УДК 517.55

А. Ю. РАШКОВСКИЙ, Л. И. РОНКИН

СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В КОНУСЕ. III (ФУНКЦИИ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА) [1]

1. Слабая сходимость функций $t^{-\rho}u(tx)$. Пусть функция $u(x) \in$ $\in SH(K;\ \rho)$, $\rho > \varkappa^{+}$. Определим индикатор $L_u(x)$ и регуляризованный индикатор $L_u^*(x)$ функции u следующим образом:

$$L_u(x) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-\rho}u(tx),\ \ L_u^*(x) = \overline{\lim_{x'\to x}}\, L_u(x').$$

Ясно, что $L_u^*(x) \in SH(K)$, $L_u(tx) = t^{\rho}L_u(x)$ и $L_u^*(x) = L_u(x)$ для почти всех $x \in K$.

Отправляясь от понятий функций вполне регулярного роста в полуплоскости и во всем пространстве R^m, дадим

[1] Это третья часть статьи, первые две части опубликованы в предыдущих выпусках настоящего сборника («Теория функций, функцион. анализ и их прил.»). Нумерация утверждений, формул и литературы является продолжением соответствующей нумерации предыдущих частей. Для удобства чтения укажем, что леммы 1—5, формулы (1)—(26) и литературные источники [1—9] содержатся в первой части, а теоремы 1—2, леммы 5—8, формулы (27)—(48) и литературные источники [10—11] — во второй части настоящей работы.

Определение. *Функция* $u \in SH(K)$ *называется функцией вполне*[1] *регулярного роста (в.р.р.) в* K *относительно порядка* $\rho > \varkappa^+$, *если* $u \in SH(K;\ \rho)$ *и для каждого конуса* $K' = K^{\Gamma'}$, $\Gamma' \subset\subset \Gamma$, *существует такое* C_0*-множество* $E' \subset K'$, что $\lim\limits_{\substack{t\to\infty,\\ tx \notin E'}} \sup\limits_{x \in \Gamma'} | t^{-\rho} u(tx) - L_u^*(x) | = 0$.

Мы уже упоминали, что регулярность роста субгармонической в R^m функции u эквивалентна сходимости в $D'(R^m)$ функций $t^{-\rho}u(tx)$, $t \to \infty$. Для функций в.р.р. в конусе подобное утверждение также справедливо, но в этом пункте мы установим только «половину» этого утверждения, а именно, наличие соответствующей слабой сходимости.

Теорема 3. *Пусть функция* $u \in SH(K)$ *имеет в* K *в.р.р. относительно порядка* $\rho > \varkappa^+$ *и пусть*

$$v_{\lambda, t}(x) = \begin{cases} t^{-\rho} u(tx), & |x| > \dfrac{\lambda}{t}, \\ 0, & |x| \leqslant \dfrac{\lambda}{t} \quad (\lambda > 0). \end{cases}$$

Тогда для любой функции $\psi \in C(\overline{K}_r)$, $r > \lambda$, *существует предел*

$$\lim_{t\to\infty} \int_{K_r} v_{\lambda, t}(x)\, \psi(x)\, |x|^{-2} \varphi(x)\, d\omega$$

и справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty} \int_{K_r} v_{\lambda, t}(x)\, \psi(x)\, |x|^{-2} \varphi(x)\, d\omega = \int_{K_r} L_u^*(x)\, \psi(x)\, |x|^{-2} \varphi(x)\, d\omega.$$

Доказательство. Возьмем какую-либо функцию $\psi \in C(\overline{K}_r)$ и положим $\psi_j = \chi_j \psi$, $j = 1, 2, 3$, где неотрицательные функции $\chi_j \in C(\overline{K}_r)$ таковы, что $\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 \equiv 1$ и при априори заданных $\alpha > 0$ и $\delta > 0$

$$\operatorname{supp} \chi_1 \subset \overline{K}_\alpha,\ \operatorname{supp} \chi_2 \subset \overline{\Delta}^{\delta}_{\frac{\alpha}{2}, r},$$

$$\operatorname{supp} \chi_3 \subset \overline{K}_{\frac{\alpha}{2}, r} \setminus \Delta^{\frac{\delta}{2}}_{\frac{\alpha}{2}, r} = K_{\frac{\alpha}{2}, r}.$$

Тогда

$$\left| \int_{K_r} v_{\lambda, t} \psi |x|^{-2} \varphi d\omega - \int_{K_r} L_u^* \psi |x|^{-2} \varphi d\omega \right| \leqslant \left| \int_{K_r} (v_{\lambda, t} - L_u) \psi_3 |x|^{-2} \varphi d\omega \right| +$$
$$+ \sum_{j=1}^{2} \int_{K_r} (|v_{\lambda, t}| + |L_u|) |\psi_j| |x|^{-2} \varphi d\omega. \tag{49}$$

Поскольку функция u имеет в конусе K не более чем нормальный тип при порядке ρ, то применима теорема 1, из оценок которой следует, что

---

[1] Иногда для краткости слово «вполне» будет опускаться.

$$\int_{K_r} |v_{\lambda, t}| |\psi_2| |x|^{-2} \varphi d\omega \leqslant \|\psi\|_\infty t^{-\rho-m+2} \int_{\Delta^{\delta}_{\frac{\alpha t}{2}, rt}} |u| |x|^{-2} \varphi d\omega \leqslant$$

$$\leqslant \|\psi\|_\infty t^{-\rho-m+2} \delta C_2 (rt)^{\rho+m-2} = \delta C_2 \|\psi\|_\infty r^{\rho+m-2}$$

и

$$\int_{K_r} |v_{\lambda, t}| |\psi_1| |x|^{-2} \varphi d\omega \leqslant \|\varphi\|_\infty t^{-\rho-m+2} \int_{K_{\lambda, \alpha t}} |u| |x|^{-2} \varphi d\omega \leqslant$$

$$\leqslant \|\psi\|_\infty t^{-\rho-m+2} C_1 (\alpha t)^{\rho+m-2} = \alpha^{\rho+m-2} C_1 \|\psi\|_\infty$$

(здесь и далее $\|\psi\|_\infty = \max\limits_x |\psi(x)|$). Из теоремы 1 следует также, что

$$\int_{\Gamma_1} |L_u| \varphi d\omega < \infty.$$

Поэтому

$$\int_{K_r} |L_u| |\psi_1| |x|^{-2} \varphi d\omega \leqslant \|\psi\|_\infty \int_0^\alpha \int_{\Gamma_1} |L_u| \varphi d S_1 l^{\rho+m-2} dl \leqslant C\alpha^{\rho+m-2} \|\psi\|_\infty$$

и

$$\int_{K_r} |L_u| |\psi_2| |x|^{-2} \varphi d\omega \leqslant \|\psi\|_\infty \int_{\frac{\alpha}{2}}^{r} \int_{\Delta^{\delta}_{0,2} \cap \Gamma_1} |L_u| \varphi d S_1 l^{\rho+m-3} dl \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\|_\infty r^{\rho+m-2} \gamma(\delta),$$

где $\gamma(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Таким образом, выбрав α и δ при фиксированных $\psi(x)$ и r достаточно малыми, можно сделать два последних слагаемых в равенстве (49) меньшими любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ для всех значений t одновременно. Значит, для завершения доказательства теоремы теперь достаточно показать, что для любой функции $g \geqslant 0$, $g \in C(\overline{K'_{\alpha/2, r}})$, существует

$$\lim_{t \to \infty} \int_{K'_{\alpha/2, r}} v_{\lambda, t} g d\omega = \int_{K'_{\alpha/2, r}} L_u g d\omega.$$

Согласно лемме Фату,

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \int_{K'_{\alpha/2, r}} v_{\lambda, t} g d\omega \leqslant \int_{K'_{\alpha/2, r}} L_u g d\omega. \tag{50}$$

Для получения обратного неравенства заметим, что

$$\int_{K'_{\alpha/2, r}} v_{\lambda, t} g d\omega = t^{-\rho-m} \int_{K'_{\alpha t/2, rt}} u(x) g\left(\frac{x}{t}\right) d\omega =$$

$$= t^{-\rho-m} \int_{E_{rt}} u(x) g\left(\frac{x}{t}\right) d\omega + t^{-\rho-m} \int_{K'_{\alpha t/2, rt} \setminus E_{rt}} u(x) g\left(\frac{x}{t}\right) d\omega,$$

где $E_{rt} = E \cap K'_{rt}$; E — C_0-множество, фигурирующее в задании функции u как функции в.р.р. в K. Согласно лемме 8 первое слагаемое в правой части этого равенства стремится к нулю при $t \to \infty$.

В то же время ввиду регулярности роста функции u для произвольного $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших значениях t выполняется неравенство

$$t^{-\rho-m} \int\limits_{K'_{\alpha t/2,\, rt} \setminus E_{rt}} u(x)\, g\left(\frac{x}{t}\right) d\omega \geqslant \int\limits_{K'_{\alpha/2,\, r}} [L_u(x) - \varepsilon\, |x|^\rho]\, g(x)\, d\omega -$$

$$- t^{-\rho-m} \int\limits_{E_{rt}} g\left(\frac{x}{t}\right) [L_u(x) - \varepsilon\, |x|^\rho]\, d\omega.$$

Если $\sup\limits_{x \in E} \left[L_u\left(\frac{x}{|x|}\right) - \varepsilon\right] = M \leqslant 0$, то из этого соотношения следует, что

$$\varliminf_{t \to \infty} t^{-\rho-m} \int\limits_{K'_{\alpha t/2,\, rt}} g\left(\frac{x}{t}\right) u(x)\, d\omega \geqslant \int\limits_{K'_{\alpha/2,\, r}} g(x)\, [L_u(x) - \varepsilon\, |x|^\rho]\, d\omega. \qquad (51)$$

Если же $M > 0$, то, обозначив через $t_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots$, радиусы шаров, фигурирующих в характеристике множества E как C_0-множества, получим, что

$$t^{-\rho-m} \int\limits_{E_{rt}} g\left(\frac{x}{t}\right) [L_u(x) - \varepsilon\, |x|^\rho]\, d\omega \leqslant c r^\rho\, \|g\|_\infty M t^{-m} \sum_j t_j^m = o(1).$$

Таким образом, неравенство (51) справедливо и при $M > 0$.

Учитывая затем произвольность $\varepsilon > 0$, получим, что

$$\varliminf_{t \to \infty} \int\limits_{K'_{\alpha/2,\, r}} v_{\lambda,\, t}(x)\, g(x)\, d\omega = \varliminf_{t \to \infty} \int\limits_{K'_{\alpha t/2,\, rt}} g\left(\frac{x}{t}\right) u(x)\, d\omega \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{K'_{\alpha/2,\, r}} L_u(x)\, g(x)\, d\omega.$$

Отсюда, а также из (47) следует, что

$$\lim_{t \to \infty} \int\limits_{K'_{\alpha/2,\, r}} v_{\lambda,\, t}\, g\, d\omega = \int\limits_{K'_{\alpha/2,\, r}} L_u g\, d\omega.$$

Теорема доказана.

2. Сходимость функционалов T_R, конусно-граничная плотность. Как уже отмечалось, полная регулярность роста целых функций в C эквивалентна определенной правильности распределения их корней. Составным элементом (а в случае $\rho \notin N$ — и единственным) этой правильности является наличие угловой плотности корней, т. е. существование предела

$$\lim_{t \to \infty} t^{-\rho} n_f(t, \alpha, \beta), \ \alpha \notin A, \ \beta \notin A,$$

где $n_f(t, \alpha, \beta)$ — подсчитанное с учетом кратности число корней z_i рассматриваемой функции $f(z)$ в секторе $Y(\alpha, \beta, t) = \{z : |z| < t,\ \alpha < \arg z < \beta\}$, а A — какое-нибудь не более чем счетное множество на отрезке $[0, 2\pi]$. Для функций в.р.р. в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ роль угловой плотности выполняет введенная

Н. В. Говоровым аргументно-граничная плотность. Она определяется подобно угловой плотности с заменой $n_f(t, \alpha, \beta)$ на

$$a(t, \alpha, \beta) = \begin{cases} \sum\limits_{z_i \in Y(\alpha, \beta, t)} \sin(\arg z_i) \overset{\text{def}}{=} c(t, \alpha, \beta), \ [\alpha, \beta] \subset (0, \pi); \\ c(t, 0, \beta) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[\lambda, t]} \frac{d\nu(x)}{x}, \ \nu = \nu_{\ln|f|}, \ \alpha = 0, \ \beta < \pi; \\ c(t, 0, \pi) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[\lambda, t] \cup [-t, \lambda]} \frac{d\nu(x)}{x}, \ \alpha = 0, \ \beta = \pi. \end{cases}$$

Для построения аналога аргументно-граничной плотности в многомерном случае рассмотрим на пространстве $C(\overline{K}_\delta)$, $\delta \geqslant \lambda > 0$, функционалы $T_R = T_{R, \delta, u}$ и $T = T_{\delta, u}$, определенные по функции $u(x) \in SH(K; \rho)$ и ее индикатору $L = L_u^*$ равенствами

$$\langle T_R, \psi \rangle = R^{-\rho-m+2} \int\limits_{\overline{K}_{\lambda, \delta R}} \psi\left(\frac{x}{R}\right) d\tau_u(x), \ \forall \psi \in C(\overline{K}_\delta),$$

$$\langle T, \psi \rangle = \int\limits_{\overline{K}_\delta} \psi(x)\, d\tau_L(x), \ \forall \psi \in C(\overline{K}_\delta).$$

Из неравенства (37) вытекает равномерная ограниченность функционалов T_R, т. е. существование такой константы A, не зависящей от R и ψ, что $|\langle T_R, \psi \rangle| \leqslant A \|\psi\|$. Тем самым, T_R — это вещественнозначные меры на $\overline{K}_\delta$ с равномерно ограниченными относительно R полными вариациями $\|T_R\| = |T_R|(\overline{K}_\delta)$.

Представим меру T_R, которая не является знакопостоянной, в виде $T_R = T_R^* - T_R^{**}$, где мера T_R^{**} определена посредством равенства

$$\langle T_R^{**}, \psi \rangle = \frac{2}{\theta_m} R^{-\rho-m+2} \int\limits_{\Gamma_{\lambda, \delta R}} \psi\left(\frac{x}{R}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial n} (a|x|^\rho + b)\, d\sigma.$$

Так как $u(x) \leqslant a|x|^\rho + b$, то мера T_R^* — неотрицательная, а T_R^{**} — абсолютно непрерывная мера на $\Gamma_{0,\delta}$ и притом такая, что

$$\forall \psi \in C(\Gamma_{0,\delta}) \ \exists \lim_{R \to \infty} \langle T_R^{**}, \psi \rangle.$$

Отсюда вытекает, что меры T_R обладают следующим свойством, аналогичным соответствующему свойству положительных мер (напр., [12]):

а) если меры T_R при $R \to \infty$ слабо сходятся к некоторой мере T_0 на пространстве

$$F_\delta = \{\psi \in C(\overline{K}) : \operatorname{supp} \psi \subset \overline{K} \cap B_\delta\}$$

и если множество $G_\delta = G \cap K_\delta$, где область $G \subset\subset B_\delta$ удовлетворяет условию $|T_0|(\overline{\partial G \cap K}) = 0$, то меры T_R на пространстве $C(\overline{G}_\delta)$ слабо сходятся к мере T_0 и

$$\lim_{R \to \infty} T_R(G_\delta) = \lim_{R \to \infty} T_R(\overline{G}_\delta) = T_0(G_\delta).$$

Отметим еще одно свойство мер T_R, очевидным образом вытекающее из равномерной ограниченности величин $\|T_R\|$:

б) если для любой функции ψ из некоторого семейства $W \subset\subset C(\overline{K}_\delta)$ выполняется равенство $\lim\limits_{R\to\infty}\langle T_R, \psi\rangle = \langle T_R, \psi\rangle$, то это же равенство выполняется для всех функций из замыкания $\overline{W}$ множества W в метрике $C(\overline{K}_\delta)$.

Теорема 4. *Пусть функция $u \in SH(K)$ имеет в K не более чем нормальный тип при порядке $\rho > \varkappa^+$ и пусть*

$$v_{\lambda, t}(x) = \begin{cases} t^{-\rho}u(tx), & |x| > \lambda/t, \\ 0, & |x| \leqslant \lambda/t, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$, $\lambda \notin \Lambda_u$. Пусть, далее, существует $\forall \psi \in C(\overline{K}_\delta)$

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_{K_\delta} v_{\lambda, t}(x)\,\psi(x)\,|x|^{-2}\varphi(x)\,d\omega = \int\limits_{K_\delta} L_u^*\psi\,|x|^{-2}\varphi\,d\omega.$$

Тогда существует

$$\lim_{R\to\infty}\langle T_R, \psi\rangle = \langle T, \psi\rangle, \quad \forall \psi \in C(\overline{K}_\delta). \tag{52}$$

Доказательство. Из позитивной однородности индикатора L_u^* вытекает позитивная однородность меры τ_L, т. е. $\tau_L(tE) = t^{\rho+m-2}\tau_L(E)$ для любого измеримого множества $E \subset \overline{K}$, $t > 0$. Поэтому $|T|(\overline{\Gamma}_\delta) = 0$ и, согласно свойству а) мер T_R, а также ввиду того, что при $\delta' < \delta$ меры $T_{R,\delta'}$ и $T_{\delta'}$ суть сужения на $\overline{K}_{\delta'}$ мер $T_{R,\delta}$ и T_δ, равенство (52) достаточно доказать лишь для функций из пространства F_δ. Нетрудно видеть, что любую такую функцию можно сколь угодно хорошо приблизить в метрике $C(\overline{K}_\delta)$ функциями семейства $F_\delta^* = \left\{\psi \in F_\delta : \psi \in C^2(\overline{K}),\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{\Gamma_{0,\infty}} = 0\right\}$. Отсюда, согласно свойству б) мер T_R, заключаем, что для доказательства теоремы равенство (52) достаточно установить для функций из F_δ^*.

Согласно лемме 6 при $\delta R \notin \Lambda_u$ и $\psi \in F_\delta^*$ имеем

$$\langle T_R, \psi\rangle = \frac{1}{\theta_m}R^{-\rho-m+2}\int\limits_{K_{\lambda,\delta R}} u(x)\,\Delta\left(\varphi(x)\,\psi\left(\frac{x}{R}\right)\right)d\omega +$$
$$+\frac{1}{\theta_m}R^{-\rho-m+2}\int\limits_{\Gamma_\lambda} u(x)\,\varphi(x)\,\frac{\partial\psi\left(\frac{x}{R}\right)}{\partial n}\,dS_\lambda +$$
$$+\frac{1}{\theta_m}R^{-\rho-m+2}\int\limits_{\Gamma_{\delta R}} u(x)\,\varphi(x)\,\frac{\partial\psi\left(\frac{x}{R}\right)}{\partial n}\,dS_{\delta R} -$$
$$-\frac{1}{\theta_m}R^{-\rho-m+2}Q\left(\psi\left(\frac{x}{R}\right),\ \lambda,\ u\right) + \frac{1}{\theta_m}R^{-\rho-m+2}Q\left(\psi\left(\frac{x}{R}\right),\ \delta R,\ u\right) = \tag{53}$$
$$= \frac{R^{m-2}\cdot R^{-\rho-m+2}}{\theta_m}\int\limits_{K_{\lambda/R,\delta}} u(Rx)\,\Delta(\varphi(x)\,\psi(x))\,d\omega +$$

$$+\frac{1}{\theta_m}R^{-\rho-m+2}\left[\int\limits_{\Gamma_\lambda} u(x)\varphi(x)\frac{\partial\psi\left(\frac{x}{R}\right)}{\partial n}dS_\lambda - Q\left(\psi\left(\frac{x}{R}\right),\ \lambda,\ u\right)\right] =$$

$$=\frac{R^{-\rho}}{\theta_m}\int\limits_{K_{\lambda/R,\,\delta}} u(Rx)\,\Psi(x)\,|x|^{-2}\varphi(x)\,d\omega +$$

$$+\frac{1}{\theta_m}R^{-\rho-m+2}\left[\int\limits_{\Gamma_\lambda} u(x)\varphi(x)\frac{\partial\psi\left(\frac{x}{R}\right)}{\partial n}dS_\lambda - Q\left(\psi\left(\frac{x}{R}\right),\ \lambda,\ u\right)\right],$$

где, как показывают элементарные вычисления, $\Psi(x)\in C(\overline{K}_\delta)$. Из условия доказываемой теоремы следует, что

$$\exists\lim_{R\to\infty}\frac{R^{-\rho}}{\theta_m}\int\limits_{K_{\lambda/R,\,\delta}} u(Rx)\,\Psi(x)|\,x|^{-2}\varphi(x)\,d\omega =$$

$$=\frac{1}{\theta_m}\int\limits_{K_\delta} L_u^*\Psi\,|\,x|^{-2}\varphi\,d\omega = \frac{1}{\theta_m}\int\limits_{K_\delta} L_u^*\Delta(\varphi\psi)\,d\omega.$$

Отсюда, а также из леммы 7 следует, что

$$\lim_{R\to\infty}\frac{R^{-\rho}}{\theta_m}\int\limits_{K_{\lambda/R,\,\delta}} u(Rx)\,\Psi(x)\,|\,x|^{-2}\varphi(x)\,d\omega =$$

$$=\int\limits_{\overline{K}_\delta}\psi(x)\,d\tau_L = \langle T,\ \psi\rangle. \tag{54}$$

Далее, используя содержащееся в равенствах (34) и (26) выражение величины Q, нетрудно заключить, что

$$\lim_{R\to\infty} R^{-\rho-m+2}Q\left(\psi\left(\frac{x}{R}\right),\ \lambda,\ u\right)=0. \tag{55}$$

И, наконец, непосредственно проверяется, что

$$\lim_{R\to\infty} R^{-\rho-m+2}\int\limits_{\Gamma_\lambda} u(x)\varphi(x)\frac{\partial\psi\left(\frac{x}{R}\right)}{\partial n}dS_\lambda = 0. \tag{56}$$

Из (53)—(56) следует, что

$$\exists\lim_{\substack{R\to\infty\\ R\notin\frac{1}{\delta}\Lambda_u}}\langle T_R,\ \psi\rangle = \langle T,\ \psi\rangle,\quad \forall\psi\in F_\delta^*.$$

Отсюда, учитывая сказанное ранее, получаем, что

$$\exists\lim_{\substack{R\to\infty\\ R\notin\frac{1}{\delta}\Lambda_u}}\langle T_R,\ \psi\rangle = \langle T,\ \psi\rangle,\quad \forall\psi\in C(\overline{K}_\delta).$$

Заметим, наконец, что, как следует из свойств интеграла по мере, функционал T_R как функция от R, непрерывен слева. Значит,

$$\exists\lim_{R\to\infty}\langle T_R,\ \psi\rangle,\quad \forall\psi\in C(\overline{K}_\delta).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если функция u удовлетворяет условиям теоремы 4, то для каждого конуса $K' = K^{\Gamma'}$, $\Gamma' \subset \Gamma$, такого, что $|\tau_L|(\overline{\partial K' \cap K}) = 0$, существует предел*

$$\lim_{R\to\infty} R^{-\rho-m+2}\,\tau_u(\overline{K'_{\lambda, R}}) = \tau_L(\overline{K'_1}). \tag{57}$$

Доказательство. Мера τ_L, или, что то же самое, T_u, построенная по позитивно однородным функциям L_u^* и φ, сама также является позитивно однородной, и поэтому $\forall \Gamma' \subset \Gamma$ $|\tau_L|(\Gamma') = 0$. Следовательно, равенство $|\tau_L|(\overline{\partial K' \cap K}) = 0$ равносильно равенству $|T_u|(\overline{\partial K'_1 \cap K}) = 0$ и утверждение следствия вытекает из свойства а) мер T_R.

Фигурирующий в следствии 1 предел в случае, когда $m = 2$ и $u = \ln|f(z)|$, где $f(z)$ — функция, голоморфная и в. р. р. в полуплоскости $\mathbb{C}_+$, совпадает с упоминавшейся выше аргументно-граничной плотностью. По аналогии мы назовем предел (56) конусно-граничной плотностью. Точнее, мы будем говорить, что у функции $u \in SH(K, \rho)$ существует конусно-граничная плотность относительно $\rho > \varkappa^+$, если для каждого конуса $K' = K^{\Gamma'}$, $\Gamma' \subset \Gamma$, такого, что $|\tau_L|(\overline{\partial K' \cap K}) = 0$, существует предел (57). Таким образом, из теоремы 3 и следствия 1 вытекает, что у функции в. р. р. относительно порядка $\rho > \varkappa^+$ существует конусно-граничная плотность.

3. Слабая сходимость на Γ. С помощью теоремы 4 можно показать, что указанная в теореме 3 слабая сходимость в K функций $t^{-\rho}u(tx)$, $t \to \infty$, влечет за собой слабую сходимость этих же функций на Γ.

Теорема 5. *Пусть функция u удовлетворяет условиям теоремы 4. Тогда*

а) существует предел

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ R\notin\Lambda_u}} R^{-\rho-m+1}\int_{\Gamma_R} u(x)\,\varphi(x)\,\eta\left(\frac{x}{|x|}\right) dS_R = \int_{\Gamma_1} \eta(x)\,\varphi(x)\,L_u^*(x)\,dS_1, \qquad \forall \eta \in C(\overline{\Gamma}_1);$$

б) существует предел

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ R\notin\Lambda_u}} R^{-\rho-m+2} Q\left(\eta\left(\frac{x}{|x|}\right),\ R,\ u\right) = \rho\int_{\Gamma_1} \eta(x)\,\varphi(x)\,L_u^*(x)\,dS_1, \quad \forall \eta \in C^2(\overline{\Gamma}_1), \quad \left.\frac{\partial\eta}{\partial n}\right|_{\partial\Gamma_1} = 0.$$

Доказательство. Пусть функция $\eta \in C^2(\overline{\Gamma}_1)$, $\left.\frac{\partial\eta}{\partial n}\right|_{\partial\Gamma_1} = 0$, $\lambda \notin \Lambda_u$, и пусть функция $\gamma(t) \in C^\infty([0, 1])$ такова, что $\operatorname{supp}\gamma \subset\subset (0, \infty)$, $\gamma(1) = 0$, $\gamma'(1) = 1$. Положим $\psi(x) = \eta\left(\frac{x}{|x|}\right)\gamma(|x|)$ и применим к ψ

функционал T_R, считая, что $R \notin \Lambda_u$ а $\delta = 1$. Согласно лемме 6, учитывая определение функции ψ, имеем

$$\langle T_R, \psi\rangle = R^{-\rho-m+2} \int\limits_{\overline{K}_{\lambda, R}} \psi\left(\frac{x}{R}\right) d\tau_u =$$

$$= \frac{R^{-\rho-m+2}}{\theta_m} \int\limits_{K_{\lambda, R}} u(x)\, \Delta\left(\psi\left(\frac{x}{R}\right)\varphi(x)\right) d\omega -$$

$$- \frac{R^{-\rho-m+1}}{\theta_m} \int\limits_{\Gamma_R} u(x)\,\varphi(x)\,\eta\left(\frac{x}{|x|}\right) dS_R. \tag{58}$$

Далее, поскольку по условию теоремы функция u имеет вполне регулярный рост, то, согласно теоремам 3 и 4, существует предел

$$\lim_{R\to\infty} \langle T_R, \psi\rangle = \langle T, \psi\rangle = \int\limits_{\overline{K}_1} \psi d\tau_L, \tag{59}$$

а согласно теореме 3, существует предел

$$\lim_{R\to\infty} R^{-\rho-m+2} \int\limits_{K_{\lambda, R}} u(x)\, \Delta\left(\psi\left(\frac{x}{R}\right)\varphi(x)\right) d\omega = \int\limits_{K_1} L_u^* \Delta(\psi\varphi)\, d\omega.$$

Преобразуя последний интеграл с помощью леммы 7, заключаем, что

$$\lim_{R\to\infty} R^{-\rho-m+2} \int\limits_{\Gamma_R} u(x)\, \Delta\left(\psi\left(\frac{x}{R}\right)\varphi(x)\right) d\omega =$$

$$= \theta_m \int\limits_{\overline{K}_1} \psi d\tau_L + \int\limits_{\Gamma_1} L_u^* \varphi\eta dS_1. \tag{60}$$

Из (58)—(60) следует, что

$$\lim_{R\to\infty} R^{-\rho-m+1} \int\limits_{\Gamma_R} u(x)\,\varphi(x)\,\eta\left(\frac{x}{|x|}\right) dS_R =$$

$$= -\theta_m \int\limits_{\overline{K}_1} \psi d\tau_L + \theta_m \int\limits_{\overline{K}_1} \psi d\tau_L + \int\limits_{\Gamma_1} L_u^* \varphi\eta dS_1 = \int\limits_{\overline{\Gamma}_1} L_u^* \varphi\eta dS_1.$$

Тем самым утверждение а) доказано для функций $\eta \in C^2(\overline{\Gamma}_1)$, $\left.\frac{\partial\eta}{\partial n}\right|_{\partial\Gamma_1} = 0$. Общий случай, т. е. случай $\eta \in C(\overline{\Gamma}_1)$, сводится к доказанному посредством равномерной аппроксимации функций $\eta \in C(\overline{\Gamma}_1)$ функциями η из $C^2(\overline{\Gamma}_1)$, удовлетворяющими условию $\left.\frac{\partial\eta}{\partial n}\right|_{\partial\Gamma_1} = 0$.

Для получения утверждения б) достаточно провести рассуждения, подобные приведенным выше, заменяя при этом функцию $\gamma(t)$ функцией $\gamma_1(t) \in C^\infty([0, 1])$, удовлетворяющей условиям $\operatorname{supp}\gamma_1 \subset\subset (0, \infty)$, $\gamma_1(1) = 1$, $\gamma_1'(1) = 0$.

Теорема доказана.

4. Конусно-граничная уравновешенность. Рассмотрим случай, когда дополнительно дано, что порядок функции совпадает с одним из чисел $\varkappa_j^+$ ($j \geqslant 2$). Этот случай соответствует случаю целого порядка для функций, голоморфных в $\mathbb{C}$ или в $\mathbb{C}_+$. Как известно [1, 5], для таких функций существования угловой плотности корней или соответственно аргументно-граничной плотности недостаточно, в отличие от случая нецелого порядка, для полной регулярности роста рассматриваемой голоморфной функции. Оказывается необходимым дополнительное условие некоторой симметрии корней или, соответственно так называемой аргументно-граничной симметрии. В рассматриваемой ситуации, т. е. для функций $u \in SH(K)$ в. р. р. относительно порядка $\rho = \varkappa_j^+$, соответствующая симметрия описывается с помощью функции $\varphi_j(x)$ — j-й собственной функции, указанной в ч. I п. 1 краевой задачи. Заметим, что при сделанных относительно конуса K предположениях функция $\varphi_j(x)$ такова, что $\forall x_0 \in \partial K \setminus \{0\}$:

$$\exists \lim_{\substack{x \to x^0 \in \partial K \setminus \{0\} \\ x \in K}} \frac{\varphi_j(x)}{\varphi(x)} = \frac{\partial \varphi_j(x^0)}{\partial n} \Big/ \frac{\partial \varphi(x^0)}{\partial n}.$$

Теорема 6. *Пусть функция u удовлетворяет условиям теоремы 3 относительно $\rho = \varkappa_j^+$ ($j \geqslant 2$) и пусть $\lambda \notin \Lambda_u$. Тогда*

$$\exists \lim_{R \to \infty} \theta_m \int\limits_{\overline{K}_{\lambda, R}} \frac{\varphi_j(x)}{\varphi(x)} |x|^{-\rho-m+2} d\tau_u = \varkappa_j^- \lambda^{\varkappa_j^- - 1} \int\limits_{\Gamma_\lambda} u\varphi_j dS_\lambda -$$

$$- \lambda^{\varkappa_j^-} Q\left(\frac{\varphi_j}{\varphi}, \lambda, u\right) + (2\rho + m - 2) \int\limits_{\Gamma_1} L_u^* \varphi_j dS_1. \qquad (61)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что, как следует из свойств интеграла по мере, доказательство равенства (61) достаточно провести при дополнительном предположении, что $R \to \infty$, не принимая значений из какого-либо счетного множества. Будем предполагать, что $R \notin \Lambda_u$. Тогда, применяя лемму 6 для $\psi(x) = |x|^{\varkappa_j^-} \varphi_j(x) / \varphi(x)$ и учитывая при этом гармоничность функции $|x|^{\varkappa_j^-} \varphi_j(x)$, получаем, что

$$\theta_m \int\limits_{\overline{K}_{\lambda, R}} \varphi_j \varphi^{-1} |x|^{\varkappa_j^-} d\tau_u = \int\limits_{\Gamma_\lambda} u\varphi \frac{\partial}{\partial n} [|x|^{\varkappa_j^-} \varphi_j \varphi^{-1}] dS_\lambda +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_R} u\varphi \frac{\partial}{\partial n} [|x|^{\varkappa_j^-} \varphi_j \varphi^{-1}] dS_R - Q(|x|^{\varkappa_j^-} \varphi_j \varphi^{-1}, \lambda, u) +$$

$$+ Q(|x|^{\varkappa_j^-} \varphi_j \varphi^{-1}, R, u) = \varkappa_j^- \lambda^{\varkappa_j^- - 1} \int\limits_{\Gamma_\lambda} u\varphi_j dS_\lambda -$$

$$- \varkappa_j^- R^{\varkappa_j^- - 1} \int\limits_{\Gamma_R} u\varphi_j dS_R - \lambda^{\varkappa_j^-} Q(\varphi_j \varphi^{-1}, \lambda, u) + R^{\varkappa_j^-} Q(\varphi_j \varphi^{-1}, R, u).$$

Таким образом,

$$\theta_m \int\limits_{\overline{K}_{\lambda,R}} \frac{\varphi_j}{\varphi} |x|^{-\rho-m+2} d\tau_u = \frac{\rho+m-2}{R^{\rho+m-1}} \int\limits_{\Gamma_R} u\varphi_j dS_R +$$

$$+ R^{-\rho-m+2} Q(\varphi_j\varphi^{-1}, R, u) + \varkappa_j^- \lambda^{\varkappa_j^- -1} \int\limits_{\Gamma_\lambda} u\varphi_j dS_\lambda - \lambda^{\varkappa_j^-} Q(\varphi_j\varphi^{-1}, \lambda, u). \quad (62)$$

Теперь для доказательства равенства (61) достаточно сослаться на то, что в силу теоремы 5 первое слагаемое в правой части равенства (62) стремится при $R\to\infty$ к $(\rho+m-2)\int\limits_{\Gamma} L_u^*\varphi_j dS_1$, а второе— к $\rho\int\limits_{\Gamma_1} L_u^*\varphi_j dS_1$.

Теорема доказана.

Существование предела (61) мы будем называть условием конусно-граничной уравновешенности функции $u(x)$. Для функций, голоморфных в полуплоскости, это условие совпадает с условием аргументно-граничной симметрии [5].

5. Регулярность роста функций со сходящимися функционалами T_R. В теоремах 3, 4, 6 установлено, что полная регулярность роста функции $u\in SH(K:\rho)$ влечет специальную слабую сходимость функций $t^{-\rho}u(tx)$ на пространстве $C(\overline{K}_\delta)$ с весом $|x|^{-2}\varphi(x)$, из которой в свою очередь следует сходимость функционалов T_R, $R\to\infty$, и дополнительно, в случае $\rho\in\{\varkappa_j^+\}$, условие конусно-граничной уравновешенности. Следующая ниже теорема показывает, что и наоборот, сходимость функционалов T_R и наличие конусно-граничной уравновешенности влекут за собой регулярность роста исходной функции.

Теорема 7. *Пусть функция* $u\in SH(K;\rho)$, $\rho>\varkappa^+$, *и* $\forall\psi\in C(\overline{K}_1)$ $\exists\lim\limits_{R\to\infty}\langle T_R, \psi\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle\tilde{T}, \psi\rangle$, *а кроме того, если* $\rho=\varkappa_q^+$, $q\geqslant 2$,

$$\exists\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\overline{K}_{\lambda,R}} \varphi_q\varphi^{-1}|x|^{-\rho-m+2}d\tau_u.$$

Тогда функция u является функцией в. р. р. в K и $\tilde{T}=T$.

Доказательство этой теоремы опирается на следующие леммы.

Лемма 9*. *Пусть функция* $u\in SH(K;\rho)$, $\varkappa_q^+<\rho<\varkappa_{q+1}^+$, *и пусть* $\forall\psi\in C(\overline{K}_1)$ $\exists\lim\limits_{R\to\infty}\langle T_R, \psi\rangle=\langle\tilde{T}, \psi\rangle$. *Тогда* $\forall\psi\in C(\overline{K}_1)$ *и* $0<\lambda<1$

$$\exists\lim_{t\to\infty}\int\limits_{K_1} v_{\lambda,t}(x)\,\psi(x)\,|x|^{-2}\varphi(x)\,d\omega \overset{\text{def}}{=} \langle\tilde{L}, \psi\rangle,$$

где функция $v_{\lambda,t}$ определяется по функции u так же, как в теореме 3.

* Доказательство близкого утверждения для функций, субгармонических в полуплоскости, содержится в [13].

Доказательство. В силу оценок теоремы 1 доказательство данного утверждения сводится, как и доказательство теоремы 3, к установлению того, что $\forall K' = K^{\Gamma'}$, $\Gamma' \subset\subset \Gamma$, $\forall \psi \in C(\overline{K}'_{\lambda,1})$,

$$\exists \lim_{t\to\infty} \int_{K'_{\lambda,1}} t^{-\rho} u(tx)\, \psi(x)\, d\omega.$$

Для функции $u_t(x) \overset{\text{def}}{=} t^{-\rho} u(tx)$ запишем представление, вытекающее из (46). Считая $\frac{\lambda}{2} \notin \Lambda_u$, что, очевидно, не нарушает общности, имеем

$$u_t(x) = t^{-\rho} \int_{\overline{K}_{\lambda/2,\,\infty}} W_q(tx,\ y)\, d\tau(y) + t^{-\rho} v(tx) + \\ + t^{-\rho} \sum_{n=1}^{q} c_n\, |tx|^{\overset{+}{\varkappa}_n} \varphi_n(x).$$

Следовательно,

$$\int_{K'_{\lambda,1}} \psi u_t d\omega = t^{-\rho} \int_{K'_{\lambda,1}} \psi(x) \int_{\overline{K}_{\lambda/2,\,\infty}} W_q(tx,\ y)\, d\tau(y)\, d\omega(x) + \\ + t^{-\rho} \int_{K'_{\lambda,1}} \psi(x)\, v(tx)\, d\omega + t^{-\rho} \int_{K'_{\lambda,1}} \psi(x) \sum_{n=1}^{q} c_n\, |tx|^{\overset{+}{\varkappa}_n} \varphi_n(x)\, d\omega = \\ = A_1(t) + A_2(t) + A_3(t). \tag{63}$$

Исследуем поведение при $t \to \infty$ каждого из слагаемых A_j. Поскольку $\rho > \varkappa_q^+$, то очевидно, что $\lim_{t\to\infty} A_3(t) = 0$. В силу теоремы 2 $\lim_{t\to\infty} A_2(t) = 0$. Для исследования слагаемого $A_1(t)$ вначале преобразуем его к виду

$$A_1 = t^{-\rho} \int_{K'_{\lambda,1}} \psi(x) \int_{\overline{K}_{\lambda/2,\,\delta t}} W_q(tx,\ y)\, d\tau(y)\, d\omega(x) + \\ + t^{-\rho} \int_{K'_{\lambda,1}} \psi(x) \int_{\overline{K}_{\delta t,\,Nt}} W_q(tx,\ y)\, d\tau(y)\, d\omega(x) + \\ + t^{-\rho} \int_{K'_{\lambda,1}} \psi(x) \int_{\overline{K}_{Nt,\,\infty}} W_q(tx,\ y)\, d\tau(y)\, d\omega(x) = B_1 + B_2 + B_3, \tag{64}$$

где $0 < \delta < \frac{\lambda}{2} < N < \infty$. Так как $|tx| < |y|/2$ при $x \in K'_{\lambda,1}$, $y \in \overline{K}_{Nt,\infty}$, то в силу оценки (48) ядра W_q и неравенства (37) для меры $\tilde{\tau}(s) \overset{\text{def}}{=} |\tau|(\overline{K}_{\lambda,s})$, величина $|B_3|$ оценивается следующим образом:

$$|B_3| \leqslant t^{\overset{+}{\varkappa}_q+1-\rho} \|\psi\| \int_{K'_{\lambda,1}} |x|^{\overset{+}{\varkappa}_q+1} d\omega(x) \int_{\overline{K}_{Nt,\,\infty}} |y|^{\overset{-}{\varkappa}_q+1} d\,|\tau|(y) \leqslant \\ \leqslant c(\lambda)\, \|\psi\|\, t^{\overset{+}{\varkappa}_q+1-\rho} \int_{Nt}^{\infty} s^{\overset{-}{\varkappa}_q+1} d\tilde{\tau}(s) \leqslant \tilde{c}(\lambda)\, \|\psi\|\, N^{\overset{-}{\varkappa}_q+1+\rho+m-2}.$$

Заметим, что $\varkappa_{q+1}^{-}+\rho+m-2<0$. Поэтому для любого наперед заданного $\varepsilon>0$ можно выбрать N так, чтобы при всех $t>1$ была выполнена оценка $|B_3|<\varepsilon$.

Для оценки B_1 оценим предварительно функцию

$$w_{t,\delta}(x)=t^{-\rho}\int\limits_{\overline{K}_{\lambda/2,\,\delta t}} W_q(tx,\ y)\,d\tau(y).$$

Используя определение ядра W_q и учитывая, что $\forall x\in K'_{\lambda,1}$ и $\forall y\in\overline{K}_{\lambda/2,\,\delta t}$ $|tx|>\lambda t\geqslant 2|y|$, с помощью оценок (48) (при $p=0$) и (37) получаем, что

$$|w_{t,\delta}(x)|=t^{-\rho}\left|\int\limits_{\overline{K}_{\lambda/2,\,\delta t}}\left\{\frac{G(tx,\ y)}{\varphi(y)}-\beta\sum_{j=1}^{q}|tx|^{\varkappa_j^+}|y|^{\varkappa_j^-}\frac{\varphi_j(x)\,\varphi_j(y)}{\alpha_j\varphi(x)}\right\}d\tau(y)\right|$$

$$\leqslant Ct^{-\rho}\int\limits_{\overline{K}_{\lambda/2,\,\delta t}}[\,|y|^{\varkappa^+}|tx|^{\varkappa^-}+|tx|^{\varkappa_q^+}|y|^{\varkappa_q^-}]\,d|\tau|(y)\leqslant$$

$$\leqslant Ct^{\varkappa^- -\rho}|x|^{\varkappa^-}(\delta t)^{\rho+m-2+\varkappa^+}+Ct^{\varkappa_q^+-\rho}|x|^{\varkappa_q^+}(\delta t)^{\rho+m-2+\varkappa_q^-}\leqslant$$

$$\leqslant C(|x|^{\varkappa^-}+|x|^{\varkappa_q^+})\,\delta^{\rho-\varkappa_q^+}.$$

Из этого неравенства следует, что при достаточно малом $\delta>0$ и всех $t>\lambda/\delta$

$$|B_3|\leqslant\|\psi\|\int\limits_{K'_{\lambda,1}}|w_{t,\delta}|\,d\omega\leqslant D\varepsilon.$$

Исследуем теперь поведение при $t\to\infty$ слагаемого B_2. Учитывая, что $W_q(tx,\ y)=t^{-m+2}W_q\left(x,\ \frac{y}{t}\right)$, запишем B_2 в следующем виде:

$$B_2=t^{-\rho-m+2}\int\limits_{K'_{\lambda,1}}\psi(x)\int\limits_{\overline{K}_{\delta t,\,Nt}}W_q\left(x,\ \frac{y}{t}\right)d\tau(y)\,d\omega(x)=$$

$$=t^{-\rho-m+2}\int\limits_{\overline{K}_{\delta t,\,Nt}}\left\{\int\limits_{K'_{\lambda,1}}W_q\left(x,\ \frac{y}{t}\right)\psi(x)\,d\omega(x)\right\}d\tau(y). \qquad (65)$$

Далее положим $a_N(y)=\int\limits_{K'_{\lambda,1}}W_q(x,\ Ny)\,\psi(x)\,d\omega(x)$. Ясно, что $a_N(y)\in C(\tilde{K}_{\delta/N,1})$. Заметим теперь, что, как следует из (65) и определения функционалов T_R, справедливо равенство $B_2=\langle T_{Nt},\ a_N\rangle$. Согласно условию леммы

$$\forall a^*\in C(\overline{K}_1)\quad \exists\lim_{R\to\infty}\langle T_R,\ a^*\rangle=\langle\tilde{T},\ a^*\rangle.$$

Отсюда, как легко видеть, вытекает также наличие равенства

$$\lim_{R\to\infty}\langle T_R,\ a^*\chi_{\delta_1,\delta_2}\rangle=\langle\tilde{T},\ a^*\chi_{\delta_1,\delta_2}\rangle,$$

где $\chi_{\delta_1, \delta_2}$ — характеристическая функция шарового слоя $B_{\delta_2} \setminus B_{\delta_1}$, $0 < \delta_1 < \delta_2$. Взяв в этом равенстве в качестве a^* какое-либо непрерывное продолжение функции a_N и положив $\delta_1 = \frac{\delta}{N}$, $\delta_2 = 1$, получим, что

$$\exists \lim_{t \to \infty} B_2(t) = \langle \tilde{T}, a_N \rangle.$$

Из установленных свойств величин A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 немедленно следует, что $\forall \psi \in C(\overline{K}'_{\lambda, 1})$ существует

$$\lim_{t \to \infty} \int_{K'_{\lambda, 1}} u_t \psi d\omega.$$

Лемма 10. *Пусть функция* $u \in SH(K; \rho)$, $\varkappa^+_{q-l-1} < \varkappa^+_{q-l} = \dots$ $\dots = \varkappa^+_q = \rho < \varkappa^+_{q+1}$, *и пусть существуют пределы*

$$\lim_{R \to \infty} \langle T_R, \psi \rangle = \langle \tilde{T}, \psi \rangle, \ \forall \psi \in C(\overline{K}_1)$$

и

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\overline{K}_{\lambda, R}} \varphi_{q-j} \varphi^{-1} |x|^{-\rho-m+2} d\tau_u, \quad j = 0, \dots, l. \tag{66}$$

Тогда $\forall \psi \in C(\overline{K}_1)$

$$\exists \lim_{t \to \infty} \int_{K_1} v_{\lambda, t}(x) \psi(x) |x|^{-2} \varphi(x) d\omega \overset{\text{def}}{=} \langle \tilde{L}, \psi \rangle.$$

Доказательство. Так же, как и при доказательстве леммы 9, достаточно установить существование предела

$$\lim_{t \to \infty} \int_{K'_{\lambda, 1}} u_t \psi d\omega, \ \forall K' = K^{\Gamma'}, \ \Gamma' \subset\subset \Gamma, \ \forall \psi \in C(\overline{K'_{\lambda, 1}}). \tag{67}$$

Воспользуемся равенствами (63) и (64). При доказательстве леммы 9 было установлено, что в условиях этой леммы

$$\lim_{t \to \infty} A_2 = 0, \ \lim_{t \to \infty} B_2 = \langle \tilde{T}, a_N \rangle, \ B_3 \to 0$$

при $N \to \infty$ равномерно относительно $t > 1$. При этом использовалось по существу не то, что порядок $\rho \notin \{\varkappa^+_n\}$, а неравенство $\rho < \varkappa^+_{q+1}$. Это неравенство выполнено и в условиях доказываемой леммы и, следовательно, в рассматриваемом здесь случае указанные соотношения также имеют место. Далее, очевидно, что

$$\exists \lim_{t \to \infty} A_3 = c_n \int_{K'_{\lambda, 1}} \psi |x|^{\varkappa^+_q} \varphi_q d\omega.$$

Рассмотрим теперь слагаемое B_1. Имеем

$$B_1 = t^{-\rho} \int_{K'_{\lambda, 1}} \psi(x) \int_{\overline{K}_{\lambda/2, \delta t}} W_q(tx, y) d\tau(y) d\omega(x) =$$

$$= t^{-\rho} \int_{K'_{\lambda, 1}} \psi(x) \Bigg[\int_{\overline{K}_{\lambda/2, \delta t}} W_{q-l-1}(tx, y) d\tau(y) +$$

$$+\beta\sum_{j=0}^{l}\int\limits_{\overline{K}_{\lambda/2,\ \delta t}}|tx|^{\varkappa_q^+}|y|^{\varkappa_q^-}\frac{\varphi_{q-j}(x)\,\varphi_{q-j}(y)}{\alpha_q\varphi(y)}\,d\tau(y)\Bigg]d\omega(x)=$$

$$=t^{-\rho}\int\limits_{K'_{\lambda,1}}\psi(x)\int\limits_{\overline{K}_{\lambda/2,\ \delta t}}W_{q-l-1}(tx,y)\,d\tau(y)\,d\omega(x)+$$

$$+t^{-\rho}\beta\sum_{j=0}^{l}\int\limits_{K'_{\lambda,1}}\psi(x)|x|^{\varkappa_q^+}\frac{\varphi_{q-j}(x)}{\alpha_q}d\omega(x)\int\limits_{\overline{K}_{\lambda/2,\ \delta t}}|y|^{\varkappa_q^-}\frac{\varphi_{q-j}(y)}{\varphi(y)}\,d\tau(y)=$$

$$=B_{1,1}(t)+B_{1,2}(t).$$

Поскольку $\rho=\varkappa_q^+>\varkappa_{q-l-1}^+$, то, как и при доказательстве леммы 9, заключаем, что $\sup\limits_{t>\lambda/2\delta}|B_{1,1}(t)|\to 0$ при $\delta\to 0$. Наконец, наличие конусно-граничной уравновешенности, т. е. существование пределов (65), влечет за собой существование предела $\lim\limits_{t\to\infty}B_{1,2}(t)$ (напомним, что в нашем случае $\varkappa_q^-=-\rho-m+2$).

Из указанных свойств величин A_j, B_j и $B_{i,j}$ получаем выполнение соотношения (67). Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть функция $u\in SH(K;\rho)$ и пусть функции u_t при $t\to\infty$ сходятся в $D'(K)$ к обобщенной функции $\tilde{L}$. Тогда* $\tilde{L}=L_u^*$.

Доказательство этой леммы мы опускаем, поскольку оно элементарно и мало отличается от доказательства соответствующего утверждения для функций $u(z)=\ln|f(z)|$, где $f(z)$ — голоморфная функция в полуплоскости [14].

Лемма 12. *Пусть функция $u\in SH(K;\rho)$, $\rho>\varkappa^+$, и пусть в пространстве $D'(K)$ $\exists\lim\limits_{t\to\infty}u_t=L_u^*$. Тогда функция u является функцией в. р. р. в K.*

Доказательство. Эта лемма является простым следствием теоремы 2.7.4.1 из [15, ч. 1]. Действительно, согласно этой теореме сходимость функций u_t к индикатору L_u^* в $D'(K)$ влечет за собой сходимость этих функций к L_u^* по α-мере Карлесона[1], $m-2<\alpha<m$, в любой области $G_0\subset\subset K$. Отсюда, как нетрудно видеть, при $\alpha=m-1$ следует, что в каждом конусе $K^{\Gamma'}$, $\Gamma'\subset\subset\Gamma$, функции $|x|^{-\rho}u(x)\to L_u^*\left(\frac{x}{|x|}\right)$, когда $x\to\infty$, не принимая значений из некоторого C_0-множества. Вместе с предполагаемой в условии леммы 12 нормальностью типа это означает полную регулярность роста рассматриваемой функции. Лемма доказана.

---

[1] α-мерой Карлесона множества $E\subset R^m$ называется $\inf\sum\limits_j r_j^{\alpha}$, где r_j — радиусы шаров B_j, образующих покрытие множества E, и inf берется по всем счетным покрытиям множества E.

Из приведенных лемм немедленно следует, что функция $u(x)$ из условия теоремы 7 является функцией в. р. р. в K. Тогда, согласно теореме 4, $\lim\limits_{R\to\infty} T_R = T$. Значит, $\tilde{T} = T$. Теорема доказана.

6. Правильное распределение меры τ_u. Критерии регулярности роста. Объединение теоремы 7 с теоремой 4 дает критерий полной регулярности роста в терминах распределения меры τ_u. Для краткости формулировки этого утверждения и большей ее схожести с формулировкой соответствующего критерия Левина—Пфлюгера для целых функций [1] введем следующее

Определение. *Мера τ_u, ассоциированная с функцией $u \in SH(K; \rho)$, называется правильно распределенной относительно данного порядка ρ, если при каком-либо $\lambda > 0$*

$$\forall \psi \in C(\overline{K}_1)\ \exists \lim_{R\to\infty} \langle T_R, \psi \rangle, \tag{68}$$

и дополнительно к этому, в случае $\rho \in \{\varkappa_n^+\}$ выполнено условие конусно-граничной уравновешенности, т. е. существуют пределы

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\overline{K}_{\lambda,R}} \varphi_q \varphi^{-1} |x|^{-\rho-m+2} d\tau_u$$

для всех q, таких, что $\rho = \varkappa_q^+$.

Условие (68), как нетрудно видеть, эквивалентно условию существования конусно-граничной плотности (57) (это следует, например, из теоремы 2.2.3.7 [15, ч. 1]). Таким образом, эквивалентное определение правильной распределенности меры τ_u — это существование конусно-граничной плотности и дополнительно к этому, в случае $\rho \in \{\varkappa_n^+\}$ — конусно-граничной уравновешенности.

Теперь упоминавшийся критерий полной регулярности роста может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 8. *Для того чтобы функция $u \in SH(K; \rho)$, $\rho > \varkappa^+$, была функцией в. р. р. в K, необходимо и достаточно, чтобы ассоциированная мера τ_u была правильно распределена (относительно ρ).*

Наряду с приведенным критерием полной регулярности роста в терминах меры τ_u отметим еще вытекающий из теоремы 3 и леммы 12 критерий полной регулярности роста в терминах слабой сходимости функций $u_t(x)$. Соответствующее утверждение для функций, голоморфных в C_+, произвольного положительного порядка содержится в [14].

Теорема 9. *Пусть функция $u \in SH(K; \rho)$, $\rho > \varkappa^+$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) функция u имеет в. р. р. в K;

б) в пространстве $D'(K)$ существует $\lim\limits_{t\to\infty} u_t(x)$;

в) $\forall \psi \in C(\overline{K}_r)$ при некоторых $\lambda > 0$ и $r > 0$

$$\exists \lim_{t\to\infty} \int\limits_{K_r} v_{\lambda,t}(x)\, \psi(x)\, |x|^{-2} \varphi(x)\, d\omega,$$

где $v_{\lambda,t}(x) = u_t(x)$ при $|x| > \frac{\lambda}{t}$ и $v_{\lambda,t}(x) = 0$ при $|x| \leqslant \frac{\lambda}{t}$.

В заключение отметим, что содержащееся в настоящей работе ребование $\rho > \varkappa^+$ непосредственно используется лишь при установении интегральных оценок функции $u \in SH(K; \rho)$ и ассоциированной нею меры τ_u (теорема 1). Использованный в ч. 1 метод получения тих оценок для случая $\rho \leqslant \varkappa^+$ не пригоден. Распространение полуенных результатов на случай $\rho \leqslant \varkappa^+$ проведено одним из авторов [16].

писок литературы: 12. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих еременных. М., 1971. 422 с. 13. *Файнберг Е. Д.* Оценки индикаторов специальных лассов функций, аналитических в полуплоскости. Х., 1981. 51 с. Деп. в ВИНИТИ 7.08.81, № 4167-81 Деп. 14. *Бабий В. И.* О голоморфных функциях вполне регуярного роста в полуплоскости. Х., 1986. 15 с. Деп. в УкрНИИТИ 12.07.86, № 1697-Ук86. 15. *Азарин В. С.* Теория роста субгармонических функций. Ч. 1. Х., 978. 72 с. 16. *Рашковский А. Ю.* Рост и убывание субгармонических функций конусе. Х., 1986. 20 с. Деп. в ВИНИТИ 24.11.86, № 7977-В86.

Поступила в редколлегию 12.11.90