

ОБЪ ИНТЕГРИРУЮЩЕМЪ

МНОЖИТЕЛЬ ЛИНЕЙНЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ
УРАВНЕНІЙ.

П. С. Ф л о р о в а.

Въ составъ перваго тома «Математическаго Сборника» входятъ два мемуара, изъ которыхъ одинъ цѣликомъ, а другой отчасти посвящаются обнаруженію взаимной связи между даннымъ линейнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ и тѣмъ, посредствомъ котораго опредѣляется его интегрирующій множитель. Одинъ изъ этихъ мемуаровъ принадлежитъ Юрьеву, другой написанъ Урусовымъ. Въ предлагаемой замѣткѣ читатель найдетъ упрощеніе анализа поименованныхъ авторовъ и приложеніе этого анализа къ вычисленію интеграла линейнаго уравненія съ правою частью по интегралу того-же уравненія безъ правой части.

Пусть уравненіе

$$\frac{d^n u}{dx^n} + \alpha_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + \alpha_{n-1} \frac{du}{dx} + \alpha_n u = \beta \quad (1)$$

будетъ даннымъ. Если обѣ его части умножимъ на $v dx$ и проинтегрируемъ* результатъ, то, положивъ

$$\frac{d^n v}{dx^n} - \frac{d^{n-1} \alpha_1 v}{dx^{n-1}} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{d \alpha_{n-1} v}{dx} + (-1)^n \alpha_n v = 0, \quad (2)$$

* Эту мысль заимствуемъ изъ сочиненія академика Имшенецкаго — «Распространеніе на линейныя уравненія вообще способа Эйлера....».

получимъ

$$p_0 u^{n-1} + p_1 u^{n-2} + \dots + p_{n-1} u = \int \beta v dx + \text{const},$$

гдѣ p_i означаетъ линейную функцію количествъ

$$v, v', v'', \dots v^i.$$

Такъ какъ порядокъ предыдущаго уравненія относительно u есть $n - 1$, то функція v , опредѣляемая условіемъ (2), есть интегрирующій множитель уравненія (1). Пусть u значеній этого множителя будутъ

$$v_1, v_2, \dots v_n.$$

Обозначивъ черезъ $p_i^{(r)}$ ту функцію, въ которую обращается p_i посредствомъ замѣны v на v_r , найдемъ

$$p_0^{(r)} u^{n-1} + p_1^{(r)} u^{n-2} + \dots + p_{n-1}^{(r)} u = \int \beta v_r dx + C_r.$$

Здѣсь C_r означаетъ постоянную произвольную, которую для краткости письма можно разумѣть въ интегралѣ $\int \beta v_r dx$. Собиравъ въ предыдущемъ равенствѣ числу r всѣ значенія отъ единицы до n , получимъ n уравненій вполне достаточныхъ для исключенія $n - 1$ функцій

$$u', u'', \dots u^{n-1}.$$

Произведя это исключеніе на самомъ дѣлѣ и принявъ во вниманіе отмѣченную выше связь между p и v , найдемъ

$$(1) \quad \begin{vmatrix} v_1, & v'_1, & \dots & u v_1^{n-1} - \int \beta v_1 dx \\ v_2, & v'_2, & \dots & u v_2^{n-1} - \int \beta v_2 dx \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_n, & v'_n, & \dots & u v_n^{n-1} - \int \beta v_n dx \end{vmatrix} = 0.$$

Такъ выражается полный интеграль уравненія (1) посредствомъ n значеній его интегрирующаго множителя.

Если положимъ $\beta = 0$ и если частные интегралы уравненія

$$\frac{d^n u}{dx^n} + \alpha_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + \alpha_{n-1} \frac{du}{dx} + \alpha_n u = 0 \quad (3)$$

назовемъ черезъ

$$u_1, u_2, \dots, u_n,$$

то полный его интеграль можно будетъ выразить двояко: съ одной стороны, посредствомъ нумерованныхъ u , а съ другой посредствомъ нумерованныхъ v . Сравнивъ эти двѣ формы полного интеграла уравненія (3) и положивъ

$$\omega = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} v_1, & v_2, & \dots & v_n \\ v'_1, & v'_2, & \dots & v'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1^{n-1}, & v_2^{n-1}, & \dots & v_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

получимъ

$$(C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_n u_n) \omega =$$

$$= \begin{vmatrix} C_1, & C_2, & \dots & C_n \\ v_1, & v_2, & \dots & v_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1^{n-2}, & v_2^{n-2}, & \dots & v_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Это равенство, путемъ сравненія коэффициентовъ при постоянныхъ произвольныхъ помѣченныхъ одинаковыми нумерами, даетъ возможность вычислить частные интегралы уравненія (3) въ частныхъ интегралахъ уравненія (2). Имъ же можно воспользоваться и для вычисленія нумерованныхъ v посредствомъ нумерованныхъ u . Въ самомъ дѣлѣ, написавъ v^i вмѣсто C , найдемъ:

$$u_1 v_1^i + u_2 v_2^i + \dots + u_n v_n^i = 0,$$

$$u_1 v_1^{n-1} + u_2 v_2^{n-1} + \dots + u_n v_n^{n-1} = 1,$$

гдѣ i любое число ряда $0, 1, 2 \dots n-2$. Изъ этихъ равенствъ путемъ послѣдовательнаго дифференцированія легко получить:

$$u_1^r v_1^i + u_2^r v_2^i + \dots + u_n^r v_n^i = 0,$$

$$u_1^k v_1^{n-k-1} + u_2^k v_2^{n-k-1} + \dots + u_n^k v_n^{n-k-1} = (-1)^k.$$

Здѣсь r и i суть цѣлыя положительныя числа, удовлетворяющія неравенству $r + i < n - 1$, а k любое число ряда $0, 1, 2 \dots n - 1$. Изъ предыдущаго вытекаетъ существованіе слѣдующей системы n уравненій:

$$v_1 u_1^i + v_2 u_2^i + \dots + v_n u_n^i = 0,$$

$$v_1 u_1^{n-1} + v_2 u_2^{n-1} + \dots + v_n u_n^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Разрѣшивъ эти уравненія относительно функцій

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

и положивъ

$$\vartheta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1' & u_2' & \dots & u_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{n-1} & u_2^{n-1} & \dots & u_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

получимъ

$$(C_1 v_1 + C_2 v_2 + \dots + C_n v_n) \vartheta =$$

$$= \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{n-2} & u_2^{n-2} & \dots & u_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

гдѣ количества

$$C_1, C_2, \dots, C_n$$

совершенно произвольны.

Такимъ образомъ, взаимная связь между уравненіями (2) и (3) опредѣлена и главная цѣль, ради которой эта замѣтка составлена, достигнута.

Остается сказать, что если въ соотношеніе

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_n u_n + \\ + u_1 \int \beta v_1 dx + u_2 \int \beta v_2 dx + \dots + u_n \int \beta v_n dx,$$

выше найденное, поставимъ на мѣсто нумерованныхъ v ихъ выраженія въ нумерованныхъ u , то получимъ формулу, выражающую полный интеграль уравненія (1) въ частныхъ интегралахъ уравненія (3); это — та самая формула, которая обыкновенно выводится путемъ измѣненія постоянныхъ произвольныхъ.

Примѣчаніе 1. Порядокъ уравненія (1) можно понизить на столько единицъ, сколько извѣстно значеній его интегрирующаго множителя.

Примѣчаніе 2. Уравненія (2) и (3) взаимны между собою въ томъ отношеніи, что интеграль одного изъ нихъ есть интегрирующий множитель другого.

Примѣчаніе 3. Если детерминанты, обозначенные черезъ ω и ϑ , перемножимъ между собою, то найдемъ

$$\omega \vartheta = (-1)^{n-1},$$

что согласно съ теоремой Ліувилля:

$$\frac{d\vartheta}{dx} + \alpha_1 \vartheta = 0.$$