phi(0) = 0 \quad (2.24)$$

$$\int_{-L}^0 \Phi(x') \exp \left[\frac{1}{V} (\lambda_2 x' - \sigma_{a1} \Psi(x')) \right] dx' = \Phi(0) \frac{V}{\lambda_2} \exp \left[-\frac{\sigma_{a1}}{V} \Psi(0) \right] \quad (2.24)$$

Рівняння (2.24) є трансцендентним рівнянням для пошуку швидкості ХЯГ, якщо відомий розподіл потоку нейтронів $\Phi(x)$. Отже, рівняння (2.15), (2.16) та (2.24) утворюють повну систему автотомельних рівнянь для пошуку

розподілу потоку нейтронів, нуклідів активної зони та швидкості розповсюдження ХЯГ.

2.3. Ітераційна схема розв'язання автомоделних рівнянь

Аналітично або прямими ітераційними схемами розв'язати систему рівнянь (2.15), (2.16) та (2.24) неможливо оскільки рівняння (2.24) записано через подвійний інтеграл. Тому пошук розв'язку будемо шукати за трикрокової ітераційної схеми, у якій на кожному з кроків буде окремо розв'язуватися одна систем рівнянь (2.15), (2.16) або (2.24).

Для початку рішення ітераційної схеми достатньо знати, або початковий розподіл потоку, або початковий розподіл активних нуклідів зони. Для першого випадку можна взяти потік будь-якої форми $\Phi(x)$. Для прискорення збіжності схеми є сенс нормувати потік нейтронів таким чином, щоб вигорання палива після проходження хвилі складало половину від початкової концентрації палива [4]:

$$\exp \left[-\frac{\sigma_{a1}}{V} \Psi(L) \right] = 0.5 \quad (2.25)$$

У другому випадку задаємо початковий розподіл нуклідів активної зони таким чином, щоб концентрація урану-238 спадала лінійно від фронту і до тилу хвилі лінійно:

$$N_1^0(x) = \frac{3L-x}{4L} N_1(-L) \quad (2.26)$$

Для концентрації плутонію задаємо значення пропорційно урану, що вигорів:

$$N_4^0(x) = f_4 \frac{L+x}{4L} N_1(-L) \quad (2.27)$$

Де коефіцієнт f_4 підбирається таким чином, щоб початковий коефіцієнт розмноження нейтронів був близький до 1. Для цього окремо розв'язується задача на пошук ефективного коефіцієнту розмноження нейтронів. Решта об'єму заповнюється продуктами поділу (FP).

Після визначення початкових значень концентрацій нуклідів вирішується завдання на власні значення рівняння дифузії нейтронів, яке виходить із рівняння (5) шляхом додавання коефіцієнта k_{eff} :

$$-\nabla D \nabla \Phi + \Sigma_a \Phi = \frac{1}{k_{eff}} \sum_j (v_f \Sigma_f)_j \Phi \quad (2.28)$$

Знайдений розподіл нейтронів нормується з допомогою умови (2.25).

Після знаходження розподілу потоку $\Phi(x)$ в обох випадках шукаємо розв'язання автомодельних рівнянь (2.15), (2.16) та (2.24) за наступною схемою, де на ітерації i :

1. При відомому потоці $\Phi^{(i-1)}(x)$ знаходимо значення швидкості хвилі $V^{(i)}$ із рівняння (2.24);
2. При відомому потоці $\Phi^{(i-1)}(x)$ та швидкості хвилі $V^{(i)}$ знаходимо розподіл концентрацій нуклідів $N_j^{(i)}(x)$ з рівнянь трансмутації (2.16);
3. З відомих розподілів концентрацій знаходимо макроскопічні перерізи і розв'язуємо рівняння (2.15), де у правій частині підставляємо відомі значення $\Phi^{(i-1)}(x)$, а значення потоку в лівій частині $\Phi^{(i)}(x)$ невідомі;
4. Повторюємо ітераційну схему з першого кроку до досягнення умови збіжності.

Умовами збіжності у даній дипломній роботі вважається досягнення відносної різниці у значеннях потоку нейтронів між сусідніми ітераціями певного порогу ε .

$$\sum_m |\Phi^{(i)}(x_m) - \Phi^{(i-1)}(x_m)| / \sum_m \Phi^{(i-1)}(x_m) < \varepsilon \quad (2.29)$$

РОЗДІЛ 3

РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВОГО РОЗРАХУНКУ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ ДИФУЗІЇ НЕЙТРОНІВ У НАБЛИЖЕННІ БАКЛІНГА ТА ВИГОРЯННЯ ЯДЕРНОГО ПАЛИВА

3.1. Аналіз результатів автомодельних розрахунків

Пошук розв'язку автомодельних рівнянь, що описують рух хвилі ядерного горіння будемо виконувати для циліндричного реактора довжиною 500 см, з граничними умовами, що відповідають відкритим границям. Початковими умовами рівнянь вигоряння є розподіли нуклідів у точці у точці $x = -L$. У нашій роботі не враховуються конструкційні матеріали та теплоносії, і задача вирішується у металевому урані, тому початкові умови: $N_1(x = -L) = 4.82093e^{+22} \text{ см}^{-3}$, а всі інші нукліди відсутні у даній точці.

Пошук швидкості ХЯГ

На рисунку Рис. 3.1 наведені просторові розподіли потоків визначених з розв'язання задачі на пошук ефективного коефіцієнту розмноження нейтронів. В результаті дослідження було виявлено, що можливість існування розв'язку рівняння (2.18), може залежати як від положення потоку відносно точки $x=0$, так і від його максимального значення. Тому декілька потоків були штучно отримані шляхом зміщення одного зразкового потоку у просторових координатах та множення його на коефіцієнти 10.0 та 0.1.

На Рис. 3.2 Наведені результати розрахунків різниці у лівій частині рівняння (2.18) для потоків наведених на Рис. 3.1. Важливою особливістю цих графіків є наявність значень, з різними знаками, тобто існування розв'язків рівняння (2.18). Проте, видно що не для всіх потоків існують розв'язки. Для потоків 3 та 5 відповідних розв'язків не існує.

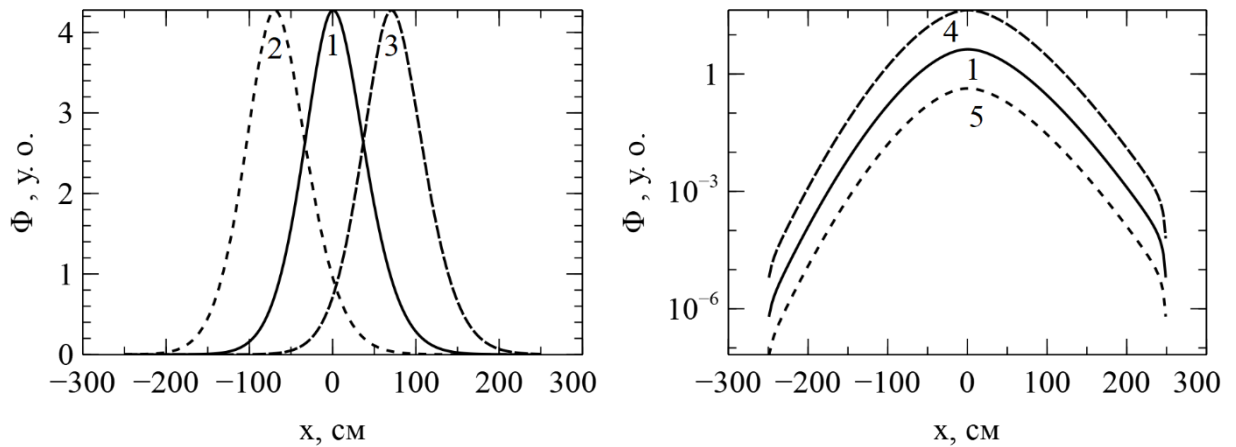


Рис. 3.1. Розподіли потоків. 1 – з максимумом у точці $x = 0$; 2, 3 – з максимумом зміщеним вліво/вправо від точки $x = 0$; 4, 5 – з амплітудою збільшеною/зменшеною у 10 разів.

Можна зробити припущення, що у випадках потоків недостатньої амплітуди або таких, що їх максимум знаходиться ближче до сторони початку руху хвилі і, у нашому випадку, праворуч від середини активної зони, розв'язку рівняння (2.18) не існує. Тому, ітеративна схема запропонована у другому розділі потребує введення додаткових умов, які б забезпечили виключення таких ситуацій.

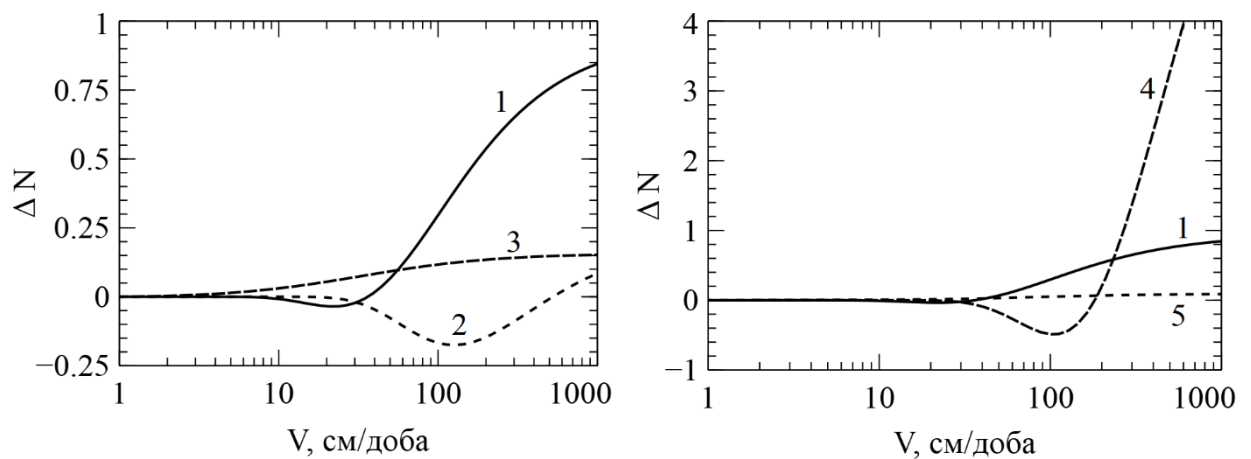


Рис. 3.2. Різниця у лівій частині рівняння (2.18) для потоків заданих на Рис. 3.1 для різних значень швидкості V

3.2. Спрощена схема пошуку автомодельного розв'язку

Для пошуку автомодельного розв'язку пропонується спрощена схема, у якій при розв'язанні фіксованим є положення потоку нейтронів, а не концентрації ^{239}U . Для цього візьмемо потік ($\Phi_0^{(0)}$) із розв'язку задачі на пошук ефективного коефіцієнту розмноження нейтронів та зсунемо його по осі таким чином, щоб положення максимуму потоку збігалось з серединою активної зони ($x = 0$), як зображено на Рис. 3.3. Далі для визначеного початкового значення V розв'язуються рівняння вигорання (2.3) – (2.12) та розраховуються нові розподіли нуклідів. Після чого, знову розв'язується задача на пошук k_{eff} і якщо його значення відрізняється від 1 більше ніж на задану похибку, то початковий потік Φ_0 змінюється у k_{eff} раз. Варто зазначити, що якщо при фіксованій швидкості хвилі ядерного горіння k_{eff} більше одиниці – це означає, що матеріали, що поділяються, не встигають вигорати тому необхідно збільшити потік нейтронів, і навпаки: якщо k_{eff} менше одиниці – це означає, що вигоряє занадто багато продуктів, що поділяється і потік нейтронів треба зменшити.

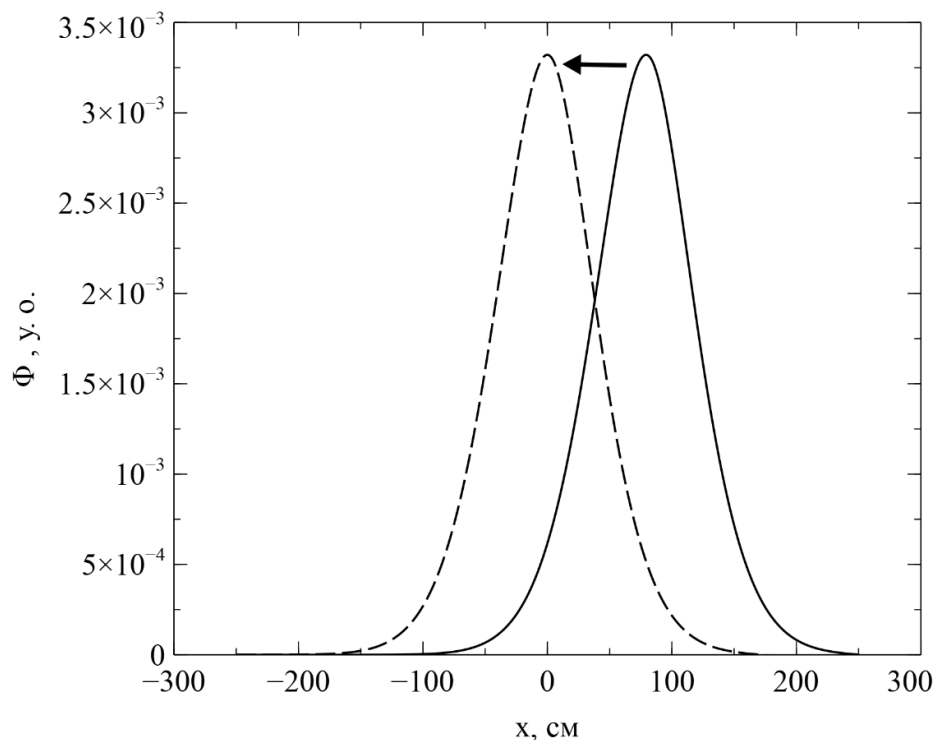


Рис 3.3. Зміщення потоку до середини.

Процедура зміни потоку нейтронів на k_{eff} , пошуку нового розподілу нуклідів та пошуку відповідного k_{eff} , виконується до тих пір поки k_{eff} не наблизиться до 1 із заданою точністю. Після закінчення ітерацій потік, отриманий в результаті розв'язку задачі на пошук k_{eff} стає новим $\Phi_0^{(1)}$ (нормувальний потік). Дана процедура повторюється декілька разів для перевірки на постійність результатів розрахунків. Якщо новий потік зсунутий відносно середини активної зони на певну відстань Δx , то це означає, що обрана на початку ітераційної процедури швидкість не є розв'язком автотомодельної системи рівнянь і тому треба обрати нове значення. На Рис. 3.4 зображено відповідну залежність зсуву потоку, що є розв'язком задачі на пошук k_{eff} відносно середини реактору в залежності від номеру ітерації для різних значень обраної швидкості ХЯГ. Аналіз графіків показує, що при наближенні швидкості до розв'язку автотомодельної системи значення зсуву відносно середини реактора наближається до 0. В той же час, якщо швидкість більша за шукану швидкість, то зсув Δx відбувається праворуч (ближче до початку руху хвилі), а коли швидкість менша за шукану, то зсув відбувається ліворуч (далі від початку руху хвилі). При занадто маленьких швидкостях зсув починає слабо змінюватись. Така поведінка може бути пояснена тим, що для утворення у активній зоні реактора достатньої кількості матеріалу, що поділяється, для досягнення реактивності ($k_{\text{eff}} = 1.0$) необхідний флюєнс приблизно однакового рівня, а у нашій задачі флюєнс пропорційний максимальному значенню потоку нейтронів і зворотно пропорційний швидкості руху хвилі.

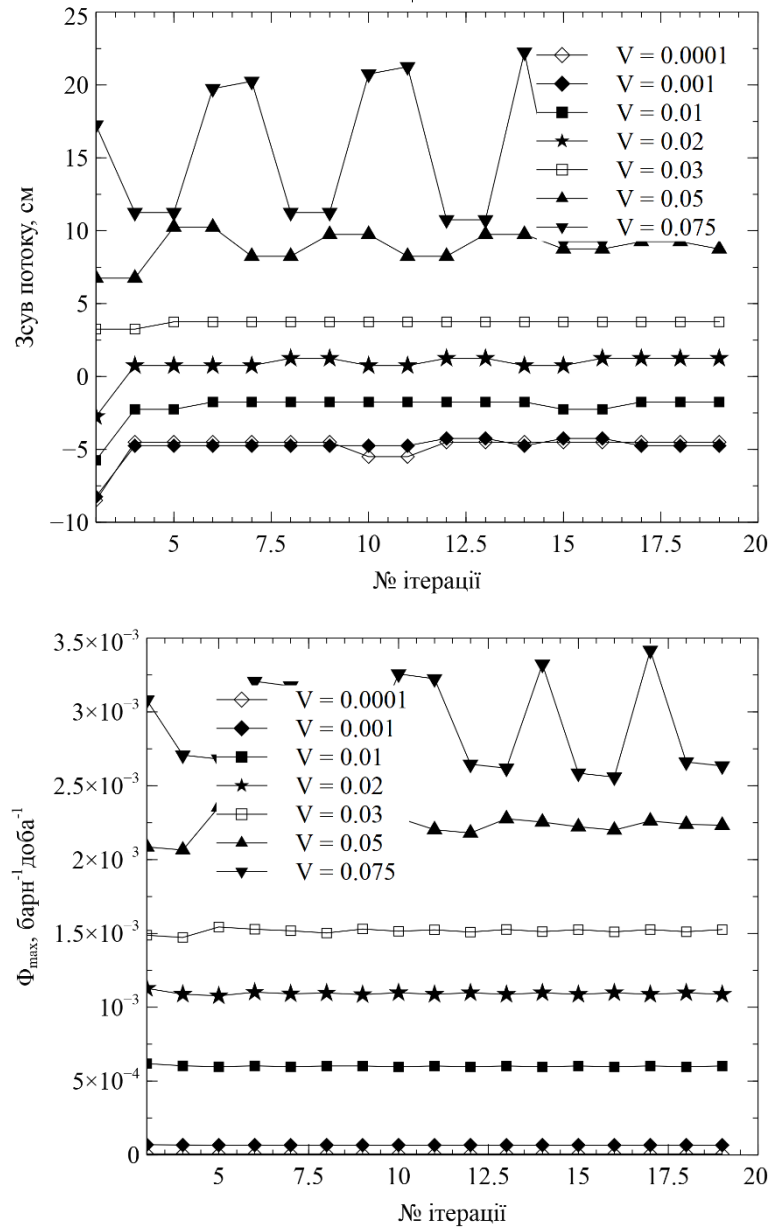


Рис. 3.4. Ітераційне наближення зсуву потоку для різних значень швидкості ХЯГ у см/день

Тому, для наших ітерацій пропорційно зменшенню швидкості руху ХЯГ необхідно пропорційно зменшувати рівень потоку нейтронів, що може призвести до занадто низьких рівнів потоків і відповідно великому впливу похибок числових розрахунків.

Процедура пошуку розв'язку автомодельного рівняння виконувалась для реактора довжиною 500 см та радіусом 100 см. Розрахована швидкість ХЯГ склала 5.475 см/рік, а рівень потоку нейтронів у максимумі склав

$9.95 \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$. На Рис. 3.5 зображені розподіли нуклідів отриманих на останній ітерації розв'язку автомодельних рівнянь руху ХЯГ.

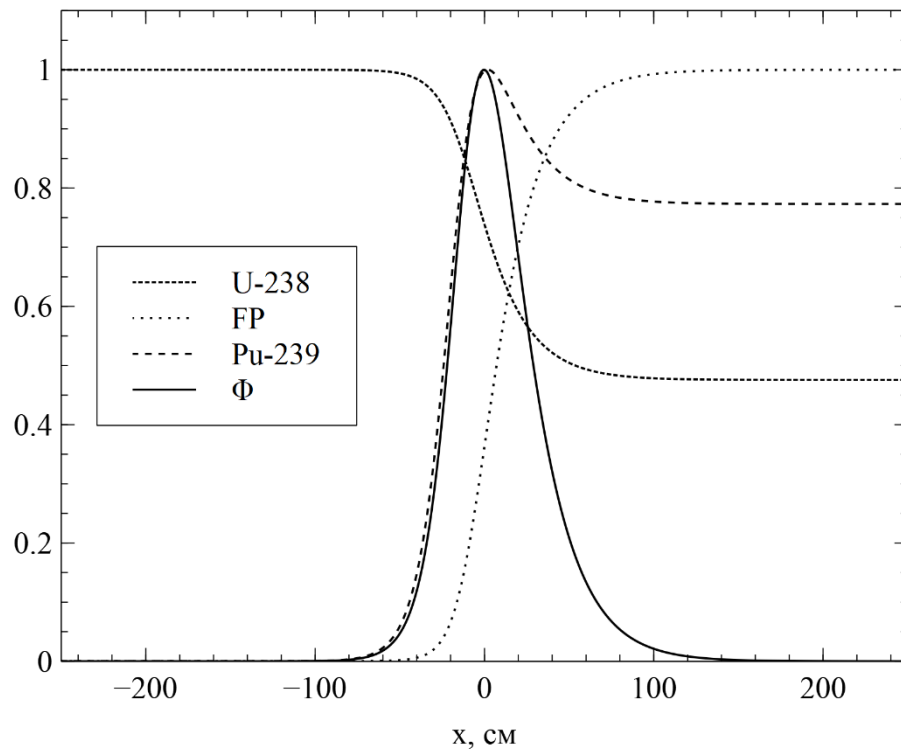


Рис. 3.5. Розподіли потоку та нуклідів нормовані у максимумі на 1 автомодельного розв'язку системи рівнянь, що описують рух ХЯГ

Описану ітераційну процедуру пошуку розв'язку автомодельних рівнянь руху ХЯГ можливо провести, якщо нормувальний потік буде розміщений у точках відмінних від середини реактора. Такі розв'язки будуть давати характеристики ХЯГ у різні моменти її руху у об'ємі активної зони. Результати таких розрахунків наведені у таблиці 3.1, де видно, що параметри ХЯГ не змінюються в залежності положення ХЯГ у об'ємі активної зони, що свідчить про стаціонарність руху хвилі ядерного горіння у вибраній конфігурації. Варто зазначити, що у крайніх точках активної зони розв'язки будуть суттєво відрізнятися від стаціонарних, оскільки там на розв'язок починають впливати граничні умови.

Таблиця 3.1 Значення швидкості стаціонарного руху ХЯГ для різних положень хвилі, при радіусі активної зони $R = 100$ см

Зсув, см	V, см/рік	$\Phi_{\max}$, $\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}$
+100.0	5.475	9.9469E+15
0.0	5.475	9.9485E+15
-100.0	5.475	9.9484E+15

У таблиці 3.2 наведені швидкість та рівень потоку нейтронів ХЯГ, які відповідають активній зоні різних радіусів. Залежність швидкості стаціонарного режиму ХЯГ від радіуса активної зони зображено на Рис. 3.6, на якому видно, що існує певний мінімальний радіус активної зони, при якому рух хвилі неможливий. Окрім того при збільшенні радіуса активної зони, розрахована швидкість виходить на певний насичений рівень, що свідчить про перехід геометрії від циліндру скінченного радіуса до циліндра нескінченного радіуса.

Таблиця 3.2 Значення швидкості стаціонарного руху ХЯГ для різних величин радіуса активної зони

R, см	V, см/рік	$\Phi_{\max}$, $\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}$
75	1.46	2.4780E+15
100	5.475	9.9485E+15
150	9.125	1.6963E+16
200	10.22	1.9212E+16
300	10,95	2.0763E+16

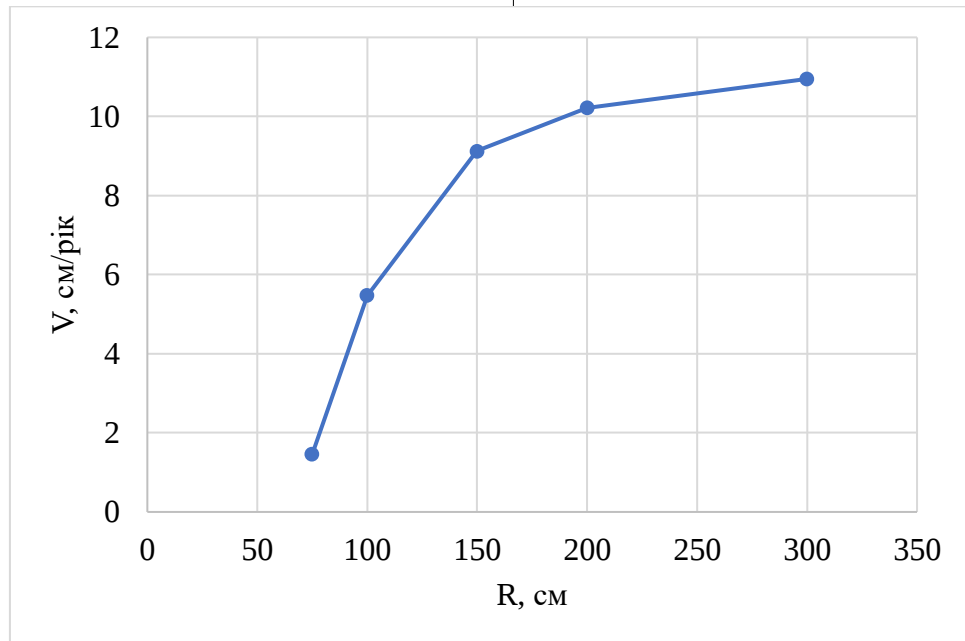


Рис 3.6. Залежність швидкості руху ХЯГ від радіусу активної зони

ВИСНОВКИ

У цій роботі запропоновано і реалізовано ефективний автотодельний підхід для швидкого оцінювання параметрів хвилі ядерного горіння (ХЯГ) у стаціонарній системі. Метод базується на одогруповому рівнянні дифузії нейтронів у геометричному наближенні баклінга та системі рівнянь трансмутації U–Pu нуклідів, перехід до хвильово-зв’язаної системи координат дозволив виділити швидкість руху хвилі як власне значення задачі. Рішення автотодельної системи здійснюється у три етапи: знаходження швидкості V за допомогою трансцендентного рівняння, розв’язок трансмутаційних рівнянь для нуклідних концентрацій та оновлення нейтронного потоку через дифузійне рівняння.

В ході роботи нам не вдалось успішно реалізувати початкову ітераційну схему розрахунку автотодельних рівнянь через її чисельну нестабільність під час розрахунків і необхідність введення додаткових умов у систему для її використання з усіма можливими параметрами потоку. Натомість було запропоновано іншу ітераційну схему з нормуванням нейтронного потоку за допомогою коефіцієнта ефективного розмноження, яка продемонструвала в чисельних експериментах вищу стабільність і швидкість обчислень.

Чисельні розрахунки для циліндричного реактора довжиною 500 см і радіусом 100 см показали, що стаціонарна швидкість хвилі становить приблизно 5,475 см/рік при максимальному потоці $\Phi_{\max} \approx 9,95 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Ці параметри виявилися інваріантними щодо початкового положення нормувального потоку та радіусу активної зони за умови $R \geq 75 \text{ см}$, в той час як для менших радіусів хвиля не формується. Запропонована спрощена схема забезпечує швидку й надійну конвергенцію, значно скорочуючи обчислювальні витрати порівняно з класичними нестационарними моделями. Тому розроблений підхід може стати гарним інструментом для оперативного аналізу ХЯГ-реакторів.

Подальші дослідження передбачають перевірку початкової ітераційної схеми з додаванням додаткових умов на систему, розширення моделі до нестационарних процесів із врахуванням конструкційних матеріалів та теплоносія, а також адаптацію складніших паливних циклів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Feoktistov L. P. An analysis of a concept of a physically safe reactor // Preprint IAE-4605/4. 1988.
2. Fomin S. P., Fomin O. S., Mel'nik Yu. P., Pilipenko V. V., Shul'ga N. F. Specific Mechanism of Negative Reactivity Feedback in the Nuclear Burning Wave Reactor // Topical Issues in Fast Reactors and Related Fuel Cycles : FR-13 Conference, 4–7 March 2013 : proc. Vienna, 2013. Paper IAEA-CN-199-457. Paris, 2014. P. 333–343.
3. Fomin S. P., Kirdin A. I., Malovytsia M. S., Pilipenko V. V., Shul'ga N. F. Optimization of ignition zone of advanced fast reactor, working in nuclear burning wave mode // Problems of atomic science and technology. Series: Nuclear Physics Investigations. 2019. Vol. 121, Iss. 3. P. 80–85.
4. Fomin S. P., Kirdin A. I., Malovytsia M. S., Pilipenko V. V., Shul'ga N. F. Influence of the radial neutron reflector efficiency on the power of fast nuclear-burning-wave reactor // Annals of Nuclear Energy. 2020. Vol. 148. Art. 107699. DOI: 10.1016/j.anucene.2020.107699
5. Malovytsia M. S., Fomin A. S., Fomin S. P. Nuclear burning wave concept and theoretical approaches for its description // East European Journal of Physics. 2020. No. 3. P. 62–72.
6. Feinberg. S. M. // Nuclear power plants: Record of Proceedings, Session B-10 of International Conference on the Peaceful Uses for Atomic Energy, 1–13 Sept. 1958, Geneva, United Nations. Geneva, 1958. Vol. 9(2). P. 447.
7. Fuchs K., Hessel H. The possibilities for the operation of a natural uranium breeder reactor without fuel element preparation. // Kernenergie (East Germany). 1961. Vol. 4. P. 619–623.
8. Atefi B., Driscoll M. J., Lanning D. D. An evaluation of the Breed/Burn fast reactor concept. Massachusetts, USA, 1979. 295 P. Report MITNE-229.

9. Slesarev J. S., Stukalov V. A., Subbotin S. A. Problems of development of fast reactors self-provision without fuel reprocessing // Atomkernenenergie-Kerntechnik. 1984. Vol. 45. P. 58–60.
10. Teller E., Ishikawa M., Wood L. Completely automated nuclear reactors for long-term operation // ICENES'96, 24–28 June 1996 : proc. Obninsk, Russia, 1996. P. 151–158.
11. Van Dam H. Self-Stabilizing criticality waves // Ann. Nucl. Energ. 2000. Vol. 27. P. 1505–1521. DOI: 10.1016/S0306-4549(00)00035-9
12. Van Dam H. The self-stabilizing criticality wave reactor // Tenth International Conference on Emerging Nuclear Energy Systems (ICENES), Sept. 24–28, 2000 : proc. Petten, The Netherlands, 2000. P. 188–197.
13. Van Dam H. Long-term control of excess reactivity by burnable particles // Annals of Nuclear Energy. 2000. Vol. 27. P. 733–743.
14. Van Dam H. Flux distributions in stable criticality waves // Ann. Nucl. Energ. 2003. Vol. 30. P. 1495–1504. DOI: 10.1016/S0306-4549(03)00098-7
15. Seifritz W. Solitary burn-up waves in a multiplying medium // Kerntechnik. 2000. Vol. 65(5–6). P. 261–264. URL: <https://inis.iaea.org/search/searchsinglerecord.aspx?RN=32009962> (Last accessed: 10.05.2020)
16. Chen X.-N., Maschek W. Transverse buckling effects on solitary burn-up waves. // Ann. Nucl. Energ. 2005. Vol. 32(12). P. 1377–1390. DOI: 10.1016/j.anucene.2005.01.012
17. Chen X.-N., Kiefhaber E., Maschek W. Neutronic model and its solitary wave solutions for CANDLE reactor // ICENES'2005, 21–26 August 2005 : proc. Brussels, Belgium, 2005. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.529.1560&rep=rep1&type=pdf> (Last accessed: 10.05.2020)
18. Chen X.-N., Kiefhaber E., Zhang D. Fundamental solution of nuclear solitary wave // Energ. Convers. Manag. 2012. Vol. 59. P. 40–49. DOI: 10.1016/j.enconman.2012.02.005

19. Sekimoto H., Ryu K., Yoshimura Y. CANDLE: the new burnup strategy // Nucl. Sci. Technol. 2001. Vol. 139, P. 306–317. DOI: 10.13182/NSE01-01
20. Sekimoto H. Application of CANDLE BURNUP strategy for future nuclear energy utilization // Prog. Nucl. Energ. 2005. Vol. 47(1–4), P. 91–98. DOI: 10.1016/j.pnucene.2005.05.007
21. Sekimoto H., Miyashita S. Startup of «Candle» burnup in fast reactor from enriched uranium core // Energ. Conv. Manag. 2006. Vol. 47(17). P. 2720–2780. DOI: 10.1016/j.enconman.2006.02.007
22. Sekimoto H., Udagawa Y. Effects of fuel and coolant temperatures and neutron fluence on CANDLE burnup calculation // J. Nucl. Sci. Technol. 2012. Vol. 43(2). P. 189–197. DOI: 10.1080/18811248.2006.9711081
23. Sekimoto H., Natata A. «CANDLE» burnup regime after LWR regime // Prog. Nucl. Energ. 2008. Vol. 50(2–6). P. 109–113. DOI: 10.1016/j.pnucene.2007.10.012
24. Sekimoto H., Yan M. Y. Design study on small CANDLE reactor // Energ. Conv. Manag. 2008. Vol. 49(7). P. 1868–1872. DOI: 10.1016/j.enconman.2007.12.015
25. Sekimoto H., Nagata A. Performance optimization of the CANDLE reactor for nuclear energy sustainability // Energ. Conv. Manag. 2010. Vol. 51(9). P. 1788–1791. DOI: 10.1016/j.enconman.2009.12.045
26. Fomin S. P., Mel'nik Yu. P., Pilipenko V. V., Shul'ga N. F. Investigation of self-organization of the non-linear nuclear burning regime in fast neutron reactors // Annals of Nuclear Energy. 2005. Vol. 32. P. 1435. DOI: 10.1016/j.anucene.2005.04.001
27. Fomin S. P., Mel'nik Yu. P., Pilipenko V. V., Shul'ga N. F. Fast reactor based on the self-sustained regime of nuclear burning wave // Nuclear Science and Safety in Europe. 2006. P. 239–251. DOI: 10.1007/978-1-4020-4965-1
28. Fomin S. P., Mel'nik Yu. P., Pilipenko V. V., Shul'ga N. F. Self-sustained regime of nuclear burning wave in U-Pu fast reactor with Pb-Bi coolant //

Problems of Atomic Science and Technology. 2007. Vol. 3, Iss. 1. P. 156–163.
URL:

https://vant.kipt.kharkov.ua/ARTICLE/VANT_2007_3/article_2007_3_156.pdf

(Last accessed: 10.05.2020).

29. Fomin S. P., Mel'nik Yu. P., Pilipenko V. V., Shul'ga N. F. Initiation and propagation of nuclear burning wave in fast reactor // Progress in Nuclear Energy. 2008. Vol. 50(2–6), P. 163. DOI: 10.1016/j.pnucene.2007.10.020

30. Fomin S. P., Fomin A. S., Mel'nik Yu. P., Pilipenko V. V., Shul'ga N. F. Safe Fast Reactor Based on the Self-Sustained Regime of Nuclear Burning Wave // Int. Conf. «Global 2009», 2009 : proc. Paris, France, 2009. Paper 9456.

31. Fomin S. P., Fomin O. S., Mel'nik Yu. P., Pilipenko V. V., Shul'ga N. F. Nuclear burning wave in fast reactor with mixed Th-U fuel // Prog. Nucl. Energy. 2011. Vol. 53(7), P. 800–805. DOI: 10.1016/j.pnucene.2011.05.004

32. Fomin O. S., Fomin S. P., Mel'nik Yu. P., Pilipenko V. V., Shul'ga N. F. Nuclear burning wave reactor: smooth start-up problem // No 1041 Journal of Kharkiv National University. Physical series «Nuclei, Particles, Fields». 2013. Vol. 58(2). P. 49–56.

33. Fomin O. S., Fomin S. P., Mel'nik Yu. P., Pilipenko V. V., Shul'ga N. F. Transient processes in the nuclear burning wave reactor // Int. Conf. «Global 2015», 2015 : proc. Paris, France, 2015. Paper 5254.

34. Khotyayintsev V. M., Pavlovych V. M., Khotyayintseva O. M. // Int. Conf. «Advances in Reactor Physics to Power the Nuclear Renaissance» (PHYSOR 2010), 9–14 May 2010 : proc. Pittsburgh, USA, 2010.

35. Павлович В. М., Хотяїнцев В. М., Хотяїнцева О. М. Реактор на хвилі ядерного горіння: управління параметрами хвилі // Атомна енергетика. Ядерна фізика та енергетика. 2010. Т. 11, № 1. С. 49–56.

36. Khotyayintsev V. M., Aksonov A. V., Khotyayintseva O. M., Pavlovych V. M., Gulik V., Tkaczyk A. H. Velocity characteristic and stability of wave solutions for a candle reactor with thermal feedback // Annals of Nuclear Energy. 2015. Vol. 85. P. 337–345. DOI: 10.1016/j.anucene.2015.04.044.

37. Leleko Yu. Y., Gann V. V., Gann A. V. Nuclear reactor on cylindrical standing burning wave with an external negative reactivity feedback // Problems of Atomic Science and Technology. 2017. Vol. 108, Iss. 2(108). P. 138–143.

38. Leleko Yu. Y., Gann V. V., Gann A. V. Spherical standing burning wave with external automatic reactivity control // Problems of Atomic Science and Technology. 2019. Vol. 123, Iss. 5. P. 18–24. URL: https://vant.kipt.kharkov.ua/ARTICLE/VANT_2019_5/article_2019_5_18.pdf

39. Hejzlar P., et al. TerraPower, LLC Traveling Wave Reactor Development Program Overview. // Nuclear Engineering and Technology. 2013. Vol. 45(6). P. 731–744. DOI: 10.5516/NET.02.2013.520

40. Okawa T., Sekimoto H. Design Study on Pb-208 Cooled CANDLE Burning Reactors toward Practical Application for Future Nuclear Energy Source // Progress in Nuclear Energy. 2011. Vol. 53(7). P. 886–890. DOI: 10.1016/j.pnucene.2011.05.015

41. Su'ud Z., Sekimoto H. The prospect of gas cooled fast reactors for long life reactors with natural uranium as fuel cycle input // Annals of Nuclear Energy. 2013. Vol. 54, P. 58–56. DOI: 10.1016/j.anucene.2012.09.014

42. Suud Z., Sekimoto H. Conceptual Design Study of Small 400 MWt Pb-Bi Cooled Modified Candle Burn-Up Based Long Life Fast Reactors // Advanced Materials Research. 2014. Vol. 983. P. 353–356. DOI: 10.4028/www.scientific.net/amr.983.353

43. Liem P. H., Tran H.-N., Sekimoto H. Burnup performance of small-sized long-life CANDLE high temperature gas-cooled reactors with U-Th-Pa fuel // Annals of Nuclear Energy. 2016. Vol. 91. P. 36–47. DOI: 10.1016/j.anucene.2016.01.001

44. Widiawati N., Suud Z., Irwanto D., Sekimoto H. Neutronic Comparison Study Between Pb(208)-Bi and Pb(208) as a Coolant In The Fast Reactor With Modified CANDLE Burn up Scheme // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 1090 Art. 012071. DOI: 10.1088/1742-6596/1090/1/012071

45. Widiawati N., Su'ud Z., Irwanto D., Permana S, Sekimoto H. Neutronic Analysis of Lead208-Bismuth Eutectic-Cooled Modified CANDLE Reactor with Core Geometry Variations // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1493. Art. 012010. DOI:10.1088/1742-6596/1493/1/012010

46. Маловиця М.С. Керування потужністю перспективного швидкого реактора, що працює в самопідтримному режимі хвилі ядерного горіння. дис. доктор філософії : 105 — Прикладна фізика та наноматеріали. Харків, 2021.