МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені В. Н. КАРАЗІНА

О. О. АРШАВА
І. М. ЖОВТОНІЖКО

ОСНОВИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Методичні рекомендації до самостійної роботи для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю С2 «Політологія»

Електронне видання

Харків – 2025

УДК 517
А 89

Рецензенти:

Н. П. Стогній – кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики Харківського національного університету радіоелектроніки;

М. Г. Кокодій – доктор фізико-математичних наук, професор, професор закладу вищої освіти кафедри квантової радіофізики факультету радіофізики, біометричної електроніки та комп'ютерних систем Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

Затверджено до розміщення в мережі Інтернет рішенням Науково-методичної ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 1 від 23 жовтня 2025 року)

Аршава О. О.

А 89 Основи вищої математики : методичні рекомендації до самостійної роботи для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю С2 «Політологія» [Електронний ресурс] / О. О. Аршава, І. М. Жовтоніжко. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2025. – (PDF 36 с.)

Методичні рекомендації містять тематичний план навчальної дисципліни; питання для самоконтролю та завдання для самостійної роботи з кожної теми; приклади розв'язання типових варіантів контрольних робіт; екзаменаційні теоретичні питання, а також зразок екзаменаційного білета.

Навчальне видання призначається для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, які навчаються за спеціальністю С2 «Політологія».

УДК 517

Електронне навчальне видання комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимі

АРШАВА Олена Олександрівна
ЖОВТОНІЖКО Ірина Миколаївна

ОСНОВИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Методичні рекомендації до самостійної роботи для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю С2 «Політологія»

В авторській редакції

Підписано до розміщення 23.10.2025. Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 1,14. Обсяг 1,173 Мб. Зам. № 345/25.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009
Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Сучасна підготовка здобувачів вищої освіти в галузі соціальних та поведінкових наук, зокрема за спеціальністю С2 «Політологія», здійснюється на основі компетентнісного підходу, спрямованого на формуванні інтегральної, загальних та професійних компетентностей. Із метою забезпечення формування цілісної системи знань освітній процес має інтегративну спрямованість. Змістовне поєднання обов'язкових і вибіркових компонентів освітньо-професійних програм забезпечує синтез теоретичних знань і практичних навичок.

Навчальні дисципліни математичного змісту є базовим інструментом для розв'язання завдань міждисциплінарного підходу в освіті. Математичні методи застосовуються для аналізу й моделювання процесів у соціальних науках, що дає змогу глибше осмислити, прогнозувати та описувати зміни й взаємодії між різноманітними чинниками [1, 4].

Математична компетентність в дослідницькій діяльності здобувачів вищої освіти дозволяє встановити причинно-наслідкові зв'язки між прийнятими рішеннями та їхнім впливом на результати, що забезпечує можливість формування більш обґрунтованих висновків.

Опанування освітньої компоненти «Основи вищої математики» надає здобувачам доступ до різноманітних форм наукової діяльності, що корелюють з їхнім майбутніми професійними траєкторіями:

- моделювати та аналізувати демографічні процеси (зростання чисельності, старіння населення тощо) та формувати прогнози щодо їх подальшого розвитку;
- прогнозувати динаміку поширення епідемій або інших захворювань серед популяцій із урахуванням таких ключових параметрів, як темпи інфікування та швидкість одужання;
- аналізувати темпи соціальних трансформацій, включаючи міграційні потоки, модифікацію групової ідентичності та перебудову інституційних взаємозв'язків;

- будувати моделі складних процесів, що визначаються взаємодією численних чинників, із метою глибокого вивчення їхньої структурної динаміки;
- прогнозувати траєкторії подальшого розвитку складних систем та ідентифікувати можливі загрози, що можуть вплинути на їхню стабільність чи ефективність.

Самостійна робота − одна з основних форм навчальної діяльності, передбаченою освітньо-професійною програмою «Політичні технології та аналіз політики». У закладах вищої освіти її організація має важливе значення, адже саме така форма сприяє глибшому засвоєнню матеріалу, розвитку навичок самостійного опрацювання інформації та формуванню творчого потенціалу здобувачів вищої освіти [2, 7].

Самостійне виконання завдань сприяє закріпленню набутих знань, розвитку критичного мислення та формуванню власної аргументованої думки щодо навчального матеріалу, опрацьованого на лекціях і семінарських заняттях.

Рефлексивний підхід до засвоєння математичних знань забезпечує формування навичок самостійного пошуку інформації, її осмислення та аналізу, а також здатність робити обґрунтовані висновки й ефективно застосовувати здобуті знання в реальних практичних ситуаціях.

Самостійна робота здобувачів вищої освіти спрямована на самоперевірку засвоєних теоретичних положень і практичних навичок, набутих під час занять під керівництвом викладача. Вона також дає змогу підготуватися до поточного та підсумкового семестрового контролю, а також ґрунтовно опрацювати окремі розділи вищої математики [3, 6].

Запропоноване навчальне видання розроблено з метою методичної підтримки здобувачів вищої освіти зі спеціальності С2 «Політологія» в ефективному плануванні та реалізації самостійної навчальної діяльності.

Навчальне видання розроблено авторами з метою надання методичної підтримки формування індивідуальної освітньої траєкторії здобувачів. До матеріалу включено: тематичний план навчальної дисципліни «Основи вищої математики», питання для самоконтролю, завдання для самостійного опрацювання кожної теми, приклади розв'язання типових варіантів контрольних робіт, теоретичні питання для підготовки до екзамену та зразок екзаменаційного білету.

Значна увага приділялася підбору прикладних математичних задач, що сприяють систематизації математичних знань, розширенню наукового світогляду та підвищенню мотивації до опанування здобувачами вищої математики.

1. ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Розділ 1. Елементи математичної логіки та теорії множин.

Тема 1. Елементи математичної логіки.

Тема 2. Теорія множин.

Розділ 2. Лінійна алгебра та аналітична геометрія.

Тема 3. Матриці та визначники.

Тема 4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Тема 5. Елементи векторної алгебри.

Тема 6. Прямокутна система координат на площині.

Тема 7. Пряма лінія на площині.

Тема 8. Метричний простір та елементи кластерного аналізу в політичних дослідженнях.

Розділ 3. Основи математичного аналізу.

Тема 9. Вступ до аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної.

Тема 10. Диференціальне числення функцій багатьох змінних.

Тема 11. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Невизначений інтеграл.

Тема 12. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Визначений інтеграл.

Тема 13. Диференціальні рівняння. Модель Томаса Мальтуса.

Розділ 4. Елементи теорії ігор.

Тема 14. Теорія ігор і її застосування в соціально-політичних студіях.

2. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ТА ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Тема 1. Елементи математичної логіки

Питання для самоконтролю

1. Яка наука називається логікою? Опишіть предмет та сформулюйте завданням математичної логіки?

2. Сформулюйте означення висловлення. Яке висловлення називають тотожно істинним, а яке висловлення – тотожно хибним? Наведіть приклади тотожно істинного та тотожно хибного висловлення.

3. Яка множина називається універсальною множиною? Наведіть приклад універсальної множини.

4. Що називають логічною операцією?

5. Сформулюйте складні висловлення за допомогою логічних операцій (заперечення, диз'юнкції, кон'юнкції, імплікації та еквівалентності).

6. Запишіть таблицю істинності для основних логічних операцій (заперечення, диз'юнкції, кон'юнкції, імплікації та еквівалентності).

7. Яким чином можна перевірити логічну еквівалентність двох висловлень?

8. У чому полягає метод доведення від супротивного? Продемонструйте застосування цього метода учасниками політичних дебатів.

Завдання для самостійної роботи

1. Використовуючи логічну структуру висловлення та враховуючи відомі значення елементарних висловлень, із яких утворюється складне висловлення, визначити істинність чи хибність наступних висловлень:

(а) Число 888 кратне 2, але не кратне 11.

(б) Число 57 кратне 3 або 12.

(в) Принаймні одне із чисел 10, 23 або 29 є парним.

(г) $-3 > -5$ та $(-1/3) > (-1/5)$.

(д) $-3 > -4$, але $(-3)^2 < (-4)^2$.

(е) Якщо $7 < 9$, то $43 < 59$.

(є) Якщо число 36 кратне 6, то число 36 кратне 3.

(ж) Якщо число 15 кратне 6, то число 15 кратне 3.

(з) Якщо число 15 кратне 5, то число 15 кратне 7.

(и) Якщо $5 < 6$ та $6 < 2$, то $5 < 2$.

(і) 76 кратне 48 тоді й лише тоді, коли 76 кратне 8 та 76 кратне 6.

(ї) Неправильно, що принаймні одне з чисел 33, 59, 79 є простим.

(й) Неправильно, що виконується хоч б одна з нерівностей $5 < 7$ чи $2 < 9$.

(к) 150 кратне 25 тоді й тільки тоді, коли 150 кратне 2 та 150 кратне 5.

2. Задано елементарні висловлення: $A = \{7 - \text{ціле число}\}$;
$B = \{15 - \text{парне число}\}$; $C = \{18 - \text{просте число}\}$; $D = \{\text{число 20 кратне 5}\}$.

Сформулювати словами складені висловлення та визначити їх істинність чи хибність:

(а) $A \wedge B$; (б) $A \vee B$; (в) $A \to \neg B$;
(г) $(A \vee C) \to B$; (д) $(A \vee (B \wedge D)) \to \bar{C}$; (є) $(\bar{A} \wedge C) \to D$;
(е) $(\bar{A} \vee \bar{D}) \leftrightarrow B$; (ж) $(\bar{A} \to \bar{C}) \wedge B$.

3. Скласти таблицю істинності складних висловлень:

$\bar{A} \wedge B \rightarrow A \vee B$; $A \rightarrow B \leftrightarrow \bar{A} \vee B$; $A \rightarrow (B \vee C)$;

$A \rightarrow (A \rightarrow B)$; $(A \vee B \rightarrow \bar{C}) \rightarrow A$.

4. За допомогою таблиць істинності перевірити еквівалентність висловлень:

$(A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee B)$ та A; $(\bar{A} \wedge B) \vee (A \vee \bar{B})$ та A; $(A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee B)$ та B;

$\bar{A} \wedge B \vee \bar{C} \wedge B$ та $B \wedge \overline{A \wedge C}$; $\bar{A} \wedge (A \vee B)$ та $\bar{A} \wedge B$; $\bar{A} \vee A \wedge B$ та $\bar{A} \vee B$.

5. Переконатися в тому, що висловлення є суперечністю:

$$\overline{\left((A \rightarrow B) \rightarrow \left((A \wedge \bar{B}) \rightarrow B\right)\right)}.$$

6. Довести, що висловлення $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))$ є тавтологією.

7. Для задач 5 і 6 виконати перевірку на цифрові платформі WolframAlpha (побудувати таблицю істинності та логічну схему складного висловлення).

Тема 2. Теорія множин

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення множини. Які способи завдання множин ви знаєте? Що називають потужністю скінченної множини?

2. Що називають підмножиною заданої множини? Наведіть приклад підмножини.

3. Що називають булеаном множини? Як визначається потужність булеану?

4. Надайте означення операцій над множинами (об’єднання, перетинання, різниця, симетрична різниця, доповнення).

5. Який існує спосіб графічної ілюстрації відносин між множинами? Що називають діаграмами Ейлера – Венна?

6. Продемонструйте операції над множинами, використовуючи діаграми Ейлера – Венна.

7. Сформулюйте закони де Моргана та ідемпотентності для операцій над множинами.

Завдання для самостійної роботи

1. Наведіть приклад застосування теорії множин в аналізі політичних процесів (на прикладі діяльності політичної організації). За допомогою діаграми Ейлера – Вена, продемонструвати спільні позиції та відмінність у програмах трьох політичних партій.

2. Задана множина $A = \{x | x \epsilon \mathbb{N}, 4^x \leq 64\}$. Потрібно виписати всі підмножини множини A.

3. Виконати операції $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $A \Delta B$, $B \backslash A$ над множинами A і B, якщо

а) $A = \{x | x \epsilon \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 6\}, B = \{0,1,2,3,4,5\}$;

б) $A = \{x | x \epsilon \mathbb{N}, x \leq 30, x \vdots 4\}, B = \{x | x \epsilon \mathbb{N}, x \leq 40, x \vdots 6\}$.

4. Використовуючи діаграму Ейлера – Венна, заштрихуйте ті її частини, що зображають множину

а) $A\bigcup\left(B\setminus A\right)\bigcup\overline{B}$; б) $(A\cup\bar{B})\cap(\bar{C}\setminus B)$.

5. Перевірте правильність тотожності

$(A\cap\bar{B}\cup C)\cap(A\cup B)\cap\bar{C}=(A\cap B)\setminus C$.

Тема 3. Матриці та визначники

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте правила обчислення визначників другого та третього порядку.
2. Що називають мінором елемента визначника?
3. Що називають алгебраїчним доповненням елемента визначника?
4. Які перетворення не змінюють величину визначника?
5. Яке перетворення змінює лише знак визначника?
6. За яких умов визначник може дорівнювати нулю?
7. Сформулюйте означення матриці.
8. Яким чином визначається розмір матриці? Які типи матриць вам відомі?
9. Опишіть основні операції над матрицями: додавання, віднімання матриць, множення матриці на число і добуток матриць. Сформулюйте властивості операцій над матрицями.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити визначники другого порядку:

а) $\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -5 & 1\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}4 & -5\\ 1 & 2\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 11\end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix}a+1 & b-c\\ a^2+a & ab-ac\end{vmatrix}$.

2. Розв’язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix}3x & -1\\ x & 2x-3\end{vmatrix}=\frac{3}{2}$; б) $\begin{vmatrix}4\sin x & 1\\ 1 & \cos x\end{vmatrix}=0$; в) $\begin{vmatrix}\cos 6x & -\sin 3x\\ \sin 3x & \cos 6x\end{vmatrix}=0$.

3. Розв'язати нерівності:

а) $\begin{vmatrix}3x-5 & 4\\ x & 1\end{vmatrix}>0$; б) $\begin{vmatrix}2x-3 & -1\\ 7 & 2x\end{vmatrix}\le 11$.

4. Використовуючи правило трикутників (правило Саррюса), обчислити визначник третього порядку $\begin{vmatrix}5 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -4\\ 6 & 0 & -3\end{vmatrix}$.

5. Обчислити алгебраїчні доповнення елементів 2-го рядка визначника:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 5 & -2 & -1\\ 0 & 4 & 1\end{vmatrix}.$$

6. Визначити матрицю $D=3A-BC+A^2$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Обчислити матрицю $B = A^2 - 3A \cdot A^T + 2A \cdot E$, якщо задана матриця A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

8. Визначити матрицю A^{-1}, обернену до матриці A, та зробити перевірку:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Тема 4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Питання для самоконтролю

1. Що називається системою m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими?

2. Яка система лінійних рівнянь називається сумісною; несумісною; визначеною; невизначеною?

3. Сформулюйте теорему Крамера для розв’язання системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими.

4. За яких умов система трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими має єдиний розв’язок; не має розв’язків; має безліч розв’язків?

5. У чому полягає суть метода Гауса для розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь? Які дії над елементами рядків та стовпців матриці називають елементарними перетвореннями матриці?

6. Що називають рангом матриці?

7. Сформулюйте теорему Кронекера - Капеллі про сумісність системи лінійних алгебраїчних рівнянь та поясніть на прикладі її застосування.

8. Що називають базисним мінором та базисними невідомими системи лінійних алгебраїчних рівнянь? Сформулюйте означення базисного розв’язку такої системи.

9. Сформулюйте означення загального розв’язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Завдання для самостійної роботи

1. Розв’язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -9, \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$ за правилом Крамера та графічним методом. За допомогою платформи GeoGebra надати візуалізацію розв’язку системи двох рівнянь із двома змінними та перевірити результат, отриманий аналітичним та графічним способами.

2. Розв’язати системи рівнянь двома способами:

а) за формулами Крамера; б) методом Гауса.

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 17; \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2; \\ -x_1 + x_3 = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 = 6; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + 5x_3 = 13; \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14; \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 17. \end{cases}$

2. Дослідити на сумісність систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2; \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4. \end{cases}$$

3. За теоремою Кронекера - Капеллі дослідити системи лінійних рівнянь

а) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + \quad x_3 = -8; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -7; \\ -2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + \quad x_3 = 1; \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 3; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

і у випадку сумісності обчислити їх розв'язки методом Гауса.

Тема 5. Елементи векторної алгебри

Питання для самоконтролю

1. Що називається вектором?

2. Що називають координатами вектора? Як визначити координати вектора, якщо відомі координати його початку та кінця?

3. Що називають модулем вектора? Яким чином обчислити модуль вектора, якщо відомі його координати?

4. Які вектори називають колінеарними; компланарними; рівними між собою? Наведіть приклади таких векторів.

5. Запишіть розкладання вектора за координатним базисом у тривимірному просторі та надайте графічне пояснення.

6. Як визначаються лінійні операції додавання, віднімання, множення на число над векторами? Надати їх геометричні інтерпретації.

7. Що називається скалярним добутком двох векторів? Запишіть формулу для обчислення косинуса кута між векторами. Сформулюйте умову перпендикулярності двох векторів.

8. Що називають проєкцією вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$? Запишіть формулу для обчислення проєкції одного вектора на інший.

9. Що називається векторним добутком двох векторів і в чому полягає його геометричний зміст? Сформулюйте умову колінеарності двох векторів.

10. Що називається мішаним добутком трьох векторів і в чому полягає його геометричний зміст? Сформулюйте умову компланарності трьох векторів у просторі.

11. Як виконуються операції над векторами, що задані координатами?

Завдання для самостійної роботи

1. Задано дві координати вектора: $a_x = 4$; $a_y = -12$. Визначити його третю координату a_z, якщо $\left|\vec{a}\right| = 13$.

2. Визначити координати кінця вектора $\vec{a} = \{2; -3; -1\}$, якщо його початок збігається з точкою $M\ (3;\ -2;\ 1)$.

3. Визначити орт вектора $\vec{a} = \{-2; -3; 1\}$.

4. Обчислити довжину та визначити напрям вектора, якщо задано його розкладання за координатним базисом $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$. Зобразити вектор у тривимірному просторі.

5. Задано точки $A(1;2;3)$ і $B(3;4;6)$. Визначити координати вектора $\vec{AB}$, його довжину і напрямні косинуси.

6. Визначити, за якого значення α два вектори

$$\vec{a} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k} \text{ і } \vec{b} = \vec{2i} + \vec{j} - \vec{2k}$$

будуть взаємно перпендикулярними.

7. Дано вектори $\vec{a}=\{0;-2;3\}$, $\vec{b}=\{2;-1;3\}$, $\vec{c}=\{-1;-2;5\}$.Обчислити $np_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.

8. Дано вектори $\vec{a}=\{3;-1;0\}$, $\vec{b}=\{2;-4;-1\}$. Обчислити координати вектора $\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) \times \vec{b}$.

9. Обчислити кут при вершині A трикутника ABC, якщо задано координати його вершин $A(-1;\ 4;\ -3)$, $B(3;\ 2;\ -1)$, $C(1;\ -2;\ 1)$.

10. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = -3\vec{k} - 2\vec{j} \text{ і } \vec{b} = \vec{3i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}.$$

11. Задано координати векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a}=\{2;-1;2\}, \vec{b}=\{1;-2;-3\}, \vec{c}=\{3;-5;7\}.$$

Перевірити, чи компланарні ці вектори? Використовуючи платформу GeoGebra, надати візуалізацію отриманої відповіді.

Тема 6. Прямокутна система координат на площині

Питання для самоконтролю

1. Яку систему координат на площині називають прямокутною (декартовою)?

2. Що називають координатною площиною? Яку назву мають осі, що утворюють прямокутну систему координат на площині?

3. Яким чином можна задати положення точки на площині? Що називають абсцисою та ординатою точки?

4. Надайте зображення точки, абсциса якою дорівнює нулю. На якій координатній осі розміщується точка, ордината якою дорівнює нулю?

5. Надайте означення геометричного місця точок (ГМТ) на площині?

6. За якою формулою знаходять відстань між двома точками на площині, які задані своїми координатами?

7. Як визначити координати середини відрізка на площині за умови, що задано координати його кінців?

8. Поясніть, яким чином визначити на площині координати точки перетину лінії, що задана своїм рівнянням, з осями координат?

9. Дві лінії на площині перетинаються в одній точці. Як обчислити координати точки перетину?

Завдання для самостійної роботи

1. Точка на площині рухається так, що в кожний момент руху вона рівновіддалена від точок $A(3;-2)$ і $B(-7;-2)$. Скласти рівняння траєкторії руху точки.

2. Скласти рівняння геометричного місця точок на площині, для яких відношення відстаней до даної точки $F(-4;\ 0)$ та до даної прямої $4x+25=0$ дорівнює $\frac{2}{3}$. Надати геометричну інтерпретацію відповіді задачі.

3. Скласти рівняння геометричного місця точок на площині, для яких різниця квадратів відстаней до двох точок $A(-5;\ 0)$ і $B(5;\ 0)$ дорівнює 6. Надати геометричну інтерпретацію відповіді задачі.

4. Записати рівняння лінії, кожна точка якої рівновіддалена від точки $A(5;3)$ та від осі ординат.

5. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої знаходиться на відстані, що вдвічі більша до точки $A(5;0)$, ніж до осі ординат.

6. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої знаходиться на відстані, що втричі більша до точки $A(3;0)$, ніж до прямої $x=2$.

7. Використовуючи платформу GeoGebra, побудувати графіки ліній, рівняння яких складено в задачах 4, 5 та 6.

Тема 7. Пряма лінія на площині

Питання для самоконтролю

1. Яке рівняння називають загальним рівнянням прямої на площині? Проведіть дослідження загального рівняння прямої в залежності від значень його коефіцієнтів та надайте геометричну інтерпретацію.

2. Сформулюйте означення кутового коефіцієнта прямої. Запишіть рівняння прямої з заданим кутовим коефіцієнтом.

3. Виведіть рівняння прямої, яка проходить: через дві задані точки площини; через задану точку в заданому напрямі.

4. Запишіть рівняння прямої на площині «у відрізках» на координатних осях та сформулюйте його геометричний зміст.

5. Сформулюйте умови паралельності й перпендикулярності двох прямих на площині, якщо: прямі задані загальними рівняннями; рівняннями з кутовим коефіцієнтом.

6. У якому випадку дві прямі на площині перетинаються? Як визначити точку перетину двох прямих на площині, що задані загальними рівняннями?

7. Запишіть формули для обчислення кута між прямими на площині.

Завдання для самостійної роботи

1. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо середини його сторін мають координати: $M_1(-2;1), M_2(4;3), M_3(3;-2)$.

2. Записати загальне рівняння прямої, якщо точка $P(5;-6)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю пряму.

3. Визначити координати точки Q, симетричної точці $P(1;\ -4)$ відносно прямої $3x-2y-5=0$.

4. Задано вершини трикутника: $A(2;-1), B(-3;1), C(3;4)$. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини A на медіану, що проведена з вершини B.

5. Визначити, за яких значень m і n прямі

$$mx-3y-1=0; 5x-4y-n=0$$

а) мають одну спільну точку; б) паралельні; в) збігаються.

Надати геометричну інтерпретацію отриманих відповідей.

6. Обчислити площу трикутника, що відтинає від координатного кута пряма $5x-3y-15=0$.

7. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(2;-3)$ і відтинає на координатних осях відмінні від нуля відрізки однакової величини (кожний відрізок вважається напрямленим від початку координат).

8. Точка $A(4;-3)$ є вершиною квадрата, одна сторона якого лежить на прямій $x-2y-7=0$. Обчислити площу цього квадрату.

9. Обчислити відстань між паралельними прямими $2x-3y+15=0$ і $8x-12y+25=0$.

10. Визначити кут між двома прямими на площині:

а) $y=-4x;\ 3x-y+7=0$;

б) $4x+2y-3=0;\ 6x+3y+8=0$.

11. Через точку перетину двох прямих $x-y+4=0$ і $4x+2y-19=0$ проведено пряму, паралельну до прямої $5x-3y+2=0$. Скласти її рівняння. Продемонструвати графічно розв'язок задачі.

Тема 8. Метричний простір та елементи кластерного аналізу в політичних дослідженнях.

Питання для самоконтролю

1. Що називають метричним простором?
2. Надайте означення метрики як функції відстані.
3. Які властивості метрики мають виконуватися для того, щоб множина з заданою метрикою (функцією відстані) стала метричним простором?
4. Наведіть приклади метричних просторів та перевірте виконання для них аксіом метрики.

5. Сформулюйте загальне означення кластеризації. Опишіть алгоритм кластеризації.

6. Що називають дендрограмою?

7. Які методи кластерного аналізу використовують в політичних дослідженнях?

Завдання для самостійної роботи

1. Розробіть кластерні моделі:

а) групування політичних акторів (політичних партій, громадських організацій, лідерів суспільства та електорату) на основі їх політичних уподобань та ідеологій;

б) політичних регіонів в країні на основі їх демографії та соціально-економічних умов.

2. Шість підприємств характеризуються двома ознаками: об'ємом продаж продукції та середньорічною вартістю основних виробничих активів (табл. 1). Провести кластеризацію цих підприємств за принципом «найближчого сусіда». Побудувати дендрограму.

Таблиця 1 − Статистичні показники об'єму продаж продукції і середньорічної вартості основних виробничих активів

Підприємство	1	2	3	4	5	6
Об'єм продаж продукції	1	3	5	13	12	4
Середньорічна вартість основних виробничих активів	10	11	8	4	7	2

Тема 9. Вступ до аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної.

Питання для самоконтролю

1. Дайте означення функції.

2. Які способи завдання функції ви знаєте? Навести приклади.

3. Дайте означення області визначення та області значень функції.

4. Що називають аргументом функції? Яким чином визначається значення функції за заданим значенням аргументу?

5. Що називають нулями функції? Яким чином можна визначити нулі функції, що задана графічно?

6. Дайте означення проміжків знакосталості функції.

7. Яка функція називається парною, а яка – непарною? Навести приклади парної та непарної функцій.

8. Яка функція називається складною?

9. Що називається границею функції в точці x_0?

10. Сформулюйте означення лівосторонньої та правосторонньої границі функції в точці. Навести приклад та надати ілюстрацію.

11. Сформулювати теорему про існування границі функції в точці.

12. Які властивості границь функції в точці вам відомі?

13. Сформулюйте означення функції, неперервної в точці.

14. Сформулюйте достатні умови неперервності функції в точці та продемонструйте їх виконання на прикладі.

15. Що називається похідною функції в точці x_0? Сформулюйте правила диференціювання.

16. У чому полягає геометричний зміст похідної функції в точці?

17. Запишіть таблицю похідних елементарних функцій.

18. Сформулюйте теорему про зв’язок між неперервністю та диференційованістю функції.

19. Яка функція називається зростаючою (спадаючою) на проміжку? Навести приклади.

20. Сформулюйте необхідну та достатню умови зростання (спадання) функції на проміжку.

21. Що називають максимумом (мінімумом) функції?

22. Сформулюйте достатню умову існування екстремуму функції.

23. Сформулюйте необхідну й достатню умови існування інтервалів опуклості (вгнутості) кривої.

24. Що називають точкою перегину кривої?

25. Сформулюйте необхідну й достатню умови існування точок перегину кривої.

26. Сформулюйте основні теореми диференціального числення та надайте їх геометричну інтерпретацію.

Завдання для самостійної роботи

Обчислення границь функції (розкриття невизначеностей $\frac{0}{0}$ та $\frac{\infty}{\infty}$)

Обчислити границі функцій:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1};\quad \lim_{x\to -3}\frac{x^2+4x+3}{2x^2+9x+9};\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{2x-3x^2};\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2};$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2-6x+7}{5x^2-9};\quad \lim_{x\to 3}\frac{4x^2-5x-21}{2x^2-3x-9};\quad \lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5};\quad \lim_{x\to 0}\frac{x\,tg x}{1-\cos 2x};$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{3x^2+x-1};\quad \lim_{x\to 3}\frac{4x^2-14x+6}{x^2-4x+3};\quad \lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2};\quad \lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{1-\cos 4x}.$$

Дослідження функції на неперервність

Дослідити функції на неперервність та побудувати їх графіки:

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0;\\ -(x-1)^2, & 0<x<2;\\ x-3, & x\ge 2\,.\end{cases}\quad f(x)=\begin{cases}x+3, & x\le 0;\\ 1, & 0<x\le 2;\\ x^2-2, & x>2.\end{cases}\quad f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0;\\ x^3, & 0<x\le 2;\\ x+4, & x>2.\end{cases}$$

$$f(x)=e^{\frac{1}{2-x}};\qquad f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x-3};\qquad f(x)=\frac{2}{5+4^{\frac{1}{x}}}.$$

Таблиця похідних та правила диференціювання

1. Знайти похідні функцій:

$y = \frac{sin\,2\,x}{2x+1}$; $y = (x^2+1)\,cos\,3\,x$; $y = arctg\sqrt{x^2-1}$;

$y = \frac{4\,ln\,x}{1-ln\,x}$; $y = (x^2+6x-1)e^{2x;}$ $y = ln\sqrt{\frac{sin\,x}{1+2\,cos\,x}}$;

$y = \frac{3x^2}{tg2x}$; $y = (5x+1)arctg2x$; $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1}$;

$y = \frac{3x}{sin\,2\,x}$; $y = (5x^2+1)tg2x$; $y = 3\sqrt[3]{x^5+5x^4-\frac{5}{x}}$;

$y = \frac{4\,sin\,3\,x}{x^2-4x+1}$; $y = (-2x+3)arccos4x$; $y = ln\sqrt{\frac{1+tgx}{1-tgx}} - x$.

2. Відомо, що чисельність населення в деякій географічній області (час в роках) відбуваються за законом: $x(t) = 7000 + 200 \cdot t^2$. Функція $x(t)$ виражає залежність демографічних змін в регіоні від часу. Обчислити швидкість росту населення в цій області: а) наприкінці 2 року з початку дослідження; б) через 15 років. Надати ілюстрацію змін демографії регіону.

Застосування похідної для дослідження функції та побудови її графіка

1. Дослідити на монотонність та визначити екстремуми функцій:

а) $y = 2x^3 - 3x^2$; б) $y = x - ln(1-x)$; в) $y = \frac{x}{ln\,x}$; г) $y = \frac{x^2}{4+x^2}$.

2. Визначити інтервали опуклості й вгнутості та точки перегину графіків функцій:

а) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$; б) $y = ln(2+x^2)$; в) $y = xe^{2x}$.

3. Обчислити найбільше та найменше значення функції на заданому відрізку:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ на відрізку $[-1; 1]$;

б) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ на відрізку $[-1; 2]$;

в) $y = \frac{x-1}{x+1}$ на відрізку $[0; 3]$.

4. Провести повне дослідження функцій та побудувати їх графіки за результатами дослідження:

а) $y = \frac{x^2+1}{x}$; б) $y = \frac{x^2}{x^2+4}$; в) $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$; г) $y = x^2(x-2)$; д) $y = x^4 - 5x^2 + 6$.

Тема 10. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення функції двох незалежних змінних. Які відомі способи задання функції двох змінних?

2. Що називають областю визначення функції двох змінних? Яким чином можна зобразити область визначення функції двох змінних?

3. Що називається графіком функції двох змінних? Наведіть приклади

побудови графіка функції двох змінних у тривимірному просторі.

4. Сформулюйте означення границі функції двох змінних $z = f(x; y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$. Наведіть приклад обчислення границі функції двох змінних та надайте геометричну інтерпретацію.

5. Дайте означення неперервності функції двох незалежних змінних у точці та в області. Наведіть приклади неперервної та розривної функцій.

6. Що називають частинною похідною першого порядку функції двох незалежних змінних по одній із них? Сформулюйте правило обчислення частинних похідних першого порядку функції двох незалежних змінних.

7. Що називається частинним приростом і частинним диференціалом першого порядку по змінній x функції $z = f(x; y)$? Як виражається частинний диференціал функції через частинну похідну функції?

8. Сформулюйте означення частинного приросту й частинного диференціала першого порядку по змінній y функції $z = f(x; y)$ та запишіть відповідний частинний диференціал функції.

9. Що називається повним приростом і повним диференціалом першого порядку функції $z = f(x; y)$? Запишіть вираз для визначення повного диференціала функції двох змінних.

10. Що називається частинною похідною другого порядку функції двох незалежних змінних? Сформулюйте правило для визначення частинних похідних другого порядку функції двох незалежних змінних.

11. Сформулюйте теорему Шварца про рівність мішаних похідних другого порядку функції двох незалежних змінних.

12. Дайте означення точки екстремуму (максимуму й мінімуму) функції двох незалежних змінних.

13. Сформулюйте теорему про необхідну умову екстремуму функції двох незалежних змінних.

14. Сформулюйте теорему про достатні умови екстремуму функції двох незалежних змінних.

15. У чому полягає основна ідея застосування метода найменших квадратів для визначення параметрів лінійної регресії? Поясніть, що вважається найкращою апроксимацією в контексті метода найменших квадратів?

16. Запишіть нормальну систему метода найменших квадратів.

Завдання для самостійної роботи

1. Надати геометричне зображення області визначення функцій двох змінних:

а) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$; б) $z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$; в) $z = arcsin\frac{x}{y^2}$.

2. Обчислити значення функції двох незалежних змінних у заданих точках $f\left(\frac{1}{2};\ 1\right)$ і $f(2;\ -1)$, якщо функція визначена аналітично:

$$f(x;y)=\sqrt{xy^2+x+2y+2}.$$

3. Обчислити значення функції $f(x;y)=\frac{3xy}{x^2+2y^2}$ в точці $M(3;\ -2)$.

4. Визначити частинні похідні першого й другого порядків та повний диференціал функцій двох незалежних змінних:

$$z=\frac{3xy}{2x-5y}; \qquad z=x^2+y^2-2xy; \qquad z=arccos(x-y);$$

$$z=ln(y^2-x^2); \qquad z=y^2-2xy; \qquad z=2(x+y)-x^2-y^2;$$

$$z=e^{xy}+y^2; \qquad z=\frac{3x+y}{2-x+y}; \qquad z=ln(1+x+y^2);$$

$$z=arccos(x+y); \qquad z=ln(xy+y); \qquad z=x^3+y^2x-6xy;$$

$$z=5xy^3; \qquad z=3xy^2-yx; \qquad z=arcsin(x-y).$$

5. Визначити локальний екстремум функцій двох незалежних змінних:

$$z=x^2+xy+y^2-6x-9y; \qquad z=xy-x^2-y^2+9;$$

$$z=x^2+2y^2-5; \qquad z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20;$$

$$z=2xy-2x^2-4y^2; \qquad z=x^3+y^3-3xy.$$

6. Побудувати емпіричну залежність за методом найменших квадратів, якщо результати вимірювань двох величин подано у вигляді таблиці 2. Використовуючи цифрове середовище Desmos, побудувати вихідні статистичні дані, графік емпіричної функції та обчислити суму квадратів похибок.

Таблиця 2 – Результати вимірювань величин

x	3	6	8	9	10
y	5	7,1	10,2	12	16,3

Тема 11. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Невизначений інтеграл

Питання для самоконтролю

1. Яку функцію називають первісною для заданої функції? Навести приклади.
2. Сформулюйте теорему про загальний вигляд первісної.
3. Що називають невизначеним інтегралом? На прикладі поясніть, що називають підінтегральною функцією та підінтегральним виразом.
4. Сформулюйте теорему про існування невизначеного інтеграла.
5. Які основні властивості невизначеного інтеграла вам відомі?
6. Запишіть таблицю невизначених інтегралів.
7. Які основні методи інтегрування застосовують у інтегральному численні?
8. Сформулюйте теорему про заміну змінної для невизначеного інтеграла. Навести приклад її застосування.

9. Поясніть, у чому полягає застосування методу інтегрування частинами та запишіть формулу інтегрування частинами в невизначеному інтегралі.

10. Для яких типів підінтегральних функцій невизначених інтегралів застосовують метод інтегрування частинами?

Завдання для самостійної роботи

Таблиця невизначених інтегралів.

Використовуючи таблицю та основні властивості, знайти невизначені інтеграли:

$$\int (x^3 - 6x^2 + 7)dx; \quad \int (x^8 - 6x^5 + 2x^2 - 3)dx; \quad \int (x - 3x^2 + 5x^4)dx;$$

$$\int \frac{\sqrt{x} - x^3e^x + x^2}{x^3}dx; \quad \int ctg^2xdx; \quad \int \frac{3x^4 + 2x^2 - 5x + 8}{x^2}dx;$$

$$\int \frac{\cos 2xdx}{\cos x - \sin x}; \quad \int (2^x + 3^x)dx; \quad \int \frac{2x^2 - 8}{16 - x^4}dx;$$

$$\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x}dx; \quad \int \frac{(1 + 2x^2)}{x^2(1 + x^2)}dx; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

Основні методи інтегрування невизначених інтегралів (метод заміни змінної та інтегрування частинами)

Продемонструйте застосування основних методів інтегрування при обчисленні невизначених інтегралів:

$$\int \frac{dx}{(5x - 7)^4}; \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}dx; \quad \int \frac{dx}{x \sin^2 \ln x};$$

$$\int \frac{x^3dx}{(6x^4 + 5)^5}; \quad \int \sqrt{3 \sin x - 2} \cos x \, dx; \quad \int 5^{x^2+1} xdx;$$

$$\int \frac{\ln x - 3}{x\sqrt{\ln x}}dx; \quad \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx; \quad \int \left(\frac{3}{\cos^2 7x} - 2ctg(x + 5)\right)dx;$$

$$\int 3x \cos 2x \, dx; \quad \int (2x + 4) \sin x \, dx; \quad \int (x^2 - 1) \cos 3x \, dx$$

$$\int arctgxdx; \quad \int \arcsin x \, dx; \quad \int x \ln x \, dx.$$

Тема 12. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Визначений інтеграл

Питання для самоконтролю

1. Дайте означення визначеного інтеграла.
2. Сформулюйте теорему існування визначеного інтеграла.
3. Сформулюйте властивості визначеного інтеграла.

4. Що називають середнім значенням функції *f(x)* на відрізку $[a;b]$?

5. Чому дорівнює похідна від визначеного інтеграла із змінною верхньою межею інтегрування?

6. Сформулюйте теорему Ньютона –Лейбніца.

7. У чому полягає суть методів заміни змінної (підстановки) й інтегрування частинами у визначеному інтегралі?

8. Які застосування визначеного інтеграла вам відомі?

Завдання для самостійної роботи

Формула Ньютона-Лейбніца. Основні методи інтегрування визначених інтегралів

Обчислити визначені інтеграли:

$$\int_{-1}^{2}(x^3-x^2+2)dx; \qquad \int_{1}^{2}2^{3x}dx; \qquad \int_{0}^{1}\sqrt{x+1}dx;$$

$$\int_{0}^{\pi/2}\sqrt{\cos x}\sin x\,dx; \qquad \int_{0}^{1}x^2\sqrt{1+x^3}dx; \qquad \int_{1}^{4}\frac{1}{\sqrt{5x}}dx;$$

$$\int_{1}^{3}\frac{1}{x^2}3^{\frac{1}{x}}dx; \qquad \int_{0}^{\pi/4}\sin x\sin 7x\,dx; \qquad \int_{1}^{e}\ln x\,dx;$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(x-1)\cos 3x dx; \qquad \int_{0}^{1}arctgx dx; \qquad \int_{0}^{\pi/4}x^2\sin 5x\,dx.$$

Застосування визначених інтегралів

1. Обчислити площу фігури, обмеженої заданими лініями:

а) $y=4-x^2, y=x+2$; б) $y=x^2-2x+4, x=1, y-4=x$;

в) $y=\sin x, y=x, x=\frac{\pi}{2}$; г) $y=\ln x, x=e, y=0$.

До кожної задачі зробити рисунок.

2. Обчислити об’єм тіла, що утворюється обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої дугами парабол $y^2=x$ і $x^2=y$. Побудувати задані параболи та тіло обертання.

3. Обчислити об’єм тіла, що утворюється обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2=(x+3)^3$ і $x=0$. Зробити рисунок фігури та тіла обертання.

4. Обчислити об’єм тіла, що утворено обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y^2+x-4=0$ і $x=0$. Зробити рисунок фігури та тіла обертання.

5. Обчислити загальний прибуток підприємства від реалізації 1350 одиниць продукції, якщо граничний прибуток підприємства задається функцією $P'(x)=0{,}7x+9$, де x – кількість одиниць виробленої продукції.

Тема 13. Диференціальні рівняння. Модель Томаса Мальтуса

Питання для самоконтролю

1. Яке рівняння називається диференціальним? Як визначити порядок диференціального рівняння?

2. Яке рівняння називають диференціальним рівнянням першого порядку? Наведіть приклад.

3. Сформулюйте означення загального розв’язку (інтеграла) і частинного розв`язку (інтеграла) диференціального рівняння першого порядку.

4. Що називається задачею Коші для диференціального рівняння першого порядку? Сформулюйте теорему існування та єдиності розв’язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку.

5. Яке диференціальне рівняння першого порядку називають рівнянням з відокремленими змінними?

6. Сформулюйте правило інтегрування диференціальних рівнянь першого порядку з відокремленими змінними.

7. Дайте означення математичної моделі. Сформулюйте основні властивості математичних моделей.

8. Що називають математичним моделюванням? Опишіть основні етапи процесу математичного моделювання.

9. Які проблеми виникають під час побудови та використання математичних моделей?

10. Надайте класифікацію математичних моделей.

11. Опишіть основну ідею теорії Томаса Мальтуса. Надайте опис моделі Томаса Мальтуса.

12. Які чинники, на думку Мальтуса, стримують зростання населення? Які наслідки очікують суспільство за неконтрольованого зростання населення?

13. Який вплив на державну політику мала теорія Мальтуса про взаємозв’язок між ростом населення та ресурсами? На вашу думку, можна вважати теорію Мальтуса актуальною в сучасному світі?

14. Який вигляд має одна з моделей соціальних процесів – модель гонки озброєнь Річардсона? Проаналізуйте поведінку цієї моделі.

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити загальний розв’язок диференціальних рівнянь першого порядку:

1.1 $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$;

1.2 $(e^x+8)dy-ye^x dx=0$;

1.3 $\sqrt{4+y^2}dx-ydy=x^2ydy$;

1.4 $x\sqrt{4+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0$;

1.5 а) $\sqrt{3+y^2}dx-ydy=x^2ydy$;

1.6 а) $6xdx-ydy=yx^2dy-xy^2dx$;

1.7 $x\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{2+x^2}dy=0$;

1.8 $yy'=\frac{(8+y)y}{3x-4}$.

2. Записати частинний розв’язок (інтеграл) диференціальних рівнянь першого порядку:

2.1 $y' \sin x = y \ln y,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e;$ 2.2 $y' = y^2 \cos 2x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4;$

2.3 $y' + y \sin 2x = 0,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;$ 2.4 $dy - y\, ctg\, x\, dx = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$

3. Відомо, що початкова чисельність населення (N_o) деякого регіону становить 30000 осіб. Коефіцієнт зростання (μ) дорівнює 0,02 (або 2% на рік). Використовуючи модель Мальтуса, визначити чисельність населення через 10 років. Побудувати графік залежності чисельності населення регіону від часу.

4. [5, с. 65] Із експерименту відомо, що швидкість розмноження бактерій за достатком поживи прямо пропорційна їх кількості. За який час кількість бактерій збільшиться в m разів порівняно з їх початковою кількістю?

Тема 14. Теорія ігор і її застосування в соціально-політичних студіях

Питання для самоконтролю

1. Який розділ математики називають теорією ігор? Сформулюйте загальну постановку задачі теорії ігор.

2. Що є основними поняттями в теорії ігор? Сформулюйте їх означення. Які типи гравців існують?

3. Які види ігор вам відомі? Назвіть ознаки, за якими відбувається класифікація ігри?

4. Як задається гра? Як звести конфліктну ситуацію до гри?

5. У якому випадку гру називають матричною? В чому полягає різниця між чистими та змішаними стратегіями матричних ігор?

6. Що називають виграшем в теорії ігор? Сформулюйте означення функції виграшу?

7. Сформулюйте означення ціни гри. Яким чином визначається нижня та верхня ціна гри? Яке співвідношення між ними виконується?

8. Надайте означення сідлової точки та поясніть, яким чином вона визначається.

9. Яка стратегія називається змішаною? Яким чином її задають?

10. Сформулюйте означення чистої та активної стратегій.

11. Які вам відомі критерії існування чистих стратегій?

12. Сформулюйте принцип мінімакса в теорії ігор.

13. Сформулюйте теорему Неймана (основна теорема теорії ігор).

14. Які методи розв’язання скінченої гри із сідловою точкою вам відомі?

15. Які ігри можна розв’язати графічно? Сформулюйте покроковий алгоритм графічного методу розв’язання гри.

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити мінімаксну та максимінну стратегії гри, якщо гра задана платіжною матрицею:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Маркетинговий відділ компанії проводить аналіз економічної доцільності появи на ринку нового бренду товару за умови відсутності точних прогнозів щодо рівня його попиту. Вважається, що на його величину впливають три основні елементи ринкової структури (B_1, B_2, B_3). Спираючись на аналіз ринкових факторів, розглядаються три варіанти впровадження нового бренду товару (C_1, C_2, C_3). Кожен із запропонованих варіантів виробництва характеризується різними рівнями витрат та призводить до різних економічних результатів. Для аналізу задано матрицю, що відображає прибуток підприємства залежно від обсягу випуску товару та стану ринкового попиту:

	B_1	B_2	B_3
C_1	30	31	35
C_2	32	32	32
C_3	34	33	36

Визначити такий обсяг виробництва товару нового бренду, який гарантує підприємству середній прибуток незалежно від коливань ринкової кон’юнктури.

3. Обчислити нижню та верхню ціну гри за її платіжною матрицею:

$$P = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \end{array}.$$

4. Розв’язати гру, задану платіжною матрицею, за допомогою графічного методу:

$$P = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \end{array}.$$

5. *Гра полковника Блотто*. Полковник Блотто має в розпорядженні 5 полків і повинен захистити дві рівноцінні позиції. Його противник, який має 4 полки, атакує ті самі дві позиції. Обидва учасники бою мають право розподілити лише ціле число полків між позиціями. Полковник Блотто виграє 1 *грош. од.*, якщо на обох позиціях він має не менше полків, ніж його противник. За інших умов ведення бою полковник Блотто програє 1 *грош. од*. Скласти матрицю гри.

6. Створіть презентацію на тему: «Еволюційна теорія ігор», у якій продемонструйте сучасне застосування класичних принципів теорії ігор до еволюційних взаємодій між соціальними групами. Зокрема, проілюструйте

адаптацію стратегій у таких сферах, як вибір партнера, конкуренція за ресурси, формування моделей співпраці, кооперація та конкуренція.

3. ПІДГОТОВКА ДО ПОТОЧНОГО КОНТРОЛЮ

Протягом семестру здійснюється перевірка рівня опанування навчального матеріалу здобувачами вищої освіти. Поточний контроль передбачає виконання двох контрольних робіт, кожна з яких оцінюється максимальною кількістю балів – 30 балів. Інформацію про розподіл балів за окремі завдання контрольних робіт здобувачі отримують заздалегідь.

Із метою належної підготовки до поточного контролю пропонуємо здобувачам вищої освіти ознайомитися зі змістом типових варіантів контрольних робіт та з прикладом їх розв'язання.

Типовий варіант контрольної роботи №1

1. Виконати операції над множинами A∪B, A∩B, A\B, AΔB, B\A, якщо

$$A=\{x \mid x\epsilon\mathbb{N},\ x\le 30,\ x \vdots 3\},\ B=\{x \mid x\epsilon\mathbb{N},\ x\le 40,\ x \vdots 4\}.$$

2. Обчислити визначник третього порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера та графічним методом:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 7; \\ -5x_1 + 2x_2 = 3. \end{cases}$$

Надати візуалізацію розв'язку системи двох рівнянь із двома змінними та перевірити результат, отриманий аналітичним та графічним способами.

4. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{k} + \vec{j}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

5. Скласти рівняння геометричного місця точок, однаково віддалених від осі *Oy* і від точки $A(-3;\ 2)$.

6. Записати рівняння сторони *AB* та медіани *AM* трикутника *ABC*, якщо відомі координати його вершин: *A*(-1; 4), *B*(0; 1), *C*(2; 2). Побудувати трикутник *ABC* та медіану *AM*.

Розв'язання.

1. $A=\{x \mid x\epsilon\mathbb{N},\ x\le 30,\ x \vdots 3\}=\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\};$

$B=\{x \mid x\epsilon\mathbb{N},\ x\le 40,\ x \vdots 4\}=\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}.$

$A\cup B=\{3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 27, 28, 30, 32, 36, 40\};$

$A\cap B=\{12, 24\};$

$A\backslash B=\{3, 6, 9, 15, 18, 21, 27, 30\};$

$B\backslash A=\{4, 8, 16, 20, 28, 32, 36, 40\};$

$A\Delta B = \{3, 4, 6, 8, 9, 15, 16, 18, 20, 21, 27, 28, 30, 32, 36, 40\}$.

2.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot(-3) + 0\cdot 1\cdot(-2) - (-3)\cdot 4\cdot(-2) -$$

$$-1\cdot 0\cdot 1 - 3\cdot 1\cdot 2 = 8 - 9 + 0 - 24 - 0 - 6 = -31.$$

Відповідь: -31.

3. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 7; \\ -5x_1 + 2x_2 = 3. \end{cases}$

Розв'яжемо систему рівнянь методом Крамера. Для цього обчислюємо:

$\Delta -$ головний визначник системи; Δx_1, Δx_2 – додаткові визначники системи (визначники, що утворюються з головного визначника послідовною заміною першого й другого стовпця відповідно стовпцем вільних членів системи рівнянь).

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - 1\cdot(-5) = 6 + 5 = 11 \neq 0,$ отже, система має єдиний розв'язок.

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7\cdot 2 - 1\cdot 3 = 14 - 3 = 11;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 3 - 7\cdot(-5) = 9 + 35 = 44.$$

За формулами Крамера обчислюємо розв'язок системи рівнянь:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{11}{11} = 1;\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{44}{11} = 4.$$

Розв'яжемо систему графічним методом. Побудуємо в декартовій системі координат XOY прямі:

$$3x + y = 7 \text{ і } -5x + 2y = 3.$$

Для цього обчислимо координати двох точок, що належать кожній прямій:

$3x + y = 7$: $x = 0, y = 7; x = 2, y = 1$. Отже, (0;7), (2;1).

$-5x + 2y = 3$: $x = -1, y = -1; x = 0, y = 1{,}5$. Отже, (-1;-1), (0;1,5).

Через дві точки проводимо прямі (на рис. 1 синім кольором зображено пряму, рівняння якої має вигляд $3x + y = 7$, а червоним кольором зображено пряму, рівняння якої має вигляд $-5x + 2y = 3$).

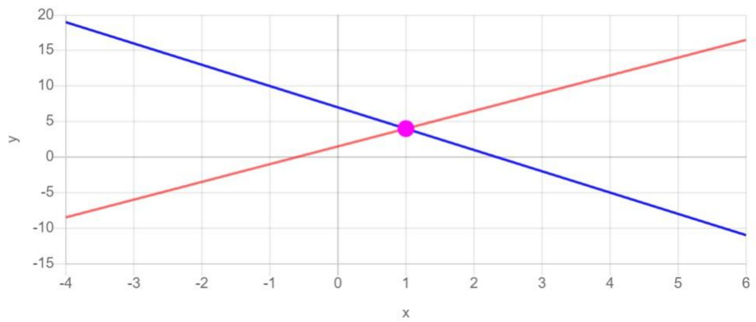

Рисунок 1 – Графічний метод розв’язання систем двох лінійних рівнянь із двома невідомими

Отже, задані прямі перетинаються в точці с координатами (1;4).

Відповідь: (1;4).

4. Паралелограм побудовано на векторах: $\vec{a} = 2\vec{k} + \vec{j}$ та $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

Визначаємо координати заданих векторів: $\vec{a}(0;1;2)$, $\vec{b}(1;2;-1)$. Координати діагоналей паралелограма, побудованого на цих векторах, дорівнюють:

$$\overrightarrow{d_1} = \vec{a} + \vec{b} = \big(0+1;1+2;2+(-1)\big) = (1;3;1);$$
$$\overrightarrow{d_2} = \vec{a} - \vec{b} = \big(0-1;1-2;2-(-1)\big) = (-1;-1;3).$$

Обчислимо модулі векторів:

$$\left|\overrightarrow{d_1}\right| = \sqrt{1^2+3^2+1^2} = \sqrt{11};$$
$$\left|\overrightarrow{d_2}\right| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{11}.$$

Відповідь: $\left|\overrightarrow{d_1}\right| = \sqrt{11}$; $\left|\overrightarrow{d_2}\right| = \sqrt{11}$.

5. Позначимо через $N(0;y)$ – координати довільної точки, що розташована на осі *Oy,* а через $M(x;y)$ – координати довільної точки заданого геометричного місця точок. Тоді за умовою задачі $MN = MA$.

Враховуючи, що

$$MN = \sqrt{(x-0)^2+(y-y)^2} = |x|;$$
$$MA = \sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2},$$

отримаємо:

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2} = |x|;$$
$$(x+3)^2+(y-2)^2 = x^2;$$
$$x^2+6x+9+y^2-4y+4 = x^2;$$
$$y^2-4y+13 = -6x;$$
$$(y-2)^2 = -6\left(x+\frac{3}{2}\right).$$

Отримали рівняння параболи с вершиною в точці $M\left(-\frac{3}{2};2\right)$.

Відповідь: $(y-2)^2 = -6\left(x+\frac{3}{2}\right)$.

6. Задано координати вершин трикутника: *A*(-1; 4), *B*(0; 1), *C*(2; 2).

Складаємо рівняння сторони *AB*, застосовуючи рівняння прямої, що проходить через дві задані точки *A* і *B*:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1};$$

$$\frac{x-(-1)}{0-(-1)} = \frac{y-4}{1-4};$$

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{-3} \Rightarrow -3\cdot(x+1) = y-4 \Rightarrow y = -3x+1.$$

Обчислимо координати точки *M* – середини сторони *BC*:

$$x_M = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{0+2}{2} = 1;\ y_M = \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{1+2}{2} = 1{,}5.$$

Отже, координати точки *M*(1; 1,5).

Складаємо рівняння медіани *AM,* застосовуючи рівняння прямої, що проходить через дві задані точки *A* і *M*:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1};$$

$$\frac{x-(-1)}{1-(-1)} = \frac{y-4}{1{,}5-4};$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-2{,}5} \Rightarrow -2{,}5\cdot(x+1) = 2\cdot(y-4) \Rightarrow -2{,}5x-2y+5{,}5 = 0;$$

$$5x+4y-11 = 0.$$

Побудуємо трикутник *ABC* та медіану *AM* в прямокутній системі координат (рис. 2).

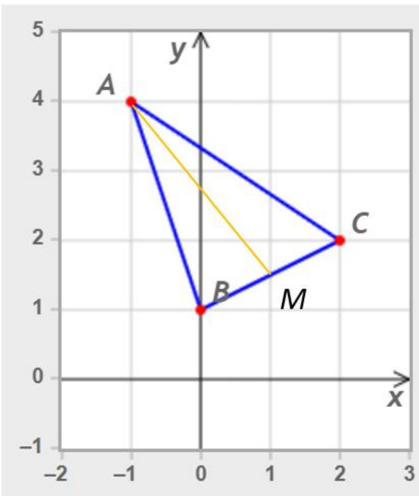

Рисунок 2 – Трикутник *ABC* та медіана *AM*

Відповідь: рівняння сторони *AB:* $y = -3x+1$;
рівняння медіани *AM*: $5x+4y-11 = 0$.

Типовий варіант контрольної роботи №2

1. Знайти похідну функції $y = \frac{x}{2}\sqrt{2-x^2} + arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$.

2. Визначити інтервали монотонності графіка функції:

$$y = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1.$$

3. Побудувати емпіричну залежність за методом найменших квадратів, якщо результати вимірювань двох величин подано у вигляді таблиці 3:

Таблиця 3 – Результати вимірювань величин

x	2	3	4	5	6	7
y	2	4,3	8,1	12,1	18,1	36,2

4. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^3dx}{(6x^4+5)^5}$.

5. Обчислити площу фігури, обмеженою лініями $y = x, y = 2x, x = 3$.

6. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $yy' = \frac{1-2x}{y}$, який задовольняє початкову умову $y(0) = 2$.

Розв'язання.

1. $y' = \left(\frac{x}{2}\right)' \cdot \sqrt{2-x^2} + \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2-x^2}\right)' + \left(arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)' =$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2-x^2} + \frac{x}{2}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{2-x^2-x^2+2}{2\sqrt{2-x^2}} =$$

$$= \frac{4-2x^2}{2\sqrt{2-x^2}} = \frac{2-x^2}{\sqrt{2-x^2}} = \sqrt{2-x^2}.$$

Відповідь: $\sqrt{2-x^2}$.

2. Задана функція $y = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$ визначена й диференційована в інтервалі $(-\infty; +\infty)$.

Знаходимо похідну функції:

$$y' = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 2x(2x^2 - 3x + 1) = 4x(x-1)\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Визначаємо критичні точки функції:

$$y'(x) = 0, \text{ якщо } x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 0.$$

Визначимо, які із критичних точок є екстремальними (табл. 4).

Таблиця 4 – Дослідження поведінки графіка функції за допомогою похідної

x	$(-\infty;0)$	0	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$	1	$(1;+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	min $y=-1$	$\nearrow$	max $y=-\frac{15}{16}$	$\searrow$	min $y=-1$	$\nearrow$

Обчислюємо значення функції в екстремальних точках:

$$y_{max}=y\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^4-2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=-\frac{15}{16};$$

$$y_{min}=y(0)=(0)^4-2(0)^3+(0)^2-1=-1;$$

$$y_{min}=y(1)=(1)^4-2(1)^3+(1)^2-1=-1;$$

Відповідь: $y_{max}=y\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{16}$; $y_{min}=y(0)=-1$; $y_{min}=y(1)=-1$.

3. Складаємо розрахункову таблицю 5:

Таблиця 5 – Розрахункова таблиця метода найменших квадратів

i	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1	2	2	4	4
2	3	4,3	9	12,9
3	4	8,1	16	32,4
4	5	12,1	25	60,5
5	6	18,1	36	108,6
6	7	36,2	49	253,4
Σ	**27**	**80,8**	**139**	**471,8**

Будемо шукати емпіричну залежність у вигляді $y=ax+b$.

Нормальна система методу найменших квадратів має вигляд:

$$\begin{cases}139a+27b=471{,}8;\\ 27a+6b=80{,}8.\end{cases}$$

Розв'язуємо цю систему за методом Крамера:

$$a=\frac{\Delta_a}{\Delta};\ b=\frac{\Delta_b}{\Delta}.$$

Обчислюємо головний визначник та додаткові визначники системи:

$\Delta=\begin{vmatrix}139 & 27\\ 27 & 6\end{vmatrix}=139\cdot 6-27\cdot 27=834-729=105\neq 0,$ система має єдиний розв'язок.

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 471{,}8 & 27 \\ 80{,}8 & 6 \end{vmatrix} = 471{,}8 \cdot 6 - 27 \cdot 80{,}8 = 2830{,}8 - 2181{,}6 = 649{,}2;$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 139 & 471{,}8 \\ 27 & 80{,}8 \end{vmatrix} = 139 \cdot 80{,}8 - 27 \cdot 471{,}8 = 11231{,}2 - 12738{,}6 = -1507{,}4\,.$$

Тоді

$$a = \frac{649{,}2}{105} \approx 6{,}18;\ b = \frac{-1507{,}4}{105} = -14{,}36.$$

Отже, рівняння емпіричної залежності між x і y має вигляд (рис. 4):

$$y = 6{,}18x - 14{,}36.$$

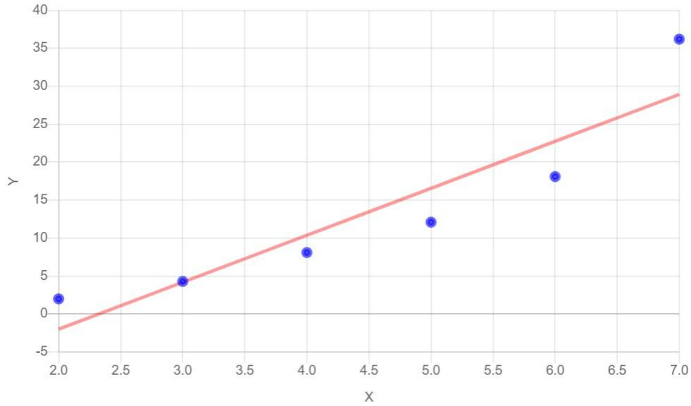

Рисунок 4 – Візуалізація вихідних статистичних даних та графік емпіричної функції

Відповідь: $y = 6{,}18x - 14{,}36.$

4. Знайдемо невизначений інтеграл, використовуючи метод заміни змінної.

$$\int \frac{x^3dx}{(6x^4+5)^5} = \begin{vmatrix} t = 6x^4 + 5 \\ dt = 24x^3dx \\ x^3dx = \frac{1}{24}dt \end{vmatrix} = \int \frac{\frac{1}{24}dt}{t^5} = \frac{1}{24}\int t^{-5}dt = \frac{1}{24} \cdot \frac{t^{-5+1}}{-5+1} + C =$$

$$= \frac{1}{24} \cdot \frac{t^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{96} \cdot \frac{1}{(6x^4+5)^4} + C.$$

Відповідь: $-\frac{1}{96} \cdot \frac{1}{(6x^4+5)^4} + C.$

5. Побудуємо фігуру, обмеженою лініями: $y = x, y = 2x, x = 3$ (рис. 5).

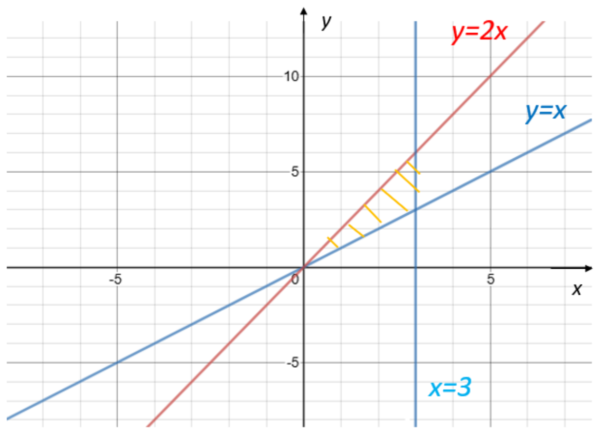

Рисунок 5 – Фігура, обмежена лініями $y = x, y = 2x, x = 3$.

Із рисунку 5 можна побачити, що фігура обмежена зверху лінією $y = 2x$, знизу – $y = x$ і проєктується на вісь *Ox* у відрізок $[0; 3]$. Отже, $y_в = 2x, y_н = x$, *a=0, b=3.*

Таким чином, за формулою $S = \int_a^b (y_в(x) - y_н(x))dx$ маємо:

$$S = \int_0^3 (2x - x)dx = \int_0^3 xdx = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^3 = \frac{9}{2} - 0 = 4{,}5\ (кв.од.).$$

Відповідь: 4,5 (*кв. од.*).

6. Розв`яжемо рівняння відносно y': $y' = \frac{1-2x}{y^2}$. Отримаємо рівняння типу $y' = f_1(x)f_2(y)$, оскільки праву частину рівняння можна представити у вигляді: $\frac{1-2x}{y^2} = (1-2x)\frac{1}{y^2}$.

Заміняємо y' на $\frac{dy}{dx}$, тоді рівняння набуває вигляд: $\frac{dy}{dx} = \frac{1-2x}{y^2}$.

Помноживши обидві частини на y^2dx, одержимо рівняння з відокремленими змінними

$$y^2dy = (1-2x)dx,$$

інтегруючи яке, знаходимо загальний інтеграл диференціального рівняння

$$\frac{y^3}{3} = x - x^2 + C.$$

Розв`язуємо останнє рівняння відносно *y* та знаходимо загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y = \sqrt[3]{C_1 + 3x - 3x^2}\ .$$

При $x = 0, y = 2$ знаходимо значення довільної сталої C_1:

$$2 = \sqrt[3]{C_1 + 3\cdot 0 - 3\cdot 0^2} = \sqrt[3]{C_1} \Rightarrow C_1 = 8.$$

Отже, шуканий частинний розв'язок рівняння буде мати наступний вигляд:

$$y_ч = \sqrt[3]{8 + 3x - 3x^2}.$$

Відповідь: $y_ч = \sqrt[3]{8 + 3x - 3x^2}.$

4. ПІДГОТОВКА ДО ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ

Підсумковий контроль проводиться в формі екзаменаційної роботи, яка включає чотири завдання: два теоретичні питання, перелік яких попередньо відомий здобувачам, та два практичні завдання. За умови надання повної, чіткої та обґрунтованої відповіді на кожне теоретичне питання максимально можливо отримати 10 балів. Виконання кожного практичного завдання також максимально оцінюється в 10 балів.

У екзаменаційному білеті поряд із формулюванням запитань і завдань зазначається максимальна кількість балів, яку може набрати здобувач. Загальна оцінка за правильно виконану екзаменаційну роботу становить 40 балів.

Далі наведемо перелік теоретичних питань, що входять до змісту екзаменаційних білетів, і зразок екзаменаційного білету.

Екзаменаційні питання

1. Логічні операції. Заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквівалентність.

2. Множини. Способи завдання множин.

3. Операції над множинами (об'єднання, перетинання, різниця, симетрична різниця, доповнення).

4. Діаграми Ейлера-Венна.

5. Матриці (означення, види матриць).

6. Дії над матрицями.

7. Визначники другого та третього порядку (означення, методи обчислення).

8. Система двох лінійних рівнянь із двома невідомими. Дослідження її сумісності.

9. Графічний метод розв'язання системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими.

10. Правило Крамера для розв'язання систем трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими.

11. Вектори (означення, лінійні операції над векторами).

12. Проекція вектора на вісь. Координати вектора.

13. Скалярний добуток двох векторів (означення, геометричний зміст, формула для обчислення).

14. Векторний добуток двох векторів (означення, геометричний зміст, формула для обчислення).

15. Мішаний добуток трьох векторів (означення, геометричний зміст, формула для обчислення).

16. Координати точки на площині. Застосування метода координат на площині.

17. Основні типи рівнянь прямої на площині.

18. Взаємне розташування двох прямих на площині.

19. Метричний простір (означення, приклади).

20. Алгоритм кластеризації. Дендрограма.

21. Функція та її властивості.

22. Границя функції в точці (означення, геометричний зміст).

23. Основні теореми про границі функції.

24. Неперервність функції (означення, приклади).

25. Похідна функції. Зв'язок між неперервністю і диференційованістю функції.

26. Правила диференціювання.

27. Таблиця похідних.

28. Основні теореми диференціального числення (теореми Ролля, Лагранжа, Коші).

29. Монотонність функції (означення, необхідна та достатня умови зростання й спадання функції).

30. Екстремуми функції однієї змінної (означення, необхідна та достатня умови існування екстремумів).

31. Опуклість, угнутість кривої, точки перегину (означення, достатня умова опуклості графіка функції, достатня умова існування точок перегину).

32. Функція багатьох змінних (означення, область визначення, область значень).

33. Частинні похідні першого порядку функції двох змінних.

34. Частинні похідні другого порядку функції двох змінних.

35. Екстремум функції двох змінних (означення, необхідні та достатні умови існування екстремуму).

36. Побудова емпіричної залежності за методом найменших квадратів.

37. Поняття первісної функції.

38. Невизначений інтеграл. Властивості невизначеного інтеграла.

39. Таблиця невизначених інтегралів.

40. Метод заміни змінної для невизначеного інтеграла.

41. Метод інтегрування частинами для невизначеного інтеграла.

42. Поняття інтегральної суми і визначеного інтеграла.

43. Формула Ньютона –Лейбніца.

44. Властивості визначеного інтеграла.

45. Метод заміни змінної для визначеного інтеграла.

46. Метод інтегрування частинами для визначеного інтеграла.

47. Геометричні застосування визначеного інтеграла (площа плоскої фігури, об'єм тіла обертання).

48. Диференціальні рівняння першого порядку (основні означення, загальний розв'язок (інтеграл), частинний розв'язок (інтеграл)).

49. Інтегрування диференціальних рівнянь із відокремленими змінними.

50. Модель Томаса Мальтуса.

51. Означення системи лінійних диференціальних рівнянь. Модель гонки озброєнь Річардсона.

52. Основні поняття теорії ігор. Класифікація ігор.

53. Платіжна матриця. Нижня та верхня ціна гри.

54. Основна теорема теорії ігор (теорема Неймана).

55. Матричні ігри двох осіб: розв'язання гри та її геометрична інтерпретація.

Зразок екзаменаційного білета

1. Система двох лінійних рівнянь із двома невідомими. Дослідження її сумісності.

2. Монотонність функції (означення, необхідна та достатня умови зростання й спадання функції).

3. Задано координати вершин трикутника: $A(1;-1), B(-2;1), C(3;5)$. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини A на медіану, що проведена з вершини B. Побудувати трикутник ABC та медіану BM.

4. Обчислити кількість Q анкет, оброблених у межах соціально-політичного дослідження на тему: «Структурно-змістовий аналіз медіа-контенту», заповнених респондентами протягом календарного року (304 робочі дні), за умови 6-годинного робочого дня, де щоденна продуктивність обробки анкет визначається за заданою формулою:

$$f(t) = -0{,}0033t^2 - 0{,}089t + 20{,}96 \text{ (од.\textbackslash год.)}.$$

5. РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Дубчак В.М., Новицька Л.І., Дячинська О.М. Вища математика. Приклади та задачі: Навчальний посібник. Вінниця: ВНАУ, 2021. 365 с.
URL: http://socrates.vsau.org/repository/getfile.php/28274.pdf

2. Зеленська О.П. *Самостійна робота здобувачів вищої освіти як важлива складова організації навчального процесу у закладах вищої освіти*. Перспективи та інновації науки., № 13(18) (2022). С. 173-186. URL: https://doi.org/10.52058/2786-4952-2022-13(18)-173-186

3. Іванова С. В. Загальні основи методики навчання математики в закладах вищої освіти : методичні рекомендації для організації самостійної роботи здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня галузі знань. - Одеса : Університет Ушинського, 2024.- 40 с.
URL: http://dspace.pdpu.edu.ua/handle/123456789/18822

4. Лиман Ф.М., Власенко В.Ф., Петренко С.В. Вища математика : Навчальний посібник. Університетська книга, 2023. 616 с.

5. Рего В. Л. Застосування диференціальних рівнянь для розв’язування проблем природознавства / В. Л. Рего, Я. В. Варга : навч. посіб. ; рец. : М. Й. Ронто, Г. І. Сливка-Тилищак ; М-во освіти і науки України, ДВНЗ «Ужгородський національний університет». Ужгород : ДВНЗ «УжНУ», 2023. 121 с. URL: https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/52509

6. Урум Г. Д., Олефір О. І., Болдарєва О. М. Методичні рекомендації для організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Основи вищої математики» Розділ: Елементи векторної алгебри: методичні рекомендації. Одеса : Університет Ушинського, 2024. 73 с.
URL: http://dspace.pdpu.edu.ua/handle/123456789/18815

7. Хом`юк І. В., Хом`юк В. В. Формування інтелектуальної компетентності майбутніх інженерів на заняттях з вищої математики засобами індивідуальних завдань. Матеріали науково-методичної інтернет-конференції «Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності», Вінниця, 20-22 червня 2024 р. 2024. С. 3-7. URI: https://ir.lib.vntu.edu.ua//handle/123456789/43426