УДК 536:25

УСЛОВИЕ НА ТАНГЕНЦИАЛЬНОМ РАЗРЫВЕ И НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕГО

Иевлев И.И.
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, г. Харьков, Украина

1^0. Известно, что уравнения механики сплошных сред на поверхностях сильного разрыва принимают вид предельных соотношений [1-2]. Схема получения этих предельных соотношений следующая.

Обозначим через A, a_V экстенсивную и интенсивную величины какой либо характеристики сплошной среды (масса, импульс, кинетический момент, энергию и пр.), соответственно. Пусть A относится к материальному объему $V = V(t)$. Тогда A, a_V связаны между собой соотношением

$$A(t) = \int\limits_V a_V(t,\vec{r})dV \tag{1}$$

Соотношение, описывающее закон механики, имеет вид уравнения баланса [3]

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d^eA}{dt} + \frac{d^iA}{dt} \tag{2}$$

где первое слагаемое в правой части отвечает за приток (или отток) рассматриваемой характеристики извне через поверхность $\Sigma = \Sigma(t)$, ограничивающую объем V

$$\frac{d^eA}{dt} = -\oint\limits_\Sigma \vec{n}\cdot\vec{J}_a^* d\Sigma \tag{3}$$

$\vec{n}$ - нормаль к Σ, внешняя по отношению к V, $\vec{J}_a^*$ - кондуктивный поток характеристики A. Второе слагаемое в правой части (2) связано с наличием источников (стоков) A, имеющих объемную плотность $\sigma_a = \sigma_a(t,\vec{r})$, внутри объема V

$$\frac{dA}{dt} = \int\limits_V \sigma_a dV \tag{4}$$

Левая часть уравнения (2) требует определения производной по времени от интеграла по материальному объему. Обозначим через $\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}(t,\vec{r})$ поле скоростей, описывающее движение сплошной среды. Тогда, согласно теореме переноса, имеем [2]

$$\frac{dA}{dt} = \int\limits_V \frac{\partial a_V}{\partial t}dV + \oint\limits_\Sigma \mathrm{v}_n a_V d\Sigma = \frac{d}{dt}\int\limits_{V_0} a_V dV + \oint\limits_\Sigma \mathrm{v}_n a_V d\Sigma \tag{5}$$

где V_0 - геометрический объем, совпадающий в данный момент времени с материальным объемом V.

Уравнение (2) рассматривается как интегральная форма соответствующего закона механики. Это уравнение остается справедливым и тогда, когда внутри объема V имеется поверхность разрыва $\Gamma = \Gamma(t)$ характеристик, двигающаяся со скоростями $\vec{u} = \vec{u}(t,\vec{r})$, возможно, отличными от скоростей движения среды $\vec{\mathrm{v}}=\vec{\mathrm{v}}_1$ и $\vec{\mathrm{v}}=\vec{\mathrm{v}}_2$ в областях V_1 и V_2, соответственно, (в случае контактного разрыва $\vec{\mathrm{u}}=\vec{\mathrm{v}}=\vec{\mathrm{v}}_1(\mathrm{t},\vec{\mathrm{r}}_M) = \vec{\mathrm{v}}_2(\mathrm{t},\vec{\mathrm{r}}_M)$) (см. рис.1). В этом случае нужно учесть наличие «избыточных» величин $a_\Gamma = a_\Gamma(t,\vec{r})$ («избыточная» энергия, «избыточная» энтропия, поверхностное натяжение и пр.) [4]. В соотношении (1) появляется дополнительное слагаемое

$$\int\limits_\Gamma a_\Gamma d\Gamma \tag{6}$$

а левая часть уравнения (2) будет содержать производную от интеграла по материальной поверхности Γ. Можно показать, что имеет место соотношение

$$\frac{d}{dt}\int_{\Gamma} a_{\Gamma} d\Gamma = \int_{\Gamma}\left[\frac{da_{\Gamma}}{dt} + a_{\Gamma}\left(div_{\Gamma}\vec{u}_{\Gamma} - 2\kappa u_n\right)\right]d\Gamma \qquad (7)$$

где κ - средняя кривизна поверхности Γ, $\vec{u}_{\Gamma}, u_n$ - касательная и нормальная составляющие вектора $\vec{u}$ [5].

На поверхности разрыва могут иметь место «поверхностные» источники $\sigma_{a\Gamma} = \sigma_{a\Gamma}(t,\vec{r})$ и кондуктивные потоки, определяемые векторным полем $\vec{i}^*$, касательным к Γ. Тогда в правой части уравнения (2) так же появится дополнительное слагаемое вида

$$-\oint_{L} \vec{v}\cdot\vec{i}^* dl + \int_{\Delta\Gamma} \sigma_{a\Gamma} d\Gamma \qquad (8)$$

где L - является линией пересечения поверхностей $\Sigma = \Sigma_b + \Sigma_1 + \Sigma_2$ и Γ, $\vec{v}$ - нормаль к контуру L, касательная к поверхности Γ (рис.1).

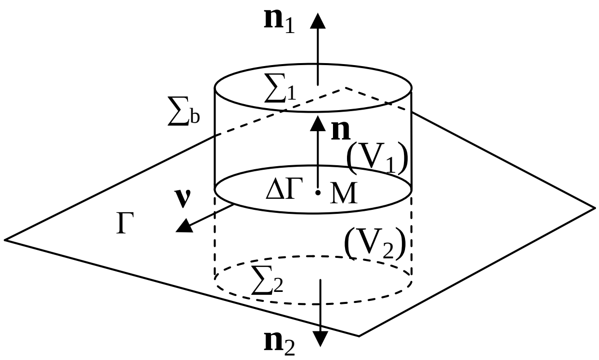

Рис.1

С учетом формул (3)- (8), уравнение (2) можно представить в следующем виде

$$\frac{d}{dt}\int_{V_0} a_V dV + \oint_{\Sigma} \vec{n}\cdot\left(\vec{\mathrm{v}} a_V + \vec{J}_a^*\right)d\Sigma + \int_{\Delta\Gamma}\left[\frac{da_{\Gamma}}{dt} + a_{\Gamma}\left(div_{\Gamma}\vec{u}_{\Gamma} - 2\kappa u_n\right) - \sigma_{a\Gamma}\right]d\Gamma + \oint_{L}\vec{v}\cdot\vec{i}^* dl = 0 \qquad (9)$$

Процедура получения предельных соотношений описана в [1], с.399. Выделяется $\Delta\Gamma$ часть поверхности Γ, охваченная контуром L и содержащая внутри точку М. Через точки $\Delta\Gamma$ проводятся отрезки равной длины h вдоль нормалей к $\Delta\Gamma$ в прямом и обратном направлении. К полученному объему $V = V_1 + V_2$ применяется соотношение (9) . Обе части равенства (9) делятся на величину площади $\Delta\Gamma$. Для возможности совершения предельного перехода (9) при $h \to 0$ и стягивании $\Delta\Gamma$ в точку требуется записать (9) в собственной системе отсчета K^M, связанной с движущейся точкой M в произвольный момент времени $t = t_0$. В этой системе отсчета скорости среды и поверхности Γ определяются векторными полями

$$\begin{aligned} \vec{w}(t,\vec{r}) &= \vec{\mathrm{v}}(t,\vec{r}) - \vec{n}(t_0,\vec{r}_M)\left(\vec{n}(t_0,\vec{r}_M)\cdot\vec{u}(t_0,\vec{r}_M)\right) \\ \vec{U}(t,\vec{r}) &= \vec{u}(t,\vec{r}) - \vec{n}(t_0,\vec{r}_M)\left(\vec{n}(t_0,\vec{r}_M)\cdot\vec{u}(t_0,\vec{r}_M)\right) \end{aligned} \qquad (10)$$

где $\vec{U}(t_0,\vec{r}_M) = 0, \quad \nabla\vec{U}\Big|_{t=t_0,\vec{r}=\vec{r}_M} \neq 0$.

Совершая предельный переход по h и $\Delta\Gamma$, получим соотношение

$$\lim_{\Delta\Gamma\to 0}\int_{\Delta\Gamma}\left[\frac{\partial a_{\Gamma}}{\partial t} + \left(div_{\Gamma}(\vec{U}_{\Gamma}a_{\Gamma} + \vec{i}^*) - 2\kappa U_n a_{\Gamma}\right) + \left\langle \vec{n}\cdot\left(\vec{w}a_V + \vec{J}_a^*\right)\right\rangle - \sigma_{a\Gamma}\right]d\Gamma = 0$$

откуда вытекает условие на поверхности Γ

$$\frac{\partial a_{\Gamma}}{\partial t} + div_{\Gamma}(\vec{U}_{\Gamma}a_{\Gamma} + \vec{i}^*) + \left\langle \vec{n}\cdot\left(\vec{w}a_V + \vec{J}_a^*\right)\right\rangle - \sigma_{a\Gamma} = 0 \qquad (11)$$

Здесь угловые скобки означают скачок характеристики при переходе через поверхность Γ со стороны области V_2 в область V_1. Возвращаясь из собственной системы отсчета K^M в исходную систему, учитывая соотношения (10), получим следующее выражение для предельного соотношения

$$\frac{\partial a_\Gamma}{\partial t} + \left(div_\Gamma(\vec{u}_\Gamma a_\Gamma + \vec{i}^*) - 2\kappa u_n a_\Gamma \right) + \left\langle \vec{n} \cdot \left(\vec{\mathrm{v}} a_V + \vec{J}_a^* \right) \right\rangle - \sigma_{a\Gamma} = 0 \qquad (12)$$

В случае контактного разрыва имеем $\vec{\mathrm{v}}_1 = \vec{\mathrm{v}}_2 = \vec{u}$, и соотношение (12) приобретает вид

$$\frac{\partial a_\Gamma}{\partial t} + div_\Gamma(\vec{\mathrm{v}}_\Gamma a_\Gamma + \vec{i}^*) - 2\kappa \mathrm{v}_n a_\Gamma + \left\langle \vec{n} \cdot \vec{J}_a^* \right\rangle - \sigma_{a\Gamma} = 0 \qquad (13)$$

2^0. Рассмотрим применение полученного соотношения к вязкой теплопроводной жидкости, имеющей свободную поверхность Γ, на которой действует поверхностное натяжение. Эксперименты говорят о наличии зависимости коэффициента поверхностного натяжения α от температуры T [4]. С увеличением температуры α монотонно убывает нелинейным образом, но так, что вторая производная $d^2\alpha / dT^2 < 0$. При некоторой критической температуре T^* коэффициент α обращается в нуль. Наличие поверхности раздела фаз в объеме приводит к нарушению свойства аддитивности термодинамических потенциалов и появлению «избыточных» внутренней энергии и энтропии [6]. Удельная поверхностная энергия u_Γ, играющая роль a_Γ, равны

$$u_\Gamma = \alpha - T\alpha' \qquad \left(\alpha' = \frac{d\alpha}{dT} \right) \qquad (14)$$

Полная энергия e, состоящая из кинетической $e_{кин}$, потенциальной φ и внутренней u, при наличии поверхности Γ раздела фаз должно быть дополнено «избыточной» энергией u_Γ. Поверхностный конвективный поток $\vec{i}^*$ определяется мощностью контурных сил (сил поверхностного натяжения) [2,7]

$$\oint_L \alpha \vec{\nu} \cdot \vec{\mathrm{v}}_\Gamma dl$$

В данном случае в соотношении (13) необходимо положить: $a_\Gamma = u_\Gamma$, $\vec{J}_a^* = -\hat{\sigma} \cdot \vec{\mathrm{v}} - \lambda \nabla T$ ($\hat{\sigma}$ - тензор напряжений, λ - коэффициент теплопроводности), $\vec{i}^* = -\alpha \vec{\mathrm{v}}_\tau$, $\sigma_{a\Gamma} = 0$ (закон сохранения полной энергии). Тогда уравнение (13) принимает следующий вид

$$\alpha'' \frac{\partial T}{\partial t} + div_\Gamma\left(\vec{\mathrm{v}}_\Gamma \alpha' T \right) + 2\kappa \mathrm{v}_n (\alpha - \alpha' T) + \left\langle \vec{n} \cdot \hat{\sigma} \cdot \vec{\mathrm{v}}_\Gamma + \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right\rangle = 0 \qquad \left(\alpha'' = \frac{d^2\alpha}{dT^2} \right) \qquad (15)$$

3^0. Воспользуемся данным граничным условием для рассмотрения конвективной неустойчивости нагреваемого снизу плоского слоя жидкости в приближении Буссинеска относительно монотонных возмущений [8-10].

В приближении Буссинеска делаются следующие предположения:

- пренебрегают вязкой диссипацией;
- термическое и калорическое уравнения состояния представляют линейными соотношениями

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \beta(T - \tilde{T}) \right] \qquad (16)$$

$$s(T, p) = s_0 + \frac{c_p}{\tilde{T}}(T - \tilde{T}) \qquad (17)$$

  где $\rho_0 = \rho(\tilde{T}, \tilde{p})$, $\beta = -\dfrac{1}{\rho_0} \dfrac{\partial \rho}{\partial T}(\tilde{T}, \tilde{p})$, $s_0 = s(\tilde{T}, \tilde{p})$, $\tilde{T}, \tilde{p}$ - некоторые средние значения температуры и давления, c_p - удельная теплоемкость при постоянном давлении;
- $\left| \beta(T - \tilde{T}) \right| \ll 1$ при определении левой части уравнения движения и уравнения неразрывности.

В этом случае основные уравнения принимают вид

$$div\,\vec{v}=0 \tag{18}$$

$$\rho_0\frac{d\vec{v}}{dt}=-\nabla p+\mu\Delta\vec{v}+\rho_0\left[1-\beta(T-\tilde{T})\right]\vec{g} \tag{19}$$

$$\frac{dT}{dt}=\chi\Delta T \tag{20}$$

Здесь $\chi=\lambda\rho_0^{-1}c_p^{-1}$ - коэффициент температуропроводности, μ - динамический коэффициент вязкости.

В качестве примера рассмотрим горизонтальный слой толщины h, расположенный на горизонтальной твердой поверхности Σ_0, нагреваемый снизу (рис.2). Обозначим

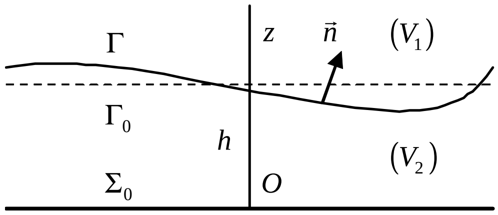

Рис.2. Горизонтальный слой

через Γ свободную поверхность слоя, и определим ее уравнением

$$F(t,x,y,z)\equiv z-h-f(t,x,y)=0 \tag{21}$$

Пусть заданы температура T_0 на дне слоя $(z=0)$ и T_a над слоем вдали от свободной поверхности. Тогда стандартные граничные условия на Σ_0,Γ будут иметь вид [1,2,9]

$$\begin{aligned}
&\vec{v}(t,x,y,0)=0, \qquad T(t,x,y,0)=T_0 \qquad (z=0)\\
&\frac{\partial f}{\partial t}+v_x\frac{\partial f}{\partial x}+v_y\frac{\partial f}{\partial y}=v_z,\ \ \langle\vec{n}\cdot\hat{\sigma}\cdot\vec{n}\rangle=2\kappa\alpha\\
&\langle\vec{n}\cdot\hat{\sigma}\cdot\vec{e}_x\rangle=\frac{\partial\alpha}{\partial x}, \qquad \langle\vec{n}\cdot\hat{\sigma}\cdot\vec{e}_y\rangle=\frac{\partial\alpha}{\partial y} \qquad (z=h+f(t,x,y))
\end{aligned} \tag{22}$$

а условие, соответствующее соотношению (15)

$$\alpha''\frac{\partial T}{\partial t}+div_\Gamma\left(\vec{v}_\Gamma\alpha'T\right)+2\kappa v_n(\alpha-\alpha'T)+\left\langle\vec{n}\cdot\hat{\sigma}\cdot\vec{v}_\Gamma+\lambda\frac{\partial T}{\partial n}\right\rangle=0 \qquad (z=h+f(t,x,y)) \tag{23}$$

В последнее выражение входит тепловой поток $q_{n1}=-\lambda_1\partial T_1/\partial n$ со стороны воздуха на поверхности Γ, что требует знания распределения $T=T_1$ в области V_1. Для устранения последней проблемы полагают, что на поверхности Γ выполняется закон теплоотдачи Ньютона с коэффициентом теплоотдачи a

$$q_{n1}=a\left(T_1-T_a\right) \qquad (z=h+f(t,x,y)) \tag{24}$$

Рассмотрим равновесие слоя, когда $\vec{v}=0,\ \Gamma=\Gamma_0,\ T=T^0=T_0-Az\ \ (A=const)$, $p=p^0(z)$. Уравнения равновесия и граничные условия имеют вид

$$\nabla p^0=\rho_0\left[1-\beta\left(T_0-\tilde{T}\right)\right]\vec{g},\quad \Delta T^0=0, \tag{25}$$

и граничные условия

$$T^0(0)=T_0,\quad \lambda\left.\frac{dT^0}{dz}\right|_{z=h}=a\left(T_a-T^0(h)\right),\quad p^0(h)=p^a \tag{26}$$

Отсюда видно, что равновесное распределение температуры можно представить линейной зависимостью

$$T^0=T_a+A\left(h+\lambda/a-z\right) \tag{27}$$

Исследование устойчивости равновесия будем рассматривать относительно бесконечно малых возмущений $\vec{v},T'=T-T^0,\ p'=p-p^0,\ f$. Введем следующие масштабы величин

$h, \nu = \mu / \rho_0, \rho_0$, и представим дальнейшие соотношения в безразмерных переменных. Краевая задача для малых возмущений в линейном приближении вытекает из уравнений (18)-(20) и граничных условий (22), (23), (24) и имеет следующий вид

$$
\begin{gathered}
div\,\vec{\mathrm{v}} = 0 \\
\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial t} = -\nabla p' + \Delta\vec{\mathrm{v}} + \mathrm{Ra}\,T'\vec{e}_z \\
\mathrm{Pr}\frac{\partial T'}{\partial t} - \mathrm{v}_z = \Delta T' \\
\vec{\mathrm{v}} = 0, \quad T' = 0 \qquad (z = 0) \\
\frac{\partial f}{\partial t} = \mathrm{v}_z, \quad \mathrm{We}\,\Delta_{xy} h - 2\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z} + p' = 0 \\
\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial z} - \mathrm{Ma}\frac{\partial T'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial z} - \mathrm{Ma}\frac{\partial T'}{\partial y} = 0 \\
-K_2 T^0 \frac{\partial T'}{\partial t} + K_1\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z} + \frac{\partial T'}{\partial z} + \mathrm{Bi}\,T' - \mathrm{Bi}\,h = 0 \qquad (z = h)
\end{gathered}
\tag{28}
$$

где введены безразмерные параметры - числа Релея, Прандтля, Вебера, Марангони, Био

$$
\mathrm{Ra} = A\frac{\beta g h^4}{\nu\chi}, \quad \mathrm{Pr} = \nu/\chi, \quad \mathrm{We} = \frac{\alpha h}{\chi\mu}, \quad \mathrm{Ma} = \frac{\alpha' A h^2}{\mu\chi}, \quad \mathrm{Bi} = \frac{ah}{\lambda} \tag{29}
$$

и два новых безразмерных параметра

$$
K_1 = \frac{\alpha'\chi}{\lambda h} = \frac{\alpha'}{\rho_0 c_p h}, \quad K_2 = A\frac{\alpha''\nu}{\lambda} \tag{30}
$$

Следуя работам [8-10], представим все разыскиваемые величины задачи (28) в виде

$$
\begin{gathered}
\mathrm{v}_x = V_x(z)\exp\left[i\left(k_x x + k_y y\right)\right]\exp\left(\omega t\right), \quad \mathrm{v}_y = V_y(z)\exp\left[i\left(k_x x + k_y y\right)\right]\exp\left(\omega t\right) \\
\mathrm{v}_z = V_z(z)\exp\left[i\left(k_x x + k_y y\right)\right]\exp\left(\omega t\right), \quad p' = P(z)\exp\left[i\left(k_x x + k_y y\right)\right]\exp\left(\omega t\right) \\
T' = T(z)\exp\left[i\left(k_x x + k_y y\right)\right]\exp\left(\omega t\right), \quad f = H\exp\left[i\left(k_x x + k_y y\right)\right]\exp\left(\omega t\right)
\end{gathered}
\tag{31}
$$

Устойчивому состоянию равновесия соответствуют зависимости (31) с отрицательными значениями вещественной части комплекснозначного параметра ω, а граница устойчивости определяется уравнением $\mathrm{Re}\,\omega = 0$. Принцип смены устойчивости, носящий эвристический характер, утверждает, что устойчивость равновесия теряется относительно монотонных возмущений, т.е. на границе устойчивости $\mathrm{Im}\,\omega = 0$, а, следовательно, в целом $\omega = 0$.

Применим принцип смены устойчивости и подставим в задачу (28) соотношения (31). Рассмотрим частный случай $\mathrm{Ra} = 0$ [9]. Обозначим через $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ и исключим в полученных формулах все переменные, кроме T. Тогда получим следующую краевую задачу относительно этой переменной

$$
\begin{gathered}
\frac{d^6 T}{dz^6} - 3k^2\frac{d^4 T}{dz^4} + 3k^4\frac{d^2 T}{dz^2} - k^6 T = 0 \qquad (0 < z < 1) \\
T = 0, \quad \frac{d^2 T}{dz^2} - k^2 T = 0, \quad \frac{d^3 T}{dz^3} = 0 \qquad (z = 0) \\
\frac{d^2 T}{dz^2} - k^2 T = 0, \quad \frac{d^4 T}{dz^4} - k^2\left(k^2 + \mathrm{Ma}\right)T = 0, \qquad (z = 1) \\
\frac{d^5 T}{dz^5} - k^2\left(4 + \frac{\mathrm{K}_1\mathrm{We}}{\mathrm{Bi}}k^2\right)\frac{d^3 T}{dz^3} + k^4\left[3 + \frac{\mathrm{We}}{\mathrm{Bi}}\left(k^2 - 1\right)\right]\frac{dT}{dz} - k^4\,\mathrm{We}\,T = 0
\end{gathered}
\tag{32}
$$

Общее решение первого уравнения (32) можно записать в виде

$$
T = \left(C_1 + C_2 z + C_3 z^2\right)sh(kz) + \left(C_4 + C_5 z + C_6 z^2\right)ch(kz)
$$

Оставшиеся граничные условия приведут к нетривиальному решению при выполнении условия

$$\mathrm{Ma} = \frac{F_1}{F_2} \tag{33}$$

где

$$\begin{aligned}
F_1 &= 8\,\mathrm{We}\Big\{k\left(k\,sh^3k + sh^2k\,chk - k\,shk\,ch^2k\right) + \frac{1}{\mathrm{Bi}}\Big[\mathrm{K}_1 k^4\left(k\,sh^2k\,chk + shk\,ch^2k - k\,ch^3k\right) + \\
&+k^2\left(shk\,ch^2k - k^2\,shk\,ch^2k + k\,sh^2k\,chk - k\,ch^3k + k^2\,ch^3k - k^3 sh^2k\,chk\right)\Big]\Big\} \\
F_2 &= \Big\{\Big[\mathrm{K}_1\left(3k^2 sh^3k - k^5\,shk\,chk + k^5\,ch^3k + 4k^4\,sh^3k - 4k^4\,ch^2k\,shk\right) + k^2\,shk + \\
&+k^3\,ch^3k - k^3\,sh^2k\,chk - sh^3k - k^5\,ch^3k + k^5\,sh^2k\,chk\Big]\frac{\mathrm{We}}{\mathrm{Bi}} + 8k^2\,sh^3k - 8k^2\,shk\,ch^2k\Big\}
\end{aligned} \tag{34}$$

На рис.3 приведены графики, изображающие границу устойчивости в плоскости переменных $\mathrm{Ma}-k$ для различных значений параметра K_1.

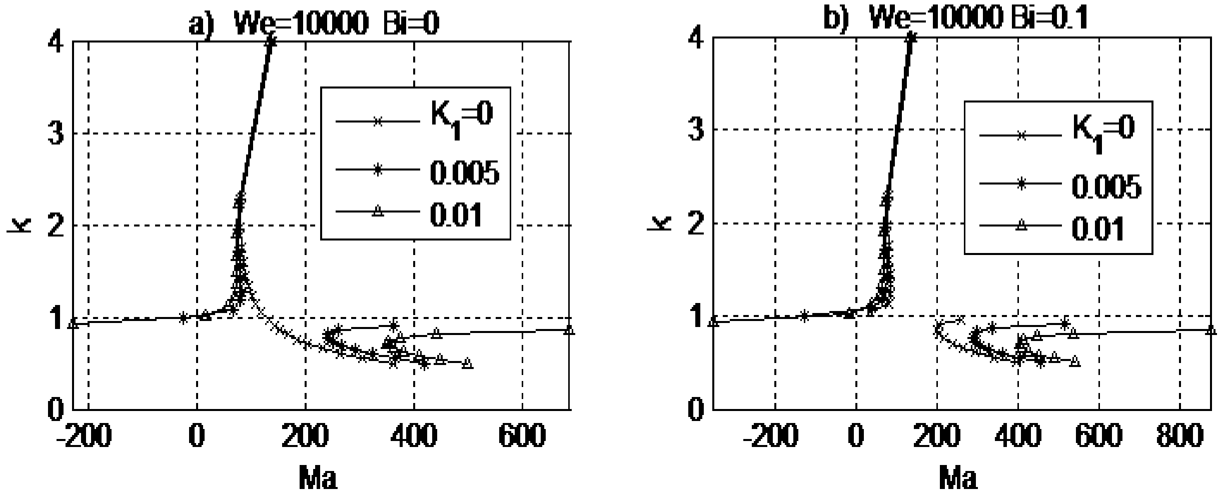

Рис3. Граница устойчивости

Из графиков видно, что кривые претерпевают разрыв вдоль оси абсцисс и имеют горизонтальные асимптоты $k = k_i^*$ $(i = 1,2,3)$. Соответствующие значения для k_i^* приведені в таблице 1

Таблица 1. Значения величины k_i^*

i	K_1	k_i^*	
		Bi=0	Bi=0.1
1	0	1.0	1.0006
2	0.005	0.9454	0.9462
3	0.01	0.8883	0.8893

Точки плоскости (k, Ma), лежащие левее границы устойчивости, соответствуют устойчивому положению равновесия. Как видно из графиков, для любого значения k найдется точка указанной плоскости, лежащая правее границы устойчивости. Это говорит о том, что не существует устойчивого положения равновесия, если допускаются возмущения с любой длиной волны. В случае наложения ограничения на величину k устойчивость равновесия возможна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л.И. Механика сплошных сред. Т. 1. М.: Наука. -1976. - 536 с.

2. Тарапов И.Е. Механика сплошной среды. В 3 ч. Ч.2: Общие законы кинематики и динамики. Харьков: Золотые страницы, 2002. - 516 с.
3. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М.: Мир. 1974. - 304 с.
4. Оно С., Кондо С. Молекулярная теория поверхностного натяжения в жидкостях. М.: Изд-во иностр., литер., 1963. 292 с.
5. Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ. М.: Физматгиз, 1963. - 412 с.
6. Базаров И.П. Термодинамика. М.: Высшая школа, 1983. 344 с.
7. Тарапов И.Е., Иевлев И.И. Предельное уравнение баланса полной энергии на тангенциальном разрыве. Механика, теория управления и математическая физика. Вестн. Харьк. ун-та, 1982, №230. С.3-7.
8. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 392 с.
9. Scriven L.E., Sternling C.V. On cellular convection driven by surface gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity. Journal Fluid Mechan. 1964, 19, part 3, p. 321-340.
10. Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д. и др. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.