

Дискретное моделирование стационарных волновых процессов в тонком слое при симметричной деформации

Ю.А. Лымаренко, А.Д. Шамровский

Запорожский государственный университет

Запорожская государственная инженерная академия, Украина

Предложена дискретная модель тонкого упругого слоя. Рассмотрена задача о распространении продольной гармонической волны в слое. Представлены графики дисперсионных соотношений, полученных на основе дискретной модели и альтернативных континуальных моделей. Результаты исследований показали, что предложенная дискретная модель не уступает континуальным моделям теории пластин и приближается, по своим характеристикам, к модели, основанной на уравнениях теории упругости. *2000 Mathematics Subject Classification* 74J05.

Введение. Известно, что дифференциальные уравнения механики сплошных сред получаются в результате так называемого феноменологического подхода, в котором пренебрегают дискретной структурой вещества [1]. При этом речь идет далеко не об атомно-молекулярной структуре, а о различных дискретных элементах типа кристаллов металла или волокон дерева и т.д. Континуальные модели, получающиеся в результате, являются, таким образом, упрощенными, сглаживающими реальные дискретные явления.

При использовании численных компьютерных методов прибегают к процедуре дискретизации континуальных моделей. Таким образом, выполняется переход, в определенной мере обратный тому, который применялся при построении моделей механики сплошной среды.

В связи с этим достаточно давно было предложено для компьютерного анализа изначально строить дискретные модели взамен континуальных. В этом направлении получены определенные результаты [2–12]. Однако, в целом, развитие дискретных моделей механики сплошных сред существенно отстает от развития континуальных моделей, в связи с чем исследования в данной области остаются актуальными.

Настоящая работа посвящена исследованию стационарных волновых процессов в тонком упругом слое на основе предлагаемой двухслойной дискретной модели. Перемещения частиц в волне предполагаются малыми по сравнению с расстояниями между ними, что позволяет ограничиться линейной зависимостью реакций упругих связей от возникающих в слое деформаций.

1. Дискретная модель тонкого слоя. Представим тонкий слой в виде двухслойной структуры с кубической решеткой, в узлах которой находятся точечные массы, соединенные между собой упругими связями. Рассмотрим задачу о распространении продольной гармонической волны в направлении, параллельном одной из

базисных плоскостей решетки. При такой постановке задачи достаточно рассмотреть поперечное сечение дискретного слоя (рис.1), а в качестве упругих характеристик модели – суммарные проекции упругих связей на плоскость поперечного сечения.

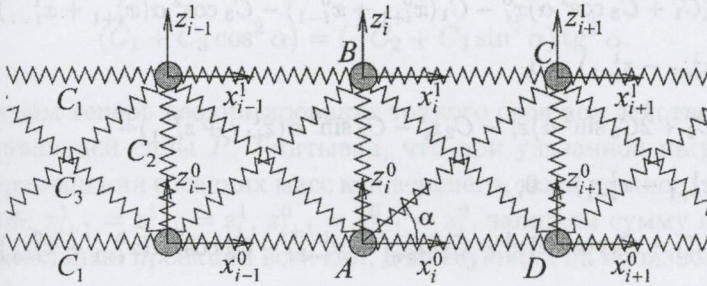


Рис. 1: Дискретная модель тонкого слоя

Жесткости горизонтальных пружин равны C_1 , вертикальных – C_2 , наклонных – C_3 . Угол между направлениями горизонтальных и наклонных пружин равен α . Для обеспечения адекватного моделирования параметры C_1 , C_2 и C_3 , очевидно, должны удовлетворять некоторым соотношениям, вытекающим из свойств континуальной упругой среды. Вопросы, связанные с определением жесткостей упругих связей дискретной модели будут рассмотрены ниже. Для однородного слоя будем считать, что массы всех частиц одинаковы и равны m . Расстояние по горизонтали между двумя соседними частицами слоя обозначим через δ , по вертикали – через h .

Запишем дифференциальные уравнения движения произвольной массы номер i нижнего ряда и произвольной массы номер i верхнего ряда с использованием уравнений Лагранжа II рода.

Обозначая горизонтальные и вертикальные перемещения масс нижнего (с индексом 0) и верхнего (с индексом 1) рядов соответственно через $x_i^0, z_i^0, x_i^1, z_i^1$ ($-\infty < i < \infty$), составляем функцию Лагранжа $L = T - \Pi$. Здесь кинетическая энергия T равна

$$T = \frac{m}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} [(\dot{x}_i^0)^2 + (\dot{z}_i^0)^2 + (\dot{x}_i^1)^2 + (\dot{z}_i^1)^2], \tag{1.1}$$

потенциальная энергия Π в предположении о малости перемещений точечных масс, расположенных в узлах дискретной модели, задается выражением

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} [C_1(x_i^0 - x_{i+1}^0)^2 + C_1(x_i^1 - x_{i+1}^1)^2 + C_2(z_i^0 - z_i^1)^2 + \\ + C_3(x_i^0 \cos \alpha + z_i^0 \sin \alpha - x_{i+1}^1 \cos \alpha - z_{i+1}^1 \sin \alpha)^2 + \\ + C_3(x_i^1 \cos \alpha - z_i^1 \sin \alpha - x_{i+1}^0 \cos \alpha + z_{i+1}^0 \sin \alpha)^2]. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Строим, с использованием (1.1) и (1.2), следующую систему уравнений Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^0} - \frac{\partial L}{\partial x_i^0} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i^0} - \frac{\partial L}{\partial z_i^0} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^1} - \frac{\partial L}{\partial x_i^1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i^1} - \frac{\partial L}{\partial z_i^1} = 0, \quad -\infty < i < \infty. \end{aligned} \tag{1.3}$$

После вычисления соответствующих производных и приведения подобных слагаемых дифференциальные уравнения движения произвольной i -й массы верхнего и нижнего рядов запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
 & m\ddot{x}_i^0 + 2(C_1 + C_3 \cos^2 \alpha)x_i^0 - C_1(x_{i+1}^0 + x_{i-1}^0) - C_3 \cos^2 \alpha(x_{i+1}^1 + x_{i-1}^1) - \\
 & - C_3 \sin \alpha \cos \alpha(z_{i+1}^1 - z_{i-1}^1) = 0, \\
 & m\ddot{z}_i^0 + (C_2 + 2C_3 \sin^2 \alpha)z_i^0 - C_2z_i^1 - C_3 \sin^2 \alpha(z_{i+1}^1 + z_{i-1}^1) - \\
 & - C_3 \sin \alpha \cos \alpha(x_{i+1}^1 - x_{i-1}^1) = 0, \\
 & m\ddot{x}_i^1 + 2(C_1 + C_3 \cos^2 \alpha)x_i^1 - C_1(x_{i+1}^1 + x_{i-1}^1) - C_3 \cos^2 \alpha(x_{i+1}^0 + x_{i-1}^0) + \\
 & + C_3 \sin \alpha \cos \alpha(z_{i+1}^0 - z_{i-1}^0) = 0, \\
 & m\ddot{z}_i^1 + (C_2 + 2C_3 \sin^2 \alpha)z_i^1 - C_2z_i^0 - C_3 \sin^2 \alpha(z_{i+1}^0 + z_{i-1}^0) + \\
 & + C_3 \sin \alpha \cos \alpha(x_{i+1}^0 - x_{i-1}^0) = 0.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Уравнения (1.4) пригодны для описания как продольной, так и изгибной деформации слоя.

Связь параметров дискретной и континуальной сред. Обозначив через ρ плотность моделируемой сплошной среды, определяем массы частиц дискретной модели: $m = \rho \delta h / 2$.

Далее найдем зависимость жесткостей продольных (C_1), поперечных (C_2) и наклонных (C_3) пружин от физических характеристик среды: модуля упругости E и коэффициента Пуассона ν .

Рассмотрим деформирование дискретного элемента $ABCD$ (рис. 1) под действием растягивающей нагрузки, приложенной сначала в продольном (обозначенном индексом l - от англ. *longitudinal*), а затем в поперечном направлении (с индексом t - от англ. *transverse*). Воспользовавшись первыми двумя уравнениями системы (1.4), получим

$$\begin{aligned}
 P_l &= C_1 \Delta x_l + C_3 \cos^2 \alpha \cdot \Delta x_l - C_3 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \Delta z_l, \\
 P_t &= 0.5C_2 \Delta z_t + C_3 \sin^2 \alpha \cdot \Delta z_t - C_3 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \Delta x_t,
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

где $\Delta x = x_{i+1}^1 - x_i^0 = x_{i+1}^0 - x_i^0$, $\Delta z = z_{i+1}^1 - z_i^0 = z_i^1 - z_i^0$ - абсолютные деформации слоя. Появление множителя перед C_2 связано с тем, что граница между двумя соседними элементами слоя проходит вдоль поперечной пружины жесткости C_2 .

Приводя в полученных уравнениях силу P и абсолютные деформации Δx , Δz к эквивалентным напряжениям σ_{xx} , σ_{zz} и деформациям ε_{xx} , ε_{zz} в соответствии с выражениями

$$\begin{aligned}
 P_l &= h\sigma_{xx}, \quad P_t = \delta\sigma_{zz} = h \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sigma_{zz}, \\
 \Delta x &= \delta\varepsilon_{xx} = h \operatorname{ctg} \alpha \cdot \varepsilon_{xx}, \quad \Delta z = h\varepsilon_{zz},
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma_{xx, l}}{\varepsilon_{xx, l}} &= (C_1 + C_3 \cos^2 \alpha) \operatorname{ctg} \alpha - C_3 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\varepsilon_{zz, l}}{\varepsilon_{xx, l}}, \\
 \frac{\sigma_{zz, t}}{\varepsilon_{zz, t}} &= \left(\frac{1}{2}C_2 + C_3 \sin^2 \alpha\right) \operatorname{tg} \alpha - C_3 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\varepsilon_{xx, t}}{\varepsilon_{zz, t}}.
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Предполагая упругие свойства дискретной модели в пределах одного структурного элемента в направлениях x и z одинаковыми $\left(\frac{\sigma_{xx,t}}{\varepsilon_{xx,t}} = \frac{\sigma_{zz,t}}{\varepsilon_{zz,t}}, \frac{\varepsilon_{zz,t}}{\varepsilon_{xx,t}} = \frac{\varepsilon_{xx,t}}{\varepsilon_{zz,t}} \right)$, приходим к соотношению

$$(C_1 + C_3 \cos^2 \alpha) = \left(\frac{1}{2} C_2 + C_3 \sin^2 \alpha \right) \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (1.8)$$

Рассмотрим теперь деформирование тонкого слоя под действием продольной растягивающей силы P . Учитывая, что при указанной нагрузке вертикальные перемещения соседних масс как верхнего, так и нижнего рядов равны между собой: $z_{i+1}^1 = z_{i-1}^1 = z_i^1$, $z_{i+1}^0 = z_{i-1}^0 = z_i^0$, запишем сумму горизонтальных и вертикальных проекций всех сил, действующих на произвольную массу с номером i :

$$\begin{aligned} C_1 \Delta x + C_3 \cos^2 \alpha \cdot \Delta x - C_3 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \Delta z &= P/2, \\ C_2 \Delta z + 2C_3 \sin^2 \alpha \cdot \Delta z - 2C_3 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \Delta x &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для случая плоского напряженного состояния зависимость между относительными деформациями слоя при рассматриваемой нагрузке имеет вид

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_z$$

или

$$\frac{\Delta z}{h} = -\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\Delta x}{\delta}. \quad (1.10)$$

При растяжении эквивалентного континуального слоя имеем

$$P = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_x h = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\Delta x}{\delta} h = \frac{E}{1-\nu^2} \Delta x \operatorname{tg} \alpha. \quad (1.11)$$

Подставляя (1.10), (1.11) в соотношения (1.9), получим:

$$2C_1 + 2C_3 (\cos^2 \alpha - \frac{\nu}{1-\nu} \sin^2 \alpha) = \frac{E}{1-\nu^2} \operatorname{tg} \alpha, \quad (1.12)$$

$$\frac{\nu \operatorname{tg} \alpha}{1-\nu} (C_2 + 2C_3 \sin^2 \alpha) - 2C_3 \sin \alpha \cos \alpha = 0. \quad (1.13)$$

Таким образом, имеем три уравнения, (1.8), (1.12), (1.13), для определения трех неизвестных C_i , $i=1, 2, 3$.

2. Симметричная деформация тонкого слоя. Перейдем к рассмотрению конкретной задачи – распространение продольной волны в тонком слое. Сравним результаты, получаемые на основе предложенной дискретной модели и ряда континуальных теорий, на основе графиков дисперсионных зависимостей.

2.1. Динамические уравнения трехмерной теории упругости. Соответствующая задача рассматривалась неоднократно ранее [13,14]. Приведем

здесь, для полноты изложения, основные результаты. Согласно линейной теории упругости волновые процессы в тонком слое описываются системой уравнений [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0, \\ a_s^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь φ и ψ – потенциалы продольных и поперечных волн: $u = \partial\varphi/\partial x + \partial\psi/\partial z$, $w = \partial\varphi/\partial z - \partial\psi/\partial x$; декартовы координаты x , z и соответствующие компоненты u , w вектора перемещений отнесены к толщине слоя h ; безразмерное время t равно $t = \frac{\tau}{h} \sqrt{\frac{E}{\rho b}}$, τ – время, $b = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}$. При этом безразмерная скорость распространения фронта продольной трехмерной волны равна единице, а поперечной – $a_s^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$.

Решение системы уравнений (2.1), соответствующее стационарной гармонической волне, распространяющейся вдоль слоя, разыскивается в виде

$$\varphi = \Phi(z)e^{i(kx-\omega t)}, \quad \psi = \Psi(z)e^{i(kx-\omega t)}, \quad (2.2)$$

где k – волновое число (частота формы), ω – круговая частота, $i^2 = -1$.

После подстановки этого решения в однородные уравнения (2.1) приходим к системе двух линейных дифференциальных уравнений относительно двух функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - (k^2 - \omega^2)\Phi &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - (a_s^2 k^2 - \omega^2)\Psi &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

решение которой для случая симметричного относительно срединной плоскости $z = 0$ слоя напряженно-деформированного состояния разыскивается в виде

$$\Phi = A \operatorname{ch} \lambda z, \quad \Psi = B \operatorname{sh} \lambda z, \quad (2.4)$$

где A , B – константы, определяемые из граничных условий.

Подставляя (2.4) в (2.3) имеем

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - k^2 + \omega^2)A &= 0, \\ (a_s^2 \lambda^2 - a_s^2 k^2 + \omega^2)B &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

откуда находим

$$\lambda_1 = \sqrt{k^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = \sqrt{k^2 - \omega^2/a_s^2}. \quad (2.6)$$

Граничные условия отражают отсутствие нагрузок на лицевых поверхностях $z = \pm 1/2$ слоя:

$$\sigma_{zz}(\pm 1/2) = \sigma_{xz}(\pm 1/2) = 0. \quad (2.7)$$

Учитывая выражения для напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2a_s^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}, & \sigma_{zz} &= c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - 2a_s^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}, \\ \sigma_{xz} &= 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $c = \nu/(1-\nu)$, безразмерные нормальные напряжения σ_{xx} и σ_{zz} отнесены к величине E/b , безразмерное касательное напряжение отнесено к $G = E/2(1+\nu)$, получаем дисперсионное уравнение

$$4a_s^4 k^2 \lambda_1 \lambda_2 \operatorname{sh} \frac{\lambda_1}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_2}{2} - (\omega^2 - 2a_s^2 k^2)^2 \operatorname{ch} \frac{\lambda_1}{2} \operatorname{sh} \frac{\lambda_2}{2} = 0. \quad (2.9)$$

Это уравнение имеет действительные, мнимые и комплексные корни. На рисунке 2 приведены соответствующие графики зависимостей $\omega = \omega(k)$ для сравнительно малых значений ω и k (жирная линия). Здесь и далее коэффициент Пуассона принят равным $\nu = 0.3$.

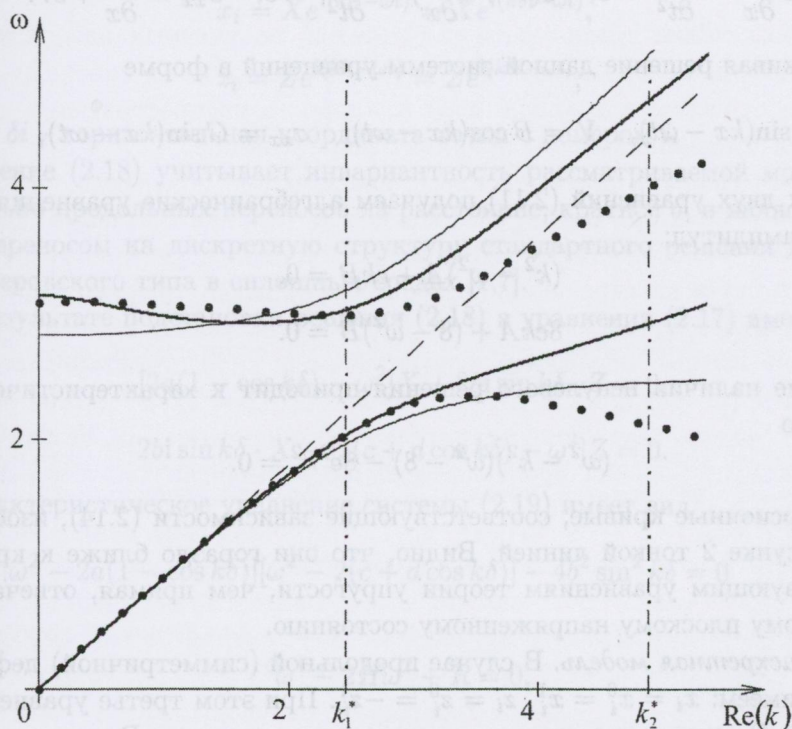


Рис. 2: Графики дисперсионных зависимостей $\omega = \omega(k)$:
 — теория упругости, - - - обобщенное плоское напряженное состояние,
 — уточненное плоское напряженное состояние, ••• дискретная модель

2.2. Классическая теория обобщенного плоского напряженного состояния. С учетом введенных выше обозначений единственное динамическое

уравнение плоского напряженного состояния [1] принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (2.10)$$

причем $u = u(x, t)$, а параметр a_1 задает безразмерную скорость распространения фронта продольных гармонических волн в тонком слое, $a_1^2 = \frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}$.

Уравнению (2.10) соответствует линейная дисперсионная зависимость $\omega = a_1 k$, график которой изображен на рисунке 2 пунктирной линией.

2.3. Уточненная теория плоского напряженного состояния. Обозначив через $V = V(x, t)$ симметричные относительно срединной поверхности $z = 0$ относительные поперечные перемещения лицевых поверхностей слоя и сохранив все обозначения, введенные ранее, уточненные динамические уравнения плоского напряженного состояния слоя [15] в предположении отсутствия нагрузок на лицевых поверхностях запишем в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 8(V + c \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \quad \sigma_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + cV. \quad (2.11)$$

Разыскивая решение данной системы уравнений в форме

$$u = A \sin(kx - \omega t), \quad V = B \cos(kx - \omega t), \quad \sigma_{xx} = C \sin(kx - \omega t), \quad (2.12)$$

из первых двух уравнений (2.11) получаем алгебраические уравнения относительно амплитуд:

$$\begin{aligned} (k^2 - \omega^2)A + ckB &= 0, \\ 8ckA + (8 - \omega^2)B &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Условие наличия ненулевого решения приводит к характеристическому уравнению

$$(\omega^2 - k^2)(\omega^2 - 8) - 8c^2 k^2 = 0. \quad (2.14)$$

Дисперсионные кривые, соответствующие зависимости (2.14), изображены на рисунке 2 тонкой линией. Видно, что они гораздо ближе к кривым, соответствующим уравнениям теории упругости, чем прямая, отвечающая обобщенному плоскому напряженному состоянию.

2.4. Дискретная модель. В случае продольной (симметричной) деформации слоя имеем: $x_i = x_i^0 = x_i^1$, $z_i = z_i^0 = -z_i^1$. При этом третье уравнение из системы (1.4) совпадает с первым, а четвертое – со вторым. В итоге остаются только два различных уравнения:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_i + 2(C_1 + C_3 \cos^2 \alpha)x_i - (C_1 + C_3 \cos^2 \alpha)(x_{i+1} + x_{i-1}) + \\ + C_3 \sin \alpha \cos \alpha(z_{i+1} - z_{i-1}) = 0, \\ m\ddot{z}_i + 2(C_2 + C_3 \sin^2 \alpha)z_i + C_3 \sin^2 \alpha(z_{i+1} + z_{i-1}) - \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$-C_3 \sin \alpha \cos \alpha (x_{i+1} - x_{i-1}) = 0.$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} a &= (C_1 + C_3 \cos^2 \alpha)/m, & b &= (C_3 \sin \alpha \cos \alpha)/m, \\ c &= (C_2 + C_3 \sin^2 \alpha)/m, & d &= (C_3 \sin^2 \alpha)/m, \end{aligned} \quad (2.16)$$

окончательно получаем

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i + 2ax_i - a(x_{i+1} + x_{i-1}) + b(z_{i+1} - z_{i-1}) &= 0, \\ \ddot{z}_i + 2cz_i + d(z_{i+1} + z_{i-1}) - b(x_{i+1} - x_{i-1}) &= 0, \quad -\infty < i < \infty. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Сравним динамические характеристики дискретной модели с перечисленными континуальными моделями. Для этого рассмотрим плоскую гармоническую волну, распространяющуюся по дискретной структуре. Для волн такого типа перемещения x_i и z_i будем разыскивать в виде

$$\begin{aligned} x_i &= X e^{i(kl_i - \omega t)} = X e^{i(k\delta i - \omega t)}, \\ z_i &= Z e^{i(kl_i - \omega t)} = Z e^{i(k\delta i - \omega t)}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $l_i = \delta i$ — горизонтальная координата точки с номером i .

Решение (2.18) учитывает инвариантность рассматриваемой модели относительно продольных переносов на расстояние, кратное δ , и является простым переносом на дискретную структуру стандартного решения для волн Даламберовского типа в сплошных средах [1,7].

В результате подстановки решения (2.18) в уравнения (2.17) имеем

$$\begin{aligned} [2a(1 - \cos k\delta) - \omega^2]X + 2bi \sin k\delta \cdot Z &= 0, \\ 2bi \sin k\delta \cdot X - [2(c + d \cos k\delta) - \omega^2]Z &= 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Характеристическое уравнение системы (2.19) имеет вид

$$[\omega^2 - 2a(1 - \cos k\delta)][\omega^2 - 2(c + d \cos k\delta)] - 4b^2 \sin^2 k\delta = 0 \quad (2.20)$$

или

$$\omega^4 - 2H\omega^2 + R = 0, \quad (2.21)$$

где

$$\begin{aligned} H &= a(1 - \cos k\delta) + c + d \cos k\delta, \\ R &= 4a(1 - \cos k\delta)(c + d \cos k\delta) - 4b^2 \sin^2 k\delta. \end{aligned}$$

Из уравнения (2.21) находим дисперсионную зависимость:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{H \pm \sqrt{H^2 - R}}, \quad (2.22)$$

где знак “-” под радикалом соответствует индексу 1, знак “+” – индексу 2.

Для каждого из найденных корней амплитуды X и Z связаны соотношением, полученным из (2.19),

$$Z = \frac{2a(1 - \cos k\delta) - \omega^2}{2b \sin k\delta} \cdot iX. \quad (2.23)$$

Учитывая физическую постановку задачи, амплитуды поперечных и продольных колебаний слоя должны быть действительными величинами. Следовательно, необходимо принять $Z = i\tilde{Z} = e^{i\pi/2}\tilde{Z}$. Тогда в качестве решения можно брать либо действительную, либо мнимую часть выражений (2.18) для x_i, z_i :

$$\begin{aligned} x_i &= \begin{bmatrix} \cos \\ -\sin \end{bmatrix} (k\delta i - \omega t), \\ z_i &= \begin{bmatrix} \sin \\ \cos \end{bmatrix} (k\delta i - \omega t), \end{aligned} \quad (2.24)$$

где $\tilde{X} \equiv X$.

Для обеспечения сравнимости результатов, полученных на основе дискретной модели, с результатами континуальных теорий все линейные размеры модели отнесены к толщине слоя h , скорость распространения фронта продольной трехмерной волны принята равной единице.

Итоговые графики дисперсионных зависимостей, полученные на основе дискретной модели при $\alpha = 1$, изображены на рисунке 2 точками. Выбранное значение α соответствует наименьшему среднеквадратичному отклонению второй ветви дисперсионной зависимости (2.22) от точной кривой (2.9). Анализ графиков, представленных на рисунке 2, позволяет выделить две зоны, границы которых обозначены вертикальными штрихпунктирными линиями. При $k \in (0, 0.5\pi \operatorname{tg} \alpha)$, т. е. при $L \in [4\delta, \infty)$, ($L = 2\pi/k$ – длина волны), дискретная модель дает удовлетворительные результаты. Так, безразмерная скорость распространения фронта продольных двумерных волн в тонком слое при $\nu = 0.3$ равна

$$a_1 = \frac{\sqrt{1 - 2\nu}}{1 - \nu} \approx 0.9035. \quad (2.25)$$

Как показывают расчеты, дискретная теория дает для скорости распространения длинных волн, соответствующей низким частотам, значение

$$a_d = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\omega_1(k)}{k} = a_1. \quad (2.26)$$

Полученный результат при этом не зависит от величины угла α .

При $k \in (0.5\pi \operatorname{tg} \alpha, \pi \operatorname{tg} \alpha)$ ($L \in [2\delta, 4\delta)$) имеют место значительные расхождения между дискретной и континуальными моделями. Таким образом, в случае достаточно однородного материала при длинах волн, соизмеримых с толщиной слоя, предлагаемая дискретная модель становится непригодной,

так же, как и известные континуальные модели теории пластин. Значения длин волн $L = 4\delta$, 2δ определяют границы соответственно первой и второй зон Бриллюэна [7]. Волны, длина которых находится за пределами этих зон, $L < 2\delta$, рассматриваться не могут, т. к. в этом диапазоне зависимость между частотой и волновым числом становится неоднозначной.

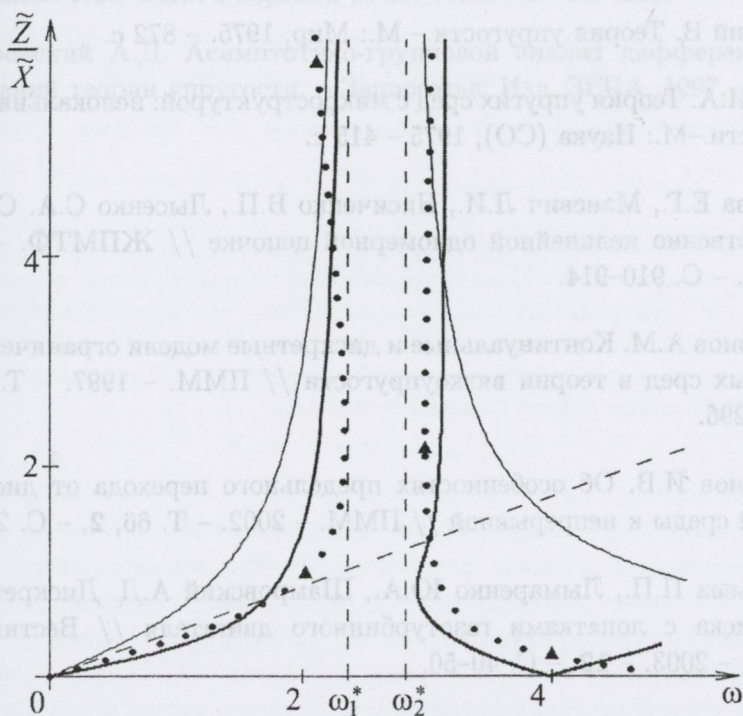


Рис. 3: Отношение амплитуд поперечных и продольных колебаний граничной поверхности $z = 1/2$ слоя

На рисунке 3 представлен график зависимости отношения амплитуд поперечных и продольных колебаний \tilde{Z}/\tilde{X} лицевой поверхности слоя от частоты ω . Левая ветвь графика соответствует первой моде $\omega = \omega_1(k)$, правая – второй моде $\omega = \omega_2(k)$. Границы зон указаны на графике треугольниками. Представленный график иллюстрирует хорошо известный в теории упругости динамический эффект: за счет поперечных колебаний слоя на частотах, близких к диапазону $\omega_1^* \leq \omega \leq \omega_2^*$, возникают резонансные явления, которые препятствуют распространению продольных волн.

3. Заключение. Рассмотрение дискретной модели тонкого упругого слоя показало ее адекватность альтернативным континуальным моделям. При этом в случае однородного слоя для решения задач в рамках дискретной модели применяется такой же аналитический метод, как для континуальных моделей. Однако, в случае неоднородного слоя, когда аналитические методы для любых моделей либо неприменимы, либо чрезвычайно громоздки, проявляется преимущество дискретной модели, как значительно лучше при-

способленной для численной реализации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости.– М.: Мир, 1975. – 872 с.
2. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой: нелокальная теория упругости.–М.: Наука (СО), 1975.– 415 с.
3. Веденова Е.Г., Маневич Л.И., Нисиченко В.П., Лысенко С.А. Солитоны в существенно нелинейной одномерной цепочке // ЖПМТФ. – 1984. – Т. 25, 6. – С. 910–914.
4. Филимонов А.М. Континуальные и дискретные модели ограниченных одномерных сред в теории вязкоупругости // ПММ. – 1997. – Т. 61, 2. – С. 285–296.
5. Андрианов И.В. Об особенностях предельного перехода от дискретной упругой среды к непрерывной // ПММ. – 2002. – Т. 66, 2. – С. 271–275.
6. Григорьева П.П., Лымаренко Ю.А., Шамровский А.Д. Дискретная модель диска с лопатками газотурбинного двигателя // Вестник НТУ "ХПИ". – 2003. – 12. – С. 40–50.
7. Brillouin L., Parodi M. Propagation des ondes dans les milieux périodiques. – Paris: Masson, 1956. – 347 p.
8. Duncan D.B., Eilbeck J.C., Feddersen H., Wattis J.A.D. Solitons on lattices // Physica D. – 1993. – V. 68. – P. 1–11.
9. Georgieva A., Kriecherbauer T., Venakides S. Wave propagation and resonance in a one-dimensional nonlinear discrete periodic medium // SIAM J. Appl. Math. – 1999. – V. 60, 1. – P. 272–294.
10. Wattis J.A.D. Quasi-continuum approximations to lattice equations arising from the discrete nonlinear equation // J. Phys. A.: Math. Gen. – 2000. – V. 33. – P. 5925–5944.
11. Shen W. Traveling waves in time periodic lattice dynamical systems // Non-linear Analysis. – 2003. – V. 54. – P. 319–339.
12. Jensen J.S. Phononic band gaps and vibrations in one- and two-dimensional mass-spring structures // Journal of Sound and Vibration. – 2003. – V. 266,5.– P. 1053–1078.

13. Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Колебания упругой полосы. – В кн.: Методы виброизоляции машин и присоединенных конструкций. – М.: Наука, 1975. – С. 12–41.
14. Mindlin R.D. Waves and vibrations in isotropic elastic plates. – In: Structural Mechanics. New York: Pergamon press, 1960. – P. 199–232.
15. Шамровский А.Д. Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости. – Запорожье: Изд. ЗГИА, 1997. – 169 с.

$$N_1 = \text{span}\{T^{\alpha} \psi + T^{\beta} \psi^* | \alpha \in \mathbb{E}, \beta \in \mathbb{E}, n, m \in \mathbb{Z}_2\} \quad (4)$$

$$\Phi^{-1}(T - I)\psi + K = \Delta \psi \quad (5)$$

Используя представление (6) для $\Delta \psi$ в (5) и учитывая (7), получим уравнение

$$K = \begin{bmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Каждый элемент $L^2_{\text{loc}}(X)$ (7) можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Преобразование де Бранжа относительно круга

В.А. Золотарёв, В.Н. Сыровацкий

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

Для операторов близких к унитарным построен аналог преобразования Л. де Бранжа. В этом случае гильбертово пространство целых функций образуют двумерные вектор-функции. Найден вид воспроизводящего ядра в этом гильбертовом пространстве и получено равенство Парсеваля для построенного обобщения преобразования Л. де Бранжа.

2000 Mathematics Subject Classification 47A45.

Как известно [2,3], классическое преобразование Л. де Бранжа приводит к функциональным моделям недиссипативных ограниченных операторов A и является обобщением преобразования Фурье для полуплоскости. Данное преобразование существенно опирается на то, что простую компоненту локального узла [2] порождает степени исходного оператора A . В случае операторов T близких к унитарным (унитарный узел) [2] такую простую компоненту порождают как степени оператора T так и степени T^* . Поэтому традиционное преобразование Л. де Бранжа в этом случае не применимо. И значит, необходимо построить соответствующее обобщение этого преобразования Л. де Бранжа для операторов T близких к унитарным, то есть для единичного круга. Этой задаче и посвящена данная работа.

I. Рассмотрим линейный ограниченный оператор T , действующий в гильбертовом пространстве H . Совокупность

$$\Delta = (J; H \oplus E; V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}; H \oplus \tilde{E}) \quad (1)$$

называется унитарным узлом [1], если линейный оператор

$$V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix} : H \oplus E \mapsto H \oplus \tilde{E} \quad (2)$$

удовлетворяет соотношениям

$$V^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{J} \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}; \quad V \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} V^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{J} \end{bmatrix}; \quad (3)$$

где J и \tilde{J} являются инволюциями в гильбертовых пространствах E и \tilde{E} соответственно, $J = J^* = J^{-1}$, $\tilde{J} = \tilde{J}^* = \tilde{J}^{-1}$. Любой ограниченный линейный оператор T в H всегда может быть включён в унитарный узел (1), для этого необходимо положить [1], - $E = \overline{D_{T^*}H}$; $\tilde{E} = \overline{D_T H}$; $\Psi = \sqrt{|D_T|}$; $\Phi = \sqrt{|D_{T^*}|}$; $J = \text{sign} D_{T^*}$; $\tilde{J} = \text{sign} D_T$; $K = -\tilde{J}T^*$; где, как обычно, $D_T = I - T^*T$; $D_{T^*} = I - TT^*$ - дефектные операторы отвечающие T , а $\sqrt{|A|}$ и $\text{sign} A$ для самосопряжённого оператора A следует понимать в смысле соответствующих спектральных разложений.

Напомним, что узел (1) называется простым [1], если $H = H_1$, где

$$H_1 = \text{span}\{T^n \Phi f + T^{*m} \Psi^* g; f \in E; g \in \tilde{E}; n, m \in \mathbb{Z}_+\} \quad (4)$$

Подпространства H_1 и $H_0 = H_1^\perp = H \ominus H_1$ приводят оператор T причём, сужение T на H_0 является унитарным оператором [2].

Основным инвариантом узла Δ (1), описывающим простые узлы является, введенная ещё в 1946 году [4] М.С. Лившицем характеристическая оператор-функция

$$S_\Delta = K + \Psi(zI - T)^{-1}\Phi, \quad (5)$$

которая играет основную роль в теории треугольных и функциональных моделей [2] для операторов близких к унитарным (в смысле (1)).

Предположим, что $\dim E = \dim \tilde{E} = r < \infty$ и $J = \tilde{J}$. Выберем в E и \tilde{E} ортонормированные базисы $\{e_\alpha\}_1^r$ и $\{e'_\alpha\}_1^r$. Тогда из результатов В.П. Потапова [2] следует, что матрица-функция $S_\Delta(z) = \| \langle S_\Delta(z)e_\alpha, e'_\alpha \rangle \|$, в случае когда спектр $\sigma(T)$ оператора T принадлежит единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ имеет следующую мультипликативную структуру, -

$$S_\Delta(z) = \int_0^l \exp \left\{ \frac{e^{i\varphi_t} + z}{e^{i\varphi_t} - z} J dF_t \right\}, \quad (6)$$

где: φ_t - неотрицательная неубывающая на $[0, l]$ функция $0 \leq \varphi_t \leq 2\pi$; а F_t - неубывающая эрмитова ($r \times r$) матрица-функция на $[0, l]$ для которой $\text{tr} F_t \equiv t$.

Используя представление В.П.Потапова (6) для $S_\Delta(z)$ (5) нетрудно построить [2] треугольную модель оператора T . Обозначим через $L_{r,l}^2(F_x)$ гильбертово пространство вектор-функций

$$L_{r,l}^2(F_x) = \left\{ f(x) = (f_1(x), \dots, f_r(x)); \int_0^l f(x) dF_x f^*(x) < \infty \right\}. \quad (7)$$

Зададим в $L_{r,l}^2(F_x)$ (7) линейный оператор T_c , -

$$(T_c f)(x) = f(x) e^{i\varphi_x} - 2 \int_x^l f(t) dF_t \Phi_t^* \Phi_x^{*-1} J e^{i\varphi_x} \quad (8)$$

где матрица Φ_x является решением интегрального уравнения

$$\Phi_x + \int_0^x \Phi_t dF_t J = I, \quad x \in [0, l]. \quad (9)$$

Рассмотрим также матрицу-функцию Ψ_x , -

$$\Psi_x + \int_x^l \Psi_t dF_t J = J, \quad x \in [0, l]. \quad (10)$$

Определим теперь операторы $\Phi_c : E \mapsto L_{r,l}^2(F_x)$ и $\Psi_c : L_{r,l}^2(F_x) \mapsto E$ (здесь $E = \mathbb{C}^n$) следующим образом,

$$\begin{aligned} (\Phi_c f)(x) &= \sqrt{2} f \Psi_x e^{i\varphi x}, \quad \forall f \in E; \\ (\Psi_c f)(x) &= \sqrt{2} \int_0^l f(x) dF_x \Phi_x^*, \quad \forall f(x) \in L_{r,l}^2(F_x), \end{aligned} \quad (11)$$

И пусть $K_c = S_\Delta(\infty)$. Совокупность

$$\Delta_c = (J; L_{r,l}^2(F_x) \oplus E; V_c = \begin{bmatrix} T_c & \Phi_c \\ \Psi_c & K_c \end{bmatrix}; L_{r,l}^2(F_x) \oplus E; J) \quad (12)$$

является унитарным узлом (1)-(3) и называется треугольной моделью простого узла Δ (1), где $L_{r,l}^2(F_x)$, T_c , Φ_c , Ψ_c - имеют вид (7), (8), (11). Последнее означает, что простые компоненты (4) у узлов Δ (1) и Δ_c (12), в случае когда спектр оператора T лежит на единичной окружности $\sigma(T) \subseteq \mathbb{T}$ унитарно-эквивалентны [2], конечно, при условии $J = \dot{J}$ и $\dim E = \dim \dot{E} = r < \infty$.

II. В данной работе мы ограничимся случаем, когда $r = 2$, а инволюция J имеет вид $J = \dot{J}_s$, -

$$J_s = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Рассмотрим матрицу-функцию $M_x(z)$, которая является решением интегрального уравнения

$$(1 - ze^{i\varphi x}) M_x(z) + 2z \int_x^l M_t(z) dF_t \Phi_t^* \Phi_x^{*-1} J_s e^{i\varphi x} = \Psi_x e^{i\varphi x} \quad (14)$$

где $x \in [0, l]$, $z \in \mathbb{C}$. Пусть $N_x(z) = (e^{-i\varphi x} - z) M_x(z) \dot{J}_s$, тогда учитывая уравнения (9), (10), когда $dF_t = a_t dt$, мы получим, что $N_x(z)$ является решением следующей задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} N_x(z) - N_x(z) \dot{J}_s a_x \frac{e^{-i\varphi x} + z}{e^{-i\varphi x} - z} = 0; \\ N_l(z) = I_E; \quad 0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (15)$$

Решение данной задачи имеет вид [2]:

$$N_x(z) = \int_x^{\bar{l}} \exp\left\{\frac{z + e^{-i\varphi t}}{z - e^{-i\varphi t}} \dot{J}_s dF_t\right\}.$$

Очевидно, что $N_0(z) = \Theta_\Delta(z)$, где $\Theta_\Delta(z) = S_\Delta(z^{-1})$, а характеристическая функция $S_\Delta(z)$ имеет вид (6); кроме того $\Psi_x = N_x(0)J_s$. Из задачи Коши (15) немедленно следует, что

$$\frac{d}{dx} N_x(z) J_s N_x^*(w) = 2 \frac{1 - z\bar{w}}{(e^{-i\varphi x} - z)(e^{i\varphi x} - \bar{w})} N_x(z) \dot{J}_s a_x \dot{J}_s N_x^*(w)$$

поэтому

$$\frac{\dot{J}_s - N_x(z) \dot{J}_s N_x^*(w)}{1 - z\bar{w}} = 2 \int_x^l M_t(z) dF_t M_t^*(w), \quad (16)$$

и значит ядро

$$\mathcal{L}_x(z, w) = \frac{\dot{J}_s - (1 - ze^{i\varphi x}) M_x(z) \dot{J}_s M_x^*(w) (1 - \bar{w}e^{-i\varphi x})}{1 - z\bar{w}}$$

является эрмитово-положительным при каждом $x \in [0, l]$ от переменных $z, w \in \mathbb{C}_\varphi$, где множество \mathbb{C}_φ имеет вид

$$\mathbb{C}_\varphi = \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}_\varphi; \quad \mathbb{T}_\varphi = \{\zeta \in \mathbb{T}; \exists x \in [0, l], \zeta = e^{-i\varphi x}\}. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь вектор-строку

$$L_x(z) = [1, 1] M_x(z) = (e^{-i\varphi x} - z)^{-1} [E_x(z); \tilde{E}_x(z)],$$

которая в силу (14) является решением интегрального уравнения,

$$(1 - ze^{i\varphi x}) L_x(z) + 2z \int_x^l L_t(z) dF_t \Phi_t^* \Phi_x^{*-1} \dot{J}_s e^{i\varphi x} = [1, 1] \Psi_x e^{i\varphi x} \quad (18)$$

при $z \in \mathbb{C}_\varphi$ (17). Из (16) следует, что

$$\frac{(1 - ze^{i\varphi x}) L_x(z) \dot{J}_s L_x^*(w) (1 - \bar{w}e^{-i\varphi x})}{z\bar{w} - 1} = 2 \int_x^l L_t(z) dF_t L_t^*(w). \quad (19)$$

Поэтому, во-первых $\mathcal{X}_{[a, l]}(t) L_t(z) \in L_{2, l}^2(F_t)$ при каждом $a \in [0, l]$ где $\mathcal{X}_{[0, l]}(t)$ - характеристическая функция отрезка $[a, l]$, и $z \in \mathbb{C}_\varphi$ (17), а во-вторых ядро

$$\begin{aligned} K_x^1(z, w) &= \frac{(1 - ze^{i\varphi x})(1 - \bar{w}e^{-i\varphi x})}{z\bar{w} - 1} L_x(z) J L_x^*(w) = \\ &= \frac{E_x(z) \overline{E_x(w)} - \tilde{E}_x(z) \overline{\tilde{E}_x(w)}}{1 - z\bar{w}} \end{aligned} \quad (20)$$

является эрмитово-положительным в силу (19), естественно, при $z, w \in \mathbb{C}_\varphi$ (17). Тогда из (20) следует, что

$$|E_x(z)| - |\tilde{E}_x(z)| = \begin{cases} \geq 0; & z \in \mathbb{D}_+; \\ = 0; & z \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_\varphi; \\ \leq 0; & z \in \mathbb{D}_-, \end{cases} \quad (21)$$

где как обычно $\mathbb{D}_\pm = \{z \in \mathbb{C}; \pm(1 - |z|) > 0\}$.

Покажем, что функция $E_x(z)$ (как и $\tilde{E}_x(z)$) при каждом фиксированном $x \in [0, l]$ не может иметь нулей в единичном круге \mathbb{D}_+ (соответственно вне круга, в \mathbb{D}_-). Пусть при $z_0 \in \mathbb{D}_+$ имеет место $E_x(z_0) = 0$, тогда из (21) следует что и $\tilde{E}_x(z_0) = 0$ и значит $L_x(z_0) \dot{J}_s L_x^*(z_0) = 0$. А это в виду (19) означает, что вектор-функция $L_t(z_0)$ принадлежит ядру метрики пространства $\mathcal{X}_{[x,l]}(t) L_{2,l}^2(F_t)$ и следовательно,

$$\int_x^l L_t(z_0) dF_t f^*(t) = 0$$

для любой функции $f(t) \in L_{2,l}^2(F_t)$, такой, что $\text{supp} f(t) \subseteq [x, l]$. А так как $\mathcal{X}_{[y,l]}(t) L_{2,l}^2(F_t) \subseteq \mathcal{X}_{[x,l]}(t) L_{2,l}^2(F_t)$ при $y \in [x, l]$, то подставляя в последнее неравенство произвольную функцию $f(t)$ из $\mathcal{X}_{[y,l]}(t) L_{2,l}^2(F_t)$ мы получим, что $L_t(z_0) = 0$ как элемент каждого из пространств $\mathcal{X}_{[y,l]}(t) L_{2,l}^2(F_t)$ при $x \leq y \leq l$. Поэтому из уравнения (18) следует, что $(e^{-i\varphi y} - z_0) L_y(z_0) = [1, 1] \Psi_y$ и значит вектор $[1, 1] \Psi_y$ также принадлежит ядру метрики пространства $\mathcal{X}_{[x,l]}(t) L_{2,l}^2(F_t)$.

Используя теперь интегральное уравнение (10), -

$$[1, 1] \Psi_y + \int_y^l [1, 1] \Psi_t dF_t \dot{J}_s = [1, 1] \dot{J}_s$$

мы получим, что $[1, 1] \Psi_y = [-1, 1]$ и значит $[E_y(z_0); \tilde{E}_y(z_0)] = [-1, 1]$ - постоянная вектор-функция при всех $y \in [x, l]$, что противоречит $E_x(z_0) = 0$.

Докажем теперь, что равенство $|E_x(z)| = |\tilde{E}_x(z)|$ при $z \in \mathbb{D}_+$ (как и при $z \in \mathbb{D}_-$) для каждого фиксированного $x \in [0, l]$ невозможно. Так как $E_x(z)$ не обращается в ноль внутри круга \mathbb{D}_+ , то применяя принцип максимума модуля к частному $\tilde{E}_x(z) \cdot E_x^{-1}(z) : \mathbb{D}_+ \mapsto \mathbb{D}_+$ (в силу (21)) мы получим, что $\tilde{E}_x(z) = \Theta_x E_x(z)$ для $\forall z \in \mathbb{D}_+$, где $\Theta_x \in \mathbb{T}$. Поэтому вновь из (19), (20) заключаем, что $L_t(z) = 0$ как элемент пространства $\mathcal{X}_{[x,l]}(t) L_{2,l}^2(F_t)$. Повторяя приведенные выше рассуждения, мы получаем, что $(e^{-i\varphi y} - z) L_y(z) = [-1, 1]$ для всех $y \in [x, l]$, и значит $E_y(-z) = -1 = -\tilde{E}_x(z)$.

Исключая в дальнейшем эту тривиальность мы приходим к утверждению.

Теорема 1. *Нетривиальное решение $L_x(z) = (e^{-i\varphi x} - z)^{-1} \cdot [E_x(z); \tilde{E}_x(z)]$ интегрального уравнения (18) обладает свойствами:*

1) $L_x(z) \in \mathcal{X}_{[a,l]}(x)L_{2,l}^2(F_x)$ (7) при каждом $a \in [0, l]$ и любом $z \in \mathbb{C}_\varphi$ (17), где $\mathcal{X}_{[a,l]}(x)$ - характеристическая функция отрезка $[a, l]$;

2) голоморфные в \mathbb{C}_φ (17) функции $E_x(z)$ и $\tilde{E}_x(z)$ не имеют нулей в \mathbb{D}_+ и в \mathbb{D}_- соответственно, причём

$$|E_x(z)| - |\tilde{E}_x(z)| = \begin{cases} > 0; & z \in \mathbb{D}_+; \\ = 0; & z \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_\varphi; \\ < 0; & z \in \mathbb{D}_- \end{cases} \quad (22)$$

при каждом $x \in [0, l]$.

Предположим что мера dF_t имеет вид $dF_t = \alpha_t dt I_E$, где $\alpha_t \geq 0$ - скалярная функция, тогда для вектор-строки $L_x(z)$ в силу (15) получим следующие задачи Коши,

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} E_x(z) = -\frac{e^{-i\varphi x+z}}{e^{-i\varphi x}-z} \alpha_x E_x(z); \\ E_l(z) = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d}{dx} \tilde{E}_x(z) = -\frac{e^{-i\varphi x+z}}{e^{-i\varphi x}-z} \alpha_x \tilde{E}_x(z); \\ \tilde{E}_l(z) = 1; \end{cases}$$

Следовательно,

$$E_x(z) = -\exp\left\{\int_x^l \frac{e^{-i\varphi t+z}}{e^{-i\varphi t}-z} \alpha_t dt\right\} \quad \tilde{E}_x(z) = -\exp\left\{\int_x^l \frac{e^{-i\varphi t+z}}{e^{-i\varphi t}-z} \alpha_t dt\right\} \quad (23)$$

Утверждение 1. Решение $L_x(z) = (e^{-i\varphi x} - z)^{-1} [E_x(z); \tilde{E}_x(z)]$ интегрального уравнения (18), когда dF_t эквивалентна скалярной мере Лебега $dF_t = \alpha_t dt I_E$, $\alpha_t \geq 0$ имеет вид (23).

Рассмотрим несколько интересных случаев.

1). Пусть $\varphi_x = 0$ и $\int_x^l \alpha_t dt = \beta_x$, тогда $E_x(z)$ и $\tilde{E}_x(z)$ имеют вид,

$$E_x(z) = -\exp\left\{\beta_x \frac{1+z}{1-z}\right\}; \quad \tilde{E}_x(z) = \exp\left\{\beta_x \frac{1+z}{1-z}\right\}.$$

2). Предположим теперь, что $\varphi_x = x$, а $\alpha_x = 1$, тогда так как

$$\int_x^l \frac{e^{-it}+z}{e^{-it}-z} dt = (l-x) + 2iln \left| \frac{e^{-ix}-z}{e^{-ix}+z} \right|,$$

то очевидно

$$E_x(z) = -e^{l-x} \left(\frac{e^{-ix}-z}{e^{-ix}+z} \right)^{2i}; \quad \tilde{E}_x(z) = e^{x-l} \left(\frac{e^{-ix}-z}{e^{-ix}+z} \right)^{2i}$$

В случае 1) множество \mathbb{T}_φ (17) состоит из одной точки $\mathbb{T}_\varphi = \{1\}$, а во втором случае, 2) - множество \mathbb{T}_φ представляет собой дугу окружности $\mathbb{T}_\varphi = \{e^{ix}; x \in [0, l], 0 \leq l \leq 2\pi\}$.

Утверждение 2. Если $dF_t = d\sigma_t I_E$ - скалярная мера, то из (23) следует, что $E_x(z)$ представляет собой произведение внутренней в \mathbb{D}_- функции, которая отвечает сингулярной компоненте меры $d\sigma_t$ и внешней функции в \mathbb{D}_- , соответствующей суммируемой части $d\sigma_t$ [5]. Аналогичным образом $\tilde{E}_x(z)$ факторизуется на внутренний и внешний сомножители в \mathbb{D}_+ .

Используя вид оператора T_c (8) и уравнение (18) для $L_x(z)$ очевидно, что

$$L_x(z) = (I - zT_c)^{-1}[1, 1]\Psi_x e^{i\varphi x} \quad (24)$$

причём, $L_x(0) = [1, 1]\Psi_x e^{i\varphi x}$. Нетрудно видеть, что T_c^* , оператор сопряжённый к T_c (8) имеет вид,

$$(T_c^* f)(x) = f(x)e^{-i\varphi x} - 2 \int_0^x f(t)e^{-i\varphi t} dF_t J_s \Phi_t^{-1} \Phi_x. \quad (25)$$

Вычислим как оператор T_c^* (25) действует на вектор-функцию $L_x(z)$ (24), -

$$\begin{aligned} T_c^* L_x(z) &= T_c^* (I - zT_c)^{-1} L_x(0) = T_c^* L_x(0) + zT_c^* T_c (I - zT_c)^{-1} L_x(0) = \\ &= zL_x(z) + T_c^* L_x(0) - z(I - T_c^* T_c)(I - zT_c)^{-1} L_x(0). \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$T_c^* L_x(0) = [1, 1]\Psi_0 \Phi_x,$$

а так как

$$(I - T_c^* T_c)f(x) = 2 \int_0^l f(t) dF_t \Phi_t^* J_s \Phi_x$$

то, учитывая интегральное уравнение (18) для $L_x(z)$ при $x = 0$, мы получим, что

$$\begin{aligned} z(I - T_c^* T_c)L_x(z) &= 2z \int_0^l L_t(z) dF_t \Phi_t^* J_s \Phi_x = \\ &= \{[1, 1]\Psi_0 - (e^{-i\varphi_0} - z)L_0(z)\} \Phi_x. \end{aligned}$$

Поэтому, если определить вектор-строку

$$R_0(z) = [E_0(z); \tilde{E}_0(z)], \quad (26)$$

то мы окончательно получим, что

$$T_c^* L_x(z) = zL_x(z) + R_0(z)\Phi_x. \quad (27)$$

III. Рассмотрим теперь матрицу-функцию $\tilde{M}_x(z)$, которая удовлетворяет уравнению, "двойственному" по отношению к (14),

$$(1 - ze^{-i\varphi x})\tilde{M}_x(z) + 2z \int_0^x \tilde{M}_t(z)e^{-i\varphi t} dF_t J_s \Phi_t^{-1} \Phi_x = \Phi_x \quad (28)$$

где $x \in [0, l]$, а $z \in \mathbb{C}$. Пусть $\tilde{N}_x(z) = (1 - ze^{-i\varphi x})\tilde{M}_x(z)$, тогда учитывая уравнение (9) для $\tilde{\Phi}_x$, когда $dF_x = a_x dx$, мы получим, что $\tilde{N}_x(z)$ удовлетворяет задаче Коши, -

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\tilde{N}_x(z) + \frac{e^{i\varphi x} + z}{e^{i\varphi x} - z}\tilde{N}_x a_x j_s = 0; \\ \tilde{N}_0(z) = I_E; \quad 0 \leq x \leq l; \end{cases} \quad (29)$$

решение которой имеет вид,

$$\tilde{N}_x(z) = \int_0^x \exp \left\{ \frac{z + e^{i\varphi t}}{z - e^{i\varphi t}} dF_t j_s \right\}.$$

Очевидно, что $\tilde{N}_x(\infty) = \tilde{\Phi}_x$ и $\tilde{N}_l(z) = \Theta_\Delta^*(\bar{z})$, где $\Theta_\Delta(z) = S_\Delta(z^{-1})$.

Из задачи Коши (29) следует, что

$$\frac{d}{dx}\tilde{N}_x(z) j_s \tilde{N}_x^*(w) = 2 \frac{z\bar{w} - 1}{(z - e^{i\varphi x})(\bar{w} - e^{-i\varphi x})} \tilde{N}_x(z) a_x \tilde{N}_x^*(w),$$

поэтому

$$\frac{\tilde{N}_x(z) j_s \tilde{N}_x^*(w) - j_s}{z(\bar{w}) - 1} = 2 \int_0^x \tilde{M}_t(z) dF_t \tilde{M}_t^*(w). \quad (30)$$

Итак ядро

$$\tilde{L}_x(z, w) = \frac{(1 - ze^{-i\varphi x})\tilde{M}_x(z) j_s \tilde{M}_x^*(w)(1 - \bar{w}e^{i\varphi x}) - j_s}{z\bar{w} - 1}$$

является эрмитово-положительным при каждом $x \in [0, l]$, когда $z, w \in \mathbb{C}_\varphi$, где

$$\tilde{\mathbb{C}}_\varphi = \mathbb{C} \setminus \tilde{\mathbb{T}}_\varphi; \quad \tilde{\mathbb{T}}_\varphi = \{\zeta \in \mathbb{T}; \exists x \in [0, l], \zeta = e^{i\varphi x}\} \quad (31)$$

при этом множества \mathbb{T}_φ (17), и $\tilde{\mathbb{T}}_\varphi$ (31) лежащие на единичной окружности \mathbb{T} , комплексно-сопряжены друг другу.

Аналогично (18) рассмотрим вектор-строку $\tilde{L}_x(z) = \bar{R}_0(z)\tilde{M}_x(z) = (1 - ze^{-i\varphi x})^{-1}[G_x(z); \tilde{G}_x(z)]$, где $\bar{R}_0(z) = \overline{R_0(z)}$, а $R_0(z)$ имеет вид (26). Тогда из (28) следует, что $\tilde{L}_x(z)$ является решением интегрального уравнения

$$(1 - ze^{-i\varphi x})\tilde{L}_x(z) + 2z \int_0^x \tilde{L}_t(z) e^{-i\varphi t} dF_t j_s \Phi_t^{-1} \Phi_x = \overline{R_0(z)} \Phi_x \quad (32)$$

где $z \in \tilde{\mathbb{C}}_\varphi$ (31). Из (30) следует, что

$$\begin{aligned} (1 - ze^{-i\varphi x})\tilde{L}_x(z) j_s \tilde{L}_x^*(w)(1 - \bar{w}e^{i\varphi x}) - \bar{R}_0(z) j_s \bar{R}_0^*(w) = \\ = 2(z\bar{w} - 1) \int_0^x \tilde{L}_t(z) dF_t L_t^*(w). \end{aligned} \quad (33)$$

Поэтому $\tilde{L}_t(z) \in L_{2,a}^2(F_t)$ при каждом $a \in [0, l]$ и любом $z \in \tilde{\mathbb{C}}_\varphi$ (31), а ядро

$$\begin{aligned}
 K_x^2(z, w) &= \frac{(1 - ze^{-i\varphi_x})\tilde{L}_x(z)J_s\tilde{L}_x^*(w)(1 - \bar{w}e^{i\varphi_x}) - \bar{R}_0(z)J_s\bar{R}_0^*(w)}{z\bar{w} - 1} = \\
 &= \frac{G_x(z)\overline{G_x(w)} - \tilde{G}_x(z)\overline{\tilde{G}_x(w)} - \overline{E_0(\bar{z})}E_0(\bar{w}) + \overline{\tilde{E}_0(\bar{z})}\tilde{E}_0(\bar{w})}{1 - z\bar{w}} \quad (34)
 \end{aligned}$$

является эрмитово-положительным, если $z, w \in \tilde{C}_\varphi$ (31). Поэтому аналогично теореме 1 справедливо утверждение.

Теорема 2. *Нетривиальное решение $\tilde{L}_x(z) = (1 - ze^{-i\varphi_x})^{-1} \cdot [G_x(z); \tilde{G}_x(z)]$ интегрального уравнения (32) обладает свойствами:*

- 1) $\tilde{L}_x(z) \in L_{2,l}^2(F_x)$ (7) при каждом $a \in [0, l]$ и любом $z \in \tilde{C}_\varphi$ (32);
- 2) голоморфные в \tilde{C}_φ (31) функции $G_x(z)$ и $\tilde{G}_x(z)$ не имеют нулей в \mathbb{D}_+ и в \mathbb{D}_- соответственно, причём

$$|G_x(z)|^2 - |\tilde{G}_x(z)|^2 - \left\{ |\bar{E}_0(z)|^2 - |\tilde{\bar{E}}_0(z)|^2 \right\} = \begin{cases} > 0; & z \in \mathbb{D}_+; \\ = 0; & z \in \mathbb{T} \setminus \tilde{\mathbb{T}}_\varphi; \\ < 0; & z \in \mathbb{D}_- \end{cases} \quad (35)$$

при каждом $x \in [0, l]$.

Доказательство. Доказательство по сути следует из неравенств

$$\begin{aligned}
 |G_x(z)|^2 - |\tilde{G}_x(z)|^2 &\geq |\bar{E}_0(z)|^2 - |\tilde{\bar{E}}_0(z)|^2 > 0; & (z \in \mathbb{D}_+) \\
 |\tilde{G}_x(z)|^2 - |G_x(z)|^2 &\geq |\tilde{\bar{E}}_0(z)|^2 - |\bar{E}_0(z)|^2 > 0; & (z \in \mathbb{D}_-)
 \end{aligned} \quad (36)$$

и того, что для $\bar{E}_0(z)$, $\tilde{\bar{E}}_0(z)$ имеют место (22). Нетрудно видеть, что если мера $dF_t = \alpha_t dt I_E$ скалярная то

$$\begin{aligned}
 G_x(z) &= \exp \left\{ \int_0^l \frac{e^{i\varphi_t + z} \alpha_t dt}{e^{i\varphi_t - z}} \right\} \cdot \bar{E}_0(z); \\
 \tilde{G}_x(z) &= \exp \left\{ \int_0^l \frac{z + e^{i\varphi_t}}{z - e^{i\varphi_t}} \alpha_t dt \right\} \cdot \tilde{\bar{E}}_0(z).
 \end{aligned} \quad (37)$$

Для того, чтобы выяснить как оператор T_c^* (25) будет действовать на $\tilde{L}_x(z)$, рассмотрим очевидное неравенство

$$\tilde{L}_x(z) = (I - zT_c^*)^{-1} \bar{R}_0(z) \Phi_x, \quad (38)$$

тогда, в силу очевидного тождества $zT_c^*(I - zT_c^*)^{-1} = (I - zT_c^*)^{-1} - I$, будем иметь, что

$$T_c^* \tilde{L}_x(z) = \frac{1}{z} \left\{ \tilde{L}_x(z) - \bar{R}_0(z) \Phi_x \right\}. \quad (39)$$

IV. Из задач Коши для $N_x(z)$ (15) и $\tilde{N}_x(z)$ (29) следует, что

$$\frac{d}{dx} N_x(z) \tilde{N}_x^*(w) = 2e^{-i\varphi_x} \frac{z - \bar{w}}{(e^{-i\varphi_x} - z)(e^{-i\varphi_x} - \bar{w})} N_x(z) J_s a_x \tilde{N}_x^*(w),$$

поэтому справедливо равенство

$$N_x(z)\tilde{N}_x^*(w) - N_y(z)\tilde{N}_y^*(w) = 2(z - \bar{w}) \int_y^x M_t(z) dF_t \tilde{M}_t^*(w)$$

при $z \in \mathbb{C}_\varphi$ (17) и $w \in \tilde{\mathbb{C}}_\varphi$ (31), когда $0 \leq y \leq x \leq l$. А учитывая начальные данные задач Коши (15) и (29) мы получим, что

$$N_0(z) - \tilde{N}_l^*(w) = 2(\bar{w} - z) \int_0^l M_t(z) dF_t \tilde{M}_t^*(w). \quad (40)$$

Умножая данное равенство слева на вектор-строку [1,1], а справа на вектор-строку $\bar{R}_0^*(w)$ (26) мы получим, что

$$K^3(z, w) = \frac{E_0(z)E_0(\bar{w}) - \tilde{E}_0(z)\tilde{E}_0(\bar{w}) + \overline{G_l(w)} + \tilde{G}_l(w)}{z - \bar{w}} = 2 \int_0^l L_t(z) dF_t \tilde{L}_t^*(w) \quad (41)$$

и значит при $z = \bar{w}$ мы имеем,

$$(\tilde{E}_0(\bar{w}))^2 - (E_0(\bar{w}))^2 = \overline{G_l(w)} + \tilde{G}_l(w) \quad (42)$$

при $w \in \tilde{\mathbb{C}}_\varphi$ (31).

Используя теперь $K_x^1(z, w)$ (20), $K_x^2(z, w)$ (34) и ядро $K_x^3(z, w)$ (41) определим матричное ядро,

$$K(z, w) = \begin{bmatrix} K_0^1(z, w) & K^3(z, w) \\ K^3(w, z) & K_l^2(z, w) \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Очевидно, что ядро $K(z, w)$ (43) является эрмитово-положительным, так как

$$K(z, w) = 2 \int_0^l \begin{bmatrix} L_t(z) \\ \tilde{L}_t(z) \end{bmatrix} dF_t [L_t^*(w); \tilde{L}_t^*(w)] \quad (44)$$

при $z, w \in \mathbb{C}_\varphi \cap \tilde{\mathbb{C}}_\varphi$, конечно каждый из блоков ядра $K(z, w)$ (43) имеет голоморфное продолжение в соответствующую область в $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

V. Каждой функции $f(t)$ из $L_{2,l}^2(F_t)$ сопоставим при помощи отображения \mathcal{B}_φ вектор-функцию $F(z)$,

$$\mathcal{B}_\varphi f(t) = F(z) = [F_1(z); F_2(z)] \quad (45)$$

где компоненты $F_k(z)$, ($k = 1, 2$) задаются формулами

$$F_1(z) = \int_0^l f(t) dF_t L_t^*(\bar{z}); \quad F_2(z) = \int_0^l f(t) dF_t \tilde{L}_t^*(\bar{z}); \quad (46)$$

и являются соответственно голоморфными функциями в \tilde{C}_φ (31) для $F_1(z)$ и собственно в C_φ (17) для $F_2(z)$.

Определение 1 Гильбертовым пространством Л. де Бранжа $B(E, G)$ назовём пространство, которое образуют вектор-функции $F(z) = [F_1(z); F_2(z)]$, где $F_k(z)$, $(k = 1, 2)$ имеют вид (46) причём, скалярное произведение в $B(E, G)$ индуцируется прообразом отображения B_φ (45), -

$$\langle F(z), \hat{F}(z) \rangle_{B_\varphi(E, G)} = \langle f(t), \hat{f}(t) \rangle_{L^2_{2,l}(F_t)} \quad (47)$$

причём $F(z) = B_\varphi f(t)$, $\hat{F}(z) = B_\varphi \hat{f}(t)$, где $f(t), \hat{f}(t) \in L^2_{2,l}(F_t)$.

Теорема 3. Эрмитово-положительное ядро $K(z, w)$ (43) является воспроизводящим ядром в гильбертовом пространстве $B_\varphi(E, G)$, а именно для каждой функции $F(z) \in B_\varphi(E, G)$ справедливы формулы

$$\langle F(z), e_k K(z, w) \rangle_{B_\varphi(E, G)} = F_k(w), \quad (k = 1, 2) \quad (48)$$

при любом $w \in \tilde{C}_\varphi$ для $F_1(z)$ и каждом $w \in C_\varphi$ собственно для $F_2(z)$, где $e_1 = [1; 0]$ и $e_2 = [0; 1]$.

Доказательство. Так как $L_t(\bar{w}) \in L^2_{2,l}(F_t)$ при каждом фиксированном $w \in \tilde{C}_\varphi$ то из формул (19), (20) и (41) следует, что функция от z , $B_\varphi L_t(\bar{w}) = [K_0^1(\bar{w}, \bar{z}); K^3(\bar{w}, \bar{z})] = F_{\bar{w}}(z)$ принадлежит пространству $B_\varphi(E, G)$. Поэтому в силу определения скалярного произведения (47) в $B_\varphi(E, G)$ будем иметь, что

$$\langle F(z), F_{\bar{w}}(z) \rangle_{B_\varphi(E, G)} = \langle f(t), L_t(\bar{w}) \rangle_{L^2_{2,l}(F_t)} = F_1(w).$$

Аналогичным образом функции $\tilde{L}_t(\bar{w}) \in L^2_{2,l}(F_t)$ при $w \in C_\varphi$ отображение B_φ (45) сопоставляет вектор-строку $\tilde{F}_{\bar{w}}(z) = [K^3(z, w); K^2(\bar{w}, \bar{z})] = B_\varphi \tilde{L}_t(\bar{w})$ из $B_\varphi(E, G)$.

$$\langle F(z), \tilde{F}_{\bar{w}}(z) \rangle_{B_\varphi(E, G)} = \langle f(t), \tilde{L}_t(\bar{w}) \rangle_{L^2_{2,l}(F_t)} = F_2(w).$$

Скалярное произведение в пространстве $B(E, G)$ будем искать в виде:

$$\langle F(z), G(z) \rangle_{B(E, G)} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) A(t) \overline{G(t)} dt \quad (49)$$

где весовая матрица $A(z)$ в $B_\varphi(E, G)$ неотрицательно определённая и определяется из условия того, что ядро $K(z, w)$ (48) является воспроизводящим:

$$F_1(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} (F_1(z)a(z) + F_2(z)\overline{c(z)}) \frac{\overline{E(\bar{w})}E(\bar{z}) - \overline{\tilde{E}(\bar{w})}\tilde{E}(\bar{z})}{z-w} - \\ - (F_1(z)c(z) + F_2(z)b(z)) \frac{\overline{E(\bar{w})}E(\bar{z}) - \overline{\tilde{E}(\bar{w})}\tilde{E}(\bar{z}) + G(\bar{z}) + \tilde{G}(\bar{z})}{1-w\bar{z}} dz \quad (50)$$

$$F_2(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} (F_1(z)a(z) + F_2(z)\overline{c(z)}) \frac{E(\bar{w})E(z) - \tilde{E}(\bar{w})\tilde{E}(z) + \overline{G(\bar{z})} + \tilde{G}(\bar{z})}{1 - w\bar{z}} - (F_1(z)c(z) + F_2(z)b(z)) \frac{\overline{G(\bar{w})}G(\bar{z}) - \tilde{G}(\bar{w})\tilde{G}(\bar{z}) - E(w)\overline{E(z)} + \tilde{E}(w)\overline{\tilde{E}(z)}}{z - w} dz \quad (51)$$

Необходимо ввести следующие ограничения, налагаемые на $F_1(z)$ и $F_2(z)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_1(z)}{|\tilde{E}(z)|^2} \left(\frac{\overline{E(w)} - \overline{\tilde{E}(w)} + G(\bar{z}) - \tilde{G}(\bar{z})}{1 - z\bar{w}} \right) dz = 0 \quad (52)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_2(z)}{|\tilde{G}(z)|^2} \left(\frac{E(\bar{z}) - \tilde{E}(\bar{z}) - \overline{G(w)} + \overline{\tilde{G}(w)}}{1 - z\bar{w}} \right) dz = 0 \quad (53)$$

И при этом:

$$F_1(z)a(z) + F_2(z)\overline{c(z)} = \frac{2F_1(z)}{|E(\bar{z})|^2} \quad (54)$$

$$F_1(z)c(z) + F_2(z)b(z) = \frac{2F_2(z)}{|G(\bar{z})|^2} \quad (55)$$

Тогда соответствующие интегралы по формуле коши получаем необходимый нам результат:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{2F_1(z)}{|E(\bar{z})|} \frac{\overline{E(\bar{w})}E(\bar{z}) - \tilde{E}(\bar{w})\tilde{E}(\bar{z})}{z - w} dz = F_1(z)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{2F_2(z)}{|G(\bar{z})|} \frac{\overline{G(\bar{w})}G(\bar{z}) - \tilde{G}(\bar{w})\tilde{G}(\bar{z})}{z - w} dz = F_2(z)$$

И из условия неотрицательной определённости весовой матрицы и условий (54) и (55) приходим к следующему утверждению:

Теорема 4. *Весовая функция в гильбертовом пространстве Л. де Бранжа $\mathcal{B}(E, G)$ имеет вид:*

$$A(z) = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{|E(\bar{z})|^2} & \frac{1}{\overline{E(\bar{z})}G(\bar{z})} \\ \frac{1}{E(\bar{z})\overline{G(\bar{z})}} & \frac{1}{|G(\bar{z})|^2} \end{array} \right]. \quad (56)$$

причём существуют ограничения налагаемые на функции $F_1(z), F_2(z)$ (52)-(55).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лившиц М.С., Янцевич А.А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. — Харьков, Изд. Харьк. ун-та, 1971. — 160 с.
2. Золотарёв В.А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряжённых и неунитарных операторов. — Харьков, ХНУ, 2003. — 342 с.
3. De Branges L. Hilbert spaces of entire functions. — Prentice-Hall, London, 1968, — 326 с.
4. Лившиц М.С. Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве // Матем. сборник. — 1946. — 19. 61:2 — 236-260 с.
5. Надь Б.С., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. — Москва, Мир, 1970. — 431 с.

Функция Йессена субгармонических почти периодических функций

А.В. Рахнин

Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина, Украина

Для субгармонической почти периодической функции $u(z)$ вводится аналог функции Йессена и изучается связь этой функции с асимптотическими свойствами функции $u(z)$.

2000 Mathematics Subject Classification 42A75, 31A05.

Как было показано в [1], [2] (см. также [7], с. 355-361), для голоморфной почти периодической функции $f(z)$ в полосе $S_{(a,b)} = \{z = x + iy : a < y < b\}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ существует величина

$$J(y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \log |f(x + iy)| dx,$$

которая непрерывно зависит от $y \in (a, b)$ и выпукла; эта функция тесно связана с асимптотическими свойствами самой функции $f(z)$. Так, во всех точках $y \in (a, b)$, где существует $J'(y)$, существует среднее движение

$$c_f(y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\arg f(T + iy) - \arg f(-T + iy)}{2T},$$

при этом

$$c_f(y) = -J'(y) \quad (1)$$

Кроме того, для всех $\alpha, \beta \in (a, b)$, в которых существуют $J'(\alpha)$ и $J'(\beta)$ выполняется соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\text{число нулей } f(z) \text{ в прямоугольнике } (-T, T) \times (\alpha, \beta)}{2T} = J'(\beta) - J'(\alpha) \quad (2)$$

При этом полоса $S_{(\alpha, \beta)}$ не содержит нулей функции $f(z)$, тогда и только тогда, когда $J(y)$ линейна на (α, β) .

В [3] последние два утверждения были распространены на голоморфные почти периодические функции многих переменных; они были получены как следствие того, что функция $J(y)$ (которая здесь впервые была названа функцией Йессена) является пределом в смысле теории распределений функции $\log |f(tx + iy)|$ при $t \rightarrow \infty$.

Рассмотрим теперь почти периодическую функцию $f(z)$ на вещественной оси \mathbb{R} с нижней гранью спектра $m > -\infty$. Эта функция непрерывно продолжается до голоморфной и почти периодической в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+ = S_{(0,+\infty)}$ функции, имеющей там экспоненциальный тип $\sigma = -m$ (см. [2], а также [7], с. 344). Заметим, что существование голоморфного продолжения с конечным экспоненциальным типом является и достаточным условием того, что спектр функции ограничен снизу.

Далее, если нижняя грань m принадлежит спектру, то нули функции f лежат в полосе конечной ширины и при достаточно больших y среднее движение $c_f(y)$ постоянно и равно m . Если же m не принадлежит спектру, то в [6] (см. также [7], с. 361-370) было доказано соотношение

$$m = \lim_{y \rightarrow +\infty} c_f(y) \quad (3)$$

Объединяя равенства $\sigma = -m$, (1), (3) и пользуясь выпуклостью функции $J(y)$, приходим к соотношению

$$\sigma = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{J(y)}{y} \quad (4)$$

при этом по теореме Фрагмена-Линделефа¹, здесь σ можно заменить на индикатор f в направлении $\theta = \pi/2$.

Заметим, что в то время как равенства $\sigma = -m$ и (1) достаточно легко проверяются, соотношение (3) весьма нетривиально, в частности, оно использует некоторые факты теории функций вполне регулярного роста.

В нашей работе вводится аналог функции Йессена для субгармонической почти периодической функции в полосе и находится связь между риссовской мерой субгармонической функции и производной функции Йессена, т.е. субгармонический аналог соотношения (2).

Ввиду того, что субгармоническая функция вещественнозначна, для нее не существует аналога среднего движения и она не является голоморфной функцией в полосе, так что ее спектр неограничен. Таким образом, для субгармонической почти периодической функции отсутствует аналог соотношения (3). В нашей работе для субгармонических почти периодических функций

¹Любая голоморфная в \mathbb{C}^+ и непрерывная в $\overline{\mathbb{C}^+}$ функция $f(z)$, которая ограничена на \mathbb{R} и для которой $\log^+ |f(z)| = O(|z|)$, удовлетворяет в \mathbb{C}^+ неравенству $\log |f(z)| \leq \sup_{\mathbb{R}} \log |f(x)| + y \limsup_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \log |f(it)|$ (см. [11], с. 28); доказательство почти без изменений переносится на субгармонические функции в \mathbb{C}^+

в верхней полуплоскости, имеющих рост не выше линейного, получено короткое доказательство соотношения (4) использующее, по существу, лишь представление Рисса для субгармонической функции, свойства среднего значения и принцип максимума. Отсюда вытекает новое доказательство соотношения (4) для голоморфных почти периодических функций, которое не использует теорию функций вполне регулярного роста.

Определение 1. (см., напр., [8]) *Непрерывная на \mathbb{R} функция $f(t)$ называется почти периодической, если множество ε -почти периодов*

$$E_\varepsilon(f) = \left\{ \tau \in \mathbb{R} : \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t + \tau) - f(t)| < \varepsilon \right\}$$

является относительно плотным, т.е. существует такое $L(\varepsilon) > 0$, что для любого $a \in \mathbb{R}$

$$E_\varepsilon(f) \cap (a, a + L) \neq \emptyset.$$

Определение 2. *Обобщенная функция f в горизонтальной полосе $S_{(a,b)}$ называется почти периодической в смысле теории распределений, если для любой непрерывной финитной бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(z)$ в $S_{(a,b)}$ свертка $(f * \varphi)(z)$ является почти периодической функцией переменного $x \in \mathbb{R}$. (см. [9])*

Заметим, что если f — обобщенная почти периодическая функция, то и все ее производные являются обобщенными почти периодическими функциями.

Определение 3. *Субгармоническая функция $u(z)$ называется почти периодической в полосе $S_{(a,b)}$, если она почти периодическая как регулярная обобщенная функция.*

Определение 4. *Выражение*

$$J_u(y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t + iy) dt \tag{5}$$

назовем функцией Йессена для субгармонической почти периодической функции $u(z)$.

Отметим, что функция $J_u(y)$ является нулевым коэффициентом Фурье-Бора функции $u(z)$, и, как было показано в работе [10], является непрерывной по y . Кроме того, как отмечено в [4], теорема 1.10, $J_u(y)$ не изменится при замене функции $u(t + iy)$ в (5) на $u(x + t + iy)$ с произвольным $x \in \mathbb{R}$.

Покажем, что функция $J_u(y)$ является выпуклой, как и классическая функций Йессена. Заметим, что, согласно [9], субгармоническая почти периодическая функция $u(z)$ ограничена сверху в любой подполосе $S_{(\alpha,\beta)}$,

$a < \alpha < \beta < b$, поэтому по лемме Фату для $z \in S_{(\alpha, \beta)}$ и достаточно малых ρ функция

$$\tilde{J}_u(z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(z+t) dt$$

удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{J}_u(z + \rho e^{i\varphi}) d\varphi &\geq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + \rho e^{i\varphi} + t) d\varphi dt \geq \\ &\geq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(z+t) dt = \tilde{J}_u(z). \end{aligned}$$

Таким образом, $\tilde{J}_u(z)$ – субгармоническая функция, а так как она не зависит от $x \in \mathbb{R}$, то функция $J_u(y) = \tilde{J}_u(iy)$ является выпуклой, а производная $\frac{\partial^2 J_u}{\partial y^2}$ в смысле теории распределений есть неотрицательная мера на (a, b) , которую будем обозначать через ν .

Далее, пусть $\mu = (2\pi)^{-1} \Delta u$ – риссовская мера субгармонической функции $u(z)$. Заметим, что в случае когда $u(z) = \log |f(z)|$, где $f(z)$ – голоморфная функция, ее риссовская мера является суммой мер Дирака, сосредоточенных в корнях функции $f(z)$.

Теорема 1 Пусть $u(z)$ – субгармоническая почти периодическая функция в полосе $S_{(a,b)}$. Тогда для любых α, β таких, что $a < \alpha < \beta < b$ и мера ν не сосредоточена в точках α и β ,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mu((-T+t, T+t) \times (\alpha, \beta))}{2T} = \frac{1}{2\pi} (J'_u(\beta) - J'_u(\alpha))$$

равномерно по $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство.

Рассмотрим меру $\mu_T(x, y)$, определяемую равенством

$$\mu_T(E) = \frac{1}{T} \mu\{(x, y) : (x/T, y) \in E\}.$$

Для бесконечно дифференцируемой финитной в $S_{(a,b)}$ функции $\varphi(x, y)$ имеем

$$\begin{aligned} 2\pi \int \varphi(x, y) d\mu_T(x, y) &= \frac{2\pi}{T} \int \varphi\left(\frac{x}{T}, y\right) d\mu(x, y) \\ &= \frac{1}{T} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y), \varphi\left(\frac{x}{T}, y\right) \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial^2 u(Tx, y)}{\partial x^2}, \varphi(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^2 u(Tx, y)}{\partial y^2}, \varphi(x, y) \right),$$

где производные u понимаются в смысле теории распределений. С другой стороны, по Теореме 1.11 работы [4] имеем при $T \rightarrow \infty$ равномерно относительно сдвига вдоль вещественной оси

$$u(Tx + iy) \rightarrow J_u(y) \text{ в } D'(S_{(a,b)})$$

и, следовательно, при $T \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial^2 u(Tx, y)}{\partial x^2} \rightarrow 0,$$

$$\frac{\partial^2 u(Tx, y)}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial^2 J_u(y)}{\partial y^2}.$$

Поэтому меры $2\pi\mu_T(x, y)$ слабо сходятся к мере $m \otimes \nu$, где m - мера Лебега на \mathbb{R} , причем равномерно относительно сдвига вдоль вещественной оси.

Далее, так как мера ν не сосредоточена в точках α и β , то мера $2\pi\mu_T(x, y)$ прямоугольника $(-1, 1) \times (\alpha, \beta)$ сходится к мере $m \otimes \nu$ этого прямоугольника (соответствующее утверждение о свойствах слабой сходимости мер см. напр. [5], с. 34). Кроме того, существуют $J'_u(\alpha)$, $J'_u(\beta)$ и при этом $\nu((\alpha, \beta)) = J'_u(\beta) - J'_u(\alpha)$. Таким образом,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi\mu(\{x + iy \in \mathbb{C} : |x| < T, \alpha < y < \beta\})}{T} = 2(J'_u(\beta) - J'_u(\alpha)).$$

причем сходимости равномерная относительно сдвига вдоль вещественной оси. ■

Теорема 2 Пусть $u(z)$ - субгармоническая почти периодическая функция в полосе $S_{(a,b)}$. Тогда в полосе $S_{(\alpha,\beta)}$, $a < \alpha < \beta < b$, нет масс Рисса функции $u(z)$ тогда и только тогда, когда $J_u(y)$ линейна на (α, β) .

Доказательство. Если в полосе $S_{(\alpha,\beta)}$ нет масс Рисса функции $u(z)$, тогда по Теореме 1 получим, что мера ν нулевая на (α, β) , откуда следует, что $J_u(y)$ - линейна на (α, β) .

Обратно, предположим противное, т.е. существуют $\varepsilon_0 > 0$ и шар $B(z_0, 2\delta) \subset S_{(\alpha,\beta)}$ такой, что $\mu(B(z_0, \delta)) > 2\varepsilon_0$. Так как функция u - почти периодическая в смысле распределений, то её мера Рисса также является почти периодической. Рассмотрим непрерывную финитную в $S_{(\alpha,\beta)}$ функцию $\varphi(z)$ такую, что $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(z) = 0$ при $z \notin B(z_0, 2\delta)$ и $\varphi(z) = 1$ при $z \in B(z_0, \delta)$. Функция

$$\psi(t) = \int \varphi(z + t) d\mu(z)$$

является почти периодической по t и $\psi(0) \geq 2\varepsilon_0$. Следовательно, существует число $L = L(\varepsilon_0)$ такое, что на любом интервале $(a, a + L)$ в некоторой точке t_a этого интервала выполняется неравенство $\psi(t_a) \geq \varepsilon_0$ и поэтому $\mu(B(z_0 - t_a, 2\delta)) \geq \varepsilon_0$. В частности, для любого $n \in \mathbb{Z}$

$$\mu([n(L + 4\delta), (n + 1)(L + 4\delta)] \times (y_0 - 2\delta, y_0 + 2\delta)) \geq \varepsilon_0$$

и для $n \in \mathbb{N}$

$$\mu([-N(L + 4\delta), N(L + 4\delta)] \times (\alpha, \beta)) \geq 2N\varepsilon_0$$

что противоречит Теореме 1. ■

Определение 5. Через σ^+ (σ^-) будем обозначать индикатор субгармонической функции $u(z)$, $z \in \mathbb{C}^+$ (или, соответственно, $z \in \mathbb{C}^-$) в направлении $\theta = \pm\pi/2$, т.е.

$$\sigma^\pm = \limsup_{y \rightarrow +\infty} \frac{u(\pm iy)}{y}.$$

Теорема 3 Пусть $v(z)$ – субгармоническая почти периодическая функция в \mathbb{C}^+ такая, что $\max\{v(z); 0\} = O(|z|)$ при $|z| \rightarrow +\infty$. Тогда

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{J_v(y)}{y} = \sigma^+.$$

Доказательство.

Как показано в [9], субгармоническая почти периодическая функция ограничена сверху в любой подполосе $S_{(\alpha, \beta)}$, $0 < \alpha < \beta < +\infty$, поэтому для любого достаточно малого $\delta > 0$ конечен $\sup_{x \in \mathbb{R}} v(x + i\delta)$.

Положим

$$u(z) = v(z + 2i\delta) - \sigma^+(y + \delta) - \sup_{x \in \mathbb{R}} v(x + i\delta).$$

Применяя цитированную выше теорему Фрагмена-Линделефа к функции $u(z - \delta)$, получаем что $u(z) \leq 0$ при $y \geq -\delta$.

Вычисляя ее среднее значение, приходим к равенству

$$J_u(y) = J_v(y + 2\delta) - \sigma^+(y + \delta) - \sup_{x \in \mathbb{R}} v(x + i\delta). \quad (6)$$

Далее, для $0 < r < R$, $t \in \mathbb{R}$ имеем, используя формулу Пуассона для круга $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - t - iR| \leq R\}$

$$\frac{u(t + ir)}{r} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(t + iR + Re^{i\psi}) \frac{R^2 - (R-r)^2}{R^2 - 2R(R-r)\cos(-\pi/2 - \psi) + (R-r)^2} d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t + iR + Re^{i\psi}) \frac{2R-r}{2R(R-r)(1 + \sin(\psi)) + r^2} d\psi \\ &\leq \frac{1}{2\pi R} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} u(t + iR + Re^{i\psi}) \frac{2R-r}{2(R-r)(1 + \sin(\psi)) + 4R} d\psi \\ &\leq \frac{1}{16R} \sup_{\psi \in [\pi/4; 3\pi/4]} u(t + iR + Re^{i\psi}) \\ &< \frac{1}{16R} \sup_{\psi \in [0; 2\pi]} u(t + 2iR + Re^{i\psi}). \end{aligned}$$

Последнее неравенство является следствием принципа максимума, так как дуга $\{t + iR + Re^{i\psi}, \pi/4 < \psi < 3\pi/4\}$ содержится в круге $\{z : |z - t - 2iR| < R\}$

Далее, функция $u(z)$ полунепрерывна сверху, поэтому существует точка $z_0 \in \{z : |z - t - 2iR| = R\}$ такая, что

$$\sup_{\psi \in [0; 2\pi]} u(t + 2iR + Re^{i\psi}) = u(z_0).$$

Используя отрицательность функции $u(z)$ и свойства среднего для субгармонической функции, имеем

$$\begin{aligned} u(z_0) &\leq \frac{1}{\pi R^2} \int_{B(z_0, R)} u(x + iy) dx dy \\ &\leq \frac{1}{4\pi(R/2)^2} \int_{B((t+2iR+z_0)/2, R/2)} u(x + iy) dx dy \\ &\leq \frac{1}{4\pi R^2} \int_{B((t+2iR+z_0)/2, R)} u(x + iy) dx dy \\ &\leq \frac{1}{16\pi(R/2)^2} \int_{B(t+2iR, R/2)} u(x + iy) dx dy \\ &\leq \frac{1}{16\pi R^2} \int_{B(t+2iR, R)} u(x + iy) dx dy = \frac{1}{16\pi} \int_{B(t/R+2i, 1)} u(Rz) dx dy. \end{aligned}$$

Таким образом, для произвольных $0 < r < R, t \in \mathbb{R}$, имеем

$$256\pi \frac{u(t + ir)}{r} < \int_{B(t/R+2i, 1)} u_R(z) dx dy, \tag{7}$$

где $u_R(z) = u(Rz)/R$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{u(iy)}{y} = 0,$$

то существует значение $r > 2\delta$, для которого

$$\frac{u(ir)}{r} > -\varepsilon.$$

Далее, положим $u^\delta = u * \varphi_\delta$, где $\varphi_\delta(z) = \delta^{-2}\alpha(|z|/\delta)$, а $\alpha(t)$ – гладкая бесконечно дифференцируемая функция на вещественной оси такая, что $\alpha \geq 0$, $\alpha(t) = 0$ при $t \in (-\infty, 0] \cup [1/2, +\infty)$ и $2\pi \int_0^1 \alpha(t)tdt = 1$. Заметим, что $u^\delta \geq u$, следовательно,

$$-\varepsilon r < u^\delta(ir).$$

Из определения субгармонической почти периодической функции следует, что функция $u^\delta(z)$ является равномерной почти периодической на прямой $\text{Im}z = r$, поэтому существует относительно плотное множество ε -почти периодов

$$E_{\varepsilon r}(u^\delta) = \{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t \in \mathbb{R}} |u^\delta(\tau + t + ir) - u^\delta(t + ir)| < \varepsilon r\}$$

такое, что для некоторого $L = L(\varepsilon, r) > 3\delta$,

$$E_{\varepsilon r}(u^\delta) \cap [a, a + L] \neq \emptyset,$$

для всех $a \in \mathbb{R}$.

Выберем $\tau_n \in E_{\varepsilon r}(u^\delta) \cap [nL, (n+1)L]$, $n \in \mathbb{Z}$, и $\tau_0 = 0$ так, что выполняется неравенство

$$-2\varepsilon r < u^\delta(\tau_n + ir). \quad (8)$$

Предположим, что для любой точки $z \in B(\tau_n + ir, \delta)$ при некотором n имеем $u(z) \leq -2\varepsilon r$. Из определения функции u^δ следует формула

$$u^\delta(z) = \int_0^1 \alpha(t)t \int_0^{2\pi} u(z + t\delta e^{i\theta})d\theta dt \leq -2\varepsilon r,$$

что противоречит (8). Поэтому каждый круг $B(\tau_n + ir, \delta)$ содержит точку $z_n = x_n + iy_n$ такую, что

$$-2\varepsilon r < u(x_n + iy_n)$$

Следовательно,

$$-4\varepsilon < -2\varepsilon \frac{r}{r - \delta} < \frac{u(x_n + iy_n)}{y_n}.$$

Далее из множества $\{x_n\}$ выберем подпоследовательность и перенумеруем ее так, что $x_n \in (3nL, 3(n+1)L)$, $n \in \mathbb{Z}$. Выберем $R > \max\{9L, r + \delta\}$. Используя неравенство (7) с $t = x_n$ и $r = y_n$, имеем

$$-1024\pi\varepsilon < \int_{B(x_n/R+2i,1)} u_R(z) dx dy.$$

Заметим, что если функция $u(z)$ является субгармонической почти периодической функцией, то $u_R(z)$ также является субгармонической почти периодической функцией для любого $R > 0$, а функции Йессена функций $u(z)$ и $u_R(z)$ связаны следующим образом

$$\begin{aligned} J_{u_R}(y) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u_R(x + iy) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{u(Rx + iRy)}{R} dx \\ &= \frac{1}{R} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2TR} \int_{-TR}^{TR} u(x + iRy) dx = \frac{J_u(Ry)}{R}. \end{aligned}$$

Далее, так как функция $J_{u_R}(y)$ выпукла и не положительна на $(0, +\infty)$, то она монотонно не возрастает, поэтому

$$J_{u_R}(3/2) > \int_{3/2}^{5/2} J_{u_R}(y) dy.$$

Функция u_R — отрицательна, поэтому по лемме Фату и теореме Фубини

$$\begin{aligned} \int_{3/2}^{5/2} J_{u_R}(y) dy &= \int_{3/2}^{5/2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u_R(x + iy) dx dy \geq \\ &\geq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{[-T,T] \times [3/2,5/2]} u_R(x + iy) dx dy \end{aligned}$$

Далее, найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, зависящая от R , такая, что $[k, k + 1] \times [3/2, 5/2] \subset B(x_{n_k}/R + 2i, 1)$, следовательно

$$\begin{aligned} &\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{[-T,T] \times [3/2,5/2]} u_R(x + iy) dx dy \\ &\geq \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} \sum_{k=-l}^{l-1} \int_{[k,k+1] \times [3/2,5/2]} u_R(z) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} \sum_{k=-l}^{l-1} \int_{B(x_{n_k}/R+2i,1)} u_R(z) dx dy \\ &\geq -1024\pi\varepsilon \end{aligned}$$

Таким образом,

$$0 \geq \frac{J_u(3R/2)}{R} \geq -1024\pi\varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует равенство $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{J_u(y)}{y} = 0$. Утверждение теоремы теперь следует из (6). ■

Заметим, что аналогичное Теореме 3 утверждение имеет место и для субгармонических функций в нижней полуплоскости. Поэтому для субгармонической функции в \mathbb{C} из Теоремы 1 и 3 и равенства

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} J'_u(y) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{J_u(y)}{y}$$

вытекает

Теорема 4 Пусть $u(z)$ - субгармоническая почти периодическая функция в \mathbb{C} такая, что $\max\{u(z); 0\} = O(|z|)$, при $|z| \rightarrow +\infty$. Тогда равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mu((-T+t, T+t) \times (-N, N))}{2T} = \frac{1}{2\pi} (\sigma^+ - \sigma^-).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Jessen. Über die Nullstellen einer analytischen fastperiodischen Funktion. Eine Verallgemeinerung der Jensenschen Formel. // Math. Ann., - 1933. - 108. - P. 485-516.
2. В. Jessen, Н. Tornehave. Mean Motions And Zeroes of Almost Periodic Functions. // Acta Math., - 1945. - 77: 3-4.
3. Ронкин Л.И. Теоремы Йессена для голоморфных почти периодических функции в трубчатых областях. // Сиб. мат. ж., - 1985. - 28, №3 - С. 199-204.
4. Ронкин Л.И. Почти периодические обобщенные функции и дивизоры в трубчатых областях. // Записки науч. семинаров ПОМИ., - 1997. - 247. - С. 210-236.
5. Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных. - М.: Наука, - 1971.

6. Левин Б.Я., О веховой константе голоморфной почти периодической функции. // ДАН СССР, - 1941. - **33**. - С. 182-184.
7. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. - М.: Гостехиздат, - 1956. - 536 с.
8. C. Corduneanu, Almost Periodic Functions. - New York: J. Wiley and Sons, - 1968.
9. S.Yu. Favorov, A.Yu. Rashkovskii, A.I. Ronkin. Almost periodic divisors in a strip. // J. Anal. Math. - 1998. - **74**. - P. 325-345.
10. A.V. Rakhnin, S. Yu. Favorov, Subharmonic almost periodic functions. //Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry -2005.- N 2 - v. 1 - P. 209-224
11. P. Koosis. The logarithm integral Vol. 1. - Cambridge University Press - 1988. 622 p.

Численно аналитический метод для спектрального анализа электромагнитного поля в плоском резонаторе

И. В. Митина

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Украина

В работе предложен численно аналитический метод спектрального анализа электромагнитного поля в плоском резонаторе. Метод обеспечивает быструю сходимость и высокую точность в случае гладких границ резонатора. Затронут вопрос о побочных эффектах метода потенциалов, приводящих к появлению паразитных частот в спектре. Проведен анализ результатов численных экспериментов, иллюстрирующих возможности предложенной методики.

2000 Mathematics Subject Classification 45F99.

1. Вывод граничного интегрального уравнения

Плоским резонатором назовем прямой цилиндр бесконечной длины с осью параллельной e_3 и поперечным сечением Ω . В случае, когда поля E и H не зависят от координаты z , рассмотрение задачи переносится на плоскость (e_1, e_2) . нас будет интересовать случай H -поляризации.

H -поляризованное поле квазистационарного типа полностью определяется единственной отличной от нуля компонентой вектора напряженности магнитного поля $H_3(t, x) = e^{i\omega t} \cdot U(x)$, где $U(x)$ является решением второй краевой задачи для уравнения Гельмгольца

$$\begin{cases} -\Delta U(x) = \kappa^2 U(x), & x \in \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n(x)} U(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

где $\kappa = \omega/c$, c — скорость света в вакууме, $n(x)$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке x . Решить спектральную задачу для плоского резонатора означает найти все пары $\{\kappa, U(x)\}$, где $U(x)$ — нетривиальное решение (1).

При заданных условиях на формирование поля влияет только форма стенок резонатора. Оказывается возможным понизить размерность задачи. Воспользовавшись фундаментальным решением для оператора Гельмгольца —

функцией Неймана $Y_0(\kappa|x-y|)$ и третьей формулой Грина устанавливается что решение задачи (1) представимо в виде потенциала двойного слоя

$$U(x) = \frac{1}{4} \int_{\Omega} U(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} Y_0(\kappa|x-y|) dS_y \quad x \in \Omega. \quad (2)$$

При этом $U(y)$ удовлетворяет такому гиперсингулярному интегральному уравнению

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} U(y) \frac{\partial^2 Y_0(\kappa|x_\varepsilon - y|)}{\partial n(x) \partial n(y)} dS_y = 0, \quad (3)$$

где $x_\varepsilon = x - \varepsilon \cdot n(x)$, $x \in \partial\Omega$. Несложно показать, что если для некоторого κ краевая задача (1) имеет нетривиальное решение, то при том же κ задача (3) также имеет нетривиальное решение. Это позволяет задачу (1) заменить задачей (3). При этом, под решением задачи (3) подразумеваются пары $\{\kappa, U(y)\}$, где $U(y)$ — нетривиальное решение уравнения (3), которое, будучи подставленным в качестве плотности в потенциал двойного слоя (2), даст отличную от тождественного нуля в области Ω функцию.

Если отбросить требование нетривиальности соответствующего потенциала, то переход от (1) к (3) не будет эквивалентным, поскольку спектр задачи (3) оказывается более широким множеством и помимо спектра задачи (1) содержит также т.н. паразитные спектральные числа. Условие нетривиальности потенциала двойного слоя служит своеобразным фильтром, позволяя отсеивать все паразитные значения.

Чтобы понять, откуда появляются паразитные числа, рассмотрим случай, когда область Ω — есть круг, радиуса R_0 . Тогда, наряду со множеством спектральных значений внутренней краевой задачи (1) для круга — $\sigma(\Omega) = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \{\kappa : J'_n(\kappa R_0) = 0\}$ спектр задачи (3) будет содержать также спектральные значения внешней краевой задачи (1) для внешности круга — $\sigma(C\bar{\Omega}) = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \{\kappa : Y'_n(\kappa R_0) = 0\}$. Доказательство этого факта основано на теоремах о поведении нормальной производной логарифмического потенциала двойного слоя и непрерывности логарифмического потенциала простого слоя [4], а также на возможности интегрального представления типа (2) для решений вида $Y_n(\kappa r) e^{in\varphi}$ внешней задачи (с условием убывания на бесконечности). Множество $\sigma(C\bar{\Omega}) \setminus \sigma(\Omega)$ представляет собой множество паразитных спектральных значений.

Оставляя пока тему паразитных чисел, переходим к описанию симметрии задачи. Рассматриваем случай, когда область Ω обладает свойством симметрии:

$$P_\alpha \Omega = \Omega, \quad (4)$$

где P_α — оператор поворота на угол $\alpha = 2\pi/N$ против часовой стрелки (N — натуральное число). На рисунке 1 для случая $N = 6$ приведен пример плоского резонатора — область, заключенная между окружностью и волнистой замкнутой кривой.

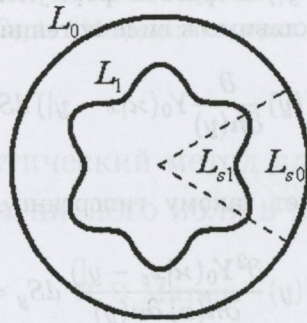


Рис. 1: Пример плоского резонатора

Вводя унитарный оператор T , действие которого на функцию в области Ω определяется по формуле $TU(x) = U(P_\alpha x)$, можно показать, что любое решение спектральной задачи (1) представляется в виде суммы собственных функций оператора T , удовлетворяющих (1). Поэтому, для областей Ω , обладающих симметрией (4), спектральную задачу можно сформулировать так: для каждого $m = 0, \dots, N-1$ найти значения k_m , для которых существуют нетривиальные решения U_m краевой задачи (1), удовлетворяющие условию квазипериодичности $TU_m(x) = \lambda_m U_m(x)$, $\lambda_m = e^{im\alpha}$, и сами эти решения. Тогда уравнение (3) достаточно рассмотреть для $x \in L_s$, где L_s — часть $\partial\Omega$ такая, что $\partial\Omega = \bigcup_{j=0}^{N-1} P_{\alpha^j} L_s$, поскольку

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} U_m(y) \frac{\partial^2 Y_0(\kappa |P_\alpha x_\varepsilon - y|)}{\partial n(P_\alpha x) \partial n(y)} dS_y = e^{im\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} U_m(y) \frac{\partial^2 Y_0(\kappa |x_\varepsilon - y|)}{\partial n(x) \partial n(y)} dS_y$$

2. Параметризация интегрального уравнения с сильной особенностью

Пусть Ω — область, заключенная между двумя гладкими замкнутыми кривыми (см. пример на рис. 1). Для определенности договоримся индексом 0 обозначать внешнюю и индексом 1 внутреннюю кривую. Рассмотрим гиперсингулярное интегральное уравнение:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} U_m(y) \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} Y_0(\kappa |x_\varepsilon - y|) dS_y = 0, \quad x \in L_s = L_{s0} \cup L_{s1}, \quad (5)$$

причем $\partial\Omega = L_0 \cup L_1$, $L_i = \bigcup_{j=0}^{N-1} P_{\alpha^j} L_{si}$, где L_i — гладкая замкнутая кривая.

Обозначим

$$F_\varepsilon(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} Y_0(\kappa |x_\varepsilon - y|).$$

Тогда при $x \neq y$

$$F_0(x, y) = -\frac{\kappa^2 Y_2(\kappa|x-y|)}{|x-y|^2} (x-y, n(x))(x-y, n(y)) + \frac{\kappa Y_1(\kappa|x-y|)}{|x-y|} (n(x), n(y)).$$

В $F_\varepsilon(x, y)$ выделим слагаемые

$$\frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \ln|x_\varepsilon - y|^2 + \frac{\kappa^2}{\pi} (n(y), n(x)) \cdot \ln \frac{\kappa|x_\varepsilon - y|}{2},$$

которые при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют особенность при $x = y$. Регулярная часть $F_0(x, y)$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ F_\varepsilon(x, y) - \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \ln|x_\varepsilon - y|^2 - \frac{\kappa^2}{\pi} \ln \frac{\kappa|x_\varepsilon - y|}{2} \right\},$$

имеет вид

$$f(x, y) = -\kappa^2 \left[Y_2(\kappa|x-y|) + \frac{4}{\pi} \frac{1}{\kappa^2|x-y|^2} \right] \frac{(x-y, n(x))(x-y, n(y))}{|x-y|^2} + \\ + \kappa^2 \left[\frac{Y_1(\kappa|x-y|)}{\kappa|x-y|} + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\kappa^2|x-y|^2} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\kappa|x-y|}{2} \right] (n(y), n(x)).$$

При обходе границы область Ω остается слева. Выбираем параметризацию замкнутого контура L_i : $x = x_i(\theta), y = x_i(\varphi)$ $\theta, \varphi \in [0, 2\pi)$. Причем положительное направление обхода контура соответствует возрастанию параметра. Кроме того нулевое значение параметра соответствует начальным (при обходе) точкам контуров Ls_i $i = 0, 1$.

В уравнении (5) особенность можно разбить на две составляющие: гиперсингулярную и логарифмическую. Для этого проведем вспомогательные преобразования. Разберем случай, когда x и y лежат на одном и том же контуре L_i . Для простоты индексы у x, y указывающие на номер контура, а также индекс у неизвестной плотности, обозначающий номер моды далее будем опускать. Для начала заметим, что справедливо следующее соотношение

$$\frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \ln|x_\varepsilon - y|^2 = -\frac{\partial^2}{\partial \tau(x) \partial \tau(y)} \ln|x_\varepsilon - y|^2. \quad (6)$$

Вспользуемся этим равенством и в следующем интеграле проинтегрируем по частям

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L_i} U(y) \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \ln|x_\varepsilon - y|^2 dS_y = \\ = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} U(\varphi) \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial}{\partial \tau(x)} \ln|x_\varepsilon - y|^2 d\varphi = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ U(\varphi) \frac{2(x-y, \tau(x))}{|x_\varepsilon - y|^2} \Big|_0^{2\pi} - \right. \\ \left. - \int_0^{2\pi} U'(\varphi) \frac{2(x-y, \tau(x))}{|x_\varepsilon - y|^2} d\varphi \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} U'(\varphi) \frac{2(x-y, \tau(x))}{|x_\varepsilon - y|^2} d\varphi.$$

В последнем равенстве мы использовали свойство замкнутости контура. Последний интеграл перепишем, введя малое положительное h :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \mathbb{U}'(\varphi) \frac{2(x-y, \tau(x))}{|x_\varepsilon - y|^2} d\varphi &= \left[\int_0^{\theta-h} + \int_{\theta+h}^{2\pi} \right] \mathbb{U}'(\varphi) \frac{2(x-y, \tau(x))}{|x-y|^2} d\varphi + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta-h}^{\theta+h} \mathbb{U}'(\varphi) \frac{2(x-y, \tau(x))}{|x_\varepsilon - y|^2} d\varphi = -\frac{1}{|x'|} \left[\int_0^{\theta-h} + \int_{\theta+h}^{2\pi} \right] \mathbb{U}'(\varphi) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} d\varphi + \\ &+ \left[\int_0^{\theta-h} + \int_{\theta+h}^{2\pi} \right] \mathbb{U}'(\varphi) \left\{ \frac{2(x-y, \tau(x))}{|x-y|^2} + \frac{1}{|x'|} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} \right\} d\varphi + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta-h}^{\theta+h} \mathbb{U}'(\varphi) \frac{2(x-y, \tau(x))}{|x_\varepsilon - y|^2} d\varphi. \quad (7) \end{aligned}$$

Поскольку далее мы будем переходить к пределу при $h \rightarrow 0$, то сразу заметим, что последний интеграл справа в полученном равенстве в пределе даст ноль. Докажем это. Снова проинтегрируем по частям и учтем, что интеграл от хорошей функции по промежутку, длина которого стремится к нулю, сам будет стремиться к нулю.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta-h}^{\theta+h} \mathbb{U}'(\varphi) \frac{2(x-y, \tau(x))}{|x_\varepsilon - y|^2} d\varphi &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\theta-h}^{\theta+h} \mathbb{U}'(\varphi) \frac{2(x-y, \tau(x) - \tau(y))}{|x-y|^2} d\varphi - \\ &- \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta-h}^{\theta+h} \frac{\mathbb{U}'(\varphi)}{|y'|} \frac{d}{d\varphi} \ln |x_\varepsilon - y|^2 d\varphi = - \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mathbb{U}'(\varphi)}{|y'|} \ln |x_\varepsilon - y|^2 \Big|_{\theta-h}^{\theta+h} - \right. \\ &\left. - \int_{\theta-h}^{\theta+h} \left(\frac{\mathbb{U}'(\varphi)}{|y'|} \right)' \ln |x_\varepsilon - y|^2 d\varphi \right\} = 0 \end{aligned}$$

Преобразуем второй интеграл справа в (7), проинтегрировав по частям и заметив, что

$$\begin{aligned} \frac{-2(\tau(y), \tau(x))|x-y|^2 + 2(x-y, \tau(x))(x-y, \tau(y))}{|x-y|^4} &= \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \tau(x) \partial \tau(y)} \ln |x-y|^2 = -\frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \ln |x-y|^2. \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned} & \left[\int_0^{\theta-h} + \int_{\theta+h}^{2\pi} \right] \mathbb{U}'(\varphi) \left\{ \frac{2(x-y, \tau(x))}{|x-y|^2} + \frac{1}{|x'|} \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\theta}{2} \right\} d\varphi = \\ & = \left[\int_0^{\theta-h} + \int_{\theta+h}^{2\pi} \right] \mathbb{U}(\varphi) \left\{ |y'| \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \ln |x-y|^2 + \frac{1}{|x'|} \frac{1}{2 \sin^2((\varphi-\theta)/2)} \right\} d\varphi + \\ & \quad + \mathbb{U}(\varphi) \left\{ \frac{2(x-y, \tau(x))}{|x-y|^2} + \frac{1}{|x'|} \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\theta}{2} \right\} \left[\int_0^{\theta-h} + \int_{\theta+h}^{2\pi} \right]. \quad (8) \end{aligned}$$

Последнее слагаемое справа при $h \rightarrow 0$ будет стремиться к нулю, поскольку выражение в скобках — 2π -периодическая и непрерывная на $[0, 2\pi)$ функция. Это легко проверить, если переписать ее в виде

$$\frac{2(x-y, \tau(x))}{|x-y|^2} + \frac{1}{|x'|} \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\theta}{2} = \frac{1}{|x-y|} \left\{ 2 \left(\frac{x-y}{|x-y|}, \tau(x) \right) + \frac{1}{|x'|} |x-y| \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\theta}{2} \right\}$$

Подынтегральная функция в первом интеграле справа в (8) также является непрерывной, поскольку

$$\begin{aligned} & |y'| \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \ln |x-y|^2 + \frac{1}{|x'|} \frac{1}{2 \sin^2((\varphi-\theta)/2)} = \\ & \frac{1}{|x'|} \left\{ -\frac{2}{(\varphi-\theta)^2} + \frac{1}{2 \sin^2((\varphi-\theta)/2)} \right\} - \\ & - 2 \left\{ |x'| \frac{1 - |x-y|^2/(|x'|^2(\varphi-\theta)^2)}{|x-y|^2} + \frac{|y'| - |x'|}{|x-y|^2} \right\} + \\ & + |y'| \left\{ 4 \frac{1}{|x-y|^2} \left(\frac{x-y}{|x-y|}, n(y) \right) \left(\frac{x-y}{|x-y|}, n(x) \right) + 2 \frac{(n(x), n(x) - n(y))}{|x-y|^2} \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, переходя к пределу при $h \rightarrow 0$ в (7) с учетом (8) и сделанных замечаний приходим к такому представлению

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L_\varepsilon} U(y) \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \ln |x_\varepsilon - y|^2 dS_y & = -\frac{1}{|x'|} \int_0^{2\pi} \mathbb{U}'(\varphi) \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\theta}{2} d\varphi + \\ & + \int_0^{2\pi} \mathbb{U}(\varphi) \left\{ |y'| \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \ln |x-y|^2 + \frac{1}{|x'|} \frac{1}{2 \sin^2((\varphi-\theta)/2)} \right\} d\varphi \end{aligned}$$

Используем это представление и в исходном уравнении (5) выделим ги-

персинулярную и логарифмическую части. Конечная СИУ запишется так:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\pi|x'_g(\theta)|} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbb{U}^{g'}(\varphi) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} d\varphi + \frac{\varkappa^2}{\pi} |x'_g(\theta)| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\varphi - \theta}{2} \right| \mathbb{U}^g(\varphi) d\varphi + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbb{U}^g(\varphi) K^g(\theta, \varphi) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbb{U}^p(\varphi) \mathbb{F}^{gp}(\theta, \varphi) d\varphi = 0, \quad \theta \in [0, \alpha] \\
 & (g, p = 0, 1) \wedge (g \neq p) \quad (9)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{F}^{gp}(\theta, \varphi) = F_0(x_g(\theta), y_p(\varphi)) \cdot |y'_p(\varphi)|, \quad \mathbb{U}^g(\varphi) = U(y_g(\varphi)); \\
 & K^g(\theta, \varphi) = f(x, y) \cdot |y'| + \left\{ \frac{\varkappa^2}{\pi} (n(x), n(y)) |y'| \ln \frac{\varkappa|x-y|}{2} - \frac{\varkappa^2}{\pi} |x'| \ln \left| \sin \frac{\varphi - \theta}{2} \right| \right\} + \\
 & + \left\{ \frac{|y'|}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \ln |x-y|^2 + \frac{1}{\pi|x'|} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\varphi - \theta}{2}} \right\} \quad x = x_g(\theta), y = x_g(\varphi).
 \end{aligned}$$

3. Дискретная математическая модель

Дискретизацию уравнения (9) будем проводить аппроксимируя подынтегральные функции тригонометрическими полиномами.

Для начала построим тригонометрический интерполяционный полином для неизвестной плотности. Свойство квазипериодичности в новых обозначениях запишется так:

$$\mathbb{U}^g(\varphi + \alpha) = e^{im\alpha T_{g1}} \mathbb{U}^g(\varphi),$$

где коэффициент T_{g1} равняется единице при $g = 0$ и минус единице при $g = 1$. Коэффициент T_{g1} вводится из-за различия в направлении возрастания параметра на нулевом и первом контуре (а квазипериодичность ранее была записана в терминах оператора поворота против часовой стрелки).

Введем новую функцию

$$W^g(\varphi) = e^{-imT_{g1}\varphi/N} \mathbb{U}^g(\varphi/N). \quad (10)$$

Нетрудно проверить, что эта функция будет периодической с периодом 2π . Построим для нее стандартным способом тригонометрический интерполяционный полином с нечетным числом узлов

$$W_{n_g}^g(\varphi) = \frac{1}{2n_g + 1} \sum_{k=0}^{2n_g} W^g\left(\frac{2k\pi}{2n_g + 1}\right) \sum_{f=-n_g}^{n_g} e^{if(\varphi - 2k\pi/(2n_g + 1))}.$$

Тогда возвращаясь снова к плотности (формула (10)), запишем интерполяционный полином для функции \mathbb{U}

$$\mathbb{U}_{n_g}^g(\varphi) = \frac{1}{2n_g + 1} \sum_{k=0}^{2n_g} \mathbb{U}^g(\varphi_k^{n_g}) \sum_{f=-n_g}^{n_g} e^{i(fN+mT_{g1})(\varphi-\varphi_k^{n_g})},$$

где $\varphi_k^{n_g} = k\alpha/(2n_g + 1)$ $k = 0, 2n_g$.

Переходим к выводу квадратурных формул. Сначала разберемся с интегралами с особенностями. Воспользуемся известными соотношениями [2, 3] и запишем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbb{U}_{n_g}^{g'}(\varphi) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} d\varphi = \\ = -\frac{1}{2n_g + 1} \sum_{k=0}^{2n_g} \mathbb{U}^g(\varphi_k^{n_g}) \sum_{f=-n_g}^{n_g} |fN + mT_{g1}| e^{i(fN+mT_{g1})(\theta-\varphi_k^{n_g})}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\varphi - \theta}{2} \right| \mathbb{U}_{n_g}^g(\varphi) d\varphi = \\ = -\frac{1}{2n_g + 1} \sum_{k=0}^{2n_g} \mathbb{U}^g(\varphi_k^{n_g}) \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\substack{f=-n_g \\ fN+mT_{g1} \neq 0}}^{n_g} \frac{1}{|fN + mT_{g1}|} e^{i(fN+mT_{g1})(\theta-\varphi_k^{n_g})} + \right. \\ \left. + \delta_{m0} \cdot \ln 2 \right\} \end{aligned}$$

где δ_{m0} — символ Кронекера.

Чтобы получить квадратуры для интегралов без особенностей, введем функцию

$$H^g(\theta, \varphi) = \sum_{j=0}^{N-1} e^{im\alpha j T_{g1}} K^g(\theta, \varphi + \alpha j).$$

Несложно проверить, что данная функция обладает обратной квазипериодичностью по φ , т.е.

$$H^g(\theta, \varphi + \alpha) = e^{-im\alpha T_{g1}} H^g(\theta, \varphi).$$

А тогда, воспользовавшись квазипериодичностью плотности и выражением для ранее введенной нами функции W^g , проведем ряд преобразований с ин-

тегралом

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbb{U}^g(\varphi) K^g(\theta, \varphi) d\varphi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\alpha \mathbb{U}^g(\varphi) H^g(\theta, \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{N} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W^g(\varphi) \hat{H}^g(\theta, \varphi/N) d\varphi, \end{aligned}$$

где $\hat{H}^g(\theta, \varphi) = e^{imT_{g1}\varphi} H(\theta, \varphi)$. В последнем интеграле стоит произведение двух периодических (с периодом 2π) функций. Если заменить каждую из них ее интерполяционным тригонометрическим полиномом с узлами $2k\pi/(2n_g + 1)$, то мы получим квадратуру для исходного интеграла

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbb{U}^g(\varphi) K^g(\theta, \varphi) d\varphi \approx \frac{1}{N} \frac{1}{2n_g + 1} \sum_{k=0}^{2n_g} \mathbb{U}^g(\varphi_k^{n_g}) H^g(\theta, \varphi_k^{n_g}).$$

Аналогично поступаем с оставшимся интегралом

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbb{U}^p(\varphi) \mathbb{F}^{gp}(\theta, \varphi) d\varphi &\approx \frac{1}{N} \frac{1}{2n_p + 1} \sum_{k=0}^{2n_p} \mathbb{U}^p(\varphi_k^{n_p}) D^{gp}(\theta, \varphi_k^{n_p}), \\ D^{gp}(\theta, \varphi) &= \sum_{j=0}^{N-1} e^{im\alpha j T_{g1}} \mathbb{F}^{gp}(\theta, \varphi + \alpha j). \end{aligned}$$

Выберем вторую систему точек $\varphi_{0j}^{n_g} = (j + 1/2)\alpha/(2n_g + 1)$, $j = 0, 2n_g$. Вычисляя в СИУ (9) интегралы с помощью квадратурных формул, приведенных выше, приходим к следующей СЛАУ относительно неизвестных $\mathbb{U}^g(\varphi_k^{n_g})$, $k = 0, 2n_g$, $g = 0, 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n_g + 1} \sum_{k=0}^{2n_g} \mathbb{U}^g(\varphi_k^{n_g}) \left\{ \frac{1}{|x'_g(\varphi_{0j}^{n_g})|} \sum_{\substack{f=-n_g \\ f \neq 0 \text{ при } m=0}}^{n_g} |fN + mT_{g1}| e^{i(fN+mT_{g1})(\varphi_{0j}^{n_g} - \varphi_k^{n_g})} - \right. \\ \left. - \frac{\varkappa^2}{\pi} |x'_g(\varphi_{0j}^{n_g})| \left[\frac{1}{2} \sum_{\substack{f=-n_g \\ f \neq 0 \text{ при } m=0}}^{n_g} \frac{1}{|fN + mT_{g1}|} e^{i(fN+mT_{g1})(\varphi_{0j}^{n_g} - \varphi_k^{n_g})} + \delta_{m0} \cdot \ln 2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{N} H^g(\varphi_{0j}^{n_g}, \varphi_k^{n_g}) \right\} + \frac{1}{2n_p + 1} \sum_{k=0}^{2n_p} \mathbb{U}^p(\varphi_k^{n_p}) \frac{1}{N} D^{gp}(\varphi_{0j}^{n_g}, \varphi_k^{n_p}) = 0 \\ j = 0, 2n_g, \quad (p, g = 0, 1) \wedge (p \neq g). \quad (11) \end{aligned}$$

4. Нахождение собственных значений

СЛАУ (11) можно переписать в виде

$$A(\kappa)U = 0. \quad (12)$$

Любой элемент матрицы $a_{pv}^{gj}(\kappa)$, где $p, g = 0, 1$; $v = 0, 2n_p$; $j = 0, 2n_g$ имеет четыре индекса (верхняя пара индексов gj — для идентификации строки, нижняя пара pv — для столбца) и непрерывным образом зависит от параметра κ . Спектральные числа ищутся как те значения параметра κ , при которых существует нетривиальное решение однородной СЛАУ (12) (т.е. $\det A(\kappa) = 0$).

Покажем, что при условии симметрии контура Ls относительно отражения (относительно бисектрисы угла раствора α) определитель матрицы $A(\kappa)$ вещественен при любом κ . В случае резонатора (рис. 1) можно так выбрать часть границы Ls , отвечающей сектору раствора α , чтобы это свойство было выполнено.

Учитывая симметрию контура и специфический выбор сеток (они тоже будут симметричны) несложно проверить, что матрица $A(\kappa)$ обладает симметрией:

$$\begin{aligned} a_{p, 2n_p+1-v}^{g, 2n_g-j} &= \overline{a_{pv}^{gj}} \quad v \neq 0 \\ a_{p0}^{g, 2n_g-j} &= e^{im\alpha T_{p1}} \overline{a_{p0}^{gj}} \\ p, g &= 0, 1; \quad v = 0, 2n_p; \quad j = 0, 2n_g, \end{aligned}$$

(здесь черта вверху означает комплексное сопряжение).

Выполним преобразования над строками матрицы

$$\begin{aligned} A^{gj} &:= A^{gj} + A^{g, 2n_g-j}, \\ A^{g, 2n_g-j} &:= A^{g, 2n_g-j} - A^{gj}, \\ j &= 0, n_g - 1 \quad g = 0, 1 \end{aligned}$$

и над столбцами полученной после преобразования матрицы

$$\begin{aligned} A_{pv} &:= A_{pv} + A_{p, 2n_p+1-v}, \\ A_{p, 2n_p+1-v} &:= A_{p, 2n_p+1-v} - A_{pv}, \\ v &= 1, n_p \quad p = 0, 1. \end{aligned}$$

Далее столбец A_{00} домножим на $e^{-im\alpha/2}$, а столбец A_{10} домножим на $e^{im\alpha/2}$. Теперь осталось домножить на i (мнимая единица) строки gj , $j = (n_g + 1), 2n_g$ $g = 0, 1$ и столбцы pv , $v = (n_p + 1), 2n_p$ $p = 0, 1$.

В результате мы получим вещественную матрицу. Учитывая, что проводимые нами преобразования не меняют определителя, делаем вывод, что и определитель исходной матрицы вещественен.

Итак, достаточно найти нули вещественной части определителя исходной матрицы (отличная от нуля мнимая часть возникнет в результате погрешностей вычислений). Но, чтобы оптимизировать численный расчет, можно сначала с помощью указанных преобразований получить вещественную матрицу и вычислять уже ее определитель.

Метод поиска корней определителя выбирался после анализа графика $\det A(\kappa)$ на исследуемом интервале значений для κ . В проведенных численных экспериментах определитель менял знак при прохождении через корень, поэтому для точного поиска корней использовался метод дихотомии.

5. Построение решения краевой задачи в области. Паразитные числа

Найденное спектральное число κ подставляем в СЛАУ (12), после этого находим все линейно независимые решения полученной однородной системы. Эти решения представляют собой вектора значений соответствующих плотностей на выбранной нами сетке. Чтобы построить решения спектральной задачи (1) в области, каждый найденный вектор подставляем в (2). Для этого можно использовать такую квадратурную формулу:

$$U(x) = \sum_{g=0}^1 \frac{1}{2n_g + 1} \sum_{k=0}^{2n_g} \mathbb{U}^g(\varphi_k^{n_g}) \left(\sum_{j=0}^{N-1} e^{im\alpha j T_{g1}} Z^g(x, \varphi_k^{n_g} + \alpha j) \right),$$

где $Z^g(x, \varphi) = \kappa Y_1(\kappa|x-y|) \left(\frac{x-y}{|x-y|}, n(y) \right) |y'|$, $y = y^g(\varphi)$, $x \in \Omega$ (13)

(поскольку это решение однородного уравнения, то оно выписано с точностью до умножения на константу).

Если для всех линейно независимых решений уравнения (3), соответствующих спектральному числу κ , окажется, что соответствующие им потенциалы двойного слоя представляют собой функции, тождественно равные нулю в области Ω , то такое число является паразитным (т.е. оно не принадлежит спектру задачи (1)). Но, поскольку, вычисления выполняются приближенно, а искомое $U(x)$ представляет собой решение однородной задачи (т.е. может быть домножено на сколь угодно большую константу), то сравнивать построенное $U(x)$, $x \in \Omega$ непосредственно с нулем для проверки паразитности нельзя. Вместо этого, для определения малости $U(x)$ предлагается использовать следующий подход. В области Ω выбираем достаточно мелкую сетку $\{x_i\}_{i=1}^n$. В каждой точке сетки рассматриваем выражение $U(x_i)$, построенное по формуле (13), как функцию параметра κ , при этом решение, соответствующее исследуемому спектральному числу κ_0 в задаче (3) — функция $\mathbb{U}(\varphi)$ фиксируется. И, если построенная $U(x_i)$ в каждой точке сетки будет обращаться в ноль при $\kappa = \kappa_0$, то можно считать κ_0 паразитным (конечно же такую проверку нужно провести для всех линейно независимых решений (3), соответствующих значению κ_0).

Этот подход имеет недостаток, который заключается в том, что для проверки значения на паразитность приходится снова возвращаться в область Ω , т.е. размерность задачи растет. Поэтому, полезным оказывается качественное (теоретическое) исследование самого явления возникновения паразитных значений — что они собой представляют, как и откуда возникают.

Для двусвязных областей, типа изображенной на рис. 1, множество всех паразитных чисел распадается на два подмножества:

- элементы первого подмножества обусловлены влиянием только внутренней части границы — кривой L_1 , и представляют собой спектральные числа задачи (1) для конечной области с границей L_1 ;
- элементы второго подмножества зависят только от внешней части границы — кривой L_0 , и представляют собой спектральные числа краевой задачи (1) для бесконечной области с границей L_0 (рассматриваются только такие решения внешней задачи которые могут быть представлены с помощью потенциала двойного слоя вида (2) по кривой L_0).

Доказательство этого факта опирается на свойства логарифмических потенциалов.

6. Результаты численного эксперимента

Для проведения численного эксперимента было выбрано два резонатора.

Поперечное сечение Ω для первого резонатора представляет собой область между двумя концентрическими окружностями — т.е. это кольцо с радиусом внешней окружности R_0 и внутренней R_1 . В дальнейшем этот резонатор будем называть "кольцевым".

Второй резонатор, вроде изображенного на рис. 1 (в дальнейшем именуемый "резонатор с синусоидой"), имеет внешней границей окружность радиуса R_0 , внутренняя граница представляет собой синусоиду. Пользуясь ранее введенными обозначениями зададим точную параметризацию границы в полярной системе координат:

$$L_{s_0} : \begin{cases} r = R_0 \\ \varphi = s - \alpha/2 \end{cases} \quad L_{s_1} : \begin{cases} r = R_2 - (h/2) \cos(2\pi s/\alpha - \pi) \\ \varphi = -s + \alpha/2 \end{cases}$$

где $s \in [0, \alpha]$, $R_2 = R_1 - h/2$. Числовые значения параметров для обоих резонаторов были выбраны такими: $R_0 = 26.38425$, $h = 0.45$, $N = 72$ (параметр, задающий симметрию). Изучались решения, соответствующие моде $m = 31$.

Было исследовано и проанализировано поведение спектральных чисел κ при изменении геометрических характеристик (параметров) резонатора. В качестве изменяемого параметра был выбран параметр R_1 . На рисунке 2 для кольцевого резонатора приведена зависимость спектральных чисел $\kappa(R_1)$. Значения параметра R_1 откладываются по оси абсцисс и меняются в интерва-

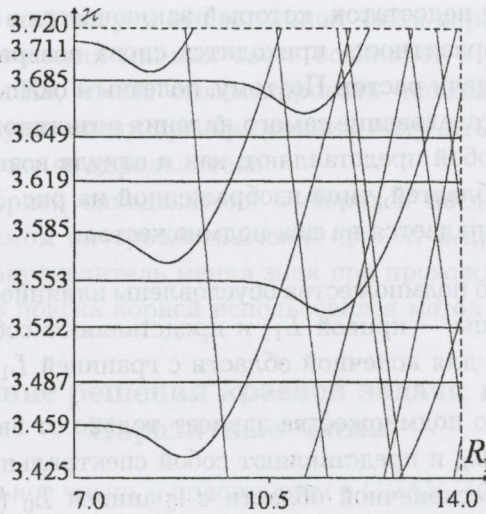


Рис. 2: Зависимость спектральных чисел от параметра R_1 для кольцевого резонатора.

ле $[7.0, 14.0]$, по оси ординат откладываются значения κ , найденные в интервале $[3.425, 3.72]$. Здесь же на рисунке можно увидеть паразитные значения κ , соответствующие $Y'_{qN+m}(\kappa R_0) = 0$, $q = -1, 0$ — это прямые, параллельные оси абсцисс, и значения соответствующие $J'_{qN+m}(\kappa R_1) = 0$, $q = -1, 0$ — прямые, пересекающие ось абсцисс под некоторым углом (угол отсчитываемый от оси абсцисс до соответствующей прямой против часовой стрелки является тупым). Паразитность указанных значений определялась аналитически. На рисунке 3 для удобства изображены кривые паразитных спектральных чисел метода теории потенциалов применяемого для кольцевого резонатора, определяемые вышеописанными условиями $Y'_{qN+m}(\kappa R_0) = 0$, $J'_{qN+m}(\kappa R_1) = 0$ при $q = -1, 0$ (для других значений q соответствующие функции корней не имеют).

Непаразитные кривые на рисунке 2 соответствуют аналитическому решению, получаемому из условия

$$\begin{vmatrix} J'_{qN+m}(\kappa R_0) & Y'_{qN+m}(\kappa R_0) \\ J'_{qN+m}(\kappa R_1) & Y'_{qN+m}(\kappa R_1) \end{vmatrix} = 0. \quad (14)$$

Анализ этих кривых показывает, что для достаточно малых значений параметра R_1 спектр для кольца совпадает (с достаточным количеством знаком после запятой) со спектром для кругового резонатора (круг радиуса R_0). При увеличении величины внутреннего радиуса R_1 , первым начинает меняться спектральное число, соответствующее $q = 0$ в уравнении (14), и только потом изменяется κ , соответствующее $q = -1$.

В таблице 1 отражена сходимость изложенного в работе численного мето-

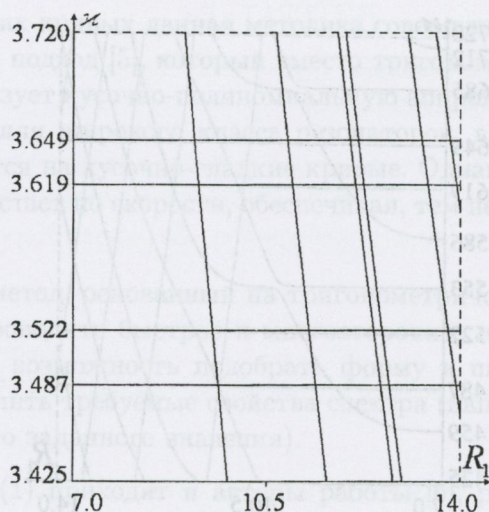


Рис. 3: Паразитные значения для кольца.

Таблица 1: Сходимость метода для кольцевого резонатора

| n_0 | n_1 | κ | | |
|-------|-------|----------|---------|---------|
| 3 | 3 | 3.52294 | 3.55391 | 3.58340 |
| 5 | 5 | 3.52296 | 3.55388 | 3.58337 |
| 7 | 7 | 3.52297 | 3.55387 | 3.58337 |
| 9 | 9 | 3.52297 | 3.55387 | 3.58337 |
| 11 | 11 | 3.52297 | 3.55387 | 3.58337 |

да для поиска κ на интервале $[3.5, 3.6]$ для кольцевого резонатора при значении параметра $R_1 = 7.71946$. Как видно из таблицы, решение с точностью до пятого знака после запятой получается уже при $n_0 = n_1 = 7$. Первое значение $\kappa_1 = 3.52297$ — паразитное, удовлетворяющее соотношению $Y'_m(\kappa_1 R_0) = 0$. Второе $\kappa_2 = 3.55387$ совпадает с аналитическим решением (14) при $q = -1$ и третье $\kappa_3 = 3.58337$ совпадает с аналитическим решением (14) при $q = 0$.

Теперь перейдем к результатам для резонатора с синусоидой. На рисунке 4 приведена зависимость спектра от параметра R_1 (интервал для поиска спектральных чисел и интервал изменения параметра взяты те же, что и для кольцевого резонатора). И здесь можно наблюдать паразитные значения, соответствующие внешней окружности $Y'_{qN+m}(\kappa R_0)$, $q = -1, 0$. Прямые, пересекающие ось абсцисс под тупым углом, тоже представляют собой паразитные значения, обусловленные внутренней кривой, но поскольку теперь в качестве внутренней границы выступает синусоида, а не окружность, условие для них несколько иное, чем в случае кольцевого резонатора.

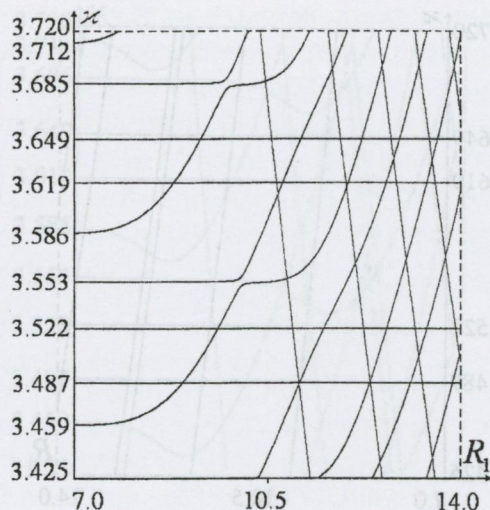


Рис. 4: Зависимость спектральных чисел от параметра R_1 для резонатора с синусоидой.

Таблица 2: Сходимость метода для резонатора с синусоидой

| n_0 | n_1 | χ | | |
|-------|-------|---------|---------|---------|
| 3 | 3 | 3.52294 | 3.55391 | 3.58921 |
| 5 | 5 | 3.52296 | 3.55388 | 3.58902 |
| 7 | 7 | 3.52297 | 3.55387 | 3.58901 |
| 9 | 9 | 3.52297 | 3.55387 | 3.58901 |
| 11 | 11 | 3.52297 | 3.55387 | 3.58901 |

В таблице 2 приводится сходимость метода для поиска χ на интервале $[3.5, 3.6]$ для резонатора с синусоидой при значении параметра $R_1 = 7.71946$. Стабилизация пятого знака наблюдается при тех же объемах внешней и внутренней сеток, что и в случае кольца. Первое число $\chi_1 = 3.52297$ — паразитное (аналогично для кольца). Второе $\chi_2 = 3.55387$ с точностью до пятого знака совпадает с соответствующим спектральным числом для кольца. Третье значение $\chi_3 = 3.58901$ отличается от аналогичного спектрального числа для кольца на десятую часть процента.

7. Заключение

Описанная в работе методика позволяет получать результаты с достаточно высокой точностью, обеспечивая при этом быструю сходимость процесса для случаев, когда граница области обладает достаточной гладкостью. В случае

же кусочно-гладких кривых данная методика совершенно непригодна. Этого недостатка лишен подход [5], который вместо тригонометрического интерполирования использует кусочно-полиномиальную аппроксимацию и позволяет находить спектр для широкого класса резонаторов, включая и те, у которых $\partial\Omega$ распадается на кусочно-гладкие кривые. Однако, сходимость в этом случае заметно отстает по скорости, обеспечивая, тем не менее, хорошую точность.

Изложенный метод, основанный на тригонометрическом интерполировании, позволяет проводить быстрое и многостороннее исследование спектра, давая тем самым возможность подобрать форму и параметры резонатора так, чтобы обеспечить требуемые свойства спектра (например, присутствие в спектре некоторого заданного значения).

К постановке (1) приходят и авторы работы [6], рассматривая область изображенную на рисунке 5. В этом случае удастся воспользоваться методом разделения переменных и заменить краевую спектральную задачу сингулярным интегральным уравнением с дополнительным условием. Метод доста-

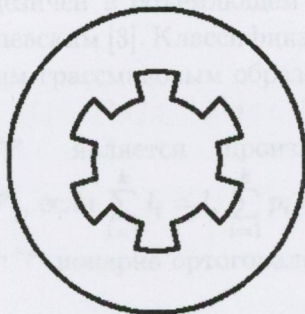



Рис. 5: Резонаторная область с углами

точно прост и удобен, однако элементы матрицы, полученной в результате дискретизации не являются непрерывными функциями от спектрального параметра, что приводит к осложнениям в поиске решений. Примечательна следующая особенность. Несмотря на существенные различия в формах внутренних границ областей приведенных на рисунках 1 и 5 (наличие углов, например), при заданных количестве зубцов N , моде m и соответствующим образом подобранных геометрических размеров, спектр для резонатора рис. 1 в некотором выбранном диапазоне может быть сделан сколь угодно близким к спектру резонатора рис. 5. Отсюда можно заключить, что спектр не очень чувствителен к форме зубца и определяется по существу только количеством зубцов и номером моды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Справочник по специальным функциям / Под ред. М.Абрамовица и И.Стиган.-М.: Наука.-1979.-832с.
2. Гандель Ю.В. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Уч. пособие, ч. 1. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов.-Харьков-Херсон,-2000.-92с.
3. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.-М.: ТОО "Янус".-1995.-520с.
4. Владимиров В. С. Уравнения математической физики.-М.: Наука.-1976.-528с.
5. Митина И. В. Метод численного анализа спектров плоских резонаторов // Электромагнитные явления.-2005.-Т.5, 1(14).-С.26-31.
6. Гандель Ю.В., Загинайлов Г.И., Стешенко С.А. Строгий электродинамический анализ резонаторных систем коаксиальных гиротронов //Журнал технической физики.-2004.-Т.74, 7.-С.81-89.



| | | | | |
|----|----|---------|---------|---------|
| 3 | 3 | 3.52394 | 3.55387 | 3.58901 |
| 5 | 5 | 3.52296 | 3.55387 | 3.58901 |
| 7 | 7 | 3.52297 | 3.55387 | 3.58901 |
| 9 | 9 | 3.52297 | 3.55387 | 3.58901 |
| 11 | 11 | 3.52297 | 3.55387 | 3.58901 |

Комплексные подмногообразия со вполне геодезическим
грассмановым образом

О.В. Лейбина

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

В работе получена классификация комплексных подмногообразий $F^l \subset \mathbb{C}^{l+p}$ с невырожденным вполне геодезическим грассмановым образом. 2000 *Mathematics Subject Classification* 53B25.

Полная классификация многомерных поверхностей $F^l \subset E^{l+p}$, грассманов образ которых вполне геодезичен в объемлющем многообразии Грассмана была получена Ю.А. Николаевским [3]. Классификация двумерных поверхностей со вполне геодезическим грассмановым образом была дана Б. Ченом и С. Ямагучи [5].

Поверхность $F^l \subset E^{l+p}$ является произведением поверхностей $F^{l_1} \subset E^{l_1+p_1}, \dots, F^{l_k} \subset E^{l_k+p_k}$, если $\sum_{i=1}^k l_i = l, \sum_{i=1}^k p_i = p, F^l = F^{l_1} \times \dots \times F^{l_k}$ и евклидовы пространства $E^{l_i+p_i}$ попарно ортогональны в E^{l+p} .

Имеет место

Теорема. [3] *Регулярная поверхность $F^l \subset E^{l+p}$ класса C^3 в евклидовом пространстве имеет невырожденный вполне геодезический грассманов образ $\Gamma(F^l) \subset G(l, l+p)$ тогда и только тогда, когда она является произведением поверхностей, каждая из которых является либо*

- 1) вещественной гиперповерхностью, либо
 - 2) комплексной гиперповерхностью, либо
 - 3) поверхностью с параллельной второй квадратичной формой,
- причем каждая поверхность-сомножитель имеет нулевой внешний нуль-индекс.

Д. Ферусом [6],[7] доказано, что параллельность второй квадратичной формы регулярной поверхности эквивалентна каждому из следующих условий:

- 1) *поверхность является внешне симметрической (т.е. евклидова симметрия объемлющего пространства относительно нормального пространства к поверхности в каждой ее точке отображает поверхность на себя),*

2) поверхность является открытой областью на стандартно вложенном симметрическом R -пространстве или на его произведении с евклидовым пространством.

К симметрическим R -пространствам относятся все эрмитовы симметрические пространства компактного типа, грасмановы многообразия, группы $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$, пространства $U(2n)/Sp(n)$, $U(n)/O(n)$, произведения двух сфер, проективная плоскость Кэли и три исключительных пространства. Полная классификация получена в [8].

В данной работе рассмотрена задача классификации многомерных комплексных поверхностей в комплексном евклидовом пространстве, грасманов образ которых вполне геодезичен в комплексном многообразии Грассмана.

Комплексным многообразием Грассмана $CG(l, l+p)$ называется множество всех l -мерных комплексных плоскостей $l+p$ -мерного комплексного пространства \mathbf{C}^{l+p} , проходящих через начало координат $O \in \mathbf{C}^{l+p}$. Построим в каждой точке комплексной поверхности $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$ касательное пространство и параллельно перенесем все эти пространства в начало координат. Полученное подмножество в $CG(l, l+p)$ называется грасмановым образом $\Gamma(F^l)$ комплексной поверхности F^l . Грасманов образ невырожден, если комплексный внешний нуль-индекс комплексной поверхности равен нулю [1].

Имеет место

Теорема. Неособая комплексная поверхность $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$ имеет невырожденный вполне геодезический грасманов образ $\Gamma(F^l) \subset CG(l, l+p)$ тогда и только тогда, когда она является произведением комплексных гиперповерхностей, каждая из которых имеет нулевой комплексный внешний нуль-индекс.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующее утверждение.

Лемма. Рассмотрим \mathbf{C}^{l+p} как евклидово пространство $E^{2(l+p)}$, наделенное комплексной структурой. Тогда комплексное многообразие Грассмана $CG(l, l+p)$ вполне геодезично в вещественном многообразии Грассмана ориентированных плоскостей $G^+(2l, 2l+2p)$.

Доказательство. Согласно [1] касательное пространство к комплексному многообразию Грассмана $CG(l, l+p)$ есть

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & -\bar{Z}^T \\ Z & 0 \end{array} \right), Z - \text{комплексная } p \times l\text{-матрица} \right\},$$

а касательное пространство к вещественному многообразию Грассмана ориентированных плоскостей $G^+(2l, 2l+2p)$ имеет вид

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & -X^T \\ X & 0 \end{array} \right), X - \text{вещественная } 2p \times 2l\text{-матрица} \right\}.$$

Будем отождествлять касательный вектор к многообразию Грассмана с соответствующей $2p \times 2l$ -подматрицей X .

Пусть касательный вектор к комплексному многообразию Грассмана $CG(l, l + p)$ задан $p \times l$ -матрицей $Z = X_1 + iX_2$.

Рассматривая l -мерные комплексные плоскости в C^{l+p} как $2l$ -мерные J -инвариантные плоскости в $E^{2(l+p)}$, получаем, что касательное пространство к $CG(l, l + p) \subset G^+(2l, 2l + 2p)$ задается $2p \times 2l$ -матрицами вида

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & -X_2 \\ X_2 & X_1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Пусть \mathbf{m} - касательное пространство к комплексному многообразию Грассмана $CG(l, l + p) \subset G^+(2l, 2l + 2p)$ в некоторой точке.

Покажем, что \mathbf{m} является тройной системой Ли в касательном пространстве к вещественному многообразию Грассмана $G^+(2l, 2l + 2p)$. Тогда согласно теореме Картана комплексное многообразие Грассмана $CG(l, l + p)$ будет вполне геодезическим подмногообразием в $G^+(2l, 2l + 2p)$.

Нам надо показать [4], что $\forall A, B, C \in \mathbf{m} [A, [B, C]] \in \mathbf{m}$.

Согласно (1) касательные векторы $A, B, C \in \mathbf{m}$ имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -X^T \\ X & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -X_1^T & -X_2^T \\ 0 & 0 & X_2^T & -X_1^T \\ X_1 & -X_2 & 0 & 0 \\ X_2 & X_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -Y^T \\ Y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Y_1^T & -Y_2^T \\ 0 & 0 & Y_2^T & -Y_1^T \\ Y_1 & -Y_2 & 0 & 0 \\ Y_2 & Y_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -Z^T \\ Z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Z_1^T & -Z_2^T \\ 0 & 0 & Z_2^T & -Z_1^T \\ Z_1 & -Z_2 & 0 & 0 \\ Z_2 & Z_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Произведем необходимые вычисления.

$$[B, C] = BC - CB = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix},$$

где

$$D_1 = \begin{pmatrix} -Y_1^T Z_1 - Y_2^T Z_2 + Z_1^T Y_1 + Z_2^T Y_2 & Y_1^T Z_2 - Y_2^T Z_1 - Z_1^T Y_2 + Z_2^T Y_1 \\ Y_2^T Z_1 - Y_1^T Z_2 - Z_2^T Y_1 + Z_1^T Y_2 & -Y_2^T Z_2 - Y_1^T Z_1 + Z_2^T Y_2 + Z_1^T Y_1 \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} -Y_1 Z_1^T - Y_2 Z_2^T + Z_1 Y_1^T + Z_2 Y_2^T & -Y_1 Z_2^T + Y_2 Z_1^T + Z_1 Y_2^T - Z_2 Y_1^T \\ -Y_2 Z_1^T + Y_1 Z_2^T + Z_2 Y_1^T - Z_1 Y_2^T & -Y_2 Z_2^T - Y_1 Z_1^T + Z_2 Y_2^T + Z_1 Y_1^T \end{pmatrix}.$$

Получаем, что тройная скобка Ли имеет вид

$$[A, [B, C]] = \begin{pmatrix} 0 & -Q^T \\ Q & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Q_1^T & -Q_2^T \\ 0 & 0 & Q_2^T & -Q_1^T \\ Q_1 & -Q_2 & 0 & 0 \\ Q_2 & Q_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$Q_1 = -X_1 Y_1^T Z_1 - X_1 Y_2^T Z_2 + X_1 Z_1^T Y_1 + X_1 Z_2^T Y_2 - X_2 Y_2^T Z_1 + \\ + X_2 Y_1^T Z_2 + X_2 Z_2^T Y_1 - X_2 Z_1^T Y_2 + Y_1 Z_1^T X_1 + Y_2 Z_2^T X_1 - Z_1 Y_1^T X_1 - \\ - Z_2 Y_2^T X_1 + Y_1 Z_2^T X_2 - Y_2 Z_1^T X_2 - Z_1 Y_2^T X_2 + Z_2 Y_1^T X_2,$$

$$Q_2 = -X_2 Y_1^T Z_1 - X_2 Y_2^T Z_2 + X_2 Z_1^T Y_1 + X_2 Z_2^T Y_2 + X_1 Y_2^T Z_1 - \\ - X_1 Y_1^T Z_2 - X_1 Z_2^T Y_1 + X_1 Z_1^T Y_2 + Y_2 Z_1^T X_1 - Y_1 Z_2^T X_1 - Z_2 Y_1^T X_1 + \\ + Z_1 Y_2^T X_1 + Y_2 Z_2^T X_2 + Y_1 Z_1^T X_2 - Z_2 Y_2^T X_2 - Z_1 Y_1^T X_2.$$

Очевидно, что $[A, [B, C]] \in \mathfrak{m}$.

Доказательство теоремы.

Пусть $F^l \subset \mathbb{C}^{l+p}$ – комплексная поверхность с невырожденным вполне геодезическим грассмановым образом $\Gamma(F^l) \subset CG(l, l+p)$. Напомним, что грассманов образ невырожден, если комплексный внешний нуль-индекс комплексной поверхности F^l равен нулю. Рассмотрим ее как $2l$ -мерную поверхность F^{2l} в $E^{2(l+p)}$, наделенном комплексной структурой J . Тогда из леммы следует, что грассманов образ $\Gamma(F^{2l})$ вполне геодезичен в вещественном многообразии Грассмана ориентированных плоскостей $G^+(2l, 2l+2p)$.

Согласно теореме Ю.А. Николаевского поверхность $F^{2l} \subset E^{2(l+p)}$ со вполне геодезическим в $G^+(2l, 2l+2p)$ грассмановым образом является произведением поверхностей $F^{l_1} \subset E^{l_1+p_1}, \dots, F^{l_k} \subset E^{l_k+p_k}$, где $\sum_{i=1}^k l_i = 2l$,

$\sum_{i=1}^k p_i = 2p$, $F^{2l} = F^{l_1} \times \dots \times F^{l_k}$ и евклидовы пространства $E^{l_i+p_i}$ попарно ортогональны в $E^{2(l+p)}$. Причем каждая поверхность-сомножитель имеет нулевой внешний нуль-индекс и является либо вещественной гиперповерхностью, либо комплексной гиперповерхностью, либо поверхностью с параллельной второй квадратичной формой.

Учитывая, что поверхность $F^{2l} \subset E^{2(l+p)}$ должна быть комплексным подмногообразием $F^l \subset \mathbb{C}^{l+p}$, покажем, что F^{2l} не может содержать вещественных сомножителей.

В силу четности коразмерности наличие одного вещественного сомножителя невозможно. Покажем, что произведение двух вещественных гиперповерхностей не может быть комплексным подмногообразием в комплексном евклидовом пространстве.

Пусть $F^{2l} = F^{l_1} \times F^{l_2}$, где $F^{l_1} \subset E^{l_1+1}$, $F^{l_2} \subset E^{l_2+1}$, где $l_1 + l_2 = 2l$ и E^{l_1+1} и E^{l_2+1} ортогональны в E^{2l+2} . Тогда $F^{2l} \subset E^{2l+2}$ можно задать в виде

$$\begin{cases} x^{2l+1} = f^1(x^1, \dots, x^{l_1}) \\ x^{2l+2} = f^2(x^{l_1+1}, \dots, x^{l_1+l_2}) \end{cases}$$

Следовательно, матрицы вторых квадратичных форм относительно специально выбранного базиса нормалей $\xi_1, \xi_2 \in N_q F^{2l}$ будут иметь вид

$$A_{\xi_1} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{\xi_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

где A_1, A_2 – квадратные матрицы порядков l_1 и l_2 соответственно.

Если $F^{2l} \subset E^{2l+2}$ – комплексное подмногообразие, то A_{ξ_1} и A_{ξ_2} должны удовлетворять условию $A_{\xi_i} J + J A_{\xi_i} = 0$, $i = 1, 2$, где J – комплексная структура на F^{2l} , индуцированная из комплексной структуры в E^{2l+2} . Но тогда $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, а значит, матрицы вторых квадратичных форм A_{ξ_1} , A_{ξ_2} также нулевые. Аналогично показывается, что произведение любого четного числа вещественных гиперповерхностей не может быть комплексным подмногообразием в комплексном евклидовом пространстве.

Теперь покажем, что F^{2l} не может содержать сомножителей с параллельной второй квадратичной формой. Согласно Ферусу поверхность с параллельной второй квадратичной формой является открытой областью на стандартно вложенном симметрическом R -пространстве или на его произведении с евклидовым пространством. Из симметрических R -пространств комплексной структурой обладают эрмитовы симметрические пространства компактного типа, причем их эрмитова структура является кэлеровой. Симметрические пространства компактного типа имеют неотрицательную секционную кривизну и положительно определенный тензор Риччи [2]. Получаем, что эрмитово симметрическое пространство компактного типа не может быть вложенным в комплексное евклидово пространство, так как согласно [2] каждое комплексное подмногообразие в комплексном евклидовом пространстве имеет отрицательно полуопределенный тензор Риччи.

Таким образом, получаем, что F^{2l} является произведением комплексных гиперповерхностей, каждая из которых имеет нулевой комплексный внешний нуль-индекс.

Обратно, если комплексное подмногообразие $F^{2l} \subset E^{2(l+p)}$ является произведением комплексных гиперповерхностей, каждая из которых имеет нулевой комплексный внешний нуль-индекс, то согласно теореме Ю.А. Николаевского оно имеет вполне геодезический невырожденный грассманов образ $\Gamma(F^{2l}) \subset G^+(2l, 2l + 2p)$. С другой стороны $\Gamma(F^{2l}) \subset CG(l, l + p)$ и согласно лемме комплексное многообразие Грассмана $CG(l, l + p)$ вполне геодезично в многообразии Грассмана ориентированных плоскостей $G^+(2l, 2l + 2p)$. Следовательно, грассманов образ $\Gamma(F^{2l})$ вполне геодезичен в $CG(l, l + p)$.

Выражаю искреннюю благодарность А.А. Борисенко за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисенко А.А., Николаевский Ю.А. Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий // Успехи математических наук. – 1991. – Т. 46, вып. 2(278). – С. 41-83.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. – М.: Наука, 1981. – Т. 2. – 414 с.
3. Николаевский Ю.А. Классификация многомерных подмногообразий в евклидовом пространстве со вполне геодезическим грассмановым образом // Математический сборник. – 1992. – Т. 183, № 6. – С. 127-154.
4. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические построства. М.: Мир, 1964. – 533 с.
5. Chen B.Y. Yamaguchi S. Submanifolds with totally geodesic Gauss image // Geom. dedic. – 1984. – Vol. 15, No. 3. – P. 313-322.
6. Ferus D. Immersions with parallel second fundamental form // Math. Zeit. – 1974. – Vol. 140, No. 1. – P. 87-93.
7. Ferus D. Symmetric submanifolds of Euclidean space // Math. Ann. – 1980. – Vol. 247, No. 1. – P. 81-93.
8. Nagano T. Transformation groups on compact symmetric spaces // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – Vol. 118, No. 2. – P. 428-453.