СВЯЗЬ МЕЖДУ РОСТОМ МАКСИМУМА МОДУЛЯ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ И РОСТОМ МАКСИМУМА МОДУЛЯ ЕЕ ОБОБЩЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БОРЕЛЯ

Г. А. Фридман

Всюду в этой работе

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{\Gamma\left(\frac{n}{\rho}+1\right)} \tag{1}$$

целая трансцендентная функция порядка $\rho > 0$ и минимального типа или порядка меньше, чем ρ, т. е.

$$\ln M(F;\ r) = o(r^\rho), \tag{2}$$

где

$$M(F;\ r) = \max_{|z|=r} |F(z)|. \tag{3}$$

Определение 1. *Обобщенным преобразованием Бореля функции $F(z)$ называется функция*

$$f_\rho(z) = z^{\rho-1} \int_0^{\infty} F\left(t^{\frac{1}{\rho}}\right) e^{-tz^\rho} dt, \tag{4}$$

где $z \neq 0$ и $|\arg zt^{\frac{1}{\rho}}| < \frac{\pi}{2\rho}$.

Как известно (см., например, [1], стр. 111],

$$f_\rho(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n-1}, \tag{5}$$

$f_\rho(z^{-1})$ целая функция, и

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f_\rho(t) E_\rho(tz)\, dt, \tag{6}$$

где контур C отделяет точку 0 от бесконечно удаленной точки и интегрирование производят в направлении против часовой стрелки, а

$$E_\rho(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma\left(\frac{n}{\rho}+1\right)} \tag{7}$$

функция Миттаг-Леффгера, а $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Определение 2. *Класс отрицательных, дважды дифференцируемых выпуклых книзу при $x > 0$ функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям*

$$-\varphi(x) \uparrow +\infty \text{ и } -x\varphi^{-1}(x) \uparrow +\infty \text{ при } x \to +\infty, \tag{8}$$

обозначим через N_1.

Определение 3. *Класс положительных, дважды дифференцируемых выпуклых книзу при $\xi < 0$ функций $\varphi(\xi)$, возрастающих к $+\infty$ при $\xi \to -0$, обозначим через N_2.*

Определение 4. Назовем функцию $\tilde{\varphi}(\xi)$ *двойственной по Юнгу к функции $\varphi(x) \in N_1$, если*

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \max_{x>0} [x\xi - \varphi(x)]. \tag{9}$$

Можно показать, что $\tilde{\varphi}(\xi) \in N_2$; функции $\varphi'(x)$ и $\tilde{\varphi}'(\xi)$ взаимно-обратные, т. е, $\varphi'[\tilde{\varphi}'(\xi)] \equiv \xi$; $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi'(x) = 0$ и $\lim\limits_{\xi\to 0} \tilde{\varphi}(\xi) = +\infty$;

$$\varphi(x) = \max_{\xi<0} [x\xi - \tilde{\varphi}(\xi)], \tag{10}$$

а максимумы в правых частях (9) и (10) достигаются соответственно при $x = \tilde{\varphi}'(\xi)$ и $\xi = \varphi'(x)$. Доказательство этих предложений аналогично доказательству лемм 1 и 2 ([2], стр. 86—88).

Оказывается, что функция $\ln M(f_\rho; -r^{-\frac{1}{\rho}})$ как бы двойственная по Юнгу к функции $-\ln M(F; r^{\frac{1}{\rho}})$. Точнее связь между этими функциями выражена в следующих теоремах:

Теорема 1. *Если $k > 0$, $\varphi(x) \in N_1$ и для всех достаточно больших r*

$$\ln M(F; r) > -k^{-1}\varphi(r^\rho), \tag{11}$$

то существует такая абсолютная постоянная C_ρ, что для всех достаточно больших r

$$\ln M(f_\rho; r^{-1}) > k^{-1}\tilde{\varphi}(-kr^{-\rho}) - C_\rho. \tag{12}$$

Теорема 2. *Если $k > 0$, $\varphi(x) \in N_1$ и для всех достаточно больших r*

$$\ln M(f_\rho; r^{-1}) < k^{-1}\tilde{\varphi}(-kr^{-\rho}), \tag{13}$$

то для всех достаточно больших r

$$\ln M(F; r) < -k^{-1}\varphi(r^\rho) + C_\rho. \tag{14}$$

Теорема 3. *Если $k > 0$, $\varphi(x) \in N_1$ и, кроме того, трижды дифференцируема, $\varphi''(x) \downarrow 0$, $x^2\varphi''(x) \uparrow +\infty$, а $-x\varphi'''(x) = O[\varphi''(x)]$ и для всех достаточно больших r*

$$\ln M(F; r) < -k^{-1}\varphi(r^\rho), \tag{15}$$

то каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для всех достаточно больших r

$$\ln M(f_\rho; r^{-1}) < (1+\varepsilon)k^{-1}\tilde{\varphi}(-kr^{-\rho}). \tag{16}$$

Доказательство теоремы 1. Если положить, что контур C это окружность $|t| = v$, то при $|z| = u$ из (6) следует, что

$$M(F; u) \leqslant E_\rho(vu) M(f_\rho; v).$$

Но $E_\rho(t) \sim \rho e^{t^\rho}$ (см., например, [1], стр. 39). Поэтому существует такое C_ρ, что $\ln E_\rho(t) < t^\rho + C_\rho$ при всех $t > 0$.

Следовательно,

$$\ln M(F;\ u) < u^{\rho}v^{\rho} + \ln M(f_{\rho};\ v) + C_{\rho}, \tag{17}$$

т. е. при $v = r^{-1}$

$$\ln M(f_{\rho};\ r^{-1}) \geqslant \max_{u>0}\,[\ln M(F;\ u) - u^{\rho}r^{-\rho}] - C_{\rho},$$

или в силу (9) и (11) имеет место (12) для всех достаточно больших r.

Доказательство теоремы 2. Полагая в (17) $u = r$, имеем

$$-\ln M(F;\ r) \geqslant \max_{v>0}\,[-\ln M(f_{\rho};\ v) - r^{\rho}v^{\rho}] - C_{\rho},$$

или в силу (10) при $\xi = -kv^{\rho}$ и (13) имеет место (14) для всех достаточно больших r.

Для доказательства теоремы 3 потребуется

Лемма 1. *Если* $\varphi(x) \in N_1$, *трижды дифференцируема,* $\varphi''(x) \downarrow 0$, $x^2\varphi''(x) \uparrow +\infty$, $c > 0$, $a - x\varphi'''(x) < c\varphi''(x)$, *то при* $\xi \to -0$

$$\int_0^{\infty} e^{-\varphi(t)+t\xi}\,dt \sim e^{\varphi(\xi)}\sqrt{2\pi\tilde{\varphi}''(\xi)}.$$

Действительно, при $0 < p < q$

$$-\ln = \frac{\varphi''(qt)}{\varphi''(pt)} = \int_{pt}^{qt} \frac{-x\varphi'''(x)\,dx}{\varphi''(x)} < c\ln\frac{q}{p},$$

т. е.

$$0 < \varphi''(pt) - \varphi''(qt) < \left[\left(\frac{q}{p}\right)^{c} - 1\right]\varphi''(qt).$$

Поэтому, при $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ и $|\delta| < 1$

$$|\varphi''[t(1+\delta\alpha)] - \varphi''(t)| = O[\alpha\varphi''(t)]. \tag{18}$$

Пусть теперь $\xi < 0$ столь близко к нулю, чтобы при $t_0 = \tilde{\varphi}'(\xi)$ имело место неравенство $t_0^2\varphi''(t_0) > 2^{\frac{5}{2}}$.

Положим $\alpha = [t_0^2\varphi''(t_0)]^{-\frac{2}{5}}$ и $A_{\pm} = t_0(1 \pm \alpha)$. Тогда $\alpha < \frac{1}{2}$ и $A_- > 0$. Так как функция $-\varphi(t) + t\xi$ имеет максимум в точке t_0, то по формуле Тейлора при $A_- \leqslant t \leqslant A_+$

$$-\varphi(t) + t\xi = -\varphi(t_0) + t_0\xi - \varphi''[t_0(1+\delta\alpha)]\frac{(t-t_0)^2}{2},$$

где $|\delta| < 1$, или в силу (9) и (18)

$$-\varphi(t) + t\xi = \tilde{\varphi}(\xi) - \varphi''(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2} + O(\sqrt{a}), \tag{19}$$

ибо $(t-t_0)^2\alpha\varphi''(t_0) \leqslant \alpha^3 t_0^2\varphi''(t_0) = \sqrt{a}$.

Поэтому

$$\int_{A_-}^{A_+} e^{-\varphi(t)+t\xi}\,dt \sim e^{\tilde{\varphi}(\xi)}\sqrt{2\pi\tilde{\varphi}''(\xi)}, \tag{20}$$

ибо

$$\int_{A_-}^{A_+} e^{-\varphi''(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\varphi''(t_0)}}\int_{-\sqrt[4]{\alpha}}^{\sqrt[4]{\alpha}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \sim \sqrt{2\pi\tilde{\varphi}''(\xi)}.$$

Так как функция $u = -\varphi(t) + t\xi$ возрастает при $t < t_0$, то обратная к ней функция $t = t(u)$ и функция $\varphi'[t(u)]$ также возрастают. Поэтому

$$\int_0^{A-} e^{-\varphi(t)+t\xi}\,dt = \int_{u(0)}^{u(A_-)} \frac{e^u\,du}{\xi - \varphi'[t(u)]} < \frac{e^{-\varphi(A_-)+\xi A_-}}{\xi - \varphi'(A_-)}.$$

Но по теореме Лагранжа

$$\xi - \varphi'(A_-) = \varphi''[t_0(1+\delta\alpha)]\,\alpha t_0 > \alpha t_0 \varphi''(t_0) = \alpha^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\varphi''(t_0)},$$

и в силу (19)

$$\int_0^{A_-} e^{-\varphi(t)+t\xi}\,dt = o[\sqrt{\tilde{\varphi}''(\xi)}\, e^{\tilde{\varphi}(\xi)}], \tag{21}$$

ибо $(A_- - t_0)^2\varphi''(t_0) = \alpha^2 t_0^2 \varphi''(t_0) = \alpha^{-\frac{1}{2}}$.

Аналогично при $t > t_0$ функция $u(t)$ убывает, функции $t(u)$ и $\varphi'[t(u)]$ также убывают. Поэтому

$$\int_{A+}^{\infty} e^{-\varphi(t)+t\xi}\,dt = \int_{u(A+)}^{-\infty} \frac{e^u\,du}{\xi - \varphi'[t(u)]} < \frac{e^{-\varphi(A+)+\xi A+}}{\varphi'(A_+) - \xi}.$$

Но по теореме Лагранжа

$$\varphi'(A_+) - \xi = \varphi''[t_0(1+\delta\alpha)]\,\alpha t_0 \sim \alpha t_0 \varphi''(t_0) = \alpha^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\varphi''(t_0)},$$

т. е. в силу (19)

$$\int_{A+}^{\infty} e^{-\varphi(t)+t\xi}\,dt = o[\sqrt{\tilde{\varphi}''(\xi)}\, e^{\varphi(\xi)}]. \tag{22}$$

Наконец, из (20), (21) и (22) следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 3. Полагая $|z| = r^{-1}$, из (4) получим

$$M(f_\rho;\ r^{-1}) \leqslant r^{1-\rho} \int_0^\infty M(F;\ t^{\frac{1}{\rho}})\, e^{-tr^{-\rho}}\,dt,$$

поэтому в силу (15) существует такое $a > 0$, что

$$M(f_\rho;\ r^{-1}) < r^{1-\rho}\left[\int_0^a M(F;\ t^{\frac{1}{\rho}})\, e^{-tr^{-\rho}}\,dt + \int_a^\infty e^{-k^{-1}\varphi(t) - tr^{-\rho}}\,dt\right].$$

И, так как

$$\int_0^a M(F;\ t^{\frac{1}{\rho}})\, e^{-tr^{-\rho}}\,dt < M(F;\ a^{\frac{1}{\rho}})\, r^\rho,$$

а по лемме 1 при $r \to \infty$

$$\int_a^\infty e^{-k^{-1}\varphi(t) - tr^{-\rho}} dt \sim e^{k^{-1}\tilde{\varphi}(-kr^{-\rho})} \sqrt{2\pi k \tilde{\varphi}''(-kr^{-\rho})},$$

то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для всех достаточно больших r

$$\ln M(f_\rho;\ r^{-1}) < (1-\rho)\ln r + k^{-1}\tilde{\varphi}(-kr^{-\rho}) + \frac{1}{2}[\ln 2\pi k + \ln \tilde{\varphi}''(-kr^{-\rho}) + \varepsilon].$$

Но так как ввиду трансцендентности $F(z)$ при $r \to \infty$

$$\ln r = o\,[\ln M(f_\rho;\ r^{-1})],$$

и ввиду достаточной гладкости $\varphi(x)$ при $\xi \to -0$

$$\ln \tilde{\varphi}''(\xi) = o\,[\tilde{\varphi}(\xi)],$$

то для всех достаточно больших r имеет место (16).

В дальнейшем используем следующие определения и обозначения.

Пусть $L(x) > 0$ возрастающая дифференцируемая функция. Обозначим через

$$\check{L}(x) = \frac{L(x)}{xL'(x)} = \frac{d \ln x}{d \ln L(x)}. \tag{23}$$

Определение 5. *Класс функций* $L(x)$ *таких, что* $\check{L}(x) \to c^{-1}$ *при* $x \to +\infty$ *где* $0 \leqslant c < \infty$, *обозначим через* L_c. *Функцию* $l(x)$ *назовем медленно возрастающей функцией — м. в. ф., если существует функция* $L(x) \in L_0$ *такая, что* $l(x) \sim L(x)$.

Известно (см., например, [1], стр. 51 или [2], [3], [4]), что для $L(x) \in L_c \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln L(x)}{\ln x} = c$, а при фиксированном $q > 1$ и $\frac{1}{q} \leqslant t \leqslant q$

$$L(tx) \sim t^c L(x). \tag{24}$$

Произведение функции класса L_c на функцию класса L_d входит в класс L_{c+d}, а суперпозиция этих функций входит в класс L_{cd}; наконец, при $c > 0$ обратная к $L(x) \in L_c$ функция $L^*(x) \in L_{\frac{1}{c}}$.

Определение 6. *Пусть* $0 \leqslant c < \infty$, $\alpha c > -1$ *и* $L(x) \in L_c$. *Решение уравнения* $y = L(xy^{-\alpha})$ *обозначим через* $L_\alpha(x)$. Легко проверить, что из соотношения $l(x) \sim L(x)$ следует соотношение $l_\alpha(x) \sim L_\alpha(x)$.

В [3], а ранее в ослабленной форме в [4], доказана

Теорема 4. *Если* $L(x) \in L_c$ и *возрастающая функция* $g(x)$ *имеет вид* $g(x) = xL^\alpha(x)$, *то обратная функция* $g^*(x)$ *имеет вид* $g^*(x) = xL_\alpha^{-\alpha}(x)$. *При этом* $L_\alpha(x) \in L_{cd}$, *где* $d = (1 + \alpha c)^{-1}$ *и при* $c = 0$ $\ln L_\alpha(x) \sim \ln L(x)$. *Кроме того*, *если* $\ln L(x) = o\,[\check{L}(x)]$, *то при любом* α $L_\alpha(x) \sim L(x)$.

Из теоремы 4 получается легко проверяемое непосредственной подстановкой

Следствие 1. *Если* $a \geqslant 0$, $b > 0$, $c > 0$, α, γ *и* η *— действительные числа*, $l(x) \in L_a$, $a\eta > -1$, $p = c + ab\gamma(1 + a\eta)^{-1}$, *а функция* $L(x) \in L_p$ *имеет вид*

$$L(x) = x^c l_\eta^\gamma(x^b),$$

то обратная функция $L^*(x)$ *имеет вид*

$$L^*(x) = x^{c^{-1}} l^{-\gamma c^{-1}}_{\eta + \gamma bc^{-1}}(x^{bc^{-1}}),$$

и при $\alpha p > -1$ *функция* $L_\alpha(x)$ *имеет вид*

$$L_\alpha(x) = x^{dc} l^{\gamma d}_{\eta + \alpha\gamma bd}(x^{bd}).$$

Эти теоремы и следствие были применены в [3] для исследования асимптотического поведения функций двойственных по Юнгу. Результаты этого исследования позволяют из теоремы 1,2 и 3 вывести следующие предложения.

Теорема 5. *Если $F(z)$ — целая трансцендентная функция нулевого порядка, $L(x) \in L_0$, и*

$$\ln M(F;\ r) \sim L(r), \tag{25}$$

то

$$\ln M(f_\rho;\ r^{-1}) \sim \text{Ł}_{-\frac{1}{\rho}}(r). \tag{26}$$

В частности, если

$$\frac{\ln \ln M(F;\, r)}{\sqrt{\ln r}} \downarrow 0, \tag{27}$$

то

$$\ln M(f_\rho;\ r^{-1}) \sim \ln M(F;\ r). \tag{28}$$

Теорема 6. *Если $F(z)$ — целая функция порядка σ, $0 < \sigma < \rho$, $\text{Ł}(x) \in L_\sigma$, $\mu = (\rho - \sigma)^{-1}\rho\sigma$, то*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(f_\rho;\, r^{-1})}{L_{-\frac{1}{\rho}}(r)} = \frac{\rho}{\mu}\left[\frac{\sigma}{\rho} \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(F;\, r)}{L(r)}\right]^{\frac{\mu}{\sigma}}. \tag{29}$$

В частности, если $l(x) \in L_0$, $b > 0$, γ и η — действительные числа, то

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(f_\rho;\, r^{-1})}{r^{\mu} l^{\gamma\mu}_{\eta-\gamma\mu b}(r^{\mu b})} = \frac{\rho}{\mu}\left[\frac{\sigma}{\rho} \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(F;\, r)}{r^{\sigma} l^{\gamma\sigma}_{\eta-\gamma\sigma b}(r^{\sigma b})}\right]^{\frac{\mu}{\sigma}}. \tag{30}$$

Эти соотношения будут справедливы и для нижних пределов, если заменить знак $=$ на знак $\geqslant$.

Теорема 7. *Если $F(z)$ — целая функция порядка ρ минимального типа, а $l(x) \in L_0$, то*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{l_{-1}[\ln M(f_\rho;\ r^{-1})]}{r^\rho} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(F;\, r)}{r^\rho}\, l(r^\rho). \tag{31}$$

Это соотношение справедливо и для нижних пределов, если заменить знак $=$ на знак $\geqslant$.

Теорема 8. *Если $F(z)$ — целая функция порядка ρ минимального типа, $L(x) \in L_c$, а $L^*(x)$ — функция, обратная функции $L(x)$, то при $0 \leqslant p < k$ и $0 < c < \infty$, или при $p = k > 1$ и $1 < c < \infty$, или при $p = k = 1$ и $2 < c < \infty$, $\ln_k x = \ln[\ln_{k-1} x]$ справедливо*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln_{k+1} M(f_\rho;\ r^{-1})}{L(\ln_p r^\rho)} = \left[\varlimsup_{r\to\infty} \frac{L^*(\ln_k r^\rho)}{\ln_p \dfrac{r^\rho}{\ln M(F;\, r)}}\right]. \tag{32}$$

В частности, если $l(x) \in L_0$, $b > 0$, γ и η действительные числа, то

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln_{k+1} M(f_\rho;\ r^{-1})}{\ln_p^c r^\rho l^{\gamma}_{\eta-\gamma b}(\ln_p^{cb} r^\rho)} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln_k r^\rho l^{-\gamma}_{\eta}(\ln_k^b r^\rho)}{\ln_p^c \dfrac{r^\rho}{\ln M(F;\, r)}}. \tag{33}$$

Эти соотношения справедливы и для нижних пределов, если заменить знак $=$ на знак $\geqslant$.

Теорема 9. *Если $F(z)$ — целая функция порядка ρ минимального типа, а $l(x) \in L_0$ и $\check{l}(x) = o\left(\prod_{j=1}^{k} \ln_j x\right)$, где $k \geqslant 1$, то*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln_{k+1} M(f_\rho; r^{-1})}{l(r^\rho)} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln_k r^\rho}{l\left[\frac{r^\rho}{\ln M(F; r)}\right]}. \tag{34}$$

Это соотношение справедливо и для нижних пределов, если заменить знак = на знак $\geqslant$.

Заметим, что теоремы 6, 7, 8 и 9 можно вывести для верхних пределов в силу (1) и (5) из формул, связывающих рост максимума модуля функции с ростом ее коэффициентов (см., например, [5]), и формула (29) при $l(x) \equiv 1$, по-видимому, была известна еще Э. Линделофу, по крайней мере при $\rho = 1$, так как легко получается из найденной им формулы для вычисления типа функции по ее коэффициентам.

Для нижних пределов легко построить примеры функций, для которых в соотношениях (29 — 34) имеет место строгое неравенство. Например, функция

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)\,2^{n+1}} z^{2^n}$$

будет порядка $\frac{1}{2}$ и нижнего типа $\frac{\ln 2}{2}$, а ее преобразование Бореля

$$f(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n)!\, 2^{-(n+1)\,2^{n+1}} z^{2^n+1}$$

будет порядка 1 и нижнего типа $\frac{\ln 2}{8e} > \left(\frac{\ln 2}{4}\right)^2$.

Для доказательства теоремы 5 нужны еще две леммы:

Лемма 2. Если $F(z)$ — целая функция нулевого порядка, то $\ln M(F; r)$ медленно возрастающая функция, т. е. существует $L(x) \in L_0$, удовлетворяющая соотношению (25).

Действительно, не ограничивая общности, можно считать, что $F(0) \neq 0$. В этом случае (см., например, [1], стр. 67—68)

$$\ln|F(0)| + \int_0^r \frac{n(t)\,dt}{t} \leqslant \ln M(F; r) \leqslant r \int_0^\infty \frac{n(t)\,dt}{t(t+r)},$$

где $n(t)$ — число нулей $F(z)$ в круге $|z| < t$, при этом $\ln n(t) = o(\ln t)$. Положим

$$l_1(r) = \int_0^r \frac{n(t)\,dt}{t} \quad \text{и} \quad l_2(r) = r \int_0^\infty \frac{n(t)\,dt}{t(t+r)}.$$

Тогда $r l_1'(r) = n(r)$. Так как, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое r_ε, что при $r > r_\varepsilon$ функция $n(t)t^{-\varepsilon}$ убывает, то справедливо неравенство $l_1(r) > n(r)\, r^{-\varepsilon} \varepsilon^{-1} (r^\varepsilon - r_\varepsilon^\varepsilon)$. Поэтому

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r)}{l_1(r)} \leqslant \varepsilon,$$

или, ввиду того, что ε можно брать сколь угодно малым, $n(r) = o[l_1(r)]$, т. е. $l_1(r) \in L_0$. Далее

$$l_2(r) = r\int_0^r \frac{n(t)\,dt}{t(t+r)} + r\int_r^\infty \frac{n(t)\,dt}{t(t+r)}.$$

Но

$$r\int_0^r \frac{n(t)\,dt}{t(t+r)} < l_1(r),$$

а при $r > r_\varepsilon$

$$r\int_r^\infty \frac{n(t)\,dt}{t(t+r)} < n(r)\,r^{1-\varepsilon}\int_r^\infty \frac{dt}{t^{2-\varepsilon}} = \frac{n(r)}{1-\varepsilon},$$

т. е. $l_1(r) + \ln|F(0)| \leqslant \ln M(F; r) \leqslant l_2(r) < l_1(r) + (1-\varepsilon)^{-1} n(r)$, или $l_1(r) \sim \ln M(F; r) \sim l_2(r)$. Следовательно, за $L(r)$ можно взять $l_1(r)$. В [1, стр. 68—69] это доказано в предположении, что $n(r)$ м. в. ф., однако, например, для функции

$$F(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + 2^{-k!}\, z)^{k!}$$

функция $n(r)$ не будет м. в. ф.

Лемма 3. *Если* $l(x) \in L_0$, *то существует* $L(x) \in L_0$ *такая, что* а) $L(x) \sim l(x)$; б) $L(x)$ *аналитически продолжается на плоскость с разрезом* $(-\infty, 0]$; в) $x^k L^{(k)}(x) = o[L(x)]$; г) $(-1)^{k-1} L^{(k)}(x) > 0$; д) $(-1)^k x L^{(k+1)}(x) < (-1)^{k-1}(k+1) L^{(k)}(x)$. *Кроме того, если* $l(x)(\ln x)^{-1} \uparrow +\infty$ *при* $x \geqslant a > e$, *то* е) $(-1)^{k-1} x^k L^{(k)}(x) \uparrow +\infty$.

Действительно, если $l(x)$ определена при $x \geqslant a > 0$, то достаточно положить

$$L(x) = x\int_a^\infty \frac{l(t)\,dt}{(t+x)^2}. \tag{35}$$

В [1, стр. 52—53] показано, что в этом случае имеют место а), б) и в). Так как

$$(-1)^{k-1} L^{(k)}(x) = k!\int_a^\infty \frac{(kt-x)\,l(t)\,dt}{(t+x)^{k+2}}, \tag{36}$$

и функция $l(t)$ возрастает, а функция $kt - x$ меняет знак только при переходе через точку $t = \frac{x}{k}$, то

$$(-1)^{k-1} L^{(k)}(x) > k!\, l\left(\frac{x}{k}\right)\int_a^\infty \frac{(kt-x)\,dt}{(t+x)^{k+2}} = l\left(\frac{x}{k}\right)\frac{k!\,a}{(a+x)^{k+1}} > 0,$$

т. е. имеет место г). В силу (36)

$$(-1)^k x L^{(k+1)}(x) - (-1)^{k-1}(k+1) L^{(k)}(x) = -(k+1)!\int_a^\infty \frac{(kt-2x)\,t\,l(t)\,dt}{(t+x)^{k+3}},$$

и

$$\int_a^\infty \frac{(kt-2x)\,tl(t)\,dt}{(t+x)^{k+3}} > l\left(\frac{2x}{k}\right)\int_a^\infty \frac{(kt-2x)\,t\,dt}{(t+x)^{k+3}} = l\left(\frac{2x}{k}\right)\frac{a^2}{(a+x)^{k+2}} > 0,$$

так как функция $l(t)$ возрастает, а функция $kt-2x$ меняет знак только при переходе через точку $t=\frac{2x}{k}$. Следовательно, имеет место д). Если $l(t)(\ln t)^{-1}$ возрастает при $t>a\geqslant e$, то при $x>ka$

$$\int_a^\infty \frac{(kt-x)l(t)dt}{(t+x)^{k+2}} > l\left(\frac{x}{k}\right)\left(\ln\frac{x}{k}\right)^{-1}\int_a^\infty \frac{(kt-x)\ln t\,dt}{(t+x)^{k+2}}.$$

Но

$$x^k\int_a^\infty \frac{(kt-x)\ln t\,dt}{(t+x)^{k+2}} = \int_{\frac{a}{x}}^\infty \frac{(kt-1)\ln(tx)\,dt}{(t+1)^{k+2}} = \int_{\frac{a}{x}}^\infty \frac{(kt-1)\ln t\,dt}{(t+1)^{k+2}} + \frac{a\ln x}{x\left(\frac{a}{x}+1\right)^{k+1}},$$

и

$$\int_{\frac{a}{x}}^\infty \frac{(kt-1)\ln t\,dt}{(t+1)^{k+2}} = \int_1^{\frac{x}{a}} \frac{(t^k-1)\ln t\,dt}{(t+1)^{k+2}} + \int_{\frac{x}{a}}^\infty \frac{(kt-1)\ln t\,dt}{(t+1)^{k+2}} = b(x) > 0,$$

ибо, заменяя t на t^{-1}, имеем

$$\int_{\frac{a}{x}}^1 \frac{(kt-1)\ln t\,dt}{(t+1)^{k+2}} = -\int_1^{\frac{x}{a}} \frac{(kt-t^k)\ln t\,dt}{(t+1)^{k+2}}.$$

А так как при $x>2a$, $b(x)>b=\int_1^2 \frac{(t^k-1)\ln t\,dt}{(t+1)^{k+2}}>0$, то из (36) следует, что

$$(-1)^{k-1}x^kL^{(k)}(x) > k!\,bl\left(\frac{x}{k}\right)\left(\ln\frac{x}{k}\right)^{-1}$$

и свойство е) имеет место.

Доказательство теоремы 5. В силу лемм 2 и 3 можно выбрать $L(x)$ так, чтобы имело место соотношение (25) и $\varphi(x)=-L\left(x^{\frac{1}{\rho}}\right)$ удовлетворяла условиям теорем 1 и 3. А по теореме 10 работы [3] и следствию 1 при

$$a=e=\eta=0,\ \gamma=1,\ \alpha=-1,\ b=\frac{1}{\rho}$$

$$\tilde\varphi(\xi)\sim L_{-\frac{1}{\rho}}\left(-\xi^{-\frac{1}{\rho}}\right).$$

Поэтому, применяя теоремы 1 и 3, из (25) выводим (26). Наконец, из (27) следует, что $\ln L(x)=\lambda(\ln x)\sqrt{\ln x}$, где $\lambda(\ln x)\downarrow 0$. Но в силу (23)

$$\check L(x)=\frac{\sqrt{\ln x}}{\lambda(\ln x)}\left[\frac{1}{2}+\frac{\ln x\lambda'(\ln x)}{\lambda(\ln x)}\right]^{-1} > 2\frac{\sqrt{\ln x}}{\lambda(\ln x)},$$

т. е. $\ln L(x) = o[\check{L}(x)]$, или в силу теоремы 4 $L_{-\frac{1}{\rho}}(x) \sim L(x)$. Поэтому из (25), (26) и (27) следует (28).

Для доказательства теоремы 6 нужна

Лемма 4. *Если $l(x) \in L_c$ при $0 < c < 1$, то существует $L(x) \in L_c$ такая, что а) $L(x) \sim l(x)$; б) $L(x)$ аналитически продолжается на плоскость с разрезом $[-\infty, 0]$; в) $(-1)^{k-1} x^k L^{(k)}(x) \sim \frac{c\Gamma(k-c)}{\Gamma(1-c)}$.*

Действительно, если $l(x)$ определена при $x \geqslant a > 0$, положим

$$L(x) = \frac{x}{\Gamma(1+c)\Gamma(1-c)} \int\limits_a^\infty \frac{l(t)\,dt}{(t+x)^2}. \tag{37}$$

Тогда легко проверить, что при $k \geqslant 1$

$$(-1)^{k-1} L^{(k)}(x) = \frac{k!}{\Gamma(1+c)\Gamma(1-c)} \int\limits_a^\infty \frac{(kt-x)\,l(t)\,dt}{(t+x)^{k+2}}. \tag{38}$$

Но при $0 \leqslant j < k+1-c$ и $k \geqslant 0$

$$\int\limits_a^\infty \frac{l(t)\,t^j\,dt}{(t+x)^{k+2}} \sim x^{-k-1+j} l(x) \frac{\Gamma(1+c+j)\Gamma(k+1-c-j)}{(k+1)!}. \tag{39}$$

В самом деле, в силу (24) при любом $q > 1$ и $x > qa$ справедливо

$$\int\limits_{\frac{x}{q}}^{qx} \frac{l(t)\,t^j\,dt}{(t+x)^{k+2}} \sim x^{-k-1+j} l(x) \int\limits_{\frac{1}{q}}^{q} \frac{t^{c+j}\,dt}{(t+1)^{k+2}}, \tag{40}$$

а

$$\int\limits_a^{\frac{x}{q}} \frac{l(t)\,t^j\,dt}{(t+x)^{k+2}} < x^{-k-1+j} l(x) \int\limits_0^{\frac{1}{q}} \frac{t^j\,dt}{(t+1)^{k+2}} < \frac{x^{-k-1+j} l(x)}{(j+1)\,q^{j+1}}. \tag{41}$$

Наконец, каково бы ни было $\varepsilon \left(0 < \varepsilon < \frac{1-c-j+k}{2}\right)$ для всех достаточно больших x

$$\int\limits_{qx}^\infty \frac{l(t)\,t^j\,dt}{(t+x)^{k+2}} < \frac{l(qx)}{(qx)^{c+\varepsilon}} \int\limits_{qx}^\infty \frac{t^{j+c+\varepsilon}\,dt}{(t+x)^{k+2}} = \frac{x^{-k-1+j} l(qx)}{q^{c+\varepsilon}} \int\limits_q^\infty \frac{t^{j+c+\varepsilon}\,dt}{(t+1)^{k+2}},$$

или в силу (24) для всех достаточно больших x

$$\int\limits_{qx}^\infty \frac{l(t)\,t^j\,dt}{(t+x)^{k+2}} < \frac{x^{-k-1+j} l(x)}{(k+1-j-c-2\varepsilon)\,q^{k+1-j}}, \tag{42}$$

т. е. ввиду того, что q можно брать сколь угодно большим и

$$\int\limits_0^\infty \frac{t^{c+j}\,dt}{(t+1)^{k+2}} = \frac{\Gamma(1+c+j)\Gamma(k+1-c-j)}{(k+1)!},$$

имеет место (39). Но из (39) при $j = k = 0$ следует свойство а), и при $k \geqslant 1$ и $j = 0,1$ из (38) и (39) следует свойство в). Свойство б) имеет место потому, что интеграл (37) имеет смысл при замене x любым z из плоскости с разрезом $(-\infty, 0]$.

Доказательство теоремы 6. Пусть

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(F; r)}{L(r)} = A, \tag{43}$$

и

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(f_\rho; r^{-1})}{L_{-\frac{1}{\rho}}(r)} = B. \tag{44}$$

Тогда, каково бы ни было $\delta > 0$ для всех достаточно больших r

$$\ln M(F; r) < (A+\delta) L(r).$$

В силу леммы 4, не ограничивая общности, мы можем считать, что $\varphi(x) = -L(x^{\frac{1}{\rho}})$ удовлетворяет условиям теорем 1 и 3. Поэтому, полагая $k = (A+\delta)^{-1}$ и применяя теорему 3, заключаем, что для всех достаточно больших r имеет место (16).

Но по теореме 11 работы [3] в этом случае

$$\tilde{\varphi}(\xi) \sim L_{-\frac{1}{\rho}}(-\xi^{-\frac{1}{\rho}}) \frac{\rho}{\mu} \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\frac{\mu}{\sigma}},$$

и так как по теореме 4 и следствию 1 $L_{-\frac{1}{\rho}}(x) \in L_\mu$, то ввиду (24) из (16) при всех достаточно больших r следует, что

$$\ln M(f_\rho; r^{-1}) \leqslant (1+2\varepsilon)(A+\delta)^{\frac{\mu}{\rho}} \frac{\rho}{\mu} \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\frac{\mu}{\sigma}} L_{-\frac{1}{\rho}}(r),$$

т. е., ввиду того, что ε и δ можно брать сколь угодно малыми,

$$B \leqslant \frac{\rho}{\mu} \left(\frac{\sigma A}{\rho}\right)^{\frac{\mu}{\sigma}}. \tag{45}$$

С другой стороны, каково бы ни было $\delta > 0$, для всех достаточно больших r

$$\ln M(f_\rho; r^{-1}) \leqslant (B+\delta) L_{-\frac{1}{\rho}}(r). \tag{46}$$

А полагая $k = (B+\delta)^{-1}$ и $\tilde{\varphi}(\xi) = L_{-\frac{1}{\rho}}(-k^{\frac{1}{\rho}} \xi^{-\frac{1}{\rho}})$, по теореме 2 заключаем, что имеет место (14) для всех достаточно больших r.

Так как в этом случае по той же теореме 11 работы [3]

$$\varphi(x) \sim -\frac{\mu}{\sigma} \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-\frac{\sigma}{\rho}} (B+\delta)^{-\frac{\sigma}{\rho}} L(x^{\frac{1}{\rho}}), \tag{47}$$

то каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для всех достаточно больших r

$$\ln M(F; r) < (1+\varepsilon)(B+\delta)^{\frac{\sigma}{\mu}} \frac{\mu}{\sigma} \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-\frac{\sigma}{\rho}} L(r), \tag{48}$$

или, в виду того, что ε и δ можно брать сколь угодно малыми

$$A \leqslant B^{\frac{\sigma}{\mu}} \frac{\mu}{\sigma}\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{\frac{\sigma}{\rho}}. \tag{49}$$

Но так как $\frac{\mu}{\sigma}\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{\frac{\sigma}{\rho}} = \frac{\rho}{\sigma}\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{\frac{\sigma}{\mu}}$, то из (46), (47), (48) и (49) следует (29).

Неравенство для нижних пределов получаем аналогично из теоремы 1. (30) получаем из (29) по следствию 1.

Доказательства теорем 7, 8 и 9 получаем аналогично, применяя теорему 12 и ее следствия 1-и 2 из работы [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Евграфов. Асимптотические оценки и целые функции. Гостехиздат, М., 1957.

2. М. А. Евграфов. Асимптотические оценки и целые функции, изд. 2. Физматгиз, М., 1962.

3. Г. А. Фридман. Медленно возрастающие функции и их приложение. «Сибирский матем. ж.», с. VII, № 5 1139—1160, 1966.

4. Г. А. Фридман. Медленно возрастающие функции. «Уч. зап. Гомельского пединститута», вып. 3, 1956.

5. Г. А. Фридман. О поведении целой функции на бесконечности. Труды I Республиканской конференции математиков Белоруссии, Минск, 113—120, 1965.

Поступила 15 апреля 1966 г.